

# ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*Задание*

*к расчетно-графической работе  
"Динамика механической системы"*

РГР-4

МОСКВА 20...г.

## ЗАДАНИЕ

Расчетно – графическая работа №4 состоит из задачи по определению характера движения одного из тел заданной механической системы, двигающейся под действием сил тяжести.

Механическая система, состоящая из трех твердых однородных тел А, В и С, приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ , приложенных к их центрам масс. Нити, соединяющие тела, невесомы, нерастяжимы и расположены параллельно опорным поверхностям. Грузы скользят по шероховатой поверхности. У катящегося колеса отсутствует проскальзывание по опорной поверхности. Колеса (блоки), изображенные на схемах в виде окружности с одним радиусом, считать однородными сплошными дисками.

ДАНО:

- силы тяжести тел ( $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ );
- размеры тел  $r_1$ ,  $R_2$ ,  $r_2$ ,  $R_3$ ,  $r_3$ ;
- радиусы инерции  $\rho_2$  и  $\rho_3$  ступенчатого блока (шкива), или ступенчатого колеса (на схеме эти тела имеют две окружности);
- коэффициент трения скольжения  $f$ ;
- коэффициент трения качения  $k$ ;
- углы  $\alpha$  и  $\beta$  наклона плоскостей.

ОПРЕДЕЛИТЬ:  $\bar{\alpha}_A$  – ускорение указанной на схеме точки тела А, .

## УКАЗАНИЯ

Каждый студент получает вариант задания, соответствующий номеру схемы механической системы (Приложение 1). Необходимые для расчета цифровые данные приведены в таблице (Приложение 2). Номер строки таблицы указывается для каждой студенческой группы.

**Основные требования к оформлению задания:** - соответствуют требованиям при выполнении РГР-1 и РГР-2.

Расчетно - графическая работа №4 по динамике механической системы может быть выполнена с использованием различных методов решения по следующим разделам динамики системы курса «Теоретическая механика»:

- дифференциальные уравнения движения абсолютно твердого тела;
- принцип Даламбера;
- общее уравнение динамики;
- теорема об изменении кинетической энергии механической системы;
- уравнения Лагранжа 2-го рода.

В приведенном ниже примере выполнения задания рассмотрен метод решения с использованием теоремы об изменении кинетической энергии, что впрочем, не исключает выполнение студентом работы любым из перечисленных методов.

## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Схема механической системы задачи представлена на рис.1.

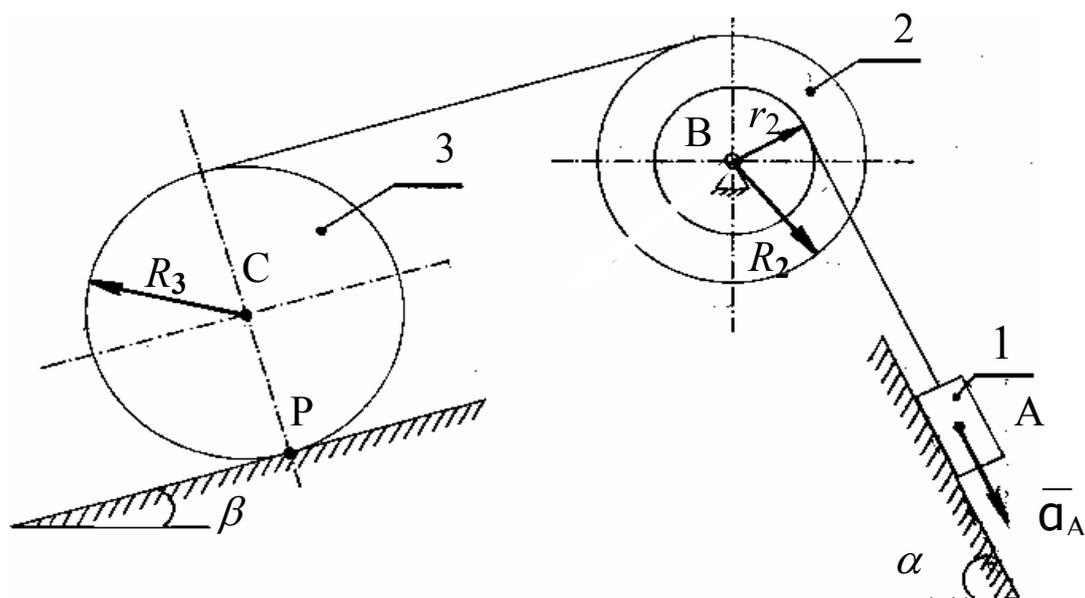


Рис.1

Исходные данные:

ДАНО:

$$G_1 = 400 \text{ Н}; G_2 = 100 \text{ Н}; G_3 = 250 \text{ Н}$$

$$r_2 = 0,15 \text{ м}; R_2 = 0,20 \text{ м}; R_3 = 0,25 \text{ м}$$

$$\alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ; \rho = 0,18 \text{ м}$$

$$f = 0,12; k = 0,0025 \text{ м.}$$

ОПРЕДЕЛИТЬ:  $a_A$

Выполнение задания будем осуществлять в следующей последовательности.

### 1. Описание движения механической системы:

- груз А (тело 1) совершает поступательное движение вниз по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту;

- ступенчатый блок В (тело 2) вращается по ходу часовой стрелки вокруг неподвижной оси, проходящей через центр симметрии тела;
- колесо С (тело 3) движется плоскопараллельно, причем в точке касания Р отсутствует проскальзывание ( $V_P = 0$ ), т.е. точка Р является мгновенным центром скоростей колеса 3. Центр колеса перемещается вверх по наклонной плоскости с углом наклона  $\beta$  к горизонту, при этом колесо поворачивается по ходу часовой стрелки

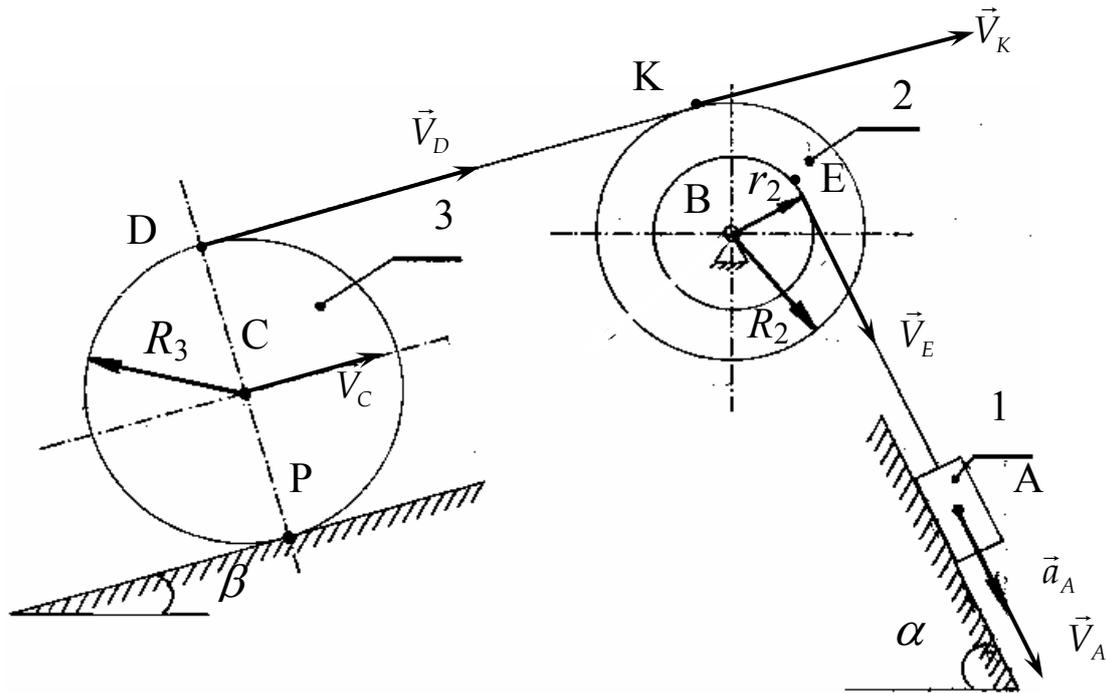


Рис.2.

## 2. Установление выражений для связей, действующих между отдельными телами механической системы.

Поскольку цель задания заключается в оценке величины ускорения точки А тела 1, кинематические параметры всех тел механической системы сведем к движению этой точки. Введем дополнительные обозначения для точек сопряжения связей между телами системы: точки Е и К в теле 2, точка D в теле 3.

