



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИДО

С.И. Качин

«___» _____ 2012 г.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов ИДО, обучающихся по направлению
230100 «Информатика и вычислительная техника»

Составитель **Е.А. Кочегурова**

Семестр	3	4
Кредиты		6
Лекции, часов	2	6
Практические занятия, часов		6
Индивидуальные задания		№ 1
Самостоятельная работа, часов		130
Формы контроля		зачет

Издательство

Томского политехнического университета

2012





УДК 519

Вычислительная математика: метод. указ. и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по напр. 230100 «Информатика и вычислительная техника» / сост. Е.А. Кочегурова; Томский политехнический университет.— Томск: Изд. ТПУ, 2012.— 37 с.

Методические указания и индивидуальные задания для студентов ИДО рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры автоматики и компьютерных систем 23 марта 2012 года.

Зав. кафедрой АИКС,
доктор техн. наук, профессор _____ Г.П. Цапко

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Вычислительная математика» предназначены для студентов ИДО, обучающихся по направлению 230100 «Информатика и вычислительная техника». Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приведено содержание основных тем учебной дисциплины с указанием рекомендуемой литературы и контрольными вопросами для закрепления теоретических знаний. Приведены методические указания для изучения теоретической части учебной дисциплины, варианты индивидуального домашнего задания и методические указания по его выполнению.





ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ	4
2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ.....	5
3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ	13
3.1. Тематика практических занятий	13
4. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ	14
4.1. Общие методические указания	14
4.2. Варианты домашнего задания и порядок выполнения индивидуального задания	14
4.3. Методические указания и пример выполнения ИДЗ	16
5. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ.....	28
5.1. Вопросы для подготовки к зачёту.....	28
5.2. Образец билета для зачета.....	33
6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	34
6.1. Литература обязательная	34
6.2. Литература дополнительная.....	35
6.3. Web-ресурсы	36



1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

На практике иногда трудно найти точное решение математической задачи. В этом случае используют методы вычислительной математики (вычислительные или численные методы). Вычислительной математикой называют раздел математики, занимающийся разработкой и исследованием вычислительных алгоритмов и их применением к решению конкретных задач. С развитием возможностей вычислительной техники увеличивается и количество подобных задач. Это в свою очередь приводит к развитию самих численных методов.

Дисциплина входит в состав вариативной части математического и естественнонаучного цикла.

Для успешного освоения дисциплины «Вычислительная математика» студентами должны быть изучены разделы «Интегрирование», «Линейные и нелинейные уравнения», «Дифференциальные уравнения», «Матричные исчисления». Также требуется опыт алгоритмизации и владение английскими математическими терминами.

Знания и умения, полученные при изучении дисциплины «Вычислительная математика», востребованы в дисциплине (корреквите) – «Физика».

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- численные методы решения основных математических задач;
- теоретические основы изучаемых численных методов;
- принципы построения и ограничения на применение вычислительных методов;
- способы контроля вычислений и оценки погрешности методов;

уметь:

- применять численные методы для решения инженерных и практических задач;
- оценить погрешности вычислений;
- выбрать численный метод решения задачи в соответствии с ее особенностями и ограничениями на реализацию;
- осуществить алгоритмизацию численного метода;

владеть:

- численными методами;
- приемами решения вычислительных задач в математических ППП;
- навыками программной реализации алгоритмов численных;
- навыками формализацией и адаптацией инженерной задачи к требованиям программных пакетов.

Неотъемлемой частью курса являются лабораторный практикум, при прохождении которого студентами приобретаются навыки алгоритмизации и программирования и работы в математических программных пакетах.

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Введение

Предмет и задачи дисциплины. История развития вычислительных методов. Принципы построения вычислительных методов. Алгоритмизация вычислительных задач. ППП MathCAD, Matlab, Mathematica, Maple. Вычислительный эксперимент – как основа решения вычислительных задач.

Рекомендуемая литература: [1, 19, 26].

Методические указания

Необходимо усвоить предмет и задачи учебной дисциплины; изучить особенности работы с точными и приближенными величинами; понять отличия аналитического и приближенного решения, а также задач классической и вычислительной математики. Изучить требования к численным методам: сходимость, устойчивость, точность, быстродействие, корректность. Изучить схему вычислительного эксперимента как основу решения вычислительных задач. Усвоить триаду вычислительного эксперимента: модель – метод (алгоритм) – программа для ЭВМ. Усвоить понятия: модель, моделирование, математическое моделирование. Изучить назначение и направления использования основных математических пакетов: MathCAD, Matlab, Mathematica, Maple.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Перечислите основные требования к численным методам.
2. Назовите основные этапы развития вычислительной математики.
3. В чем разница между аналитическим и численным решением?
Приведите примеры.
4. Почему вычислительный эксперимент является основой решения современных вычислительных задач?
5. Назовите основные этапы вычислительного эксперимента.
6. Какие известны математические пакеты для решения вычислительных задач?
7. Что такое устойчивость вычислительного метода (алгоритма)?
8. Что такое сходимость вычислительного метода (алгоритма)?
9. Перечислите достоинства вычислительного эксперимента.

2.2 Вычислительные погрешности

Источники и классификация погрешностей. Полная погрешность численного решения. Устранимая и неустраняемая погрешности. Характеристики точности решения: абсолютная и относительная погрешности. Формы записи погрешностей. Значащие, верные и сомнительные цифры приближенного числа. Представление чисел в форме с фиксированной и плавающей запятой. Погрешности элементарных функций. Общий подход к оценке погрешностей вычислительных алгоритмов. Прямая и обратная задачи теории погрешностей. Особенности машинной арифметики.

Рекомендуемая литература: [1, 2, 7, 21, 26, 32].

Методические указания

Необходимо определить понятие погрешности числа и приближенного решения. Требуется уяснить, из каких составляющих складывается полная погрешность и источники погрешностей численного решения. Запомнить, какие погрешности являются устранимыми, а какие - неустраняемыми.

Для изучения особенностей машинной арифметики уяснить понятие разрядной сетки ЭВМ и формы записи приближенных чисел: с фиксированной запятой и с плавающей запятой. Изучить простейшие способы оценки точности приближенного решения вычислением количества верных и сомнительных цифр.

Изучить основные правила и формулы трансформации погрешностей в процессе вычислений, а также погрешности основных арифметических операций: суммы, разности, произведения и деления.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое погрешности числа и вычислений?
2. Приведите определение абсолютной и относительной погрешности
3. Укажите формы записи абсолютной погрешности. Приведите примеры.
4. Напишите определение верных и сомнительных цифр числа.
5. Укажите основные источники погрешностей.
6. Приведите примеры устранимой и неустраняемой погрешности.
7. Приведите понятие разрядной сетки ЭВМ.
8. Какие вы знаете источники погрешности численного результата
9. Как вычислить относительную погрешность, зная абсолютную??
10. Как влияет способ представления чисел в ЭВМ на точность расчетов?
11. Что такое значащие цифры числа?

2.3 Численное интегрирование

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Формулы прямоугольника, трапеции, Симпсона. Погрешность метода. Принцип Рунге для оценки погрешности интегрирования.

Рекомендуемая литература: [3, 4, 12, 20, 26, 32].

Методические указания

Необходимо знать понятие первообразной и формулу вычисления определенного интеграла на основе формулы Ньютона-Лейбница. Понимать необходимость и возможность замены точного значения интеграла приближенным значением с помощью квадратурных формул. Знать особенности квадратурной формулы Ньютона-Котеса.

Особое внимание уделить популярным формулам численного интегрирования: левых, правых и средних прямоугольников, трапеций и Симпсона (парабол). Уметь выполнить геометрическую иллюстрацию этих методов.

Изучить оценки погрешностей квадратурных формул по формуле остаточного члена и на основе практического принципа Рунге.

