

МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО, ПРОМЕЖУТОЧНОГО, ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ №1 – 3

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Для выполнения контрольной работы №1 студент должен освоить следующие темы рабочей программы:

- I. Введение в математический анализ: элементы теории множеств, функции одной переменной, пределы;
- II. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.
- III. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков.

ЗАДАЧА 1

1 – 10. Даны множества A и B. Найти объединение, пересечение и разность множеств A и B.

Уровень I

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $A = \{1, 5, 9, 12\}$
$B = \{0, 7, 9, 12, 17\}$ | 2. $A = \{3, -2, 4, 8\}$
$B = \{4, 5, 9, -2, 17\}$ | 3. $A = \{0, -3, 7, 11\}$
$B = \{2, 0, 11, -2, 12\}$ |
| 4. $B = \{-8, 7, 0, 5, 9\}$
$A = \{1, 5, 9, 0\}$ | 5. $B = \{14, 6, 2, -2, 4\}$
$A = \{2, 3, 5, 6\}$ | 6. $B = \{8, -3, 4, 6, 5\}$
$A = \{6, 8, 1, 0\}$ |
| 7. $B = \{-8, 7, 0, 5\}$
$A = \{3, 5, 6, 0\}$ | 8. $B = \{8, 3, 0, 6\}$
$A = \{-3, 6, 7, 0\}$ | 9. $B = \{4, 3, 11, 9\}$
$A = \{-3, 7, 6, 5\}$ |
| 10. $B = \{2, 3, 4, -3, 8\}$
$A = \{9, 0, 7, -4\}$ | | |

Уровень II

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $A = [2, +\infty)$
$B = (-\infty, 3]$ | 2. $A = [5, +\infty)$
$B = (-\infty, 6]$ | 3. $A = (4, +\infty)$
$B = (-\infty, 4]$ | 4. $A = (7, +\infty)$
$B = (-\infty, 7]$ |
| 5. $A = [-7, +\infty)$
$B = (-\infty, -7]$ | 6. $A = (-2, +\infty)$
$B = (-\infty, -3]$ | 7. $A = (-3, +\infty)$
$B = (-\infty, -2]$ | 8. $A = [1, +\infty)$
$B = (-\infty, 9]$ |
| 9. $A = (-1, +\infty)$
$B = (-\infty, 9]$ | 10. $A = (-9, +\infty)$
$B = [-\infty, 1]$ | | |

Уровень III

Доказать тождество с помощью определения равенства множеств и операций над множествами;

1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
2. $A \cap (B \cup (A \cap C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cup (B \cap (A \cup C)) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
10. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

ЗАДАЧА 2

11 – 20. Построить графики функций методом преобразования элементарных функций.

Уровень I

11. $y = x^2 + 2$
12. $y = \cos x - 1$
13. $y = \frac{1}{x} - 2$
14. $y = x + 4$
15. $y = \sin x + 1$
16. $y = e^x + 4$
17. $y = \ln x - 2$
18. $y = 2^x - 1$
19. $y = \operatorname{tg} x - 1$
20. $y = \operatorname{ctg} x + 1$

Уровень II

11. $y = (x - 1)^2 + 2$
12. $y = \cos 2x - 1$
13. $y = \frac{1}{x + 2} - 2$
14. $y = 3x + 4$
15. $y = \sin 2x + 1$
16. $y = \frac{1}{x - 3} + 2$
17. $y = -5x + 1$
18. $y = (x + 2)^2 - 2$
19. $y = \operatorname{tg} 3x - 1$
20. $y = \operatorname{ctg} 2x + 1$

Уровень III

11. $y = (3x - 1)^2 + 2$
12. $y = -\cos 2x - 1$
13. $y = \frac{1}{2x + 2} - 2$
14. $y = -e^{2x} + 4$
15. $y = -\sin 2x + 1$
16. $y = \frac{1}{2x - 3} + 2$
17. $y = -\ln 2x - 2$
18. $y = (3x + 2)^2 - 2$
19. $y = -2\operatorname{tg} 3x - 1$
20. $y = -2\operatorname{ctg} 2x + 1$

ЗАДАЧА 3

21 – 30. Найти предел числовой последовательности при $n \rightarrow \infty$.

Уровень I

21. $\frac{n}{n+2}$
22. $-\frac{n}{n+2}$
23. $1 + \frac{1}{n}$
24. $-1 + \frac{1}{2n}$
25. $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$
26. $\frac{2n}{n+1}$
27. $1 - 3n$
28. $1 + 2n$
29. $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
30. $-1 + n$

Уровень II

$$\begin{array}{lll}
21. \sqrt{n+2} - \sqrt{n-2} & 22. \sqrt{n-3} - \sqrt{n+3} & 23. \frac{(-1)^n n}{n-2} \\
24. -1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 25. 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 26. \frac{(-1)^n n}{n+1} \\
27. \sqrt{n^2+1} - n & 28. 1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 29. \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-1} \\
30. \sqrt{n^2-n+4} - \sqrt{n^2+n-1}
\end{array}$$

