МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ВСЕРОССИЙСКИЙ ЗАОЧНЫЙ ИНСТИТУТ
ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Одобрено кафедрой
Электротехники

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Задание на контрольную работу № 3
с методическими указаниями
для студентов III курса

специальностей

1004. ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЕ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

[illegible]. ЛОКОМОТИВЫ

2102. АВТОМАТИКА, ТЕЛЕМЕХАНИКА И СВЯЗЬ
НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ

Москва — 1992

Рецензент — канд. техн. наук, доц. Ю. П. ЧЕБОТАРЕВ

Д-р техн. наук, проф. М. В. ТАРНИЖЕВСКИЙ,
кандидаты техн. наук, доценты Ю. Г. КРАВЦОВ, Ю. М. НИКИТИН,
Л. А. ЧАСТОЕДОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Задание на контрольную работу № 3

Редактор Г. В. Тимченко
Техн. редактор Н. Н. Соловьева
Корректор Т. А. Царикова

Сдано в набор 25.11.1992. Подписано в печать 21.04.1992. Тираж 2400.
Гарнитура литературная. Печать высокая. Формат. 60×90^1/$_{16}$.
Печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,75. Тип. зак. 1237. Изд. зак. 43. Бесплатно.

Редакционно-издат. отдел, типографии ВЗИИТа.
125808, Москва, ГСП-47, Часовая ул., 22/2

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В третьей контрольной работе студенты выполняют три задачи:

1. Расчет линейной электрической цепи при несинусоидальных напряжениях и токах.
2. Расчет переходных процессов в линейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами при постоянном напряжении источника питания.
3. Расчет переходных процессов в линейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами при включении ее на синусоидальное напряжение.

Контрольные задания имеют 100 вариантов. Варианты одного и того же задания отличаются друг от друга схемами и числовыми значениями заданных величин. Исходные расчетные данные к задачам определяют по двум последним цифрам шифра студента: по предпоследней цифре выбирается схема цепи, а по последней цифре — числовые значения величин и форма кривой ЭДС (в первой задаче).

Указания к выполнению и оформлению контрольных работ изложены в рабочих программах курсов «Теоретические основы электротехники» и «Основы теории электрических цепей».

Студенты-заочники обязаны тщательно изучить все материалы данных методических указаний, соблюдать изложенные в них требования при выполнении и оформлении контрольных работ.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Ч. 1 и 2. М.: Высшая школа, 1984.
2. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. В 2-х т. Изд. 3-е. Л.: Энергия, 1981.
3. Теоретические основы электротехники / Под ред. П. А. Ионкина. Т. 1 и 2. М.: Высшая школа, 1976.
4. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / Под ред. Л. А. Бессонова. М.: Высшая школа, 1980.
5. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. М.: Высшая школа, 1982.

Зак. 1237

Дополнительная

6. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи. Ч. 1. М.: Энергия, 1978.
7. Атабеков Г. И., Купалян С. Д., Тимофеев А. Б., Хухриков С. С. Теоретические основы электротехники. Ч. 2 и 3. М.: Энергия, 1979.
8. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы теории цепей. М.: Энергия, 1975.
9. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. М.: Высшая школа, 1981.
10. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. М.: Высшая школа, 1977.

Задача № 1

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ И ТОКАХ

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАЧИ

На рис. 1 показана цепь с источником периодической несинусоидальной ЭДС. График функции $e=f(\omega t)$ изображен на рис. 2. Амплитуда ЭДС, угловая частота первой гармоники и параметры цепи даны в табл. 1.

Для расчета данной цепи необходимо:

1. Разложить аналитически в ряд Фурье заданную периодическую несинусоидальную ЭДС $e=f(\omega t)$, ограничившись вычислением первых трех гармоник; написать уравнение мгновенного значения ЭДС.
2. Определить действующее значение несинусоидальной ЭДС, заданной графиком на рис. 2.
3. Вычислить действующее значение тока на неразветвленном участке цепи и записать закон его изменения $i=f(\omega t)$ с учетом указанных выше членов разложения в ряд Фурье.
4. Построить график тока на неразветвленном участке цепи. На графике показать первые три гармоники и суммарную кривую, получаемую в результате графического сложения отдельных гармоник.
5. Определить активную, реактивную, полную мощности цепи.