Уметь вычислить число разбиений интервала для нахождения интеграла с заданной точностью. Уметь вычислить погрешность интегрирования на основе принципа Рунге.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое первообразная функции?
2. Приведите понятие сетки узлов, шага сетки, частичного интервала.
3. В чем состоит основная идея численного интегрирования?
4. Приведите формулы средних, левых и правых прямоугольников.
5. Приведите формулы трапеций и Симпсона.
6. В чем состоит принцип Рунге для оценки погрешности численного интегрирования?
7. Укажите оценку погрешности интегрирования по формуле остаточного члена.
8. Какие вы знаете способы повышения точности при численном интегрировании?
9. Приведите геометрическую интерпретацию формул численного интегрирования.
10. Поясните влияние шага интегрирования на точность решения.
11. Что такое порядок метода интегрирования?

2.4 Численные методы решения задач линейной алгебры

Классификация уравнений и систем уравнений. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и задачи, возникающие при анализе СЛАУ. Обусловленность и устойчивость системы. Классификация методов решения СЛАУ.

Метод Гаусса - основная идея и схемы реализации (схема единственного деления и с выбором главных элементов). Алгоритмизация метода Гаусса. Задачи теории систем, сопутствующие реализации метода Гаусса: треугольная факторизация матриц, вычисление определителей, вычисление обратной матрицы.

Итерационные методы решения СЛАУ: метод простой итерации и метод Зейделя. Понятие нормы матрицы и число необходимых итераций. Условие сходимости методов.

Рекомендуемая литература: [12, 14, 15, 17, 18, 19, 22, 26].

Методические указания

Необходимо знать формы записи СЛАУ: векторно-матричную и развернутую формы записи СЛАУ. Выявить связь определителя фундаментальной матрицы СЛАУ с существованием и единственностью решения. Определить основные задачи линейной алгебры, реализуемые с помощью численных методов.

Ознакомиться с классификацией методов решения СЛАУ. Уяснить достоинства и недостатки прямых и итерационных методов, а также основные модификации методов.

Детально изучить прямой метод Гаусса для решения СЛАУ, схему последовательного исключения неизвестных: основную идею метода, этапы метода (прямой ход и обратный), формулы метода и алгоритмизацию. Также изучить модификацию метода Гаусса с выбором главного элемента.

Изучить задачи теории систем, сопутствующие реализации метода Гаусса: треугольную факторизацию матриц, вычисление определителя, нахождение обратной матрицы.

Изучить идею итерационных методов решения СЛАУ, а также структуру и особенности реализации итерационных формул. Знать формулы методов Якоби (простых итераций) и Зейделя для решения СЛАУ.

Уяснить понятие нормы матрицы, наиболее употребимые нормы в вычислительной математике, а также вид нормы для метода Якоби. Изучить методику приведения любой СЛАУ к сходящемуся виду. Знать формулы метода Якоби и алгоритмизацию метода. Знать отличия методов Якоби и Зейделя.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Опишите Основные задачи линейной алгебры.
2. Чем отличаются прямые и итерационные методы решения СЛАУ?
3. Опишите метод исключения Гаусса.
4. Каково назначение текстовых процессоров? Опишите функциональные возможности современных текстовых процессоров.
5. Приведите достаточные условия сходимости итерационных методов решения СЛАУ.
6. Опишите задачи, сопутствующие реализации метода Гаусса.
7. Дайте определение нормы матрицы. Приведите примеры норм матриц.
8. Перечислите итерационные методы решения СЛАУ.
9. Укажите условия сходимости метода Якоби для решения СЛАУ.
10. Дайте сравнительную оценку методам решения СЛАУ.
11. Чем точные методы решения СЛАУ отличаются от приближенных?
12. Что влияет на скорость сходимости итерационного процесса?
13. Как организовать контроль прямого и обратного хода метода Гаусса?
14. В каких случаях целесообразно использовать итерационные методы решения СЛАУ?
15. Назовите особенности метода Зейделя для нахождения корней СЛАУ.

2.5 Методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

Классификация нелинейных уравнений и систем. Трансцендентные и алгебраические уравнения. Схема решения нелинейного уравнения. Метод половинного деления, метод хорд, метод касательных, метод простой итерации. Алгоритмизация методов, условия применения, скорость сходимости, геометрическая иллюстрация.

Постановка задачи решения системы нелинейных уравнений и понятие корня системы. Метод простой итерации и метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений. Условия сходимости и вычислительная схема методов.

Рекомендуемая литература: [1, 6, 12, 15, 16, 17, 26, 32].

Методические указания

Необходимо знать классификацию уравнений и систем уравнений. Знать определения трансцендентных и алгебраических уравнений.

Понимать необходимость этапов решения нелинейных уравнений: отделения и уточнения корней. Уяснить особенности и целесообразность применения аналитического и графического методов отделения корней уравнений.

Особое внимание уделить интервальным методам решения нелинейных уравнений: методами половинного деления (дихотомии) и хорд. Знать формулы методов, правила останова итерационных процедур и алгоритмизацию методов. Уметь выполнить геометрическую иллюстрацию этих методов.

Изучить методы Ньютона (касательных) и Якоби (простых итераций) для решения нелинейных уравнений. Знать формулы методов, правила останова итерационных процедур и алгоритмизацию методов. Уметь выполнить геометрическую иллюстрацию этих методов и найти начальное приближение в соответствии с условиями сходимости методов.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте понятие итерационного процесса, сходимости и погрешности метода?
2. Дайте определение трансцендентного и алгебраического уравнений. Приведите примеры.
3. Для чего производится процедура отделения корней нелинейного уравнения и предварительное исследование уравнений?
4. Сформулируйте теорему о сходимости метода простых итераций.
5. Сформулируйте теорему интервалов.
6. Выделите этапы решения нелинейного уравнения.
7. Перечислите интервальные методы нахождения корней.
8. Приведите геометрическую иллюстрацию методов решения нелинейных уравнений.
9. Приведите достаточные условия метода простых итераций для решения нелинейного уравнения и систем нелинейных уравнений.
10. Приведите геометрическую интерпретацию сходимости метода простых итераций.
11. Назовите условия сходимости метода простых итераций.
12. Поясните, что такое скорость сходимости и как она связана с эффективностью метода.
13. Назовите правила останова итерационных методов решения нелинейных уравнений.

2.6 Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Классификация дифференциальных уравнений. Задача Коши и методы ее решения. Обусловленность задачи. Методы Рунге-Кутта - основная идея. Порядок точности методов. Области устойчивости. Методы Эйлера, Эйлера-Коши, Рунге-Кутта 4-го порядка. Геометрическая иллюстрация и погрешность методов, автоматический выбор шага дискретизации.

Системы линейных дифференциальных уравнений. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений и формулы Рунге-Кутта. Решение дифференциальных уравнений n -го порядка. Многошаговые методы решения дифференциальных уравнений.

Рекомендуемая литература: [4, 7, 18, 22, 23, 26].

Методические указания

Необходимо знать классификацию дифференциальных уравнений и систем уравнений. Иметь представление о краевых задачах и задаче Коши.

Знать постановку задачи Коши. Понимать в чем состоит неустойчивость задачи Коши.

Понимать идеологию методов Рунге Кутта и общую формулу.

Знать формулы методов Эйлера (Рунге-Кутта 1-го порядка), модифицированного метода Эйлера и Эйлера-Коши (Рунге-Кутта 2-го порядка) и метода Рунге-Кутта 4-го порядка.

Уметь выполнить геометрическую иллюстрацию этих методов. И знать способы оценки погрешности решения задачи Коши на основе принципа Рунге.