Уровень III

21 – 25. Дана последовательность x_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Определить номер члена последовательности n , начиная с которого величина x_n станет и будет оставаться меньше данного положительного числа ξ .

$$21. x_n = \frac{1}{3^n}; \quad 22. x_n = \frac{1}{2^n}; \quad 23. x_n = \frac{1}{4^n}; \quad 24. x_n = \frac{1}{5^n}; \quad 25. x_n = \frac{1}{6^n}.$$

26 – 30. Дана последовательность $x_n = \frac{1}{2^n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Определить номер члена последовательности n , начиная с которого величина x_n станет и будет оставаться меньше:

$$26. 0,001; \quad 27. 0,01; \quad 28. 0,1; \quad 29. 0,0001; \quad 30. 0,00001.$$

ЗАДАЧА 4

31 – 40. Найти предел последовательности, используя эквивалентности бесконечно малой и бесконечно большой величины.

Уровень I

$$\begin{array}{llll}
31. \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{\sin a_n}{3a_n} & 32. \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4a_n}{a_n^2} & 33. \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{a_n}{2}}{a_n} & 34. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n \\
35. \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2n)^{\frac{1}{n}} & 36. \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2n)^{\frac{1}{n}} & 37. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n & 38. \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{\sin 4a_n}{a_n} \\
39. \lim_{a_n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 a_n}{a_n^2}\right)^n & 40. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n
\end{array}$$

Уровень II

$$\begin{array}{lll}
31. \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{1}{a_n \operatorname{ctg} a_n} & 32. \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a_n}{2a_n^2} & 33. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\
34. \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{\sin 2a_n}{\sqrt{a_n+2} - \sqrt{2}} & 35. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n & 36. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{n+1} \\
37. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n & 38. \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{\sin 3a_n}{\sqrt{a_n+3} - \sqrt{3}} & 39. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{2n}
\end{array}$$

$$40. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n} \right)^{\frac{n}{3}}$$

Уровень III

$$\begin{array}{lll} 31. \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} a_n - \sin a_n}{3a_n^3} & 32. \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2a_n}{2a_n \sin a_n} & 33. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{3n} \\ 34. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{3^n - 4^n} & 35. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln n - \ln(n+3)) & 36. \lim_{a_n \rightarrow 0} (1 - 2a_n)^{\frac{1-a_n}{a_n}} \\ 37. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+2) - \ln n) & 38. \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a_n}{2a_n \sqrt{1+a_n} - 1} & 39. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} \\ 40. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n \end{array}$$

ЗАДАЧА 5

41-50. Найти пределы заданных функций.

Уровень I

$$\begin{array}{lll} 41. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2}{7x + 8} ; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x} ; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 + 1} . \\ 42. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x ; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x}{2x} ; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2x^2 + x} . \\ 43. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 3}{x^3 - 4} ; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x^2 - 11x} ; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{3x} . \\ 44. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{2x - 1} ; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2}{4x^2} ; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{x^2 + x} . \\ 45. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} ; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x}{x} ; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{8x - 1} . \\ 46. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} ; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x^2 - x} ; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{21}{4x} . \\ 47. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x^2 + 1} ; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x^2 + 4x} ; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{8x^3 + 3} . \\ 48. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 12}}{x^2 + 2} ; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{x} ; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^3 + x^2} . \\ 49. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin x \cos x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} ; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{-4x^2} ; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^3 - x^2} . \\ 50. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} ; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + x} ; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} . \end{array}$$

Уровень II

41. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^2 - 3}{3x^2 + x + 4}$, б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 8x + 7}$, в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 2x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$.
42. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{3x^2 + x + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{5x}$.
43. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{3x^2 + x + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{5x}$.
44. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{3x^2 + x + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$, в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4+x}{\sqrt{1-6x-5}}$.
45. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-3x-x^2}{4x^2 + 3x - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+4}}$.
46. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x+5x^3}{2+x^2-x^3}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+4}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-\sqrt{x+9}}{\sqrt{x+1}-1}$.
47. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4x - 3}{5x^2 + 3x + 4}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$, в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.
48. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 4x + 2}{3-2x+5x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2x}$.
49. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{7x^2 + x - 2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2x}$.
50. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-7x^2}{3x^2 - 4x + 5}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2x}$.

Уровень III

41. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x(x-1)})$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 7x + 12}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x}$.
42. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 9}$.
43. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1})$; б) $\lim_{x \rightarrow -4} (\frac{1}{x+4} - \frac{8}{16-x^2})$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin^2(x-2)}{x^2 - 4x + 4}$.
44. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - 2x)$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} (\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2 - 9})$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}$.
45. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^3 - 1}$.
46. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+1)} - x)$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{4\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 2x})$.
47. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x)$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \operatorname{ctg}^2 x)$.
48. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x})$; б) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 6x}$.
49. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.
50. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 2} - 3x)$; б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

ЗАДАЧА 6

51 – 60. Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их характер. Построить график функции.