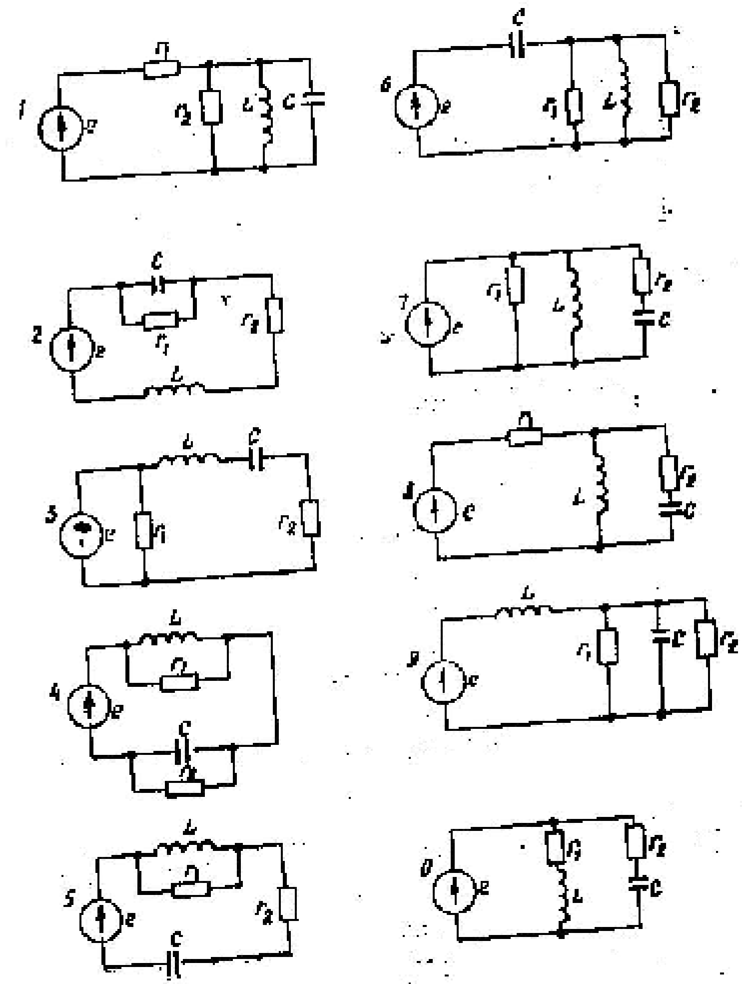


Рис. 1

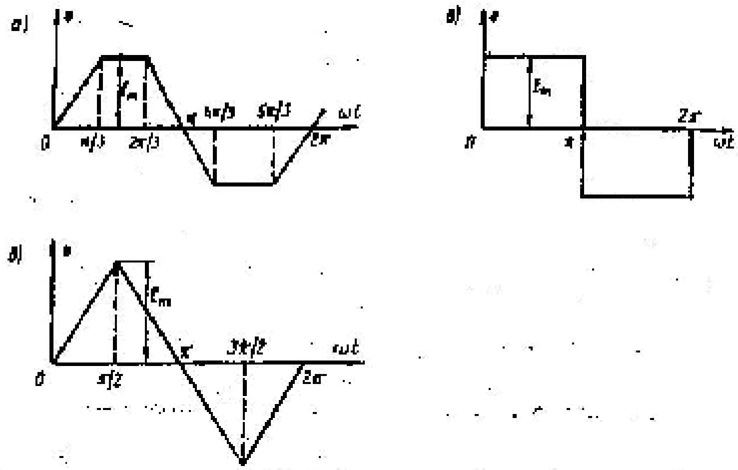


Рис. 2

Таблица 1

Числовые данные параметров схемы

Последняя цифра шифра	Форма кривой ЭДС	E_m, В	ω, $\frac{рад}{с}$	r_1, Ом	r_2, Ом	L, мГн	C, мкФ
1	рис. 2, а	100	1000	25	70	15	40
2	рис. 2, б	50	1000	10	10	10	20
3	рис. 2, в	60	5000	40	35	12	5
4	рис. 2, а	120	5000	120	90	20	2,5
5	рис. 2, а	80	10000	45	65	4	3,33
6	рис. 2, б	150	1000	20	25	20	40
7	рис. 2, в	100	5000	35	40	6	5
8	рис. 2, в	80	1000	15	20	15	20
9	рис. 2, а	120	5000	100	100	20	2
0	рис. 2, б	150	10000	25	30	4	1

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для выполнения расчета электрической цепи с источника-ми периодической несинусоидальной ЭДС необходимо задан-ную ЭДС разложить в ряд Фурье, вычислить первые три гармоники. Разложение в ряд Фурье заданных кривых приве-дено в прил. 1.

Токи в ветвях и напряжения на участках цепи определя-ются отдельно для каждой гармонической составляющей. При этом следует помнить, что для гармоники порядка K индуктивное и емкостное сопротивления будут иметь значе-ния:

$$X_{LK} = K\omega L; \qquad X_{CK} = \frac{1}{K\omega C}.$$

Токи отдельных гармоник определяются комплексным методом.

Действующие значения несинусоидального напряжения и тока не зависят от начальных фаз гармоник и определяются по действующим значениям их гармонических составляющих:

$$U = \sqrt{U^2_0 + U^2_1 + U^2_2 + \dots} = \sqrt{U^2_0 + \frac{U^2_{1m}}{2} + \frac{U^2_{2m}}{2} + \dots}$$

$$I = \sqrt{I^2_0 + I^2_1 + I^2_2 + \dots} = \sqrt{I^2_0 + \frac{I^2_{1m}}{2} + \frac{I^2_{2m}}{2} + \dots}$$

Активная, реактивная и полная мощности цепи определя-ются по формулам:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{K=1}^{\infty} U_K I_K \cos\varphi_K.$$

$$Q = \sum_{K=1}^{\infty} U_K I_K \sin\varphi_K.$$

$$S = UI.$$

При построении волновой диаграммы токов следует пом-нить, что положительные начальные фазы гармоник откла-дываются влево, а отрицательные вправо от начала коорди-нат. Начальная фаза откладывается в масштабе, соответст-вующем порядку гармоники. Если масштаб для первой гар-моники $m_{\alpha 1} = 2$ град/мм, то для третьей — $m_{3\alpha 1} = 6$ град/мм, а для пятой — $m_{5\alpha 1} = 10$ град/мм.

Задача № 2

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ЭДС ИСТОЧНИКА ПИТАНИЯ

В электрической цепи (рис. 3) в результате коммутации возникает переходный процесс. Параметры цепи для каждого варианта приведены в табл. 2, постоянная ЭДС источника $E=120$ В.

Определить закон изменения во времени тока $i_1(t)$ и построить его график.

Примечание. Студенты специальности АТС решают задачу № 2 классическим и операторным методами. Студенты специальностей ЭПС и ЭНС решают задачу № 2 классическим методом.