Тогда угловая скорость вращения тела 2:  $\omega_2 = \frac{V_E}{BE}$ , а учитывая, что точка Е лежит на окружности радиуса  $r_2$ , а нить АЕ нерастяжима  $V_E = V_A$ , (рис.2), то:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{r_2}. \quad (1)$$

Скорость точки К, лежащей на окружности радиуса  $R_2$ , равна  $V_K = \omega_2 R_2 = \omega_2 R_2$ . В силу нерастяжимости нити КД  $V_D = V_K = \omega_2 R_2$ .

Угловая скорость колеса 3 определяется через отношение скорости точки D к расстоянию от нее до м.ц.с. (т. P):  $\omega_3 = \frac{V_D}{DP} = \frac{\omega_2 R_2}{2R_3}$ . Подставляя (1), получим:

$$\omega_3 = \frac{R_2}{2r_2 R_3} V_A. \quad (2)$$

Скорость центра колеса 3 (т.С) определим через расстояние до м.ц.с. (т. P)  $V_C = \omega_3 R_3$ , а используя соотношение (2):

$$V_C = \frac{R_2}{2r_2} V_A. \quad (3)$$

Полученные соотношения (1) - (3) отражают кинематические связи, действующие между телами данной механической системы. Поскольку связи простые, голономные, их можно путем интегрирования, можно получить и геометрические связи. Перепишем выражения (1) - (3) в дифференциальной форме:

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{1}{r_2} \frac{ds_A}{dt}, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{R_2}{2r_2 R_3} \frac{ds_A}{dt}, \quad \frac{ds_C}{dt} = \frac{R_2}{2r_2} \frac{ds_A}{dt}.$$

После сокращения получим искомые выражения для действующих в системе геометрических связей:

$$d\varphi_2 = \frac{1}{r_2} ds_A \quad (4)$$

$$d\varphi_3 = \frac{R_2}{2r_2 R_3} ds_A \quad (5)$$

$$ds_C = \frac{R_2}{2r_2} ds_A \quad (6)$$

Направления рассмотренных кинематических и геометрических параметров системы показаны на рисунке 3.

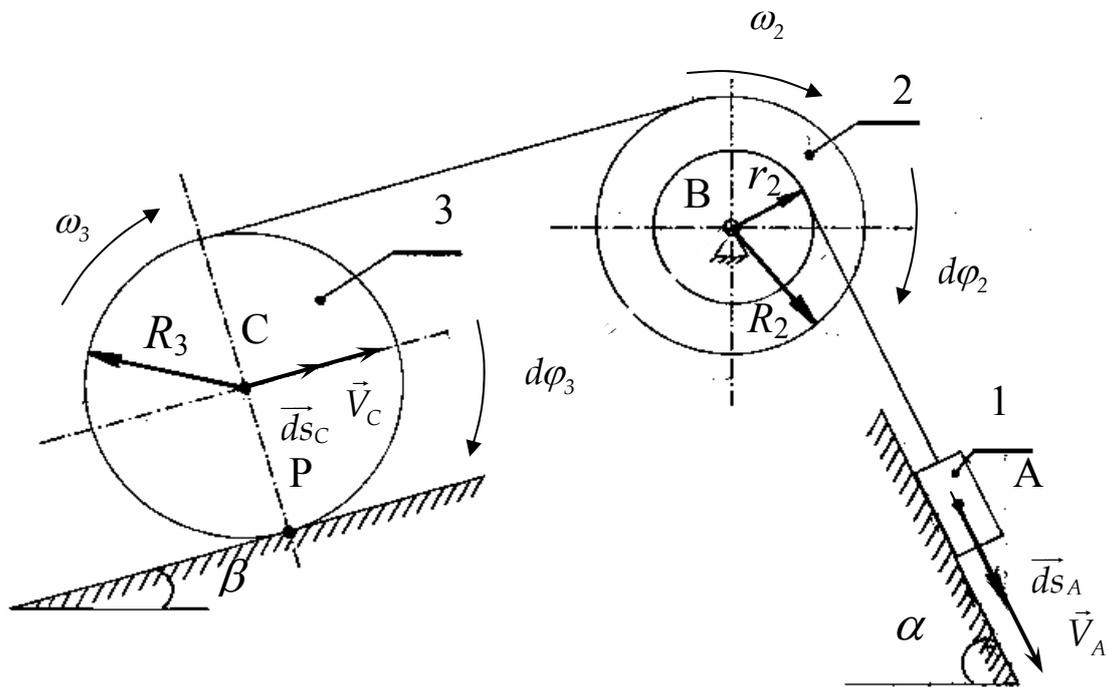


Рис.3.

### 3. Оценка кинетической энергии механической системы

Кинетическая энергия системы есть совокупность энергий движения всех ее элементов:

$$T = T_1^{пост} + T_2^{бp} + T_3^{пост} + T_3^{бp}, \quad (7)$$

где кинетическая энергия поступательно движущегося 1-го тела определяется известным выражением

$$T_1^{пост} = \frac{1}{2} m_1 V_A^2, \quad (8)$$

кинетическая энергия вращающегося блока 2 определяется по формуле

$$T_2^{бp} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2, \quad (9)$$

поступательная составляющая кинетической энергии колеса 3 имеет вид

$$T_3^{пост} = \frac{1}{2} m_3 V_C^2, \quad (10)$$

и, наконец, вращательная составляющая кинетической энергии колеса 3 определяется по формуле

$$T_3^{бp} = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \quad (11)$$

Осевые моменты инерции ступенчатого блока 2 и однородного сплошного диска колеса 1 оцениваются выражениями, соответственно

$$J_2 = m_2 \rho_2^2, \text{ и } J_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \quad (12)$$

Подставив (12) в (9) и (11), а (8) – (11) в (7), с учетом связи между массой тел и его силой тяжести ( $m = \frac{G}{g}$ , где  $g=9,8 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения) получим:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 V_A^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} V_A^2 + \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} \rho_2^2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} \frac{G_3}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{G_3}{g} R_3^2 \omega_3^2 = \\ &= \frac{1}{2g} (G_1 V_A^2 + G_2 \rho_2^2 \omega_2^2 + G_3 V_C^2 + \frac{1}{2} G_3 R_3^2 \omega_3^2) \end{aligned} \quad (13)$$

Далее следует поставить в (13) выражения для кинематических связей (1)–(3), чтобы привести кинетическую энергию к зависимости от скорости т.А:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2g} (G_1 V_A^2 + G_2 \rho_2^2 \omega_2^2 + G_3 V_C^2 + \frac{1}{2} G_3 R_3^2 \omega_3^2) = \\ &= \frac{1}{2g} (G_1 V_A^2 + G_2 \rho_2^2 \frac{V_A^2}{r_2^2} + G_3 \frac{R_2^2}{4r_2^2} V_A^2 + \frac{1}{2} G_3 R_3^2 \frac{R_2^2}{4r_2^2 R_3^2} V_A^2) \end{aligned}$$

Вынеся за скобки квадрат скорости  $V_A^2$ , сократив в последнем слагаемом  $R_3^2$ , и сложив два последних подобных члена, окончательно получим:

$$T = \frac{1}{2g} (G_1 + \frac{\rho_2^2}{r_2^2} G_2 + \frac{3}{8} \frac{R_2^2}{r_2^2} G_3) V_A^2 \quad (14)$$

#### 4. Оценка сил, действующих в механической системе

Приложим силы, действующие на тела механической системы (рис.4).

Это сила тяжести  $\vec{G}_1$  тела 1 с компонентами  $\vec{G}_1'$  и  $\vec{G}_1''$ , а также силы тяжести блока 2 ( $\vec{G}_2$ ) и колеса 3 ( $\vec{G}_3$ ).

Это силы реакции со стороны опор у тела 1 ( $\vec{N}_1$ ) и колеса 3 ( $\vec{N}_3$ ), а также компоненты реакции шарнира на оси блока 3 ( $\vec{Q}_1$  и  $\vec{Q}_2$ ).

Это силы трения тела 1 ( $\vec{F}_{mp1}$ ) и колеса 3 ( $\vec{F}_{mp3}$ ), и, наконец, момент сопротивления качению  $M_{mp}$  колеса 3.

