РОССИЙСКАЯ ОТКРЫТАЯ АКАДЕМИЯ ТРАНСПОРТА

Одобрено кафедрой
«Высшая и прикладная математика»

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Задание на контрольную работу
с методическими указаниями по выполнению
для студентов-специалистов 2 курса
специальности: «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

специализации: «Оптические системы и связи»

Москва – 2012

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Задачи, включенные в контрольную работу, взяты из сборника задач, подготовленного коллективом преподавателей кафедры «Высшая и прикладная математика» РОАТ МГУПС. Все задачи имеют тройную нумерацию, которая включает номер раздела из программы по математике для соответствующей специальности, уровень сложности задачи и порядковый номер задачи. Студент выполняет те задачи, последняя цифра которых совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Например, студент, учебный шифр которого имеет последнюю цифру 7, в контрольной работе решает задачи 20.1.7, 20.2.17, 20.1.27, 20.1.37.

Перед выполнением контрольной работы студент должен ознакомиться с содержанием разделов математических дисциплин, на освоение которых ориентирована выполняемая контрольная работа. Необходимую учебную литературу студент может найти в рабочей программе по математике для своей специальности (в программе указана как основная, так и дополнительная литература).

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, на обложке которой должны быть указаны: дисциплина, номер контрольной работы, шифр студента, курс, фамилия, имя и отчество студента. На обложке вверху справа указывается фамилия и инициалы преподавателя-рецензента. В конце работы студент ставит свою подпись и дату выполнения работы.

В каждой задаче надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Решение каждой задачи должно содержать подробные вычисления, пояснения, ответ, а также, в случае необходимости, и рисунки. После каждой задачи следует оставлять место для замечаний преподавателя-рецензента. В случае невыполнения этих требований преподаватель возвращает работу для доработки без ее проверки.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА.
Теория случайных процессов. Случайные последовательности и функции.

1-10.

20.1.1. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ определён следующим образом: $\xi(t) = tX$, $t \in [0,1]$, где $X \sim R[0,1]$ – случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[0,1]$. Описать множество сечений и траекторий случайного процесса $\xi(t)$.

20.1.2. Пусть X, Y – независимые случайные величины, имеющие гауссовское распределение $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Случайный процесс определён соотношением $\xi(t) = \frac{X+Y}{t}$, $t > 0$. Вычислить $\mathrm{P}\left(|\xi(t)| \le \frac{3}{t}\right)$ для произвольного $t > 0$.

20.1.3. Пусть $\xi(t) = X\varphi(t)$, $t \in T$, где X – действительная гауссовская случайная величина со средним $\frac{1}{2}$ и дисперсией 2, а $\varphi(t)$ – неслучайная функция на T. Найти характеристическую функцию процесса $\xi(t)$.

20.1.4. Пусть $\xi(t) = Xt^2 + Yt$, $t > 0$ – случайный процесс, где X и Y – независимые случайные величины с гауссовским распределением $N(0,1)$. Найти вероятность того, что траектория монотонно не убывает.

20.1.5. Пусть X и Y – независимые случайные величины с функциями распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$. Пусть $\{\xi(t), t \ge 0\}$ – случайный процесс, определённый соотношением $\xi(t) = Xt + Y$. Описать траектории данного процесса, найти семейство конечномерных функций распределения.

20.1.6. Пусть $\xi(t) = \sum_{i=1}^{10} X_i \varphi_i(t)$, $t \in T$, где X_i – действительные независимые и гауссовские случайные величины с распределением $N(0,1)$, а $\{\varphi_i(t)\}$ – заданные на T детерминированные функции. Найти $F_\xi(x,t)$.

20.1.7. Найти плотность одномерного распределения гауссовского случайного процесса $\xi(t) = X + t$, $t > 0$, где X – случайная величина с гауссовским распределением $N(0,4)$. Показать, что ξ не имеет плотности распределения порядка больше 2.

20.1.8. Пусть случайная последовательность $\{\xi(n),\ n = 0,1,2,\dots\}$ определена рекуррентным соотношением $\xi(n) = 2\xi(n-1) + \xi_n$, $n = 1,2,\dots$, $\xi(0) = 0$ где $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых в совокупности гауссовских случайных величин с параметрами $M(\xi_n) = 0$, $D(\xi_n) = 1$. Найти одномерную функцию распределения случайной последовательности ξ.