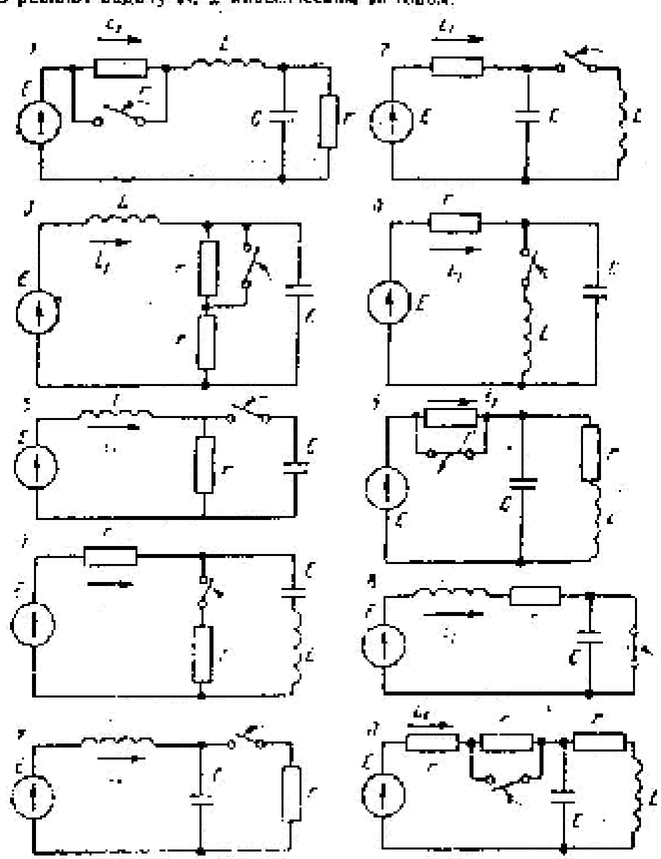


Рис. 3

Таблица 2

Номер строки	r, Ом	L, Гн	C, мкФ
1	10	0,1	100
2	8	0,02	31,3
3	6	0,06	83,3
4	25	0,025	50
5	48	0,06	200
6	8	0,05	100
7	5	0,1	120
8	10	0,08	100
9	15	0,1	40
0	10	0,05	50

Задача № 3

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ВКЛЮЧЕНИИ ЕЕ НА СИНУСОИДАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Разветвленная электрическая цепь (рис. 4) включается на синусоидальное напряжение $u=U_m \sin(\omega t+\psi)$.

Определить закон изменения во времени тока $i_1(t)$ и построить его график, если включение производится в момент времени $t=0$. Угловая частота $\omega=314$ рад/с. Амплитуда U_m, начальная фаза ψ напряжения и параметры цепи приведены в табл. 3. Задачу решать операторным методом.

Примечание. Задачу № 3 решают студенты специальностей ЭПС и ЭНС.

Таблица 3

Номер строки	U_m, В	ψ, град	r_1, Ом	r_2, Ом	L_1, Гн	L_2, Гн	C_1, мкФ	C_2, мкФ
1	150	30	10	20	0,01	0,016	100	150
2	200	−45	14	28	0,012	0,02	80	120
3	180	0	20	30	0,02	0,03	[illegible]	100
4	120	60	12	24	0,01	0,015	100	120
5	100	90	25	50	0,05	0,07	40	60
6	250	−20	25	40	0,04	0,07	60	100
7	160	45	20	36	0,012	0,01	80	120
8	100	−60	19	20	0,012	0,015	100	150
9	140	70	15	25	0,01	0,02	80	100
0	200	20	20	40	0,02	0,03	50	75

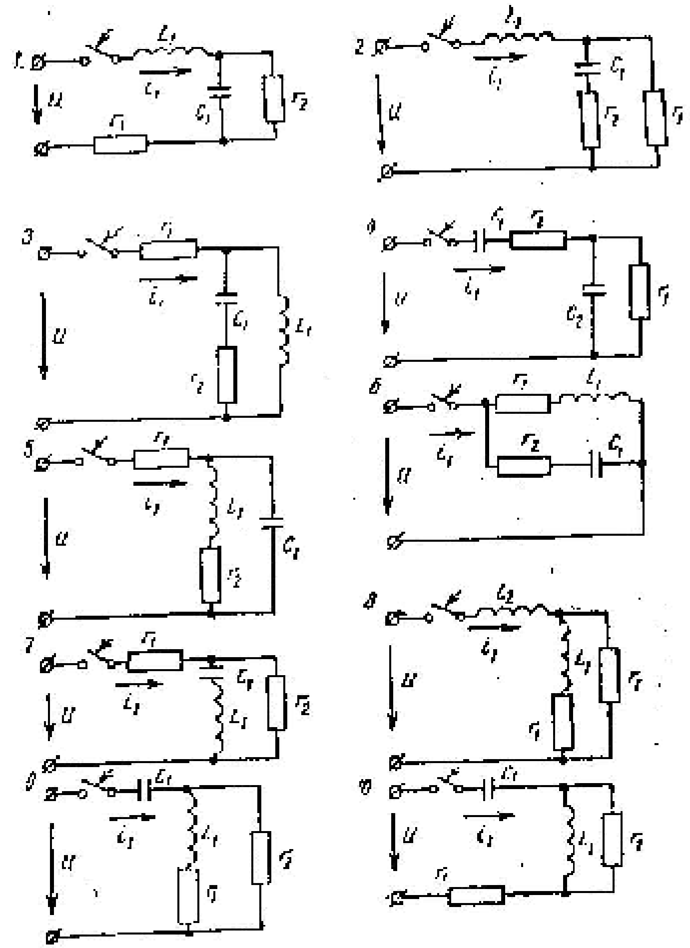


Рис. 4

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Переходные процессы возникают в электрических цепях при переходе от одного установившегося режима работы к другому установившемуся режиму. Смена режимов происходит в результате коммутаций (включение, выключение, переключение, изменение параметров цепи и т. п.). Классический метод расчета переходных процессов сводится к следующему:

1. На схеме цепи после коммутации указывают положительные направления токов в ветвях. Затем на основании законов Кирхгофа составляют систему уравнений для мгновенных значений токов и напряжений переходного режима. Так как падение напряжения на сопротивлении $u_r = ri$, на индуктивности $u_L = L\frac{di}{dt}$ и на емкости $u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$, то по законам Кирхгофа будет составлена система интегрально-дифференциальных уравнений заданной цепи.