Уровень I

51. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

52. $f(x) = \frac{1}{x+1}$

53. $f(x) = -\frac{3}{x}$

54. $f(x) = \frac{2}{x-4}$

55. $f(x) = \operatorname{tg} x$

56. $f(x) = \operatorname{ctg} x$

57. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

58. $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$

59. $f(x) = \frac{2}{x+2}$

60. $f(x) = -\frac{2}{x-2}$

Уровень II

51. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 3x-2, & x > 2. \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x < -2, \\ x+1, & -2 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & x \geq 0. \end{cases}$

53. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ x^2-1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1-x, & x > 1. \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} 1+2x, & x < -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2/x, & x > 1. \end{cases}$

55. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1, \\ x+2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$

56. $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \leq -1, \\ -x, & -1 < x \leq 1, \\ 2/x, & x > 1. \end{cases}$

57. $f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ -x+2, & 0 \leq x \leq 2, \\ x, & x > 2. \end{cases}$

58. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0, \\ 1-2x, & 0 < x < 2, \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases}$

59. $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 1, \\ 2x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 8-x^2, & x > 2. \end{cases}$

60. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1, \\ x^2-1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$

Уровень III

51. $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$

52. $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$

53. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

54. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$

$$55. \quad f(x) = \frac{x^2 - 36}{x - 6}$$

$$56. \quad f(x) = \frac{x - 2}{x^3 - 1}$$

$$57. \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}$$

$$58. \quad f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$$

$$59. \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$60. \quad f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Для выполнения контрольной работы №2 студент должен освоить следующие темы рабочей программы:

II. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

III. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков.

IV. Неопределенный интеграл.

V. Определенный интеграл.

ЗАДАЧА 1

61 – 70. Найти производные заданных функций.

Уровень I

$$61. \quad \text{а) } y = 3x^2 + 5^x - \sqrt{x} \quad \text{б) } y = \frac{\sin x + 1}{\cos x - 1} \quad \text{в) } y = x^2 \ln x$$

$$62. \quad \text{а) } y = 2x^5 - 3x^3 - 2\sqrt{x} + 4 \quad \text{б) } y = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} \quad \text{в) } y = x^3 e^x$$

$$63. \quad \text{а) } y = 2 \sin x + 3 \cos x \quad \text{б) } y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \quad \text{в) } y = 4x^2 3^x$$

$$64. \quad \text{а) } y = 3x^2 + 5^x - \sqrt{x} \quad \text{б) } y = \frac{\cos x + 1}{\sin x - 1} \quad \text{в) } y = 2e^x \arccos x$$

$$65. \quad \text{а) } y = 2e^x + \arcsin x + \sqrt{x} \quad \text{б) } y = \frac{\arcsin x}{\arccos x} \quad \text{в) } y = 5^x \sqrt{x}$$

$$66. \quad \text{а) } y = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x \quad \text{б) } y = \frac{e^x + 4}{2 \ln x} \quad \text{в) } y = 3e^x \arcsin x$$

$$67. \quad \text{а) } y = 4x^3 + 2x^2 + \sqrt{x} - 1 \quad \text{б) } y = \frac{4^x + 1}{4 \ln x} \quad \text{в) } y = 2e^x \operatorname{arctg} x$$

$$68. \quad \text{а) } y = x^6 + x^5 - \sqrt{x} + 2 \quad \text{б) } y = \frac{2x^2 + 1}{2^x} \quad \text{в) } y = 3 \sin x \ln x$$

$$69. \quad \text{а) } y = 3 \operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} x \quad \text{б) } y = \frac{2e^x - 4}{3 \cos x} \quad \text{в) } y = 2 \cos x \ln x$$

$$70. \quad \text{а) } y = x^5 + 6x^2 - 2\sqrt{x} + 3 \quad \text{б) } y = \frac{x^3 + 1}{\ln x} \quad \text{в) } y = \sin x \cos x + 1$$

Уровень II

$$61. \quad \text{а) } y = \arcsin 3x - \sqrt{1 - 9x^2} \quad \text{б) } y = \frac{1 + x^2}{x} \quad \text{в) } \begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = b \cdot \sin t. \end{cases}$$

62. а) $y = 2^{\sqrt{x}}$ б) $y = \frac{1 + \sin 3x}{1 - \sin 3x}$ в) $x = \ln(1 + t^2),$
 $y = t^2.$
63. а) $y = x^3 \cdot e^{3x}$ б) $y = \sqrt[3]{1 + \ln^2 x}$ в) $x = 1 - \cos 2t,$
 $y = 2 + \sin 2t.$
64. а) $y = \sqrt{1 + e^x}$ б) $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$ в) $x = \frac{1}{2}t^2,$
 $y = \frac{1}{2}t^3 + t.$
65. а) $y = e^{2x} \cdot \sin x$ б) $y = \arctg^3 x$ в) $x = \frac{1}{t},$
 $y = \frac{t-1}{t}.$
66. а) $y = (x+1)\arctg\sqrt{x}$ б) $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ в) $x = \ln(\cos t),$
 $y = \sin^2 t.$
67. а) $y = e^x \cos 3x$ б) $y = \ln^2(x^3 + 1)$ в) $x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 1,$
 $y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t}.$
68. а) $y = x^2 \ln(x^2 + 1)$ б) $y = \sqrt[4]{\operatorname{tg} 2x}$ в) $x = e^{t^2},$
 $y = t \cdot e^{t^2}.$
69. а) $y = (x+1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$ б) $y = e^{\sin^2 x}$ в) $x = \ln t,$
 $y = t + \frac{1}{t}.$
70. а) $y = \cos 2x - \frac{1}{3}\cos^3 2x$ б) $y = (x^2 + 4) \cdot e^{-x^2}$ в) $x = \frac{1}{2}t^2 + t,$
 $y = \frac{1}{3}t^3 - t.$