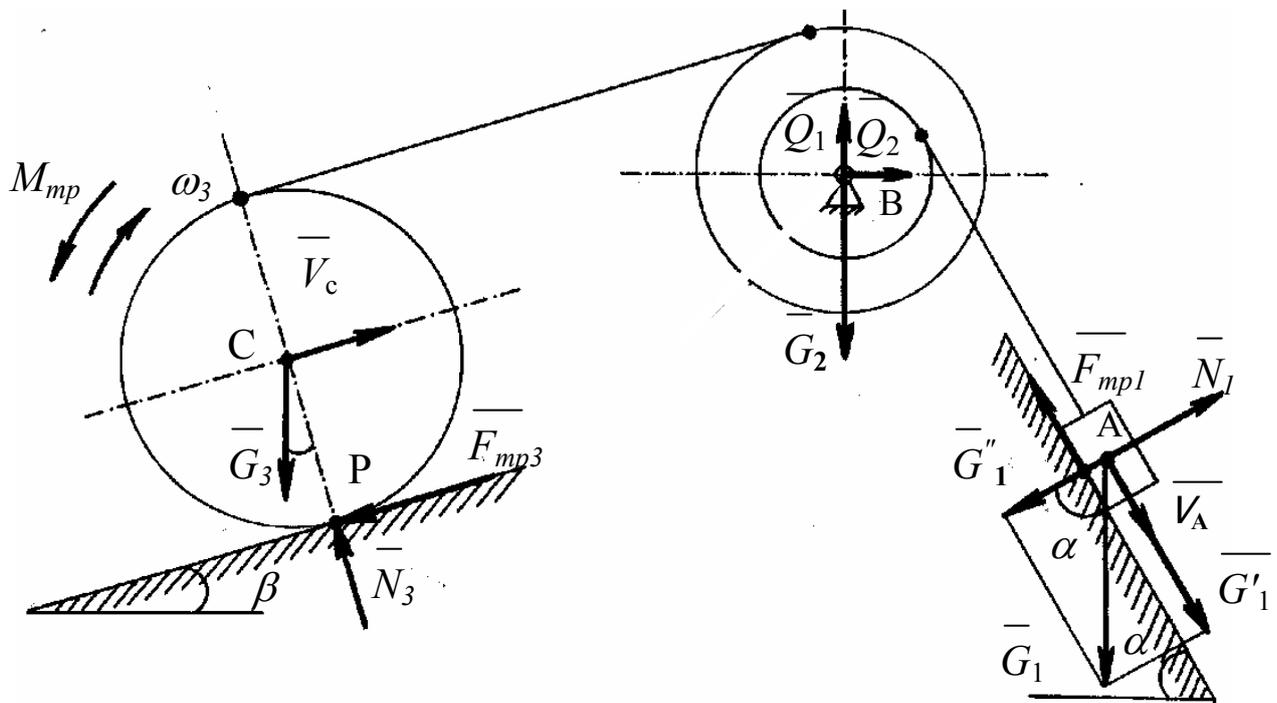


Рис. 4

Направления соответствующих силовых факторов показаны на рис. 4. Внутренние силы, а также силы, действующие по внутренним связям, на рисунке не показаны – в задаче считается, что система неизменяема, обладает идеальными связями, работа которых в сумме дает нулю (т.е. их можно не учитывать).

Нормальные реакции оцениваются по условию отсутствия движения вдоль нормали к поверхности и выражаются формулами:

$$N_1 = G_1 \cos \alpha, \quad N_3 = G_3 \cos \beta. \quad (15)$$

Сила трения скольжения тела 1 определяется законом Кулона:

$$F_{mp1} = fN_1 = fG_1 \cos \alpha. \quad (16)$$

Момент сопротивления качению  $M_{mp}$  у колеса 3 определяется выражением:

$$M_{mp} = kN_3 = kG_3 \cos \beta. \quad (17)$$

## 5. Элементарная работа сил системы

Необходимо отметить, что работы неподвижных сил ( $\vec{G}_2, \vec{Q}_1$  и  $\vec{Q}_2$ ) и силы трения покоя  $\vec{F}_{mp3}$  у колеса 3 равны нулю (по определению элементарной работы силы  $dA = \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ). Работы нормальных сил реакций тела 1 ( $\vec{N}_1$ ) и колеса 3 ( $\vec{N}_3$ ) также равны нулю в силу их ортогональности к своим элементарным перемещениям.

Как отмечалось, система неизменяемая и обладает идеальными связями, откуда сумма работ всех внутренних сил равна нулю:  $dA_k^i = 0$ .

Сформулируем выражение для оценки элементарной работы всех остальных внешних сил системы в виде

$$\sum dA_k^e = dA(\vec{G}_1) + dA(\vec{G}_3) + dA(\vec{F}_{mp1}) + dA(M_{mp}) \quad (18)$$

Найдем значение каждой из этих работ:

$$\begin{aligned} dA(\vec{G}_1) &= \vec{G}_1 \cdot \vec{ds}_A = G_1 ds_A \cos(90^\circ - \alpha) = G_1 ds_A \sin \alpha; \\ dA(\vec{G}_3) &= \vec{G}_3 \cdot \vec{ds}_C = G_3 ds_C \cos(90^\circ + \beta) = -G_3 ds_C \sin \beta; \\ dA(\vec{F}_{mp1}) &= \vec{F}_{mp1} \cdot \vec{ds}_A = F_{mp1} ds_A \cos 180^\circ = -F_{mp1} ds_A; \\ dA(M_{mp}) &= -M_{mp} d\varphi_3. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами (4) – (6) для геометрических связей и выражениями (16) и (17). Тогда элементарная работа сил системы будет:

$$\begin{aligned} \sum dA_k^e &= G_1 ds_A \sin \alpha - G_3 ds_C \sin \beta - F_{mp1} ds_A - M_{mp} d\varphi_3 = \\ &= G_1 \sin \alpha \cdot ds_A - G_3 \sin \beta \frac{R_2}{2r_2} ds_A - fG_1 \cos \alpha ds_A - kG_3 \cos \beta \frac{R_2}{2r_2 R_3} ds_A \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\sum dA_k^e = \left[ G_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{R_2}{2r_2} G_3(\sin \beta + \frac{k}{R_3} \cos \beta) \right] ds_A \quad (19)$$

## 6. Использование теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальном виде

Приведем формулировку теоремы для неизменяемой системы:

$$dT = \sum_{k=1}^n dA_k^e. \quad (20)$$

Величину дифференциала кинетической энергии системы можно получить, продифференцировав (14) по скорости  $V_A$ :

$$\frac{dT}{dV_A} = T'_{V_A} = \frac{1}{g} (G_1 + \frac{\rho_2^2}{r_2^2} G_2 + \frac{3}{8} \frac{R_2^2}{r_2^2} G_3) V_A,$$

откуда:

$$dT = T'_{V_A} dV_A = \frac{1}{g} (G_1 + \frac{\rho_2^2}{r_2^2} G_2 + \frac{3}{8} \frac{R_2^2}{r_2^2} G_3) V_A dV_A \quad (21)$$

Подставим (21) и (19) в (20), учтя, что элементарное перемещение пропорционально скорости:

$$\frac{1}{g} \left( G_1 + \frac{\rho_2^2}{r_2^2} G_2 + \frac{3 R_2^2}{8 r_2^2} G_3 \right) V_A dV_A =$$

$$= \left[ G_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{R_2}{2 r_2} G_3 \left( \sin \beta + \frac{k}{R_3} \cos \beta \right) \right] V_A dt$$

Сокращая правую и левую части на  $V_A$  и учтя равенство  $a_A = \frac{dV_A}{dt}$ , окончательно получи формулу для оценки ускорения т.А:

$$a_A = \frac{G_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{R_2}{2 r_2} G_3 \left( \sin \beta + \frac{k}{R_3} \cos \beta \right)}{G_1 + \frac{\rho_2^2}{r_2^2} G_2 + \frac{3 R_2^2}{8 r_2^2} G_3} g \quad (22)$$