2. Полученную систему уравнений решают относительно искомой функции (тока или напряжения). В результате получают неоднородное линейное дифференциальное уравнение, порядок которого равен числу независимых мест накопления энергии. В случае двух независимых мест накопления энергии в схеме линейное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$a\frac{d^2 i}{dt^2} + b\frac{di}{dt} + ci = f(u),$$

где a, b, c — коэффициенты, зависящие от параметров цепи;
$f(u)$ — неоднородный член уравнения, зависящий от величины и формы приложенного к цепи напряжения.

3. Решают неоднородное линейное дифференциальное уравнение, в результате чего находят искомый ток или напряжение переходного процесса.

Решение дифференциального уравнения складывается из общего решения однородной части этого уравнения (правая часть равна нулю) и частного решения неоднородного уравнения, определяемого видом функции $f(u)$.

Частное решение выражает принужденный режим, задаваемый источниками энергии, а общее решение — свободный режим. Таким образом, ток переходного процесса $i = i_{пр} + i_{св}$, а напряжение $u = u_{пр} + u_{св}$. Принужденные составляющие токов и напряжений совпадают с установившимися значениями этих величин после окончания переходных процессов и определяются при помощи методов, изученных в первой части курса ТОЭ.

Характер переходного процесса зависит от параметров цепи и определяется корнями характеристического уравнения

$$ap^2+bp+c=0.$$

Если корни вещественные, отрицательные и разные ($p_1<0$, $p_2<0$), то режим будет апериодическим, свободная составляющая тока запишется в виде:

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Если корни комплексные и сопряженные ($p_1 = -\delta + j\omega_1$; $p_2 = -\delta - j\omega_1$), то в цепи будет колебательный режим, свободная составляющая тока

$$i_{св} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \gamma).$$

При наличии равных отрицательных корней ($p_1 = p_2 = -p < 0$) возникает критический режим, при котором $i_{св} = (A_1 + A_2 t) e^{pt}$.

Для определения постоянных интегрирования A, A_1, A_2, γ необходимо определить ток и его производную в момент коммутации ($t=0$). Для этого сначала определяют начальные значения тока на участках цепи с индуктивностью и напряжения на участках с емкостью путем расчета цепи до коммутации и использования законов коммутации. Подставляя эти значения в исходные дифференциальные уравнения и полагая $t=0$, определяют начальные значения токов в остальных ветвях.

Производная от тока в индуктивности находится непосредственно из уравнения, написанного для контура, в который входит ветвь с индуктивностью. Производные от токов в других ветвях схемы определяются из уравнения, в котором нет ветви с индуктивностью, после его дифференцирования и перехода к $t=0$, причем напряжение на конденсаторе нужно писать в форме интеграла:

$$u_C = \frac{1}{C}\int i_C\,dt,$$

что дает

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C}.$$

В некоторых случаях нужно использовать и первый закон Кирхгофа для производных от токов:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}.$$

Характеристическое уравнение находится из входного сопротивления схемы в операторной форме.

Операторный метод расчета переходных процессов заключается в том, что функция $f(t)$ [обычно ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$] вещественного переменного t (времени), называемая оригиналом, заменяется соответствующей функцией $F(p)$ комплексного переменного p, называемой изображением. Указанные функции связаны соотношением $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$, называемым прямым преобразованием Лапласа.

Сокращенно

$$F(p) \doteq f(t).$$

При переходе к изображениям дифференциальные и интегральные уравнения преобразуются в алгебраические.

Постоянное напряжение U будет записываться в операторной форме как U/p:

$$U(p) = \frac{U}{p}.$$

Изображение гармонического напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ будет

$$U(p) = U_m \frac{p\sin\psi + \omega\cos\psi}{p^2 + \omega^2}.$$

Пользуясь комплексными числами, гармоническое напряжение

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi)$$

можно представить как мнимую часть полного комплекса

$$U_m e^{j(\omega t + \psi)}, \text{ т. е.}$$

$$u = Im\,[U_m \cdot e^{j(\omega t + \psi)}].$$

В этом случае изображение гармонического напряжения значительно упрощается и имеет вид

$$U(p)=\frac{U_m\cdot e^{j\psi}}{p-j\omega}.$$

Операторные сопротивления цепей записываются так же, как и сопротивления для тех же цепей в комплексной форме, в которых $j\omega$ заменено на p. Так для цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов r, L и C, операторное сопротивление

$$Z(p)=r+pL+\frac{1}{p\cdot C}.$$

Напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости в операторной форме:

$$U_r(p)=rI(p);$$

$$U_L(p)=pLI(p)-Li(0);$$

$$U_C(p)=\frac{1}{pC}I(p)+\frac{u_C(0)}{p},$$

где $i(0)$ и $u_C(0)$ — начальные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости.

Уравнения для изображений тока и напряжения любой цепи могут быть получены по законам Ома и Кирхгофа, записанным для операторных схем замещения. Полученную систему уравнений в операторной форме решают относительно изображения искомого тока или напряжения. В общем случае выражение для тока в любой ветви в операторной форме имеет вид

$$I(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

где $F_1(p)$ и $F_2(p)$ — алгебраические многочлены, степени которых соответственно равны m и n, причем $m<n$.

Переход от изображения к оригиналу осуществляется при помощи теоремы разложения:

$$i(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)}e^{p_k t},$$

где p_k — корни уравнения $F_2(p)=0$;
n — число корней;
$F_1(p_k)$ — значение функции $F_1(p)$ при $p=p_k$;
$F'_2(p_k)$ — значение производной функции $F_2(p)$ при $p=p_k$.