Уровень III

61. а) $y = \arcsin \sqrt{\ln x}$ б) $y = \frac{\sin^2 x}{e^x}$ в) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 1})$
62. а) $y = \operatorname{tg}^3(x^2 + 1)$ б) $y = e^{\sin 5x}$ в) $y = 5e^{x^2} \sin 2x$
63. а) $y = \sqrt{\sin^3 x}$ б) $y = \arctg(\cos 2x)$ в) $y = 5^{\operatorname{tg} 3x}$
64. а) $y = \arccos \frac{x+1}{x+2}$ б) $y = \sin(\ln 5x)$ в) $y = 2^{\operatorname{ctg}^2 5x}$
65. а) $y = \ln(\sin 5x)$ б) $y = \sin(e^{3x})$ в) $y = \frac{1}{\sin^3 2x}$
66. а) $y = \arcsin(\operatorname{tg} 3x)$ б) $y = \arctg \sqrt{\sin x}$ в) $y = \cos(\ln 3x)$
67. а) $y = 5^{\arcsin x}$ б) $y = \ln(\operatorname{tg} 5x)$ в) $y = e^{\cos 5x}$
68. а) $y = \ln(\sin 3x)$ б) $y = \frac{\cos 5x}{1 + \sin 2x}$ в) $y = \arctg(\sin 5x)$
69. а) $y = \arcsin(e^{3x})$ б) $y = \cos(\ln 5x)$ в) $y = \ln(\operatorname{tg} \sqrt{x})$
70. а) $y = \ln^3(\sin 2x)$ б) $y = e^{\sin^2 x}$ в) $y = \sin \sqrt{e^{5x}}$

ЗАДАЧА 2

71 – 80. Уровень I

Для заданной функции построить график и проиллюстрировать геометрический смысл дифференциала в точке $x = x_0$. Вычислить его значение в этой точке.

- | | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 71. $y = x^2 + 1,$
$x_0 = 1.$ | 72. $y = x^2 - 1,$
$x_0 = -1.$ | 73. $y = x^2,$
$x_0 = 1.$ | 74. $y = -x^2,$
$x_0 = -1.$ |
| 75. $y = -x^2 - 1,$
$x_0 = 2.$ | 76. $y = -x^2 + 1,$
$x_0 = -2.$ | 77. $y = x^2 + 2,$
$x_0 = 2.$ | 78. $y = x^2 - 2,$
$x_0 = -2.$ |
| 79. $y = -x^2 + 2,$
$x_0 = 1.$ | 80. $y = -x^2 - 2,$
$x_0 = -1.$ | | |

71 – 80. Уровень II

Вычислить приближенно $\sqrt[n]{x}$, заменяя приращение функции её дифференциалом.

71. $\sqrt[3]{130}$. 72. $\sqrt{130}$. 73. $\sqrt[4]{250}$. 74. $\sqrt{200}$. 75. $\sqrt[3]{220}$.
76. $\sqrt[4]{620}$. 77. $\sqrt{260}$. 78. $\sqrt[3]{120}$. 79. $\sqrt[4]{250}$. 80. $\sqrt{1000}$.

71 – 80. Уровень III

Заменяя полное приращение функции её дифференциалом, вычислить приближённое значение выражения.

71. $\arctg 1,05$ 72. $\cos 59^\circ$ 73. $\sin 31^\circ$ 74. $\arctg 0,98$ 75. $\tg 44^\circ$
76. $\sin 61^\circ$ 77. $\arcsin 0,54$ 78. $\cos 121^\circ$ 79. $\sin 149^\circ$ 80. $\tg 47^\circ$

ЗАДАЧА 3

81 – 90. Заданные функции исследовать методами дифференциального исчисления. Построить графики функций.