## 7. Оценка численного значения ускорения

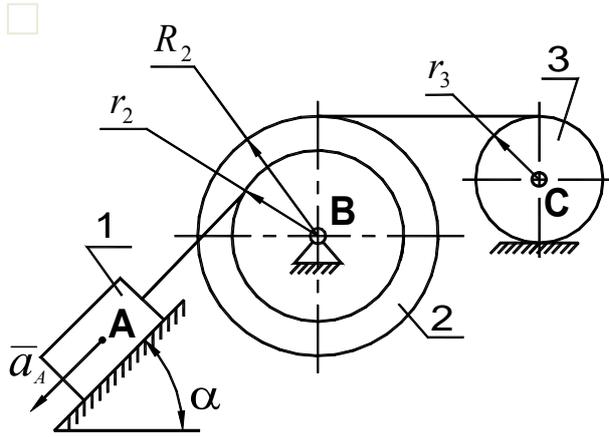
Подстановка цифровых данных задания дает следующий результат:

$$a_A = \frac{400 (\sin 60^\circ - 0,12 \cdot \cos 60^\circ) - \frac{0,20}{2 \cdot 0,15} 250 \left( \sin 30^\circ + \frac{0,0025}{0,25} \cos 30^\circ \right)}{400 + \frac{0,18^2}{0,15^2} 100 + \frac{3 \cdot 0,2^2}{8 \cdot 0,15^2} 250} g = 3,58 \text{ м/с}^2$$

## 8. Ответ

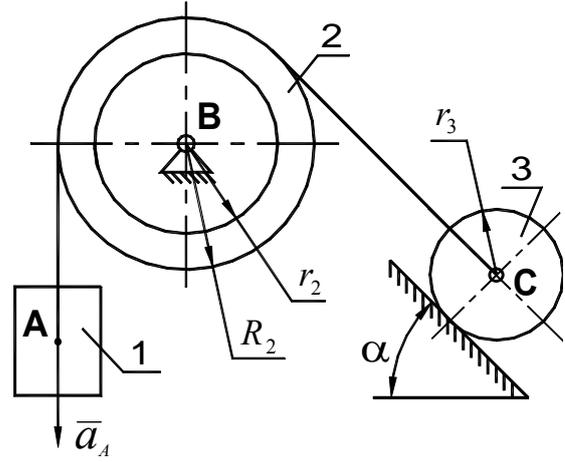
Ускорение т.А груза равно  $a_A = 3,58 \text{ м/с}^2$