Знать методы решения систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений высокого порядка.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое Обыкновенное дифференциальное уравнение и уравнение в частных производных.
2. Сформулируйте постановку задачи Коши.
3. Приведите классификацию дифференциальных уравнений.
4. В чем состоит основная идея методов Рунге-Кутта?
5. Определите локальную и глобальную погрешность задачи Коши.
6. Запишите формулы Рунге-Кутта 1,2 и 4-го порядков.
7. В чем состоит идея метода Рунге-Кутта с адаптивным шагом?
8. Приведите основные источники погрешности методов Рунге – Кутта.
9. Как используется принцип Рунге для оценки шага при решении задачи Коши?

10. Приведите геометрическую интерпретацию методов Рунге – Кутта.

11. Как преобразовать дифференциальное уравнение высокого порядка для решения методами Рунге – Кутта?

2.7 Приближение функций

Классификация задач аппроксимации. Критерий близости. Задача интерполирования. Полиномиальная интерполяция, сплайн-интерполяции. Метод наименьших квадратов. Уравнения регрессии, линейная регрессия. Базисные функции. Критерии эффективности аппроксимации.

Рекомендуемая литература: [3, 4, 11, 24].

Методические указания

Необходимо знать классификацию задач аппроксимации функций и табличных данных. Различать понятия интерполяция (локальная и глобальная), сглаживание и фильтрация данных, экстраполяция (прогноз) данных. Знать постановку задач аппроксимации, критерии аппроксимации. Иметь представление о базисных функциях.

Понимать отличие полиномиальной и сплайн-интерполяции.

Иметь представление о регрессионных уравнениях и получении регрессионного уравнения методом наименьших квадратов.

Уметь выполнить геометрическую иллюстрацию задач аппроксимации. Знать способы оценки погрешности аппроксимации.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Назовите основные задачи аппроксимации функций.
2. Сформулируйте задачу интерполяции данных и критерий интерполяции.
3. Что такое регрессионное уравнение.
4. В чем состоит отличие сплайн-функции и полиномиальной функции?
5. В чем разница между глобальной и локальной интерполяцией?
6. Какова идея метода наименьших квадратов и в каких задачах он может быть использован?
7. Чем фильтрация данных отличается от сглаживания?
8. Приведите критерий метода наименьших квадратов.
9. Укажите основные показатели качества аппроксимации.
10. Что такое базисные функции? Приведите примеры базисных функций.
11. Что такое экстраполяция данных?



3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Практический раздел дисциплины включает три практических занятия для изучения отдельных задач вычислительной математики.

Методические указания по проведению практических занятий представлены в [32].

Рекомендуемая литература: [5, 9, 15, 17, 26, 29, 30, 31].

3.1. Тематика практических занятий

1. Численное интегрирование (2 часа).
2. Методы решения нелинейных уравнений (2 часа).
3. Аппроксимация экспериментальных данных (2 часа).



4. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

4.1. Общие методические указания

В соответствии с учебным графиком для студентов, обучающихся по направлению 230100 «Информатика и вычислительная техника», предусмотрено выполнение индивидуального домашнего задания (ИДЗ), направленного на закрепление теоретических знаний и приобретения практических навыков программирования алгоритмов численного анализа в математическом пакете MathCAD.

Использование возможностей популярных математических пакетов является неотъемлемой частью решения любых задач вычислительной математики. Однако создание пользовательских программ, реализующих численные алгоритмы, также необходимо для глубокого изучения вычислительных методов. Данный двойной подход и составляет современный способ изучения вычислительной математики.

Индивидуальное задание включает решение нелинейного уравнения и состоит из следующих этапов:

- графическое решение;
- нахождение решения с использованием функций пакета MathCAD;
- создание программы, реализующей определенный метод решения нелинейного уравнения;
- сопоставление полученных решений.

Индивидуальное домашнее задание представлено в 20 вариантах. Номер варианта соответствует числу, составленному из двух последних цифр зачетной книжки студента. Если получаемое число больше 20, то из него нужно вычесть 20. Например, если номер зачетной книжки 3-8В11/14, то номер варианта ИДЗ 14, если номер зачетной книжки 3-8В11/26, то номер варианта ИДЗ 6 ($26 - 20 = 6$).

4.2. Варианты домашнего задания и порядок выполнения индивидуального задания

Итерационные методы решения нелинейных уравнений

Программа работы

1. Отделить графически первый положительный корень трансцендентного уравнений.
2. Выбрать начальное приближение для первого положительного корня в соответствии с заданным методом.
3. Уточнить корень уравнения вычислительным блоком ППП

MathCAD: Given – Find.

4. Составить программу для уточнения корня уравнения в соответствии с заданным методом с точностью $\varepsilon=10^{-2}$ и $\varepsilon=10^{-5}$.

5. Оценить эффективность метода (количество итераций, относительная погрешность). В качестве точного корня уравнения взять значение, полученное процедурами ППП MathCAD.

Варианты ИДЗ

№	Трансцендентное уравнение	Метод уточнения корня уравнения
1	$\operatorname{ctg}(x) - \frac{x}{10} = 0$	Метод дихотомии
2	$3 \cdot x - \cos(x) - 1 = 0$	Метод касательных
3	$\operatorname{tg}(0.44 \cdot x + 0.3) = x^2$	Метод хорд
4	$2 \cdot x - \lg(x) - 7 = 0$	Метод хорд
5	$\operatorname{ctg}(x) - \frac{x}{2} = 0$	Метод дихотомии
6	$x^2 + 4 \cdot \sin x = 0$	Метод касательных
7	$\operatorname{tg}(0.47 \cdot x + 0.2) = x^2$	Метод касательных
8	$\operatorname{ctg}(x) - \frac{x}{3} = 0$	Метод хорд
9	$x^2 - 20 \cdot \sin(x) = 0$	Метод дихотомии
10	$\operatorname{tg}(0.3 \cdot x + 0.4) = x^2$	Метод хорд
11	$\operatorname{ctg}(x) - \frac{x}{4} = 0$	Метод касательных
12	$1.8 \cdot x^2 - \sin(10 \cdot x) = 0$	Метод хорд
13	$x \cdot \lg(x) - 1.2 = 0$	Метод дихотомии
14	$\operatorname{tg}(0.4 \cdot x + 0.3) = x^2$	Метод хорд
15	$\operatorname{ctg}(1.05 \cdot x) - x^2 = 0$	Метод касательных
16	$x^3 - 4 \cdot \sin(x) = 0$	Метод хорд
17	$\operatorname{tg}(0.5 \cdot x + 0.1) = x^2$	Метод дихотомии
18	$x + \lg(x) = 0.5$	Метод хорд
19	$3 \cdot x - \cos(x) - 1 = 0$	Метод касательных
20	$\operatorname{tg}(0.5 \cdot x + 0.2) = x^2$	Метод дихотомии

4.3. Методические указания и пример выполнения ИДЗ

Для выполнения индивидуального задания, включающего нахождение графического решения нелинейного уравнения, решения по разработанной студентом программе и с использованием функций пакета MathCAD, необходимо изучение теоретического материала, раздел 4.3.1.

4.3.1 Решение нелинейных уравнений

Существуют 2 типа нелинейных уравнений: алгебраические (содержащие степени аргумента) и трансцендентные (содержат тригонометрические, логарифмические и другие специальные функции).

Пусть задана непрерывная на интервале $[a, b]$ функция $f(x)$. Требуется найти корни уравнения $f(x)=0$. Корнем уравнения (или его нулем) называют всякое значение $x=\xi$, обращающее функцию $f(x)$ в тождество, т.е. $f(\xi)=0$. Графически каждый корень соответствует точке пересечения графика функции с осью абсцисс, рис. 1.