20.1.9. Пусть $\{\xi(t), t \ge 0\}$ – процесс броуновского движения. Найти среднее значение и ковариационную функцию процесса броуновского моста, описываемого: $\omega(t) = \xi(t) - t\xi(1)$, $\omega(0) = \omega(1) = 0$.

20.1.10. Найти ковариационную функцию процесса $\xi(t) = X\cos(t+Y)$, где X и Y – независимы, X имеет распределение $N(0,1)$, а Y имеет равномерное распределение на $[-\pi, \pi]$.

11-20.

20.2.11. Вещественная случайная последовательность определена соотношением $\xi_k = X + \varepsilon_k$, где X – случайный параметр $M(X) = \frac{1}{4}$ и $D(X) = 1$, $\{\varepsilon_k\}$ – центрированный дискретный белый шум, такой, что $D(\varepsilon_k) = \frac{1}{3^k}$, причём X не коррелирует с $\{\varepsilon_k\}$. Вычислить $M(\eta_n)$ и $D(\eta_n)$, если $\eta_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\xi_k$.

20.2.12. Пусть α_k, β_k – действительные некоррелированные случайные величины, причём: $M(\alpha_k) = M(\beta_k) = 0$, $D(\alpha_k) = D(\beta_k) = \frac{1}{4^k}$. Найти ковариационную функцию $R_\xi(n)$ последовательности $\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos\lambda_k n + \beta_k \sin\lambda_k n)$, предварительно проверив её стационарность.

20.2.13. Пусть последовательность $\{\eta_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению: $\eta_n = \frac{\eta_{n-1}}{2} + \xi_n$, где $\{\xi_n\}$ – вещественная стационарная случайная последовательность. Найти моментные характеристики случайной последовательности $\{\eta_n\}$.

20.2.14. Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на $[-\pi, \pi]$, а случайная величина Y распределена по закону $N(0,1)$ и не зависит от X. Найти ковариационную функцию и спектральную плотность стационарной последовательности $\xi_n = \begin{cases} Y, & \text{если } n = 0 \\ e^{iXn}, & \text{если } n \ne 0 \end{cases}$.

20.2.15. Пусть линейное преобразование задано рекуррентной формулой $\eta_n = \frac{\eta_{n-1}}{3} + \xi_n$, где $\{\xi_n\}$ – центрированная стационарная случайная последовательность с ковариационной функцией $R_\xi(n) = \frac{1}{2}D_\xi$. Найти спектральную плотность случайной последовательности $\{\eta_n\}$.

20.2.16. Найти частотную характеристику преобразования стационарной случайной последовательности Y в последовательность $X(n) = \frac{1}{3}\left(Y(n) + Y(n-1) + Y(n-2)\right)$.

20.2.17. Найти спектральную плотность стационарной случайной последовательности $\{\eta_n\}$: $\eta_n = \frac{\xi_n}{5} + \frac{\xi_{n-1}}{3}$, где $\{\xi_n\}$ – центрированный белый шум с дисперсией $\frac{1}{8}$.

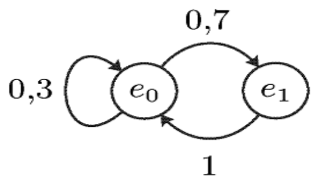
20.2.18. Найти ковариационную функцию $R_\xi(n)$ стационарной случайной последовательности, имеющей спектральную плотность $f_\xi(\lambda) = \frac{\pi - |\lambda|}{\pi^2}$.

20.2.19. Пусть стационарная случайная последовательность $\{\eta_n\}$ удовлетворяет уравнению авторегрессии $\eta_n = \frac{\eta_{n-1}}{2} + \frac{\eta_{n-2}}{3} + \xi_n$. Найти $M(\eta_n)$, если $M(\xi_n) = \frac{1}{5}$.

20.2.20. Пусть $\xi_n = \cos(nX + Y)$, где Y – случайная величина, равномерно распределённая на $[0,2\pi]$, а X не зависит от Y и имеет некоторую функцию распределения $F(x)$. Проверить центрированность стационарной случайной последовательности $\xi = \{\xi_n,\ n \in \mathbf{Z}\}$.

21-30.