1

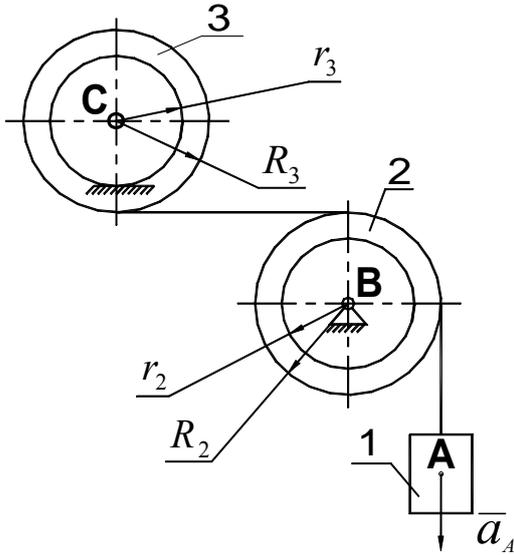


2

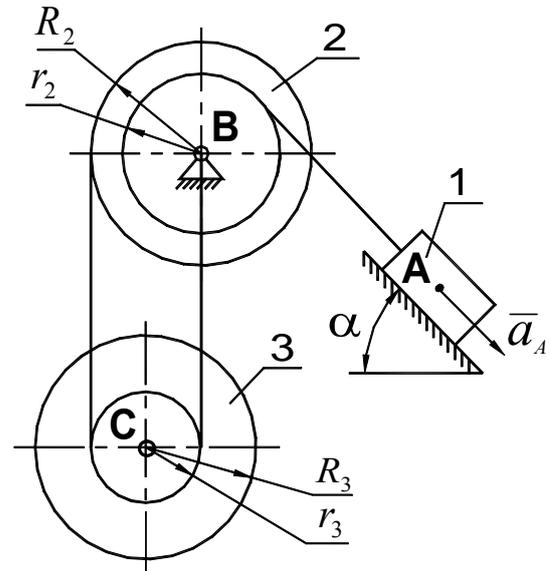
Приложение 1



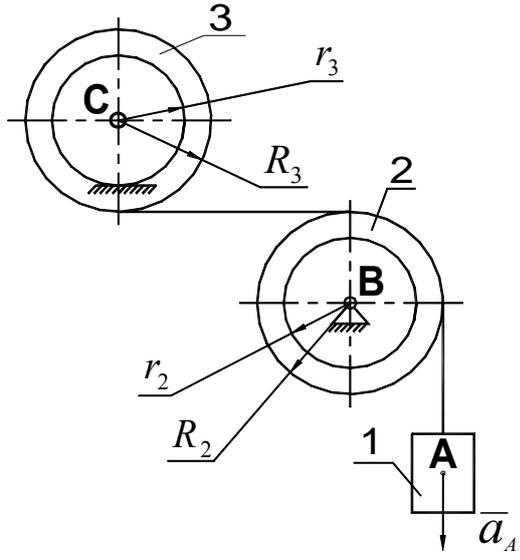
3



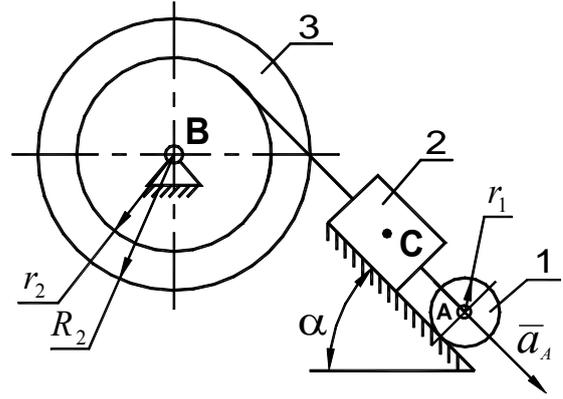
4



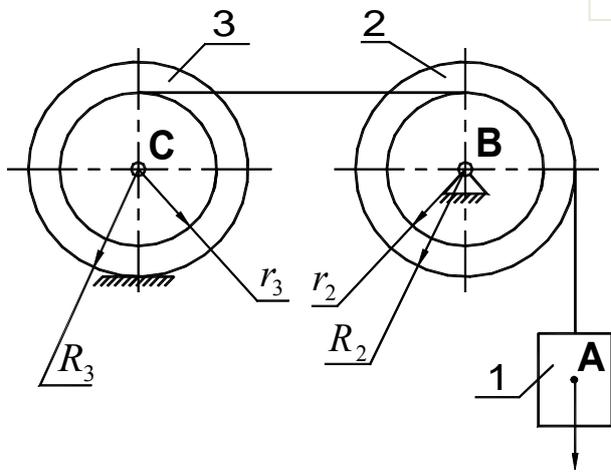
5



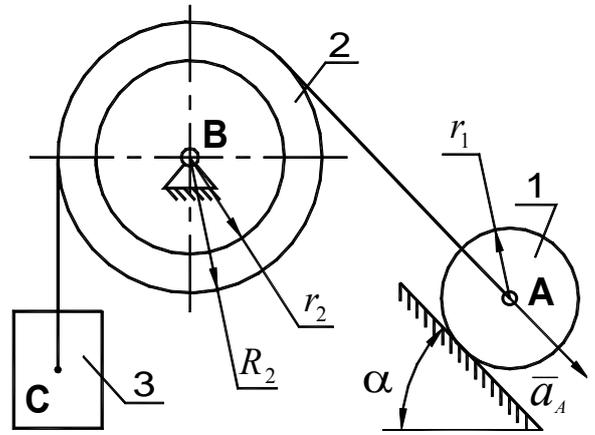
6



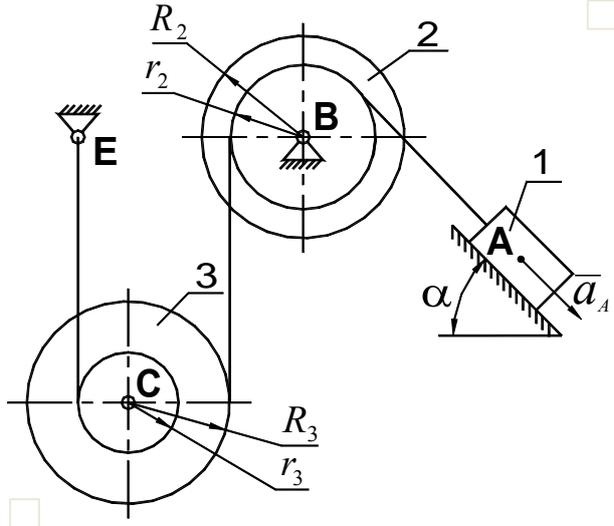
7



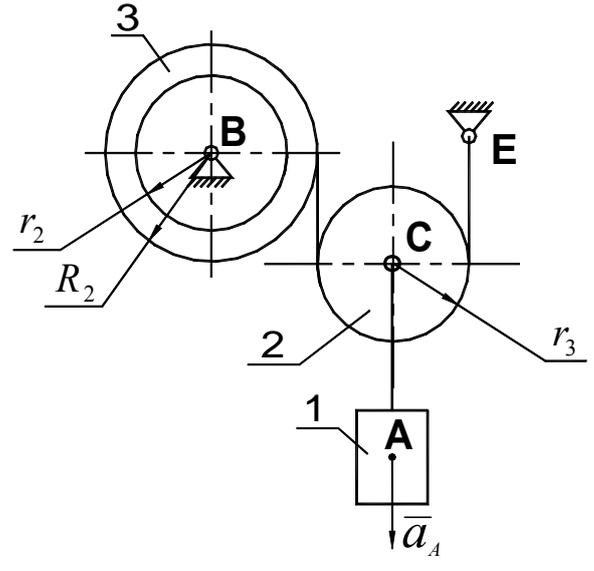
8



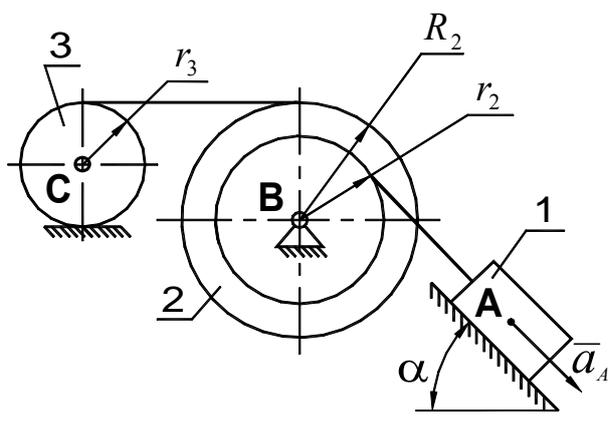
9



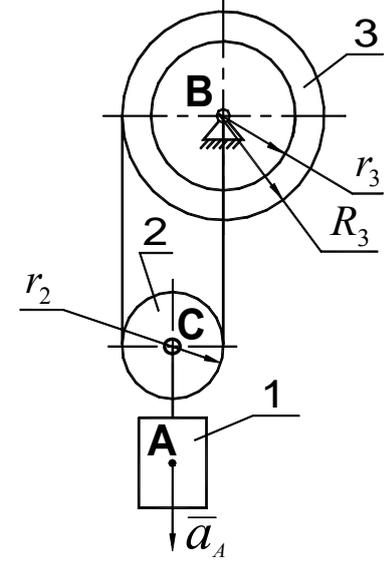
10



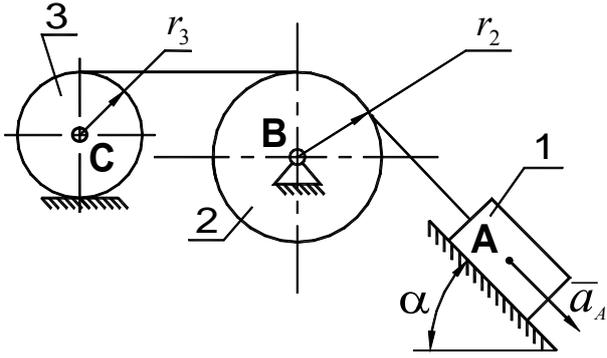
11



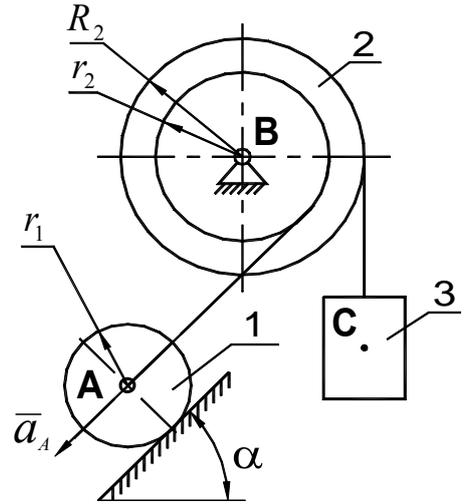
12



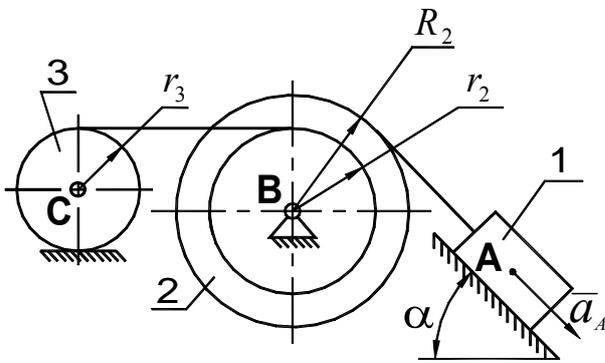
13



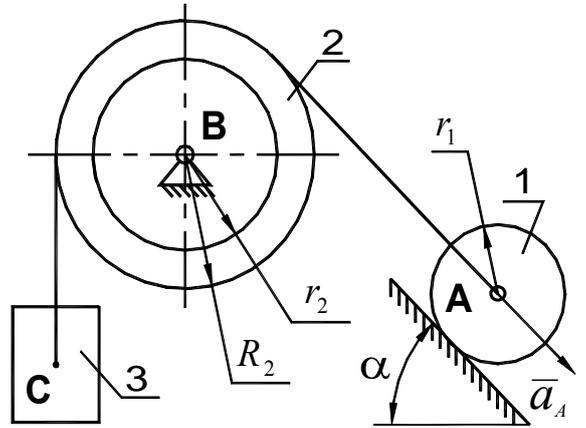
14



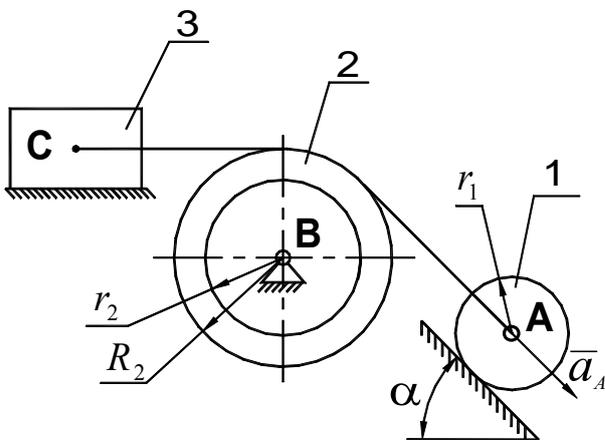
15



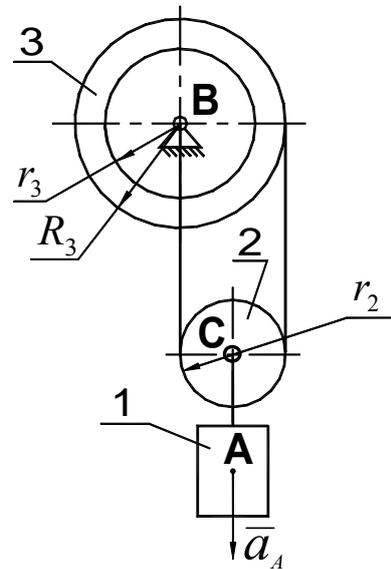
16



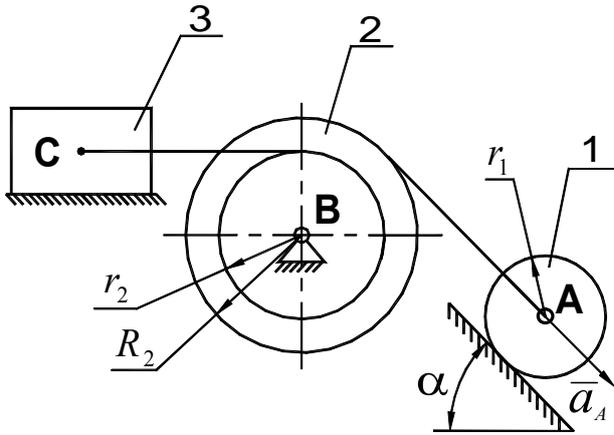
17



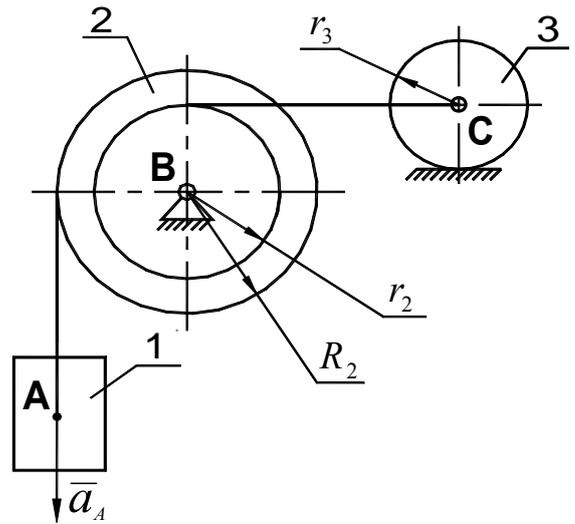
18



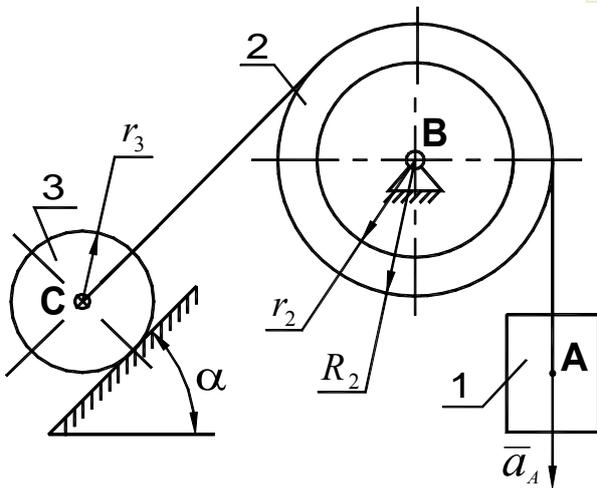
19