Теорема разложения в представленном выше виде действительна только для некратных корней. В случае, когда знаменатель $F_2(p)$ имеет кратные корни (p_1 кратности m_1, p_2 кратности m_2, ... p_n кратности m_n), оригинал вычисляется по формуле

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\doteq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\cdot\frac{F_1(p)\cdot e^{pt}}{\dfrac{F_2(p)}{(p-p_k)^{m_k}}}\right]_{p=p_k}.$$

Выражение, стоящее в знаменателе квадратной скобки, надо сначала сократить на $(p-p_k)^{m_k}$ и лишь после этого дифференцировать.

Для случаев подключения источника постоянного или гармонического напряжения к пассивной цепи с входным операторным сопротивлением $Z(p)$ на основании теоремы разложения получены простые расчетные формулы, называемые формулами включения.

При включении на постоянное напряжение ток в цепи

$$i(t)=\frac{U}{Z(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{U}{p_k Z'(p_k)}e^{p_k t},$$

где p_k — корни уравнения $Z(p)=0$.

При включении цепи на синусоидальное напряжение

$$u=U_m\sin(\omega t+\psi)$$

оригинал тока

$$i(t)=\mathrm{Im}\left[\frac{U_m e^{j(\omega t+\psi)}}{Z(j\omega)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{U_m e^{j\psi}}{(p_k-j\omega)Z'(p_k)}e^{p_k t}\right].$$

где U_m — амплитуда приложенного напряжения;
ψ — начальная фаза приложенного напряжения;
$Z(j\omega)$ — полное сопротивление цепи в комплексной форме;
$Z'(\omega)$ — производная операторного сопротивления при $p = j\omega$.

Знак Im означает, что от полученного комплексного уравнения берется коэффициент при мнимой части.

Пример 1.

В электрической цепи (рис. 5) сопротивления $r_0 = r = 50$ Ом, индуктивность $L = 0{,}25$ Гн, емкость $C = 50$ мкФ. Постоянное напряжение источника $U = 100$ В. Определить закон изменения переходного тока на неразветвленном участке цепи и построить его графики. Задачу решить классическим и операторным методами.

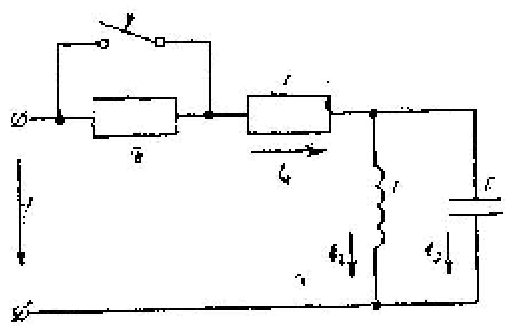


Рис. 5

Решение классическим методом

1. Расчет режима до коммутации (контакты разомкнуты).
Токи в ветвях цепи:

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{U}{r_0 + r} = 1\ A; \qquad i_3(0_-) = 0,$$

напряжение на конденсаторе $u_C(0_-) = 0$.
По первому закону коммутации $i_2(0) = i_2(0_-) = 1\ A$;
по второму закону коммутации $u_C(0) = u_C(0_-) = 0$.

2. Расчет принужденного режима после коммутации (контакты замкнуты).

Токи в ветвях цепи:

$$i_{1\,пр} = i_{2\,пр} = \frac{U}{r} = 2\ A; \qquad i_{3\,пр} = 0.$$

3. Расчет искомого тока и его производной для момента коммутации ($t = 0$).

По законам Кирхгофа составляем уравнения для схемы после коммутации:

$$i_1 = i_2 + i_3; \tag{1}$$

$$U = r\,i_1 + L\frac{d\,i_2}{d\,t}; \tag{2}$$

$$U = r\,i_1 + \frac{1}{C}\int i_3\,d\,t. \tag{3}$$

Используя уравнение (3) для момента $t = 0$ с учетом того, что $u_C(0) = 0$, найдем: $i_1(0) = \frac{U}{r} = 2\ A$. Из уравнения (1) при $t = 0$ вычислим $i_3(0) = i_1(0) - i_2(0) = 1\ A$.

Найдем производную искомого тока. Для этого продифференцируем уравнение (3):

$$0 = r\frac{d\,i_1}{d\,t} + \frac{i_3}{C}.$$

Откуда

$$\frac{d\,i_1}{d\,t} = -\frac{i_3}{r\,C}.$$

Следовательно,

$$\left.\frac{d\,i_1}{d\,t}\right|_{t=0} = -\frac{i_3(0)}{r\,C} = -400\ A/c.$$

4. Определение корней характеристического уравнения.
Входное сопротивление для схемы после коммутации в операторной форме приравняем нулю:

$$Z(p) = r + \frac{L\,p\,\frac{1}{C\,p}}{L\,p + \frac{1}{C\,p}} = r + \frac{L\,p}{L\,C\,p^2 + 1} = \frac{r\,L\,C\,p^2 + r + L\,p}{L\,C\,p^2 + 1} = 0.$$

Характеристическое уравнение $rLCp^2 + Lp + r = 0$,
или

$$p^2 + \frac{1}{r\,C}\cdot p + \frac{1}{L\,C} = 0$$

имеет два корня:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2rC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2rC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

После подстановки численных значений заданных величин получим:

$$p_1 = -200 + j\,200;$$

$$p_2 = -200 - j\,200.$$

Так как корни характеристического уравнения получились сопряженными комплексными числами, то переходный процесс в электрической цепи будет иметь колебательный характер.

5. Определение постоянных интегрирования и закона изменения по времени искомого тока.