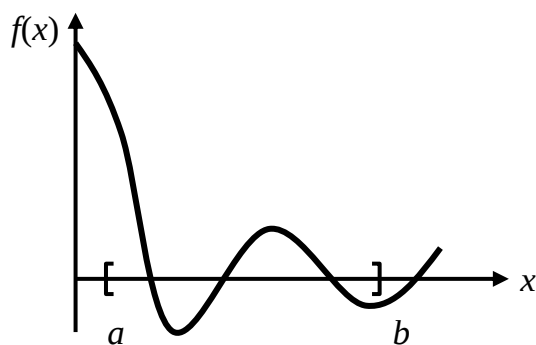


Рис. 1.

Эта задача разделяется на ряд этапов.

1. Отделение корней, т.е. нахождение интервала $[a, b]$, внутри которого находится только один требуемый корень.
2. Уточнение корней, т.е. вычисление их с заданной точностью.

Первый этап основан на **теореме интервалов**: если непрерывная функция $f(x)$ на концах интервала $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то внутри интервала $[a, b]$ существует хотя бы один корень уравнения $f(x)=0$.

В соответствии с теоремой решение нелинейного уравнения начинается с выбора интервала $[a, b]$, а затем производится уточнение и выбор требуемого корня одним из численных методов.

Все методы решения нелинейных уравнений допускают хорошую геометрическую интерпретацию. Поэтому ниже при изложении будет приведена геометрическая иллюстрация метода и его пошаговое описание (алгоритмизация).

Метод половинного деления (дихотомии)

Пусть дано уравнение $f(x)=0$.

Допустим, что на этапе отделения корней удалось найти отрезок $[a, b]$, на котором расположено значение точного корня x_T , т.е. $a < x_T < b$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, рис. 2.

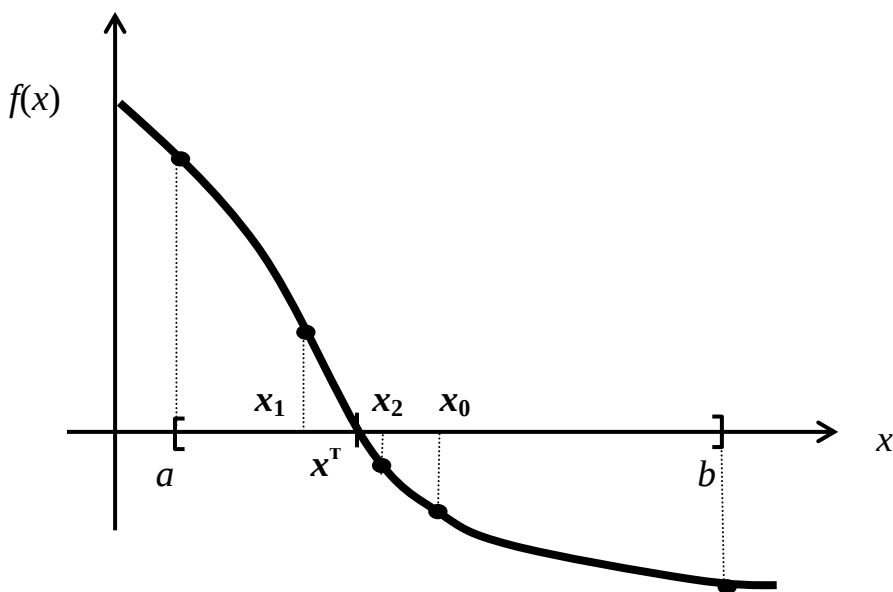


Рис. 2. Геометрическая иллюстрация метода половинного деления

В качестве начального приближения корня x_0 принимаем середину отрезка $x_0 = (a+b)/2$. Далее исследуем значения функции: если $f(x_0)=0$, то x_0 является корнем уравнения, т.е. $x_T = x_0$. Если $f(x_0) \neq 0$, то в качестве нового интервала выбираем одну из половин отрезка $[a, x_0]$ или $[x_0, b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки, т.е. содержит искомый корень. Для рис. 2 это интервал $[a, x_0]$. Интервал $[x_0, b]$ исключаем, на концах его знак $f(x)$ не меняется.

Отрезок $[a, x_0]$ вновь делим пополам. Новое приближение: $x_1 = (a+x_0)/2$. Исследуем функцию $f(x)$ на концах отрезка и отбрасываем отрезок $[a, x_1]$, т.к. $f(x_1) > 0$ и $f(a) > 0$. Выбираем отрезок $[x_1, x_0]$, на концах которого функция имеет противоположные знаки $f(x_1) > 0$, $f(x_0) < 0$. Вновь делим пополам и по-

лучаем новое приближение корня $x_2 = (x_1 + x_0)/2$ и т.д. Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока длина отрезка после n -ой итерации не станет меньше некоторого заданного малого числа (точности вычисления корня) ε , т.е. $|b - a| < \varepsilon$.

Тогда за искомое значение корня принимается последнее полученное приближение x_n , и говорят, что решение уравнения найдено с точностью ε . Одновременно подсчитываем количество шагов (итераций) за которое был найден корень.

Математические формулы метода дихотомии просты и определяют приближение к корню на очередной итерации и правило останова

$$c = \frac{a + b}{2}, \quad (1)$$
$$|b - a| \leq \varepsilon.$$

Или

$$c = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}, \quad (2)$$
$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon.$$

Следующим этапом численного решения уравнения является разработка алгоритма метода дихотомии. Описание алгоритма возможно в виде блок-схемы (рис.3) или в виде пошагового описания.

Алгоритм метода дихотомии

- Шаг 1. Выбор интервала $[a, b]$, такого что $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Задание точности вычисления корня ε .
Счетчик числа итераций $n=0$.
- Шаг 2. Вычисление $c = (a+b)/2$, $n=n+1$.
- Шаг 3. Если $f(c)=0$, то переход на Шаг 5.
иначе
Если $f(a) \cdot f(c) < 0$, то $b=c$,
иначе $a=c$.
- Шаг 4. Если $|b-a| > \varepsilon$, то переход на Шаг 2.
иначе переход на Шаг 5.
- Шаг 5. Печать результатов: корня уравнения c , число итераций n .
Выход из итерационной процедуры.