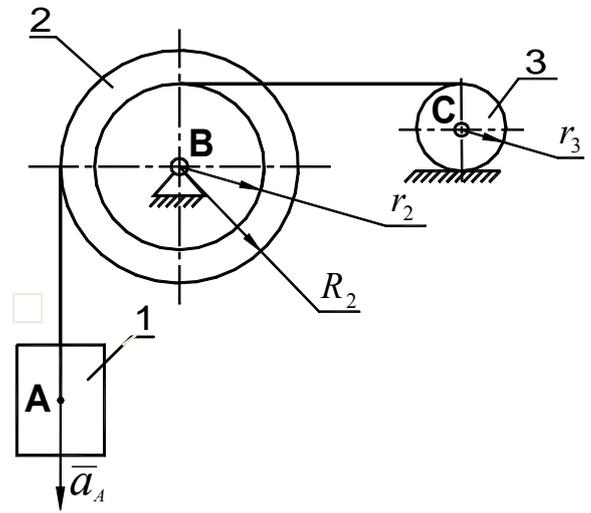
20



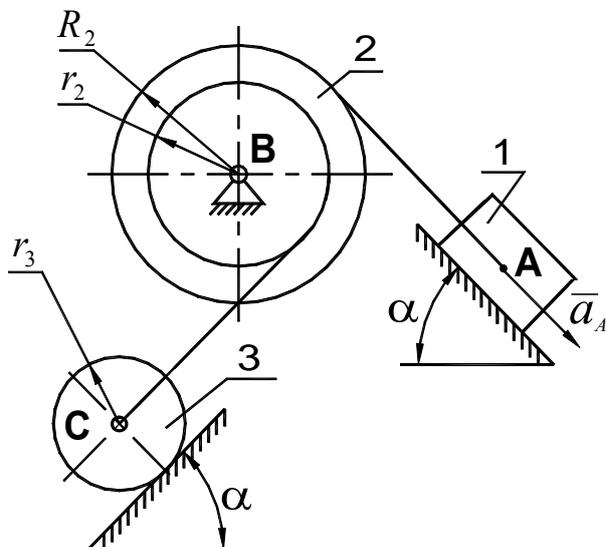
21



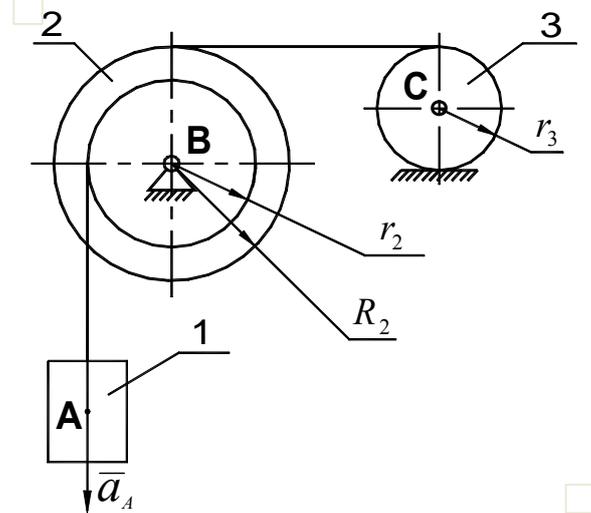
22



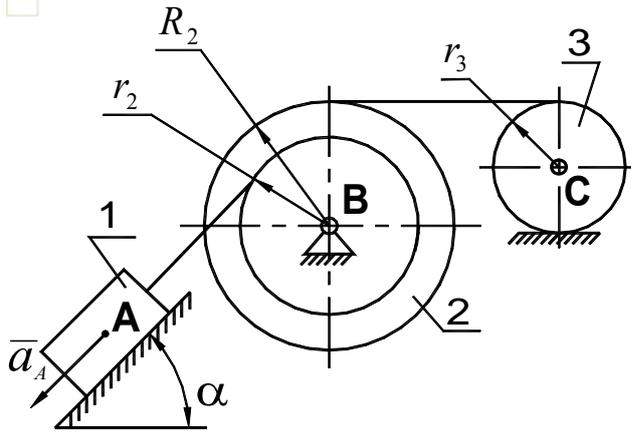
23



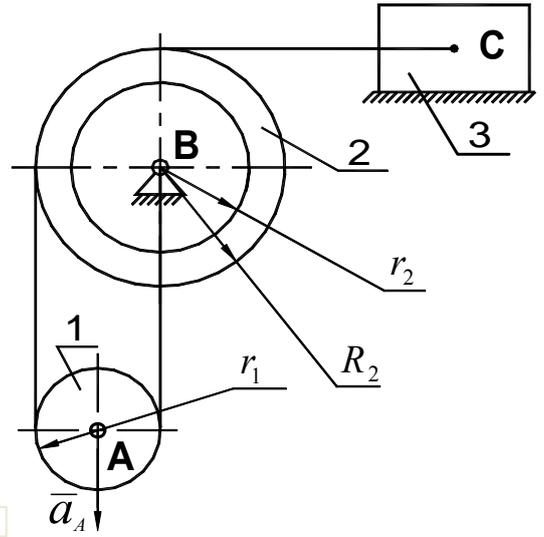
24



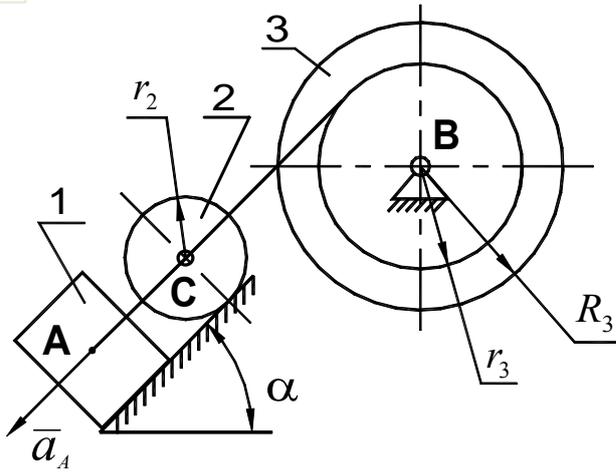
25



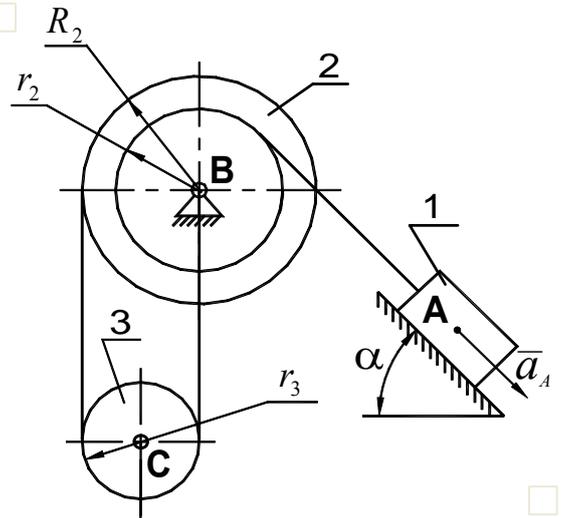
26



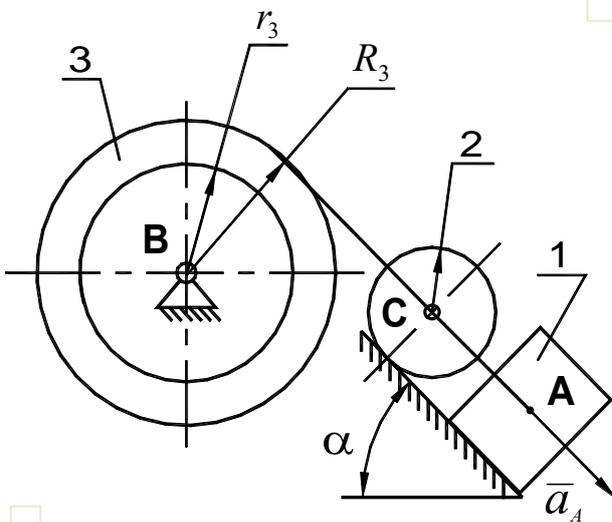
27



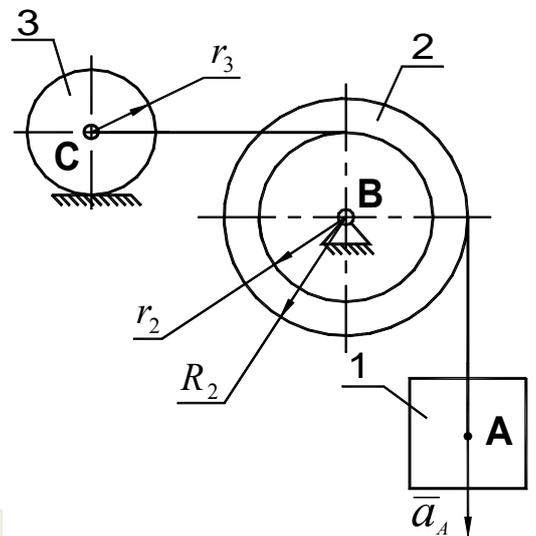
28



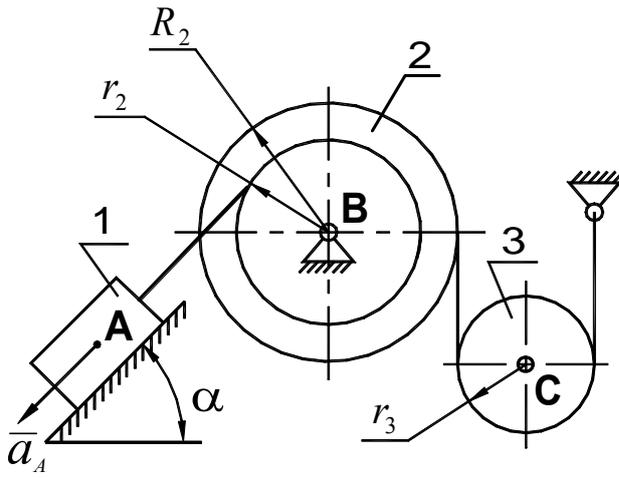
29



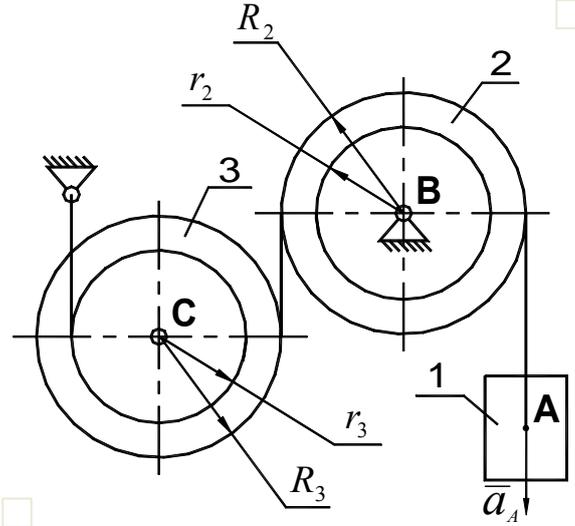
30



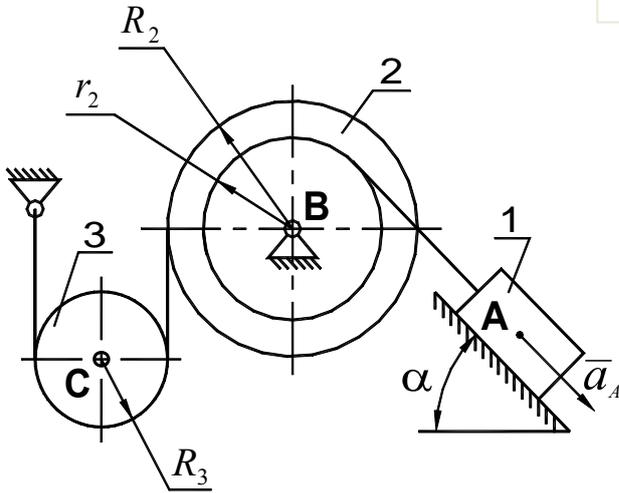
31



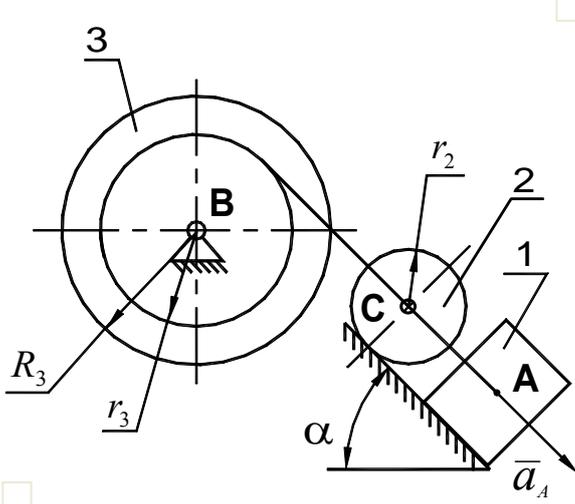
32



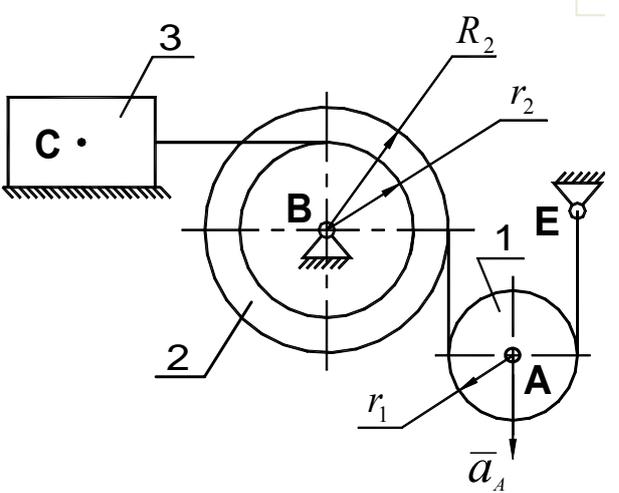
33



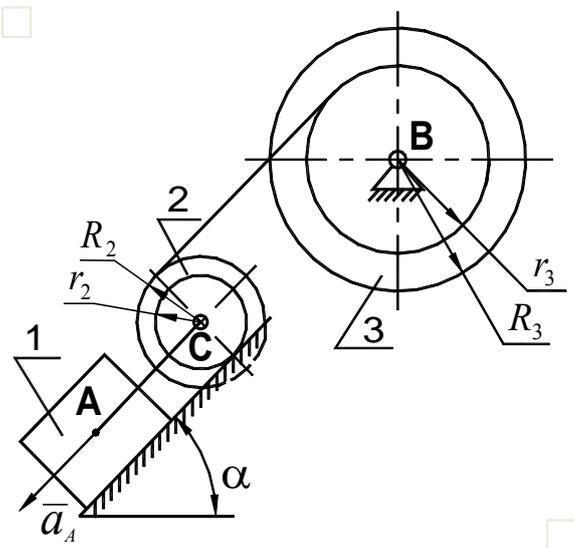
34



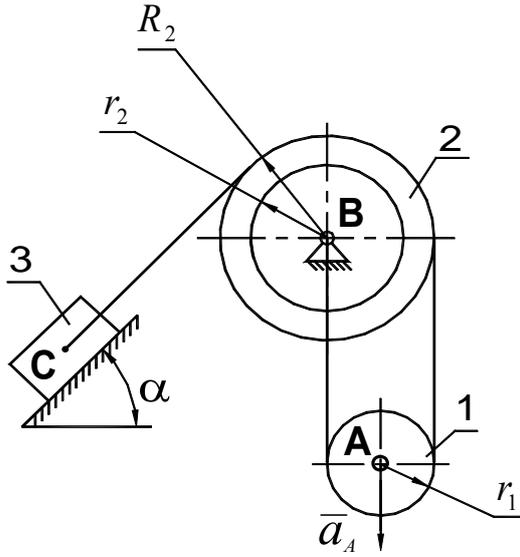
35



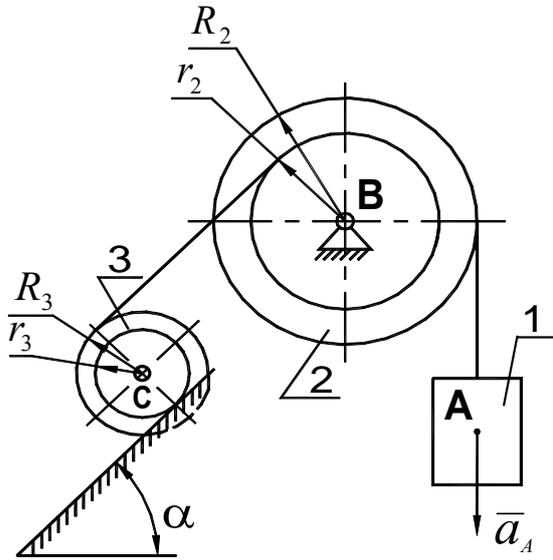
36



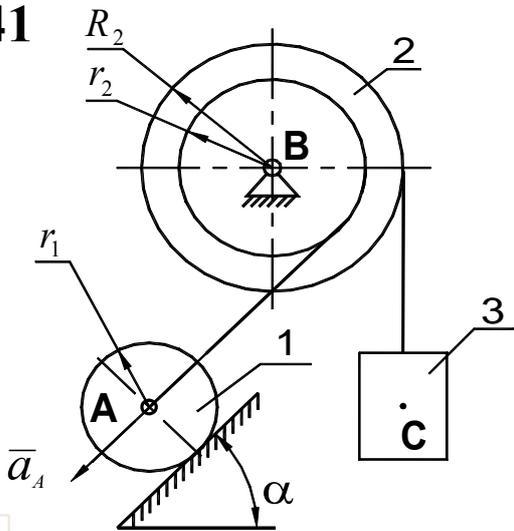
37



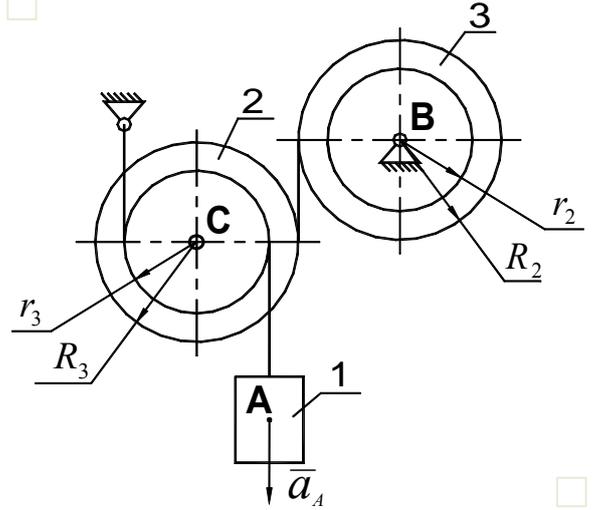
39