Переходный ток на неразветвленном участке цепи

$$i_1 = i_{1\,\text{п}} + i_{1\,\text{св}} = i_{1\,\text{пр}} + A\,e^{-\delta t}\sin(\omega_1 t + \gamma).$$

а его производная

$$\frac{di_1}{dt} = -\delta A e^{-\delta t}\sin(\omega_1 t + \gamma) + A\omega_1 e^{-\delta t}\cos(\omega_1 t + \gamma).$$

Находим значения тока и его производной для момента времени $t=0$:

$$i_1(0) = i_{1\,\text{пр}} + A\sin\gamma;$$

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = -\delta A\sin\gamma + A\omega_1\cos\gamma.$$

После подстановки численных значений получим систему двух уравнений

$$2 = 2 + A\sin\gamma;$$

$$-400 = -200\,A\sin\gamma + A\,200\cos\gamma.$$

Совместное решение этих уравнений дает $A = -2$, $\gamma = 0$. Следовательно, искомый ток

$$i_1 = 2 - 2\,e^{-200t}\sin 200t.$$

Для построения графика $i_1(t)$ вычислим мгновенные значения тока для различных моментов времени, начиная от нуля, через каждую миллисекунду в пределах до одного полупериода. Результаты расчета сведем в табл. 4. График тока $i_1(t)$ построен на рис. 6.

Таблица 4

t, мс	$200t$, рад	e^{-200t}	$200t$, град.	$\sin 200t$	$i_1 = 2 - 2e^{-200t}\sin 200t$, А
0	0	1	0	0	2
1	0,2	0,819	11,47	0,199	1,675
2	0,4	0,670	22,93	0,388	1,481
3	0,6	0,549	34,40	0,564	1,381
4	0,8	0,449	45,86	0,717	1,357
5	1,0	0,368	57,33	0,843	1,390
6	1,2	0,301	68,80	0,933	1,439
7	1,4	0,247	80,27	0,986	1,513
8	1,6	0,202	91,74	1,000	1,596
9	1,8	0,165	103,21	0,973	1,679
10	2,0	0,135	114,66	0,909	1,755
11	2,2	0,111	126,13	0,807	1,821
12	2,4	0,091	137,60	[illegible]	1,877
13	2,6	0,074	149,07	0,517	1,924
14	2,8	0,061	160,54	0,334	1,960
15	3,0	0,050	171,90	0,139	1,987
16	3,2	0,041	183,44	−0,061	2,005
17	3,4	0,033	194,91	−0,256	2,016
18	3,6	0,027	206,38	−0,444	2,024
19	3,8	0,022	217,85	−0,613	2,027
20	4,0	0,018	229,32	−0,759	2,025

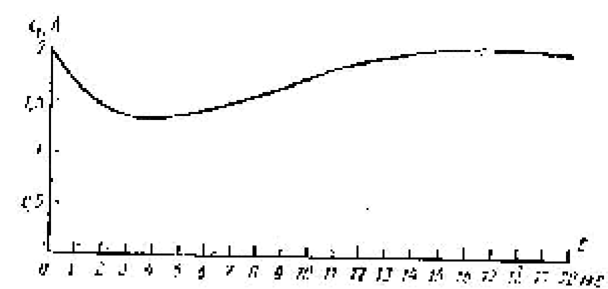


Рис. 6

Решение операторным методом

Начальные условия переходного процесса в электрической цепи определены в первом пункте предыдущего расчета: $i_2(0)=1$ А, $u_C(0)=0$. С учетом этого составим операторную схему замещения цепи (рис. 7) и напишем для нее уравнения по законам Кирхгофа:

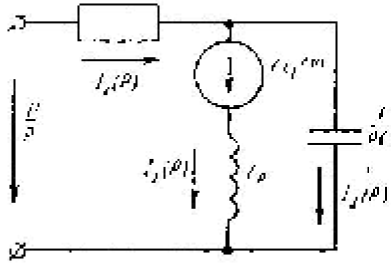


Рис. 7

$$I_1(p)=I_2(p)+I_3(p);$$

$$rI_1(p)+LpI_2(p)=\frac{U}{p}+Li_2(0);$$

$$rI_1(p)+\frac{1}{Cp}I_3(p)=\frac{U}{p}.$$

Решив эту систему относительно тока $I_1(p)$, получим:

$$I_1(p)=\frac{LCUp^2+Li_2(0)p+U}{LCrp^3+Lp^2+rp}.$$

После подстановки числовых значений получим:

$$I_1(p)=\frac{2p^2+400p+160\,000}{p^3+400p^2+80\,000p}=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Для нахождения оригинала определим корни знаменателя, для чего приравняем его к нулю:

$$p^3+400p^2+80\,000p=0;$$

$$p_1=0;\ p_2=-200+j200;\ p_3=-200-j200.$$

Так как знаменатель имеет три корня, то сумма в формуле разложения состоит из трех слагаемых:

$$i_1(t)=\frac{F_1(p_1)}{F'_2(p_1)}e^{p_1t}+\frac{F_1(p_2)}{F'_2(p_2)}e^{p_2t}+\frac{F_1(p_3)}{F'_2(p_3)}e^{p_3t}.$$

Найдем числители слагаемых:

$$F_1(p_1)=16\cdot10^4;\ F_1(p_2)=(8-j8)\cdot10^4;\ F_1(p_3)=(8+j8)\cdot10^4.$$

Производная знаменателя

$$F_2'(p)=3p^2+800p+80\,000.$$

Подставим вместо p соответствующие корни и получим знаменатели слагаемых:

$$F_2'(p_1)=80\,000;\ F_2'(p_2)=(-8-j8)\cdot10^4;\ F_2'(p_3)=(-8+j8)\cdot10^4.$$

Полученные значения подставим в формулу теоремы разложения:

$$i_1(t)=\frac{16\cdot10^4}{8\cdot10^4}e^{0\cdot t}+\frac{(8-j8)\,10^4}{(-8-j8)\,10^4}e^{(-200+j200)t}+$$

$$+\frac{(8+j8)\,10^4}{(-8+j8)\,10^4}e^{(-200-j200)t}=2-e^{-200t}\left[e^{j(200t-90^\circ)}+\right.$$

$$\left.+e^{-j(200t-90^\circ)}\right].$$

Избавляясь от комплексной формы, получим:

$$i_1(t)=2-2e^{-200t}\sin 200t.$$

Пример 2.