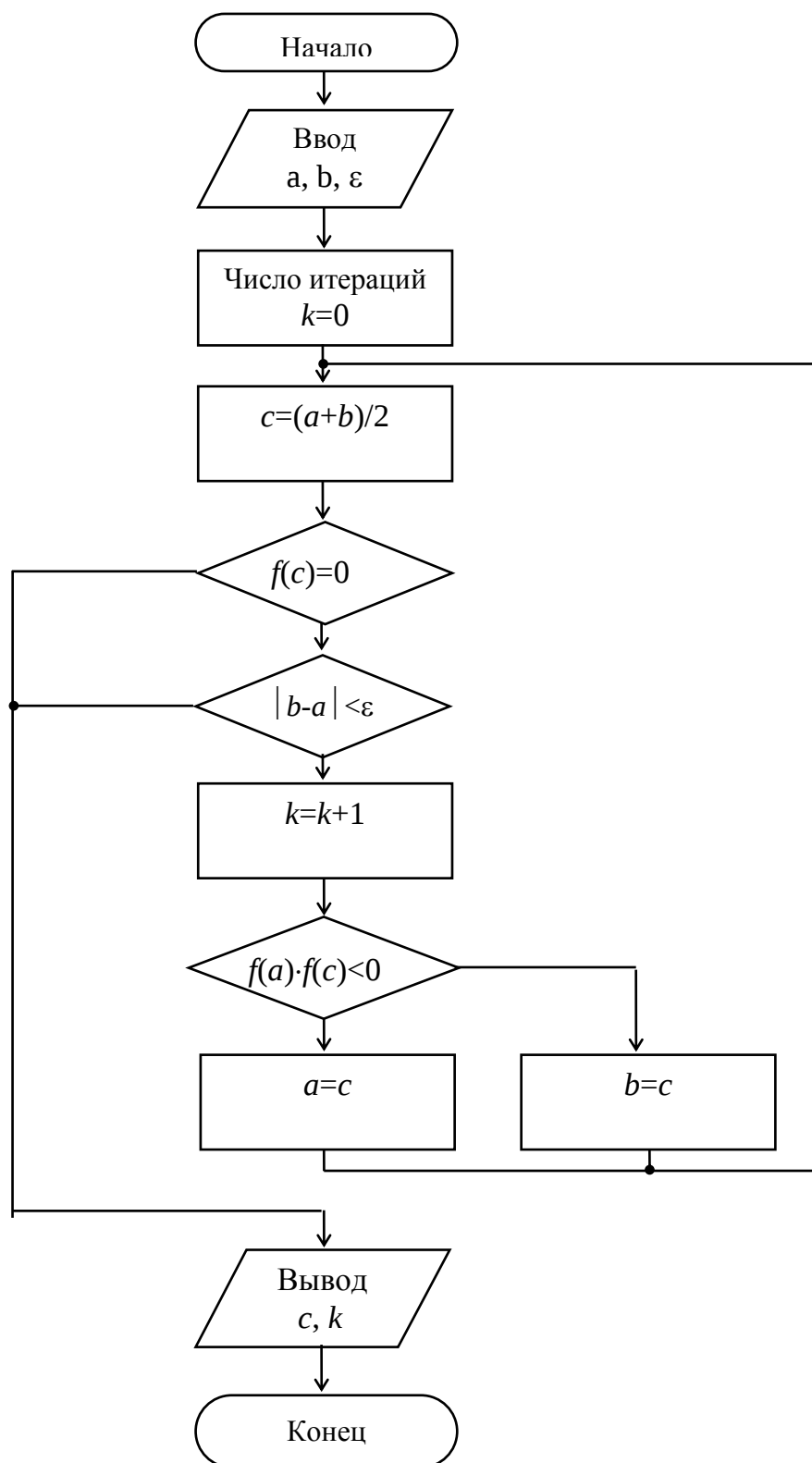


Рис. 3. Блок- схема метода половинного деления

Метод хорд

Метод также относится к интервальным, т.е. требует первоначального выбора интервала $[a, b]$. Алгоритмизация метода практически совпадает с методом половинного деления, за исключением шага 2.

Вместо деления интервала $[a, b]$ пополам метод предполагает поделить его в отношении $f(a) / f(b)$. Графически это означает построение хорды между точками $f(a)$ и $f(b)$, рис.4. Уравнение этой прямой имеет вид:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Эта прямая пересекает ось абсцисс при значении $x=c, f(c)=0$. Отсюда найдем искомое приближение (c) к точному корню x_T :

$$c = a - f(a) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)}. \quad (3)$$

В остальном алгоритмизация метода хорд полностью повторяет алгоритм метода дихотомии.

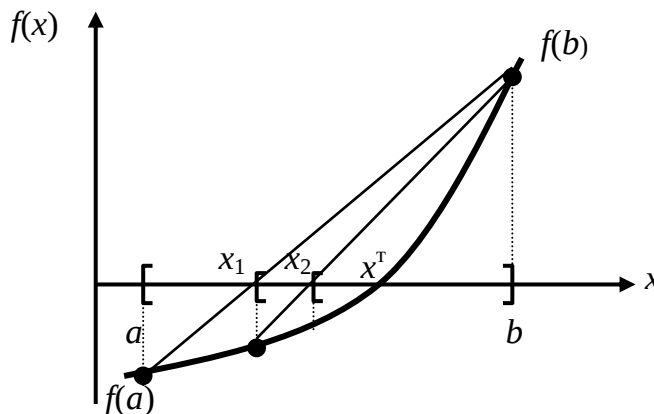


Рис. 4. Геометрическая иллюстрация метода хорд

Замечание.

В некоторых случаях (как, например, на рис. 4.) стандартное правило останова итерационной процедуры $|b-a| < \varepsilon$, может не привести к решению, т.к. одна из границ остается неподвижной. В этом случае целесообразно

использовать следующее правило останова

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon, \quad (4)$$

где x_n, x_{n-1} значения корней на двух соседних итерациях, найденные по формуле (3).

Метод Ньютона

очень популярен. Это объясняется тем, что в отличие от методов дихотомии и хорд, метод Ньютона не требует первоначального задания интервала, на концах которого функция имеет разные знаки. Вместо интерполяции по двум точкам, в методе Ньютона осуществляется экстраполяция (прогнозирование) с помощью касательной к функции.

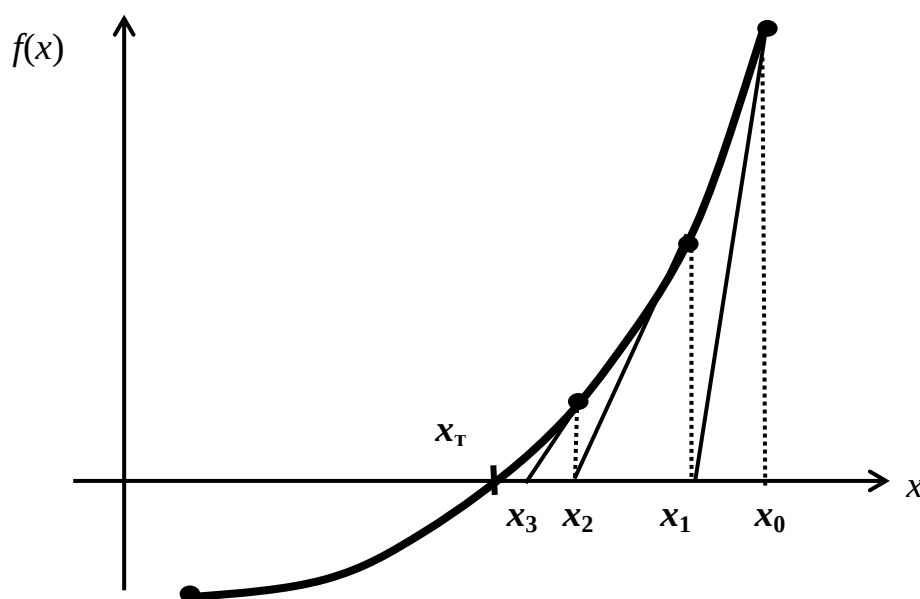


Рис. 5. Геометрическая иллюстрация метода Ньютона

Проведем касательную в точке $f(x_0)$. Первым приближением корня будет точка пересечения этой касательной с осью абсцисс – x_1 . Через точку $f(x_1)$ снова проводим касательную, точка пересечения которой с осью ОХ даст нам второе приближение корня x_2 и т.д.

Процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений к корню принимаются значения $x_0, x_1, x_2, \dots$ точек пересечения касательной к кривой $f(x)$ с осью абсцисс. Геометрически метод это означает замену небольшой дуги кривой $f(x)$ касательной. При этом не требуется задавать отрезок $[a, b]$, содержащий корень уравнения, а достаточно лишь найти некоторое начальное приближение корня x_0 . К выбору этого начального приближения к корню метод Ньютона чрезвычайно критичен. Именно начальное приближение определяет

сходимость (или расходимость) метода.

Для начала работы метода требуется найти начальное приближение, точку x_0 , которая образует сходящуюся итерационную процедуру.

Достаточные условия сходимости метода Ньютона

Пусть корень функции отделен на интервале $[a, b]$, а производные $f'(x)$, $f''(x)$ сохраняют знак на интервале.

Тогда, исходя из начального приближения $x_0 \in [a, b]$, удовлетворяющего неравенству

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0, \quad (5)$$

можно построить итерационную последовательность

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad (6)$$

сходящуюся к единственному на $[a, b]$ решению x_T уравнения $f(x)=0$.