Уровень I

81. $y = 3x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ 82. $y = x^2 - \frac{x^3}{3}$
83. $y = 6x^2 + 2x^3$ 84. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$
85. $y = 8x - \frac{x^4}{4}$ 86. $y = x^3 - \frac{x^4}{4}$
87. $y = 36x(x-1)^3$ 88. $y = (x^2 - 1)^3$
89. $y = x(x-2)^2$ 90. $y = (x^2 - 2)^2$

Уровень II

81. а) $y = 3x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ б) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

82. а) $y = x^2 - \frac{x^3}{3}$ б) $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$
83. а) $y = 6x^2 + 2x^3$ б) $y = \frac{x^2-1}{x}$
84. а) $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ б) $y = \frac{x^2+4}{x}$
85. а) $y = 8x - \frac{x^4}{4}$ б) $y = x + \frac{2}{x-1}$
86. а) $y = x^3 - \frac{x^4}{4}$ б) $y = \frac{x^3}{9-x^2}$
87. а) $y = 36x(x-1)^3$ б) $y = 2x + \frac{8}{x-3}$
88. а) $y = (x^2-1)^3$ б) $y = x + \frac{x}{3x-1}$
89. а) $y = x(x-2)^2$ б) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3x}$
90. а) $y = (x^2-2)^2$ б) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

Уровень III

81. а) $y = \frac{1}{x^2} + x$ б) $y = \frac{\ln x}{x}$
82. а) $y = x \ln x$ б) $y = xe^{-x^2}$
83. а) $y = e^{\frac{1}{x}}$ б) $y = \frac{x^2+1}{x-1}$
84. а) $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ б) $y = x^2 e^{-x^2}$
85. а) $y = \frac{1+\ln x}{x}$ б) $y = \frac{x^2}{x^2-9}$
86. а) $y = x^3 - \frac{x^4}{4}$ б) $y = \frac{x^3}{9-x^2}$
87. а) $y = \frac{x-1}{x^2-4}$ б) $y = xe^{-x}$
88. а) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ б) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$
89. а) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ б) $y = \frac{\ln x}{x^2}$
90. а) $y = \frac{x^2+1}{x}$ б) $y = x^2 \ln x$

ЗАДАЧА 4

91 – 100. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

Уровень I

- | | | |
|--|--|--------------------------------|
| 91. a) $\int (x^5 + 6x^2 - 2\sqrt{x} + 3)dx$ | б) $\int \frac{x dx}{4x^2 + 1}$ | в) $\int 2x \cos x dx$ |
| 92. a) $\int (4x^3 + 2x^2 + \sqrt{x} - 1)dx$ | б) $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}$ | в) $\int 3x \sin x dx$ |
| 93. a) $\int (x^6 + x^5 - \sqrt{x} + 2)dx$ | б) $\int \frac{x dx}{2x^2 + 3}$ | в) $\int (5x + 6) \cos x dx$ |
| 94. a) $\int (3x^2 + \frac{4}{x} + \cos x + 1)dx$ | б) $\int \frac{4x dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$ | в) $\int -2xe^x dx$ |
| 95. a) $\int (4x^5 + e^x + \frac{3}{x^2 + 4})dx$ | б) $\int \sin x \cos x dx$ | в) $\int x \ln(x - 1) dx$ |
| 96. a) $\int (2x^3 + 5^x + 5)dx$ | б) $\int -\frac{\ln x}{x} dx$ | в) $\int (6x + 5) \sin x dx$ |
| 97. a) $\int (3e^x + \frac{2}{\cos x} + \frac{2}{\sin x} + 1)dx$ | б) $\int \frac{x dx}{x^2 - 4}$ | в) $\int \frac{1}{2} x e^x dx$ |
| 98. a) $\int (x^2 + 2x + 4 + \sin x)dx$ | б) $\int 2 \sin^2 x \cos x dx$ | в) $\int x^2 \ln x dx$ |
| 99. a) $\int (2e^x + \sqrt{x} + \frac{3}{x^2 + 9})dx$ | б) $\int \sin x \cos^2 x dx$ | в) $\int (3x + 1)e^x dx$ |
| 100. a) $\int (3 \sin x + 2 \cos x - 4\sqrt{x} + 1)dx$ | б) $\int \frac{\ln x dx}{2x}$ | в) $\int 3x^2 e^x dx$ |

Уровень II

- | | | |
|---|--|--------------------------------------|
| 91. a) $\int x(x+1)(x+2)dx$ | б) $\int \frac{x dx}{x^2 - 5}$ | в) $\int x \cos 3x dx$ |
| 92. a) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)dx$ | б) $\int \frac{3x^2 dx}{1 + x^6}$ | в) $\int x \cdot 2^{-x} dx$ |
| 93. a) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$ | б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x - 2}}$ | в) $\int x^3 \ln x dx$ |
| 94. a) $\int (1 - \sqrt[3]{x^2})^3 dx$ | б) $\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$ | в) $\int x^2 \ln x dx$ |
| 95. a) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ | б) $\int x 7^{x^2} dx$ | в) $\int \arccos 2x dx$ |
| 96. a) $\int \frac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ | б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 1}$ | в) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$ |
| 97. a) $\int (1 + 2x^3)^2 dx$ | б) $\int \frac{x dx}{2x^2 + 3}$ | в) $\int \frac{x dx}{e^x}$ |
| 98. a) $\int \frac{(1+x)^2}{x\sqrt{x}} dx$ | б) $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$ | в) $\int x e^{-2x} dx$ |
| 99. a) $\int \frac{(x - x^2)^2}{\sqrt{x}} dx$ | б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}$ | в) $\int x \sin x \cos x dx$ |
| 100. a) $\int 2^x e^x dx$ | б) $\int \frac{\operatorname{arctg}(x/2)}{4 + x^2} dx$ | в) $\int x \sin 3x dx$ |