Электрическая цепь (рис. 8) с сопротивлением $r=50$ Ом, индуктивностью $L=300$ мГн и емкостью $C=100$ мкФ включается на синусоидальное напряжение $u=1000\sin 314\,t$ В.

Найти закон изменения переходного тока $i_1(t)$. Задачу решить операторным методом.

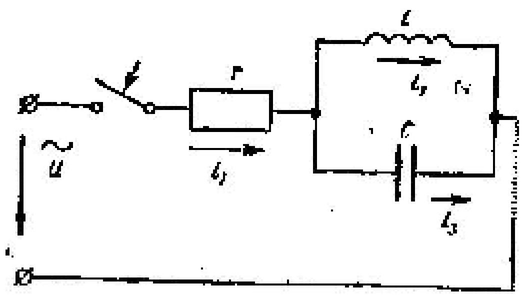


Рис. 8

Решение

Искомый ток найдем по формуле включения для синусоидального напряжения источника.

Операторное сопротивление цепи

$$Z(p) = r + \frac{pL\frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = r + \frac{pL}{p^2LC + 1} = \frac{p^2rLC + pL + r}{p^2LC + 1}.$$

Корни уравнения $Z(p)=0$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2rC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2rC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -100 \pm j152.$$

При наличии двух корней оригинал тока

$$i_1(t) = Im\left[\frac{U_m e^{j(\omega t + \psi)}}{Z(j\omega)} + \frac{U_m e^{j\psi}}{(p_1 - j\omega)Z'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{U_m e^{j\psi}}{(p_2 - j\omega)Z'(p_2)} e^{p_2 t}\right].$$

Сопротивление цепи в комплексной форме

$$Z(j\omega) = r + \frac{j\omega L\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = 69{,}3\, e^{-j\,43{,}83^\circ}\ \text{Ом}$$

Значения $p_K - j\omega$ при $p_K = p_1$, $p_K = p_2$ будут:

$$p_1 - j\omega = -100 + j152 - j314 = 190\, e^{-j\,121{,}7^\circ};$$

$$p_2 - j\omega = -100 - j152 - j314 = 476\, e^{-j\,102{,}12^\circ}.$$

Производная операторного сопротивления

$$Z'(p) = \frac{-p^2L^2C + L}{(p^2LC + 1)^2}.$$

При $p = p_1 = -100 + j152$ $\quad Z'(p_1) = 0{,}416\, e^{-j\,145{,}39^\circ}$;

при $p = p_2 = -100 - j152$ $\quad Z'(p_2) = 0{,}416\, e^{-j\,145{,}39^\circ}$.

Полученные значения подставим в выражение тока:

$$i_1(t) = Im\left[\frac{1000\, e^{j314t}}{69{,}3\, e^{-j\,43{,}83^\circ}} + \frac{1000\, e^{(-100 + j152)t}}{190\, e^{-j\,121{,}7^\circ} \cdot 0{,}416\, e^{j\,145{,}39^\circ}} + \frac{1000\, e^{(-100 - j152)t}}{476\, e^{-j\,102{,}12^\circ} \cdot 0{,}416\, e^{-j\,145{,}39^\circ}}\right] = Im\,[14{,}4\, e^{j(314t + 43{,}83^\circ)} +$$

$$+ 12{,}65\, e^{-100t} e^{j(152t - 23{,}69^\circ)} + 5{,}05\, e^{-100t} e^{-j(152t + 112{,}88^\circ)}] =$$

$$= 14{,}4 \sin(314t + 43{,}83^\circ) + 12{,}65\, e^{-100t} \sin(152t - 23{,}69^\circ) - 5{,}05\, e^{-100t} \sin(152t + 112{,}88^\circ).$$

После преобразования получим:

$$i_1(t) = 14{,}4 \sin(314t + 43{,}83^\circ) + 16{,}64\, e^{-100t} \sin(152t - 35{,}62^\circ).$$

Мгновенные значения переходных токов рекомендуется определять с помощью программируемых микрокалькуляторов типа «Электроника» Б3-34, МК-52, 54, 56, 61. При апериодическом режиме ток

$$i = i_{пр} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

В этом случае задачу решают следующим образом:

1. Микрокалькулятор включают в сеть, нажимают клавиши F, ПРГ и вводят программу 1.

Программа 1

№ п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	П—ХО	П—Х1	X	Fe^x	П—Ха	X	П—ХО	П—Х2	X	Fe^x
1	П—ХВ	X	+	П—ХС	+	П—ХО	С/П	П—Хd	+	Х—ПО
2	↔	С/П	БП	00						

Таблица 5

Величина	A_1	A_2	p_1	p_2	Δt	t	$i_{пр}$
Регистр	A	B	1	2	d	0	C

2. Нажимают клавиши F ABT, затем вводят постоянные интегрирования A_1 и A_2, корни характеристического уравнения p_1 и p_2, интервал времени Δt, начальное время t, принужденную составляющую тока $i_{пр}$ в регистры памяти микрокалькулятора согласно табл. 5.

3. Нажимают клавишу $B/0$.

4. Нажимают клавишу $С/П$.

5. Через 6—8 с с индикатора записывают значение времени t и нажимают клавишу $С/П$.

6. Через 2 с с индикатора записывают значение тока, соответствующее времени t.

7. Для получения следующих значений тока переходного процесса повторяют перечисленные действия, начиная с п. 4.