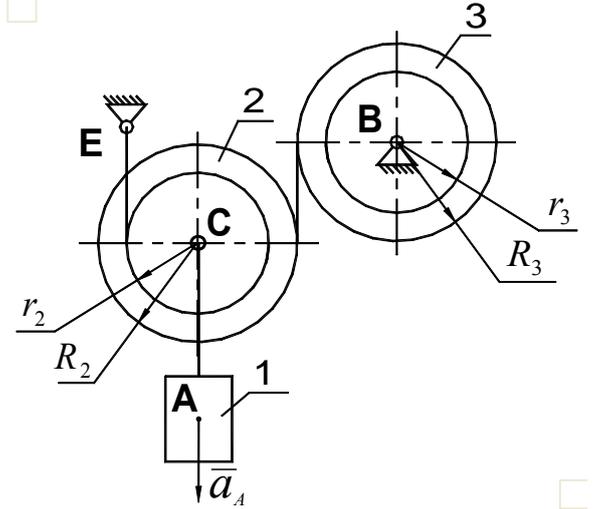
41



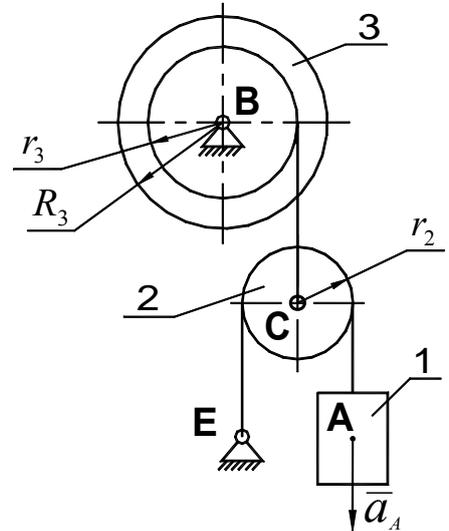
38



40



42



Приложение 2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

№	Силы тяжести			Радиусы окружности тел					Радиусы инерции тел		угол наклона
	$G_1$ [Н]	$G_2$ [Н]	$G_3$ [Н]	$r_1$ [м]	$R_2$ [м]	$r_2$ [м]	$R_3$ [м]	$r_3$ [м]	$\rho_2$	$\rho_3$	$\alpha$ [град]
1	8200	800	600	0,150	0,420	0,140	0,280	0,210	0,300	0,230	30
2	8210	790	590	0,151	0,418	0,139	0,278	0,209	0,298	0,228	45
3	8220	780	580	0,152	0,416	0,138	0,276	0,208	0,296	0,226	60
4	8230	770	570	0,153	0,414	0,137	0,274	0,207	0,294	0,224	30
5	8240	760	560	0,154	0,412	0,136	0,272	0,206	0,292	0,222	45
6	8250	750	550	0,155	0,410	0,135	0,270	0,205	0,290	0,220	60
7	8260	740	540	0,156	0,408	0,134	0,268	0,204	0,288	0,218	30
8	8270	730	530	0,157	0,406	0,133	0,266	0,203	0,286	0,216	45
9	8280	720	520	0,158	0,404	0,132	0,264	0,202	0,284	0,214	60