Условия (5) позволяют найти начальное приближение, гарантирующее сходимость метода Ньютона. А формула (6) – построить итерационную процедуру приближения к корню уравнения. В основе формулы (6) лежит разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $f(x_n)$ и отбрасывании нелинейных членов ряда.

Правила останова стандартные и определены формулой (4).

Алгоритм метода Ньютона

- Шаг 1. Выбор начального приближения x_0 (a или b) по условию (5).
Задание точности вычисления корня ε .
Счетчик числа итераций $n=0$.
- Шаг 2. Вычисление корня $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$,
 $n=n+1$.
- Шаг 3. Если $|x_n - x_{n-1}| > \varepsilon$, то переход на Шаг 2.
иначе переход на Шаг 4.
- Шаг 4. Печать результатов: корня уравнения x_n , число итераций n .
Выход из итерационной процедуры.

Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений в пакете MathCad

Для решения нелинейных уравнений могут быть использованы следующие процедуры MathCAD:

- **root**;
- вычислительный блок **Given - Find** (Дано - Найти);
- вычислительный блок **Given - Minerr** (Дано - Минимальная погрешность).

Процедура **root** позволяет найти только один корень уравнения. Причем, перед использованием процедуры требуется задать начальное значение (приближение) корня. Синтаксис этой процедуры приведен ниже:

$$x := -10$$
$$\text{root}(x^3 - 2 \cdot x^2 + 15, x) = -1.949$$

Для **root** процедуры большое значение имеет начальное приближение к корню. Например, если вместо $x := -10$, задать значение $x := 10$, то процедура **root** вообще не найдет корень и выдаст об этом сообщение.

Особенности применения вычислительных блоков рассмотрим на примере решения системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + \sin(y) = 25, \\ y^2 - \cos(x) = 27 \end{cases}$$

Продemonстрируем решение этой система в пакете MathCAD:

$$x := 1 \quad y := 1$$

Given

$$x^3 + \sin(y) = 25$$
$$y^2 - \cos(x) = 27$$
$$\text{Find}(x, y) = \begin{bmatrix} 2.960 \\ 5.101 \end{bmatrix}$$

При использовании вычислительного блока необходимо учитывать следующие особенности:

1. Должны быть определены начальные приближения к корням (в данном примере $x := 1 \quad y := 1$).

2. В равенствах должны быть использованы знаки **тождественного равенства** (жирное равенство с Палитры отношений и логики). Кроме равенств система может включать и неравенства, образуемые знаками $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

3. Служебные слова **Given**, **Find** могут быть взяты из служебных слов, либо просто напечатаны.

Вычислительный блок **Given - Find** создает итерационную последовательность приближений к корню, начиная с заданного начального приближения. Полученное решение таково, что при подстановке его в уравнения правая и левая часть его отличается на величину **TOL** (**TOLerance** -

точность, погрешность). По умолчанию величина $TOL=10^{-3}$. Если требуется более точный результат, то величину **TOL** можно сменить либо в меню **MATH**→ **Options**, либо задав величину в рабочем листе, например $TOL:=10^{-8}$. (Имя переменной **TOL** записывается только в верхнем регистре).

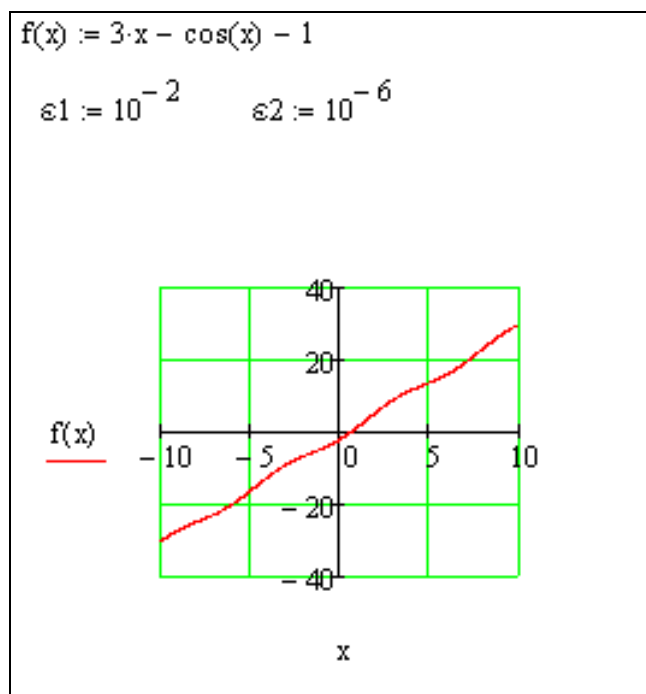
Правила записи вычислительного блока **Given - Minerr** такие же. Однако итерационная процедура поиска корней ориентирована на поиск решения, минимизирующего разность правой и левой части уравнений. Поэтому возможны ситуации, когда при одних и тех же начальных приближениях вычислительные блоки **Given - Minerr** и **Given - Find** приводят к разным решениям.

4.3.2 Графическое решение нелинейных уравнений

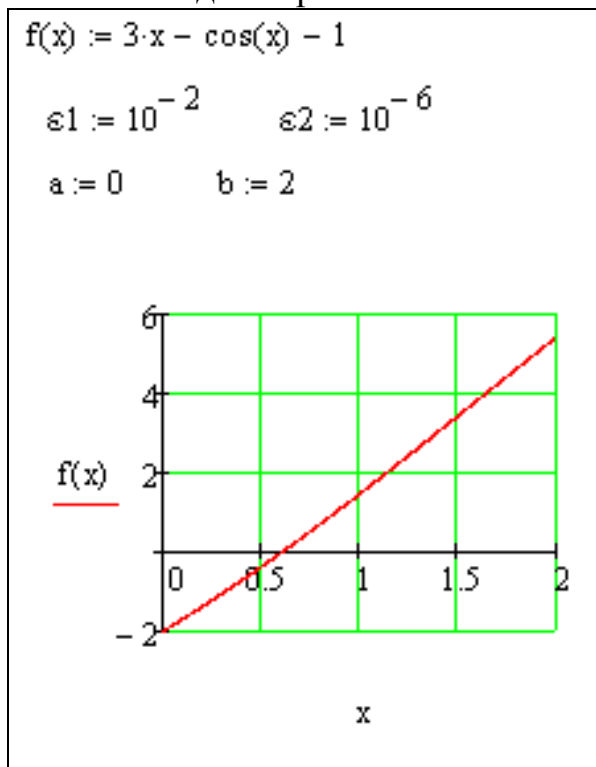
Графическое решение позволяет оценить местонахождение требуемого корня и выполнить этап отделения корней в соответствии с теоремой интервалов.

Данный этап выполняется в математическом пакете MathCAD.

1. Задаются исходные данные: функция, точность, границы интервала.
2. Строится график функции. По умолчанию график будет построен на интервале $[-10, 10]$. Это позволяет оценить количество и местонахождение корней.



3. Задаются границы интервала $[a, b]$ таким образом, чтобы теорема интервалов имела места только для первого положительного корня.



4.3.3 Решение нелинейного уравнения с использованием процедур пакета MathCAD

Для решения нелинейных уравнений могут быть использованы следующие процедуры MathCAD:

- root;
- вычислительный блок Given - Find (Дано - Найти);
- вычислительный блок Given - Minerr (Дано - Минимальная погрешность)/

На листинге фрагмента программы приведено использование двух первых процедур. Обе процедуры требуют задания начального значения. В обоих случаях заданы нулевые начальные условия.

```
x := 0
Given
f(x) = 0
Find(x) = 0.6071

t := 0
root(f(t), t) = 0.6071
```

Отметим, что полученные решения совпадают с графическим.