Контрольный пример

Рассчитать несколько значений тока

$$i = 1{,}5 + 5{,}5\,e^{-137\,t} - 5{,}5\,e^{-213\,t}.$$

Вводим программу 1, затем следующие значения:

$$5{,}5\ X\text{—}Пa;\ 5{,}5/\text{—}/\ X\text{—}ПB;\ 127/\text{—}/\ X\text{—}П1;$$

$$272\ /\text{—}/\ X\text{—}П2;\ 0{,}001\ X\text{—}Пd;\ 0\ X\text{—}ПO;\ 1{,}5\ X\text{—}ПC.$$

Далее выполняем действия 3-7 инструкции. В результате получаем $i(0) = 1{,}5$ А, $i(0{,}001) = 2{,}154$ А, $i(0{,}002) = 2{,}57$ А, $i(0{,}003) = 2{,}825$ А.

При колебательном режиме ток переходного процесса

$$i = i_{пр} + A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \gamma).$$

В этом случае расчет ведут по программе 2, данные расчета вводят в регистры памяти согласно табл. 6.

Программа 2

№ п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	П—XO	П—X1	X	П—X2	+	F sin	П—XB	/—/	П—XO	[illegible]
1	Fe^x	X	П—Xa	X	П—XC	+	П—XO	С/П	П—Xd	+
2	X—ПО	↔	С/П	БП	00					

Таблица 6

Величина	A	δ	ω	γ	Δt	t	$i_{пр}$
Регистр	A	B	1	2	d	0	C

Переключатель «Р-Г» микрокалькулятора ставят в положение «Р». Угловая частота ω должна быть выражена в радианах в секунду, а угол γ — в радианах. Для перевода угла γ из градусной меры в радианную используется выражение

$$\gamma_{рад} = \gamma^{\circ}\,\frac{\pi}{180}.$$

После ввода программы и данных расчета выполняются действия 3-7 предыдущей инструкции.

Контрольный пример

Определить несколько значений тока

$$i = 2 - 2{,}001\,e^{-187\,t} \sin(186t - 1{,}530).$$

Вводим программу 2, затем следующие значения:

$$2{,}001/\text{—}/\ X\text{—}ПA;\ 187\ X\text{—}ПB;\ 186\ X\text{—}П1;$$

$$1{,}530\ /\text{—}/\ X\text{—}П2;\ 0{,}001\ X\text{—}Пd;\ 0\ X\text{—}ПO;\ 2X\text{—}ПC.$$

Далее выполняем действия 3-7 инструкции. В результате получаем:

$$i(0) = -4\text{А}, \ i(0{,}001) = -3{,}62\text{А}, \ i(0{,}002) = -3{,}26\text{А}.$$

Если переходный ток получен в виде

$$i = A\sin(\omega t + \gamma) + Be^{p_1 t} + Ce^{p_2 t},$$

то для расчета мгновенных значений токов используется программа 3. Данные расчета вводят в регистры памяти согласно табл. 7.

Программа 3

№ п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	П—ХО	П—Х3	Х	П—Х4	+	F sin	П—ХА	Х	П—ХО	П—Х1
1	Х	Fe^x	П—ХВ	Х	+	П—ХО	П—Х2	Х	Fe^x	П—ХС
2	Х	+	П—ХО	С/П	П—Хd	+	Х—ПО	↑	С/П	БП
3	00									

Таблица 7

Величина	A	B	C	P_1	P_2	ω	γ	Δt	t
Регистр	A	B	C	1	2	3	4	d	0

Контрольный пример

Вводим:

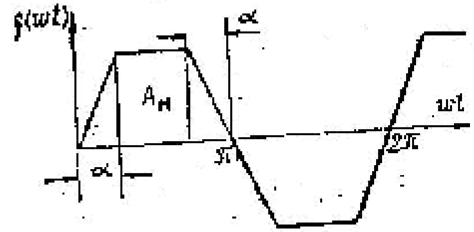
3,78 Х—ПА; 5,31 /—/ Х—ПВ; 1,89 Х—ПС; 1200 /—/ Х—П1; 6000 /—/ Х—П2; 1000 Х—П3; 4,375 Х—П4; 0Х—П0; $5\cdot10^{-4}$ Х—Пd.

Получаем:

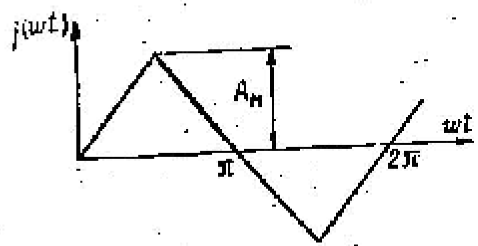
$$i(0) = -6{,}99\text{А}, \ i(0{,}0005) = -6{,}55\text{А}, \ i(0{,}001) = -4{,}57\text{А},$$
$$i(0{,}0015) = -2{,}38\text{А}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

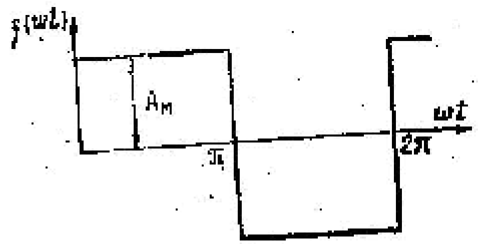
Разложение периодических функций в тригонометрический ряд



$$f(\omega t) = \frac{4A_м}{\alpha\pi} \times (\sin\alpha \sin\omega t + \frac{1}{9}\sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin 5\alpha \sin 5\omega t + \ldots)$$



$$f(\omega t) = \frac{8A_м}{\pi^2}(\sin\omega t - \frac{1}{9}\sin 3\omega t + \frac{1}{25} \times \sin 5\omega t - \frac{1}{49}\sin 7\omega t + \ldots)$$



$$f(\omega t) = \frac{4A_м}{\pi}(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{7}\sin 7\omega t + \ldots)$$