Уровень III

91. а) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ б) $\int x e^{2x} dx$ в) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} dx$ г) $\int \frac{dx}{2 + 3 \cos x}$
92. а) $\int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$ б) $\int \sqrt{x} \ln x dx$ в) $\int \frac{x + 1}{x^2 - 4} dx$ г) $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$
93. а) $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arctg}^2 x}$ б) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$ в) $\int \frac{dx}{x^2 - x}$ г) $\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$
94. а) $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$ б) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ в) $\int \frac{dx}{(x - 1)(x - 3)}$ г) $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$
95. а) $\int \frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ б) $\int \ln^2 x dx$ в) $\int \frac{x dx}{x^2 + 7x + 12}$ г) $\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}$
96. а) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin x}}$ б) $\int \frac{x}{e^x} dx$ в) $\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ г) $\int \frac{dx}{\sin 2x}$
97. а) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$ б) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$ в) $\int \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} dx$ г) $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$
98. а) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$ б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ в) $\int \frac{x dx}{(x - 1)^2}$ г) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$
99. а) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$ б) $\int x \operatorname{arctg}(x^2 + 1) dx$ в) $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ г) $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$
100. а) $\int 2^{x^2} x dx$ б) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$ в) $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$ г) $\int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} dx$

ЗАДАЧА 5

101 – 110. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертёж.

Уровень I

101. $y = 2 - x^2$, $y = 0$. 102. $y = 2 + x^2$, $y = 4$.
103. $y = x^2$, $y = 2x$. 104. $y = -x^2$, $y = 4 - x$.
105. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$. 106. $y = \cos x$, $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
107. $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. 108. $y = \operatorname{ctg} x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
109. $y = 4 - x^4$, $y = 0$. 110. $y = 4 + x^4$, $y = 6$.

Уровень II

101. $y = x^3$, $y = 4x$. 102. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

$$103. \quad y = x^2, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 2x. \quad 104. \quad y = 2x^2, \quad y = 4\sqrt{2x}.$$

$$105. \quad y = \frac{1}{3}x^2, \quad y = 4 - \frac{2}{3}x^2. \quad 106. \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 4x^{3/2}.$$

$$107. \quad y = 3 - 2x, \quad y = x^2. \quad 108. \quad y = 2 - x^2, \quad y = x^2.$$

$$109. \quad y = \sqrt{2x}, \quad y = \frac{1}{2}x^2. \quad 110. \quad y = x^3, \quad y = -x^2.$$

Уровень III

$$101. \quad y = x^2, \quad x^2 = 4y, \quad y = 4. \quad 102. \quad y = \ln x, \quad x = 2, \quad x = 6, \quad y = 0.$$

$$103. \quad x^2 - y - 4 = 0, \quad y = 0. \quad 104. \quad y = (x - 4)^2, \quad y = 16 - x^2.$$

$$105. \quad x = \sqrt{y}, \quad x + 2y - 3 = 0. \quad 106. \quad y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x.$$

$$107. \quad xy = 2, \quad xy = 8, \quad x = 9, \quad y = 9. \quad 108. \quad y = \frac{16}{x^2}, \quad x = 2, \quad x = 4.$$

$$109. \quad y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0. \quad 110. \quad y = (x + 2)^2, \quad y = 4 - x.$$

ЗАДАЧА 6

111 – 120. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

Уровень I

$$111. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \quad 112. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad 113. \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x} \quad 114. \quad \int_{-\infty}^0 e^x dx \quad 115. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$116. \quad \int_0^{+\infty} x \cos x dx \quad 117. \quad \int_0^{+\infty} e^x dx \quad 118. \quad \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x+2} \quad 119. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2/3}} \quad 120. \quad \int_0^{+\infty} x \sin x dx$$

Уровень II

$$111. \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \quad 112. \quad \int_0^{\infty} e^{-2x} dx \quad 113. \quad \int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x} + 2}{x} dx \quad 114. \quad \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^4 + 1} \quad 115. \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$$

$$116. \quad \int_2^{\infty} (2x)^{-3} dx. \quad 117. \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} \quad 118. \quad \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx \quad 119. \quad \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad 120. \quad \int_4^{\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x^3} dx$$

Уровень III

$$111. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} \quad 112. \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} \quad 113. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1 + x^2} dx \quad 114. \quad \int_0^{+\infty} \sin x dx$$

$$\begin{array}{llll}
 115. \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx & 116. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10} & 117. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} & 118. \int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)} dx \\
 119. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx & 120. \int_1^{+\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^3}} dx & &
 \end{array}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Для выполнения контрольной работы №3 студент должен освоить следующие темы рабочей программы:

- VI. Функции нескольких переменных.
- VII. Ряды.
- VIII. Обыкновенные дифференциальные и разностные уравнения.