4.3.4 Решение нелинейного уравнения методом дихотомии

Для реализации метода дихотомии составлена программа на внутреннем языке создания пользовательских программ в Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем MathCAD.

На листинге программы приведен вызов пользовательской программы для двух точностей нахождения корня $\varepsilon_1=10^{-2}$ и $\varepsilon_2=10^{-6}$.

Полученные решения отличаются незначительно, однако решение, найденное за 21 итерацию, обеспечивают полное совпадение с точным значением. В пределах отображаемого количества знаков мантиссы.

$$f(x) := 3 \cdot x - \cos(x) - 1$$

$$\varepsilon_1 := 10^{-2} \quad \varepsilon_2 := 10^{-6}$$

$$a := 0 \quad b := 2$$

```
podel(a,b,ε) := 
$$\left| \begin{array}{l} n \leftarrow 0 \\ \text{while } |b - a| > \varepsilon \\ \quad n \leftarrow n + 1 \\ \quad c \leftarrow \frac{(a + b)}{2} \\ \quad \text{break if } f(c) = 0 \\ \quad b \leftarrow c \text{ if } f(a) \cdot f(c) < 0 \\ \quad a \leftarrow c \text{ otherwise} \end{array} \right|$$

$$\left( \begin{array}{c} n \\ c \end{array} \right)$$

```

$$\text{podel}(a,b,\varepsilon_1) = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 0.60156 \end{array} \right)$$

$$\text{podel}(a,b,\varepsilon_2) = \left(\begin{array}{c} 21 \\ 0.6071 \end{array} \right)$$

5. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ

После завершения изучения дисциплины студенты сдают зачет.

Зачетный билет включает вопросы и задания. Образец зачетного билета приведен в подразделе 5.2.

При определении результата зачета учитываются результаты выполненного индивидуального домашнего задания.

5.1. Вопросы для подготовки к зачёту

Раздел «Погрешности приближенного решения»

1. Что такое погрешности числа и вычислений?
2. Дайте определение погрешности.
3. Приведите определение абсолютной и относительной погрешности.
4. Укажите формы записи абсолютной погрешности.
5. Приведите определение значащих цифр числа.
6. Укажите форму записи числа с фиксированной запятой.
7. Укажите форму записи числа с плавающей запятой.
8. Напишите определение верных и сомнительных цифр числа.
9. Понятие точного и приближенного числа.
10. Привести примеры устранимой и неустранимой погрешности.
11. Указать основные источники погрешностей.
12. Привести формы записи абсолютной погрешности.
13. Как вычислить относительную погрешность, зная абсолютную?
14. Привести формы записи числа с фиксированной и плавающей запятой. Привести примеры записи.
15. Что такое сомнительные и верные цифры числа. Способы их вычисления.
16. Что такое значащие цифры числа.
17. Сформулировать основную задачу теории погрешностей.
18. Дать понятие разрядной сетки ЭВМ.
19. Погрешность математической модели.
20. Погрешность вычислительного метода.
21. Источники погрешности численного результата.
22. Погрешность округления ЭВМ.
23. Погрешность сложной функции.
24. Понятие вычислительного эксперимента.
25. Погрешность дискретизации.
26. Оценить абсолютную погрешность функции $F=x^2 - y-3$.

27. Сколько значащих цифр в числе 1223,0034.

28. Как влияет способ представления чисел в ЭВМ на точность расчетов.

Раздел «Численное интегрирование»

1. Дайте понятие первообразной.
2. Приведите понятие сетки узлов, шага сетки, частичного интервала.
3. Квадратурная формула формулу Ньютона-Котеса.
4. В чем состоит основная идея численного интегрирования.
5. Приведите формулы средних, левых и правых прямоугольников.
6. Приведите формулы трапеций и Симпсона.
7. Укажите оценку погрешности интегрирования по формуле остаточного члена.
8. В чем состоит принцип Рунге для оценки погрешности численного интегрирования.
9. Метод Монте-Карло для решения задачи численного интегрирования.
10. Модификации метода Монте-Карло для решения задачи численного интегрирования.
11. Каковы способы повышения точности при численном интегрировании.
12. Геометрическая интерпретация метода прямоугольников.
13. Влияние шага интегрирования на точность решения.
14. Геометрическая интерпретация метода трапеций.
15. Геометрическая интерпретация метода Симпсона.

Раздел «Решение нелинейных уравнений»

1. Назовите приближенные методы решения систем нелинейных уравнений.
2. Примеры алгебраических уравнений.
3. Определение трансцендентного уравнения, примеры.
4. Определение корня уравнения.
5. Для чего производится процедура отделения корней нелинейного уравнения и предварительное исследование уравнений. Примеры.
6. Основные понятия итерационного процесса.
7. Сформулируйте теорему о сходимости метода простых итераций.
8. Укажите классы нелинейных уравнений.
9. Приведите примеры алгебраических и трансцендентных уравнений.
10. Выделите этапы решения нелинейного уравнения.
11. Какие существуют методы отделения корней нелинейного уравнения.

12. Перечислите интервальные методы нахождения корней.
13. Сформулируйте теорему интервалов.
14. Приведите геометрическую иллюстрацию метода дихотомии.
15. Приведите геометрическую иллюстрацию метода хорд.
16. Приведите геометрическую иллюстрацию метода касательных (Ньютона).
17. Приведите геометрическую иллюстрацию метода простых итераций для решения нелинейных уравнений.
18. Дайте понятие итерационного процесса, сходимости и погрешности методов.
19. Приведите достаточные условия метода простых итераций для решения нелинейного уравнения и систем нелинейных уравнений.
20. Правило останова итерационных методов решения нелинейных уравнений.
21. Условия сходимости метода простых итераций.
22. Вычислительные (решающие) блоки ППП MathCAD для решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.
23. Геометрическая интерпретация сходимости метода простых итераций.
24. Методы решения систем нелинейных уравнений.
25. Метод дихотомии для решения нелинейных уравнений.
26. Метод хорд для решения нелинейных уравнений.
27. Метод касательных (Ньютона) для решения нелинейных уравнений.
28. Метод простых итераций для решения нелинейных уравнений.
29. Опишите основные свойства прямых и итерационных методов решения уравнений.
30. Что понимают под сходимостью итерационной процедуры. Примеры.
31. Поясните, что такое скорость сходимости и как она связана с эффективностью метода.

Раздел «Численные методы линейной алгебры»

1. Основные задачи линейной алгебры.
2. Прямые и итерационные методы решения СЛАУ.
3. Метод исключения Гаусса.
4. Задачи, сопутствующие реализации метода Гаусса.
5. Итерационные методы решения СЛАУ.
6. Достаточные условия сходимости итерационных методов решения СЛАУ.

7. Метод Якоби для решения СЛАУ.
8. Решение задач линейной алгебры в ППП MathCAD.
9. Приведите достаточные условия сходимости метода Якоби (теорема) для решения СЛАУ.
10. Дайте определение нормы матрицы.
11. Приведите примеры норм матриц.
12. Укажите условия сходимости метода Якоби для решения СЛАУ.
13. Методика приведения СЛАУ к сходящемуся виду.
14. Дайте сравнительную оценку методам решения СЛАУ.
15. Чем точные методы решения СЛАУ отличаются от приближенных?
16. В каких случаях целесообразно использовать итерационные методы решения СЛАУ?
17. Что влияет на скорость сходимости итерационного процесса?
18. В чем сущность метода итерации для решения СЛАУ, как еще называют этот метод?
19. Сформулируйте достаточные условия сходимости метода Зейделя для решения СЛАУ.
20. Назовите особенности метода Зейделя.
21. Назовите функции для решения систем уравнений в MathCAD и особенности их применения.
22. Метод Зейделя для решения СЛАУ.
23. Основная идея метода Гаусса с выбором главного элемента.
24. Вычисление обратной матрицы по методу Гаусса.
25. Основные классы методов решения СЛАУ.
26. Вычисление определителя по методу Гаусса.
27. Как организовать контроль прямого хода метода Гаусса.
28. Как организовать контроль обратного хода метода Гаусса.

