ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЕРМИ-ДИРАКА. МЕТАЛЛЫ.

1. Цель работы: Познакомиться с функцией Ферми-Дирака и ее свойствами.

2. Теоретическая часть

Любое твердое тело является системой состоящей из огромного числа микрочастиц. Существует два способа описания состояния такой системы – *термодинамический* и *статистический.* При термодинамическом подходе тело, рассматривают как макроскопическую систему, не интересуясь теми частицами из которых она состоит. При статистическом подходе описывают поведение не отдельных микрочастиц, а устанавливают вероятностные законы, которые позволяют находить распределение микрочастиц по какому-либо параметру (например, распределение частиц по энергиям, импульсам и т.д.).

Фермионы и бозоны. По характеру поведения в коллективе все микрочастицы разделяют на две группы: *фермионы* и *бозоны*. К *фермионам* относят электроны, протоны, нейтроны и другие частицы с полуцелым спином: $\hbar/2$, $3\hbar/2$, … К *бозонам* относят фотоны, фононы и другие частицы, обладающие целочисленным спином: 0, $\hbar$, $2\hbar$… Фермионы подчиняются принципу Паули: если данное квантовое состояние уже занято фермионом, то никакой другой фермион данного типа не может находится в этом состоянии. Бозоны, напротив, обладают стремлением к «объединению». Они могут заселять одно и то же состояние.

Невырожденные и вырожденные коллективы. Пусть имеется N частиц, которые могут занять G состояний. Если $N/G<<1$, т.е. число состояний намного больше числа частиц, то такой коллектив называется *невырожденным*. Для таких систем необходимо применять *статистику Максвелла-Больцмана*. Если $N/G \approx 1$, т.е. число состояний сопоставимо с числом частиц, то такой коллектив называется *вырожденным*. Для таких систем необходимо применять *статистику Ферми-Дирака* (для фермионов) или *статистику Бозе-Эйнштейна* (для бозонов).

Функция распределения f(E). Для объяснения понятия функция распределения поставим вопрос: каким образом распределение частиц по тем или иным состояниям связано с состоянием коллектива, как целого? Для того чтобы задать *состояние системы*, например частиц газа, надо указать его *термодинамические параметры*. Чтобы задать *состояние частиц* надо указать *значение их координат и составляющих импульсов* или *энергию* частиц, которая определяется их координатами и импульсами. Связь между этими двумя типами величин осуществляет *статистическая функция распределения* $N(E)dE$, выражающая число частиц с энергией от E до $E+dE$ в системе, состояние которой описывается термодинамическими параметрами E_F и T. Такую функцию называют *полной статистической функцией распределения*. Эту функцию можно представить в виде произведения числа состояний *g(E)dE*, приходящихся на интервал энергий dE, на вероятность заполнения этих состояний частицами. Обозначим последнюю через *f(E)*. Тогда $N(E)dE = f(E)g(E)dE$. Функцию *f(E)* называют просто *функцией распределения* – она выражает вероятность заполнения частицами интервала (E, $E+dE$).

Плотность состояний g(E). В классической механике состояние частицы определяется заданием трех координат (x,y,z) и трех составляющих импульса (p_x,p_y,p_z). Представим шестимерное пространство (x,y,z,p_x,p_y,p_z). Такое пространство называют *фазовым*. Элементом фазового объема фазового пространства называют величину:

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_V \Delta\Gamma_p = dxdydzdp_x dp_y dp_z , \qquad (1)$$

здесь $\Delta\Gamma_V$ - элемент объема пространства координат, $\Delta\Gamma_p$ - элемент объема пространства импульсов. Для классических частиц элементы $\Delta\Gamma_V$ и $\Delta\Gamma_p$ могут быть сколь угодно малыми. Для квантовых микрочастиц (электрон, протон и т.д.) дело обстоит иначе. Наличие у

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЕРМИ-ДИРАКА. МЕТАЛЛЫ.

микрочастиц волновых свойств согласно *принципу неопределенности* приводит к тому, что наименьший объем фазового пространства равен h (постоянная Планка). Поэтому в квантовой статистике за элементарную ячейку шестимерного фазового пространства принимается объем:

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_V \Delta\Gamma_p = h^3, \qquad (2)$$

или $\Delta\Gamma_p = \dfrac{h^3}{V}$, так как $\Delta\Gamma_V = V$. Процесс деления фазового пространства на ячейки конечной величины называют *квантованием фазового пространства*. Можно показать, что число состояний в интервале энергий от E до $E+dE$ равно:

$$g(E)dE = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{E}dE, \qquad (3)$$

где m – масса микрочастицы.

Поделив правую и левую части на dE получим *плотность состояний g(E)*, выражающую число состояний микрочастицы, приходящиеся на единичный интервал энергий:

$$g(E) = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{E}, \qquad (4)$$

В случае *электронов* каждой фазовой ячейке отвечает два состояния, отличающихся *спиновыми* состояниями:

$$g(E) = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{E}, \qquad (5)$$

Функция распределения Ферми-Дирака f(E). Функция распределения для вырожденного газа фермионов была впервые получена итальянским физиком Ферми и английским физиком Дираком и имеет следующий вид:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}, \qquad (6)$$

здесь E_F – энергия Ферми (химический потенциал вырожденного газа Фермионов), k – постоянная Больцмана.

Из выражения (6) видно, что при $E=E_F$ функция распределения $f(E)=1/2$ при любой температуре $T \neq 0$. Поэтому со статистической точки зрения уровень Ферми представляет собой энергетический уровень, вероятность заполнения которого равна ½.

Для металлов энергия Ферми определяется выражением:

$$E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}, \qquad (7)$$

где $n=N/V$ – концентрация электронного газа в металле.

Концентрация электронов в металле определяется по формуле:

$$n = \frac{8\pi}{3h^3}E_F^{3/2}(2m)^{3/2}, \qquad (8)$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЕРМИ-ДИРАКА. МЕТАЛЛЫ.

Ниже приведены значения энергий Ферми для различных металлов.

Таблица №1

№	Металл	Энергия Ферми E_F, эВ
1	Литий	4,72
2	Натрий	3,12
3	Медь	7,1
4	Серебро	5,5

3. Порядок выполнения работы

1. В отчет о лабораторной работе включите теорию, содержащую ответы на контрольные вопросы п.4
2. Для металлов, представленных в таблице №1, определите концентрацию электронов.
3. Постройте для указанных металлов функцию распределения Ферми-Дирака *f(E)* при T=0 K.
4. Постройте для серебра семейство функций Ферми-Дирака *f(E)* при T=50, 150, 300, 1500 K.
5. Постройте для меди семейство функций Ферми-Дирака *f(E)* в интервале kT (T=300 K).
6. Составьте отчет о лабораторной работе и подготовьтесь к ее защите.

4. Контрольные вопросы

1. Что такое фермионы и бозоны?
2. Какие коллективы называют вырожденными, какие невырожденными?
3. Что такое функция распределения?
4. Что такое плотность состояний?
5. Что такое функция распределения Ферми-Дирака?
6. Как определить концентрацию электронов в металле, зная энергию Ферми?