10	8290	710	510	0,159	0,402	0,131	0,262	0,201	0,282	0,212	30
11	8300	700	500	0,160	0,400	0,130	0,260	0,200	0,280	0,210	45
12	8310	690	490	0,161	0,398	0,129	0,258	0,199	0,278	0,208	60
13	8320	680	480	0,162	0,396	0,128	0,256	0,198	0,276	0,206	30
14	8330	670	470	0,163	0,394	0,127	0,254	0,197	0,274	0,204	45
15	8340	660	460	0,164	0,392	0,126	0,252	0,196	0,272	0,202	60
16	8350	650	450	0,165	0,390	0,125	0,250	0,195	0,270	0,200	30
17	8360	640	440	0,166	0,388	0,124	0,248	0,194	0,268	0,198	45
18	8370	630	430	0,167	0,386	0,123	0,246	0,193	0,266	0,196	60
19	8380	620	420	0,168	0,384	0,122	0,244	0,192	0,264	0,194	30
20	8390	610	410	0,169	0,382	0,121	0,242	0,191	0,262	0,192	45
21	8400	600	400	0,170	0,380	0,120	0,240	0,190	0,260	0,190	60

$f = 0,2$  – коэффициент трения скольжения тела, которое скользит по плоскости.

$k = 0,00005$  м – коэффициент трения качения катков, которые катятся без скольжения.