ЗАДАЧА 1

121 – 130. Задана функция двух переменных $Z(x, y)$.

- 121. $Z = x^2 - 2x + y^2 + 3$; а) Д: $x \geq 0, y \geq -2, x + y \leq 5$; б) $A(2, 2)$.
- 122. $Z = x^2 + y^2 - 4y + 1$; а) Д: $x \geq -1, y \geq 0, x + y \leq 4$; б) $A(1, 1)$.
- 123. $Z = x^2 + 4x + y^2 - 4$; а) Д: $x \leq 0, y \geq -1, y - x \leq 4$; б) $A(-1, 1)$.
- 124. $Z = x^2 + y^2 + 2y + 5$; а) Д: $x \geq -1, y \geq -2, x + y \leq 3$; б) $A(1, 1)$.
- 125. $Z = 2x - x^2 - y^2 + 2$; а) Д: $x \geq 0, y \geq -2, x \leq 3 - y$; б) $A(2, 1)$.
- 126. $Z = 4y - x^2 - y^2 + 1$; а) Д: $x \geq -2, y \geq 0, y \leq 4 - x$; б) $A(-2, 1)$.
- 127. $Z = x^2 + y^2 + 6$; а) Д: $y \geq -1, x + y \leq 3, 2x - y + 3 \geq 0$; б) $A(1, 1)$.
- 128. $Z = 2 - x^2 - y^2$; а) Д: $y \geq -2, y - 2x \leq 2, x + y \leq 2$; б) $A(-1, -1)$.
- 129. $Z = 4 - x^2 - y^2$; а) Д: $y \geq -1, y - x \leq 2, x + y \leq 2$; б) $A(2, -1)$.
- 130. $Z = x^2 + y^2 + 4$; а) Д: $y \geq -2, y + 2x \leq 2, y - x \leq 2$; б) $A(1, -1)$.

Уровень I

Найти:

- а) Все частные производные первого и второго порядка;
- б) Вектор $\text{grad } Z_A$ – градиент функции $Z(x, y)$ в точке А.

Уровень II

Найти:

- а) Наименьшее и наибольшее значение функции $Z(x, y)$ в ограниченной области Д;
- б) Вектор $\text{grad } Z_A$ – градиент функции $Z(x, y)$ в точке А. Область Д и вектор $\text{grad } Z_A$ изобразить на чертеже.

Уровень III

Найти:

- а) Экстремумы функции $Z(x, y)$;

б) Наименьшее и наибольшее значение функции $Z(x, y)$ в ограниченной области D ;

в) Вектор $\text{grad } Z_A$ – градиент функции $Z(x, y)$ в точке A . Область D и вектор $\text{grad } Z_A$ изобразить на чертеже.

ЗАДАЧА 2

131 – 140. Исследовать на сходимость числовой ряд.

Уровень I

131. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4(n-2)}$	132. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$	133. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^n}$	134. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{2^n}$
135. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n(n-1)}$	136. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{n^2+2}$	137. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n+3}$	138. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n(n+4)}$
139. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+2n}$	140. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+5}$		

Уровень II

131. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2^n}$	132. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n+1}$	133. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$	134. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{3^n}$
135. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$	136. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$	137. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$	138. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$
139. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n^3+1}$	140. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$		

Уровень III

131. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$	132. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$	133. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$	134. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+3^{n+1}}$
135. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+\ln n}$	136. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(n+1)^n}$	137. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$	138. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{5n+1}\right)^n$
139. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n+1}$	140. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$		

ЗАДАЧА 3

141 – 150. Найти область сходимости степенного ряда.

Уровень I

141. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n}{5^n}$	142. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+3)}$	143. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n^2}$	144. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)x^n}{n+1}$
145. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n(2n+1)}$	146. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)x^n}{n}$	147. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 7^n}{n}$	148. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$
149. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$	150. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(2n-1)}$		

Уровень II

$$\begin{array}{llll}
141. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n(2n+1)} & 142. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^{n+1}} & 143. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} & 144. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^n \\
145. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+2)} & 146. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n^3} & 147. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(2n-1)} & 148. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \\
149. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 6^n}{n} & 150. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} & &
\end{array}$$

Уровень III

$$\begin{array}{llll}
141. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n+1)^n} & 142. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{3^n}(n+1)} & 143. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)x^n}{(\sqrt{2})^n} & 144. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{5^n} \\
145. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{(n+1)!} & 146. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n}(n+1)} & 147. \sum_{n=1}^{\infty} n3^n x^n & 148. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^{n+1}} \\
149. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)!} & 150. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)x^n}{n^3+2} & &
\end{array}$$

ЗАДАЧА 4

151–160. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения первого порядка. Выполнить проверку.

Уровень I

$$\begin{array}{ll}
151. \quad xy' + y = 4x & 152. \quad y' = \frac{y}{x} + 3 \frac{x}{y} \\
153. \quad y^2 + 2x^2 = xy y' & 154. \quad y^2 - 2x^2 = xy y' \\
155. \quad xy' - 3y = 2x & 156. \quad xy' + 3y = x \\
157. \quad y^2 + x^2 = xy y' & 158. \quad y' = \frac{y+x}{x-y} \\
159. & 160. \quad xy' - 3y - x = 0
\end{array}$$

Уровень II

$$\begin{array}{ll}
151. \quad (x+2y)dx - xdy = 0 & 152. \quad xy' = 2x + y \\
153. \quad (y-2x)dx + xdy = 0. & 154. \quad xy' - 2y = x \\
155. \quad y^2 + x^2 y' = xy y' & 156. \quad xy' + y - x = 0 \\
157. \quad xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x} & 158. \quad y = x(y' - x \cos x) \\
159. \quad xy' = y - x e^{\frac{y}{x}} & 160. \quad (x-y)dx = (y-x)dy
\end{array}$$

Уровень III

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка. Выполнить проверку.

151. $(1+e^x)yy' = e^x$

152. $y' = \frac{2xy}{1-x^2}$

153. $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$

154. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$

155. $(1+x^2)y' + xy = 1$

156. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$

157. $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$

158. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

159. $xy' = y(1 + \ln \frac{y}{x})$

160. $(1-x^2)y' - xy = xy^2$

ЗАДАЧА 5

161–170. Уровень I

Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

161. $y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = \frac{1}{5}, y'(0) = 0$

162. $y'' - y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3.$

163. $y'' - 3y' - 4y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 0$

164. $y'' - 10y' + 25y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$

165. $y'' - y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

166. $y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$

167. $y'' - 2y' - 3y = 0, y(0) = \frac{5}{2}, y'(0) = 0$

168. $y'' - 3y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$

169. $y'' - 5y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = \frac{2}{25}$

170. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 4$

Уровень II

Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Выполнить проверку.

161. $y'' - 3y' + 2y = e^{4x}, y(0) = \frac{1}{5}, y'(0) = 0.$

162. $y'' - y = 2e^x, y(0) = 0, y'(0) = 3.$

163. $y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x, y(0) = 4, y'(0) = 0.$

164. $y'' - 10y' + 25y = 5(1+5x), y(0) = 1, y'(0) = 2.$

165. $y'' - y = 2(1-x), y(0) = 0, y'(0) = 1.$

166. $y'' - 2y' + y = 32e^{5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
 167. $y'' - 2y' + y = 6e^{-x}$, $y(0) = \frac{5}{2}$, $y'(0) = 0$.
 168. $y'' - 3y' = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 169. $y'' - 5y' = 2x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{2}{25}$.
 170. $y'' - 3y' + 2y = 24e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

Уровень III

Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Выполнить проверку.

161. $y'' - y = 2e^x - x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 162. $y'' + y = x \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
 163. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 164. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
 165. $y'' + 5y' + 6y = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 166. $2y'' + 5y' = x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
 167. $y'' - 7y' + 6y = e^x \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
 168. $y'' - 2y' - 8y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 169. $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 170. $y'' - y = 2e^x - x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

ЗАДАЧА 6

171–180. Уровень I

Найти общее решение линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами вида $a_1 y(i+1) + a_0 y(i) = a_i + b$. Выполнить проверку.

Номер задачи	a_1	a_0	a	b	Номер задачи	a_1	a_0	a	b
171	9	-8	6	-2	176	4	-8	2	6
172	3	-1	8	5	177	1	6	2	-3
173	2	-4	1	9	178	4	-1	5	9
174	4	8	9	-3	179	5	-4	8	1
175	8	-9	5	1	180	7	6	3	-2

171–180. Уровень II

Найти общее решение линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами вида $y(i+2) + a_1 y(i+1) + a_0 y(i) = A \cdot b^i$. Выполнить проверку.

Номер задачи	a_1	a_0	A	b	Номер задачи	a_1	a_0	A	b
171	-1	-2	10	2	176	-4	-21	5	7
172	-2	-3	9	3	177	-4	-32	4	8
173	-3	-4	8	4	178	-4	-45	3	9
174	-3	-10	7	5	179	+1	-30	2	10
175	-4	-12	6	6	180	+3	-2	3	4

Уровень III

Найти частное решение линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами вида $y(i+2) + a_1y(i+1) + a_0y(i) = i^2 + b_1i + b_2$ при начальных условиях $y(0)=1$, $y(1)=2$.

Выполнить проверку.

Номер задачи	a_1	a_0	b_1	b_2	Номер задачи	a_1	a_0	b_1	b_2
171	-7	12	-7	10	176	-7	10	-7	12
172	-5	6	-9	20	177	-9	20	-5	6
173	-8	15	-6	8	178	-8	12	-8	15
174	-6	8	-8	15	179	-7	10	-9	18
175	-5	4	-6	8	180	-5	6	-7	10