Раздел «Решение дифференциальных уравнений»

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение и уравнение в частных производных.
2. Задача Коши и краевая задача.
3. Методы Рунге-Кутты.
4. Формулы Рунге-Кутты 1, 2 и 4-го порядка.
5. Погрешность задачи Коши.
6. Решение дифференциальных уравнений высокого порядка.
7. Решение систем дифференциальных уравнений.
8. Дайте определение задачи Коши.
9. Дайте определение краевой задачи.

10. Приведите классификацию дифференциальных уравнений.
11. В чем разница между аналитическим и численным решением дифференциального уравнения.
12. Сформулируйте постановку задачи Коши.
13. В чем состоит основная идея методов Рунге-Кутты.
14. Определите локальную и глобальную погрешность задачи Коши.
15. Запишите формулы Рунге-Кутты 1 и 2-го порядков.
16. Запишите формулы Рунге-Кутты 1 и 4-го порядков.
17. В чем состоит идея метода Рунге-Кутты с адаптивным шагом.
18. В чем состоит идея решения дифференциального уравнения высокого порядка.
19. Какие известны процедуры решения задачи Коши в ППП MathCAD.
20. Методы Рунге для решения задачи Коши (идея и особенности).
21. Метод Эйлера для решения задачи Коши.
22. Принцип Рунге для оценки шага при решении задачи Коши.
23. Источники погрешности методов Рунге-Кутты.

Раздел «Задачи аппроксимации»

1. Основные задачи аппроксимации функций.
2. Понятие интерполяции данных, критерий интерполяции.
3. Фильтрация и сглаживание данных.
4. Регрессионное уравнение.
5. Метод наименьших квадратов.
6. Экстраполяция данных.
7. Показатели эффективности аппроксимации.
8. Приведите понятие аппроксимации функций.
9. Приведите понятие интерполирования данных (глобальная и локальная интерполяция).
10. Что такое сглаживание данных.
11. Что такое экстраполяция данных.
12. Что такое аппроксимация экспериментальных или табличных данных.
13. В чем разница между глобальной и локальной интерполяцией.
14. Что такое экстраполяция и прогноз данных.
15. В чем состоит основная идея сплайн аппроксимации.
16. Критерий метода наименьших квадратов.
17. Укажите основные показатели качества аппроксимации.
18. Процедуры интерполирования данных в ППП MathCAD
19. Понятие регрессионного уравнения.



- 20. Что такое базисные функции? Пример базисных функций.
- 21. Суть метода наименьших квадратов.
- 22. Понятие аппроксимации.
- 23. Показатели эффективности приближения данных.

5.2. Образец билета для зачета

Билет № ____
по дисциплине «Вычислительная математика»

- 1. Приведите геометрическую иллюстрацию метода трапеций для решения задачи численного интегрирования.
- 2. Требуется округлить число $X^* = 0,50156 \pm 0,00231$. Отбросить сомнительные цифры и оставить только верные знаки.
- 3. В чем разница между глобальной и локальной интерполяцией? Пояснить графически.



6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Литература обязательная

1. Бахвалов Н.С. Численные методы: учебное пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков; МГУ. – 6-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
3. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование: учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш.шк., 1990. – 544 с.
4. Волков Е.А. Численные методы: учебное пособие для вузов / Е. А. Волков. – 4-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2007. – 256 с
5. Воробьева Г.Н. Практикум по вычислительной математике: учебное пособие/ Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова.– 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1990.
6. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики: учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – 5-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2006. – 672 с.
7. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики/ Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966.
8. Дробышев В.И. Задачи по вычислительной математике/ В.И. Дробышев, В.П. Дымников, Г.С. Ривин. – М.: Наука, 1980.
9. Дьяконов В.П. Компьютерная математика: теория и практика / В. П. Дьяконов. – М.: Нолидж, 2001. – 1295 с.
10. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. – М.; Просвещение, 1990. – 176 с.
11. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций/ Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980.
12. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
13. Каханер Д. Численные методы и математическое обеспечение: пер. с англ./ Д. Каханер, К. Моулера, С. Нэш. – М.: Мир, 1998.
14. Крылов В.И. Вычислительные методы, Т.1,2/ В.И. Крылов, В.В. Бабков, П.И. Монастырский. – М.: Наука, 1976, 1977.
15. Маликов В.Т. Вычислительные методы и применение ЭВМ: учеб. пособие/ В.Т. Маликов, Р.Н. Кветный. – Киев: Выща школа. Головное изд-во, 1989.
16. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989.

- 17.Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. – Томск: МП «Раско», 1991.
- 18.Ортега Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений: пер. с англ.; под ред. А.А. Абрамова/ Дж. Ортега, У. Пул. – М.: Наука. Гл. физ.-мат. лит., 1986. – 288 с.
- 19.Самарский А.А. Численные методы/ А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
- 20.Соболь И.М. Численные методы Монте – Карло. – М.: Наука, 1985.
- 21.Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок: пер. с англ. – М.: Мир, 1985.
- 22.Турчак Л.И. Основы численных методов: учеб. пособие / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
- 23.Формалев В.Ф. Численные методы: учебник / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников; под ред. А.И. Кибзуна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400с.
- 24.Шикин Е.В. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей/ Е.В. Шикин, А.И. Плис. – М.: ДИАЛОГ–МИФИ, 1996.

6.2. Литература дополнительная

25. Бакланова Л.В. Лабораторный практикум по численным методам: учебное пособие/ Л.В.Бакланова, А.С. Огородников, В.В. Офицеров.– Томск: Изд. ТПИ, 1990.- 96с.
26. Кочегурова Е.А. Вычислительная математика: учебное пособие / сост. Е.А. Кочегурова; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 116 с.
27. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. MathCAD 7 в математике, в физике и в Internet. – М.: Нолидж.- 1998. – 352 с.
28. Кацман Ю.Я. Прикладная математика. Численные методы: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2000.
29. Очков В.Ф. MathCAD 8 Pro для студентов и инженеров. – М.: КомпьютерПресс, 1999.
30. Очков В.Ф. MathCAD 7 Pro для студентов и инженеров. – М.: КомпьютерПресс, 1998. – 384 с.
31. Плис А.И. MathCAD: математический практикум/ А.И. Плис, Н.А. Сливина. – М.: Финансы и Статистика. – 1999.
32. Вычислительная математика: методические указания к практическим занятиям для студентов ИДО напр. 230100 «Информатика и вычислительная техника» / сост. Е.А. Кочегурова. - Томск: Изд-во ТПУ, 2012. - 32 с.



6.3. Web-ресурсы

33.Образовательный математический сайт.— Режим доступа: www.exponenta.ru, вход свободный.

34.Сайт кафедры АиКС — Режим доступа: <http://www.aics.ru/books.shtml?action=showbookcont&id=132>, вход свободный.

35.Образовательный портал.— Режим доступа: www.wikibooks.org, вход свободный.

36.Образовательный портал.— Режим доступа: www.intuit.ru, вход свободный.





Учебное издание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и индивидуальные задания

Составитель

КОЧЕГУРОВА Елена Алексеевна

Рецензент

*кандидат технических наук,
доцент кафедры АиКС ИК*

И.В. Цанко

Редактор

Компьютерная верстка *В.П. Зимин*

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать Хероx. Усл.печ.л. 2,15. Уч.-изд.л. 1,95.

Заказ . Тираж экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества

Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО



ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.

Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru