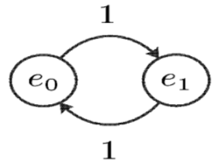
20.1.21. Цепь Маркова задана стохастическим графом. Найти вероятности состояний на третьем шаге при условии, что в начальный момент цепь Маркова находилась в состоянии e_1.



20.1.22. Найти финальные вероятности состояний цепи Маркова, описывающей координаты частицы, блуждающей по целым точкам на вещественной оси по следующей схеме из произвольной допустимой точки на оси: а) с вероятностью 0,55 сдвигается на 1 вправо, а с вероятностью 0,45 остаётся на месте; б) с вероятностью 0,5 сдвигается на 1 вправо и с вероятностью 0,5 – на 1 влево.

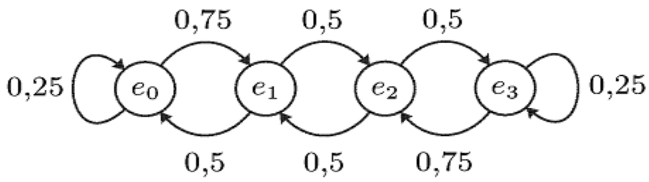
20.1.23. Пусть целые числа $m > 0, M > 0$ – начальные капиталы первого и второго игрока соответственно. Проводятся последовательно игры, в результате каждой из которых с вероятностью 0,65 капитал первого игрока увеличивается на 1. Результаты любой игры не зависят от результатов любых других игр. Пусть ξ_n – капитал первого игрока после n игр. Предполагается, что в случае $\xi_n = 0$ или $\xi_n = m + M$ игра прекращается (ситуация разорения одного из игроков). Показать, что $\{\xi_n\}$ – образует цепь Маркова, найти переходную матрицу и построить стохастический граф цепи.

20.1.24. Конечная цепь Маркова задана стохастическим графом. Показать, что при любом $\pi(0) \neq \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ финальные вероятности не существуют.

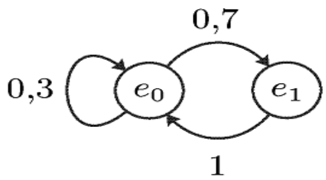


20.1.25. Пусть ξ_n – координата частицы, блуждающей по целым точкам на вещественной оси по следующей схеме из произвольной допустимой точки на оси: а) с вероятностью 0,45 сдвигается на 1 вправо, а с вероятностью 0,55 остаётся на месте; б) с вероятностью 0,6 сдвигается на 1 вправо и с вероятностью 0,4 – на 1 влево. Провести классификацию состояний цепи Маркова $\{\xi_n\}$, если $\xi_0 = 0$.

20.1.26. Цепь Маркова задана стохастическим графом, где состояния e_0 и e_3 – отражающие барьеры. Найти стационарное распределение π вероятностей состояний, если оно существует.

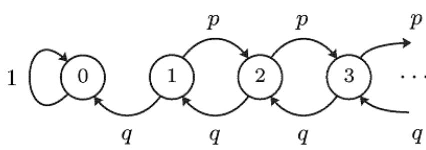


20.1.27. Пусть для эргодической цепи Маркова, заданной стохастическим графом, определено предельное стационарное распределение $\pi^0 = \{\pi_0, \pi_1\}$, удовлетворяющее соотношениям $\pi^0 = \mathrm{P}^* \pi^0$ и $\pi_0 + \pi_1 = 1$. Найти π^0, при условии, что в начальный момент цепь Маркова находилась в состоянии e_1.

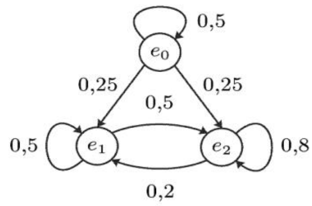


20.1.28. Пусть случайные величины $\{v_0, v_1, \ldots\}$ независимы в совокупности и каждая принимает значения +1 и -1 с вероятностями $\frac{1}{2}$. Проверить, какая из последовательностей $\xi_n = \frac{v_n + v_{n+1}}{2}$ и $\eta_n = v_n \cdot v_{n+1}$ является цепью Маркова.

20.1.29. Цепь Маркова, описывающая случайное блуждание частицы по целым неотрицательным точкам прямой $E = \{0, 1, \ldots\}$ с поглощающим состоянием $e_0 = 0$, задана стохастическим графом, где $p = \frac{1}{3}$, $q = 1 - p$. Известно, что в начальный момент времени частица находилась в некотором состоянии $e_m = m > 0$. Найти финальные вероятности состояний данной цепи Маркова.



20.1.30. Цепь Маркова задана стохастическим графом. Найти стационарное распределение вероятностей состояний.



31-40.

20.1.31. Случайная функция $\xi(t)$ задана на отрезке $[0,1]$ следующим образом: $\xi(t)=\begin{cases} X_1, & \text{если } t<\dfrac{1}{2} \\ X_2, & \text{если } t\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$, где X_1 и X_2 – независимые одинаково распределённые случайные величины со средним 0,8 и дисперсией 1. Исследовать непрерывность $\xi(t)$ в точке $t_0=\dfrac{1}{2}$.

20.1.32. Случайная функция $\xi(t)$ определена формулой $\xi(t)=X_1\sin\sqrt{2}t+X_2\cos\sqrt{2}t,\ t\ge 0$, где X_1 и X_2 – независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Найти явный вид интеграла $\eta(t)=\int\limits_0^t \xi(\tau)\,d\tau\ (t\ge 0)$ в среднеквадратическом смысле и вычислить его математическое ожидание и дисперсию.

20.1.33. Пусть случайная функция $\xi(t)$ определена на отрезке $[0,1]$ следующим образом: $\xi(t)=\begin{cases} X_1, & \text{если } t<r \\ X_2, & \text{если } t\ge r\end{cases}$, где r – случайная величина, равномерно распределённая на $[0,1]$, а X_1 и X_2 – гауссовские случайные величины с одинаковым средним 0,6 и дисперсией 1. Случайные величины r, X_1 и X_2 независимы в совокупности. Показать непрерывность в среднеквадратичном смысле случайной функции $\xi(t)$ на отрезке $[0,1]$.

20.1.34. Случайная функция $\eta(t)\ (t\ge 0)$ удовлетворяет соотношению: $\eta'(t)=\dfrac{1}{2}\eta(t)+\xi$, $\eta(0)=\nu$, где ξ,ν образуют гауссовский случайный вектор. Найти закон распределения случайной величины $\eta(t)$ при любом $t>0$, если известно, что $m_\xi=M\{\xi\},\ m_\nu=M\{\nu\},\ D_\xi=D\{\xi\},\ D_\nu=D\{\nu\},\ \rho=\mathbf{cov}\{\xi,\nu\}$.

20.1.35. Пусть $\xi(t)$ – гауссовская случайная величина, такая что $m_\xi(t)=0$ и $M\left\{|\xi(t)-\xi(\tau)|^2\right\}=3|t-\tau|$ для всех $t,\tau\in[0,1]$. Показать, что $\xi(t)$ имеет непрерывную модификацию.

20.1.36. Найти среднеквадратичную производную $\xi'(t)$ для случайной функции $\xi(t)=X_1\sin(2t+X_2)$, где X_1 и X_2 случайные величины с конечными вторыми моментами.

20.1.37. Пусть центрированная случайная функция $\xi(t)$ имеет ковариационную функцию $R_{\xi}(t,\tau)=2e^{-(t-\tau)^2}$. Вычислить дисперсию $D_{\xi'}(t)$, где $\xi'(t)$ – производная в среднем квадратическом.

20.1.38. Пусть центрированная случайная функция $\xi(t)$ имеет ковариационную функцию $R_{\xi}(t,\tau)=16t\tau$. Вычислить $M\{\eta^2\}$, если $\eta=\int_0^2 \xi(t)\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)dt$.

20.1.39. Для гауссовской случайной функции $\{\xi(t),\ t\in\mathbf{R}^1\}$ с математическим ожиданием $m_{\xi}(t)=t^2$ и ковариационной функцией $R_{\xi}(t,\tau)=4t\tau$ вычислить $\mathbf{P}\{\xi'(2)>2\}$.

20.1.40. Пусть $\xi(t)=X_1t+X_2$, где X_1 и X_2 – случайные величины с конечными вторыми моментами. Решить дифференциальное уравнение: $\eta'(t)+9\eta(t)=81\xi(t)$, при условии $\eta(0)=0$.