ПРИЛОЖЕНИЯ

Часть I. Методика формирования математических понятий

Методика формирования математических понятий включает следующие *этапы:*

1) *введение определения;*
2) *усвоение определения;*
3) *закрепление понятия.*

Введение определения может осуществляться двумя методами: *конкретно-индуктивным* (на основе рассмотрения конкретных примеров или задач приходят к новому понятию и его определению) или *абстрактно-дедуктивным* (определение понятия формулируется сразу после объявления нового термина). Желательно мотивировать изучение понятия и пояснить происхождение термина. При конкретно индуктивном введении понятия следует *соблюдать два требования*:

- пример, на основе которого вводится понятие, должен носить общий, а не частный характер;
- обсуждение основных признаков понятия на конкретном примере следует вести в той терминологии, которая используется в определении.

На этапе ***усвоения определения*** преследуются *две цели*: запомнить определение и научиться проверять, подходит объект под рассматриваемое понятие или нет. Этот этап осуществляется на специально составленных упражнениях — «да» и «нет», которые формулируются, начиная со слов «Является ли...». Аргументируя свой ответ, ученики осваивают признаки понятия и выучивают определение. При составлении примеров на «да», учитель варьирует несущественные признаки (включает частные случаи, изменяет размеры, расположение фигур), при составлении примеров на «нет» отвергает один или несколько существенных признаков. Этап усвоения требует подведения итогов, где повторяется определение понятия, его существенные признаки, а также некоторые несущественные признаки (расположение, размеры, частные случаи).

На этапе ***закрепления понятия*** решаются более сложные задачи, где используются как определение понятия, так и его свойства. В процессе закрепления регулярно подводятся итоги, где обсуждается, что нового узнали о понятии, что научились делать в связи с рассматриваемым понятием, какие виды задач научились решать. Поэтому процесс закрепления понятия называют *обогащением*.

Приложение 1

Примеры конструирования методики формирования понятий

Методика формирования понятия арифметической прогрессии

Согласно методике формирования понятий, важной является работа с признаками понятия, зафиксированными в его определении. Выделению этих признаков способствует логико-математический анализ определения. Выделенные признаки помогают составить упражнения на подведение под понятие (упражнения на «да» и «нет»). Для этого полезно составить таблицу учета (или опровержения) соответствующих признаков. К тому же таблица позволяет проанализировать составленные примеры по объему (рассмотрены ли все частные случаи, учтены ли все существенные признаки и т. д.). Подобная подготовительная работа учителя (проведение логико-математического анализа и составление упражнений на подведение под определение) показана в первой части рассмотренной ниже методики. Во второй части дан фрагмент урока.

I. *Логико-математический анализ определения.*

При подготовке к уроку учителю необходимо провести анализ логико-математической структуры определения с целью выделения существенных признаков понятия, положенных в основу определения, что позволит составить примеры на подведение объектов под определение.

Проведем анализ определения: *арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.*

Термин – арифметическая прогрессия.

Род – последовательность.

Видовые отличия – каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом (или в таком виде: $a_{n+1} = a_n + d$, где a_1 и d заданы, n –любое натуральное).

Это определение рекурсивное, так как в видовых отличиях указаны действия получения последующего члена, если известен предыдущий. Видовые отличия можно расписать подробнее: второй член равен сумме первого с каким-то числом, третий равен второму, сложенному с этим же числом, и т. д.

Выполним действия подведения объектов под определение, результаты занесем в таблицу:

№ п/п	Примеры	Последовательность (да — «+», нет — «–»)	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом (да — «+», нет — «–»)	Вывод: данный объект есть арифметическая прогрессия (да «+», нет «–»)
1.	0; –5; –10; –15; ...; –5(n – 1), ...	+	+	+
2.	1; 3; 5; 10	+	–	–
3.	$x + 7$	–		–
4.	7; 7; 7; 7	+	+	+
5.	$\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1; $1\frac{1}{3}$	+	+	+

В таблице представлены все виды арифметической прогрессии: возрастающая, убывающая, постоянная; конечная, бесконечная; разность может быть положительным, отрицательным числом и нулем; члены прогрессии могут быть натуральными, целыми, дробными.

II. *Опишем этапы формирования понятия арифметической прогрессии.*

Введение определения

Приведем фрагмент урока по введению определения арифметической прогрессии.

Запись на доске. 42, 44, 46... – размеры одежды.

Схема 1	Схема 2	Схема 3
$1 — \boxed{42}$	$1 — \boxed{42}$	$1 — \boxed{a_1}$
$2 — \boxed{44}$	$2 — \boxed{42} + \boxed{2}$	$2 — \boxed{a_2} + \boxed{d}$
$3 — \boxed{46}$	$3 — \boxed{44} + \boxed{2}$	$3 — \boxed{a_3} + \boxed{d}$
$4 — \boxed{48}$	$4 — \boxed{46} + \boxed{2}$	$4 — \boxed{a_4} + \boxed{d}$
...	...	...
...	...	...
$n — \boxed{a_n}$	$n — \boxed{a_{n-1}} + \boxed{2}$	$n — \boxed{a_{n-1}} + \boxed{d}$
		$n+1 — \boxed{a_n} + \boxed{d}$

— Сегодня познакомимся с последовательностью, которую можно встретить в жизни. Рассмотрим, например, последовательность размеров одежды. Назовите первый, второй, третий и так далее члены заданной последовательности. (Ученики отвечают по очереди. Учитель заполняет окошки схемы 1.)

— Какая закономерность прослеживается в записи членов этой последовательности? (Если возникает затруднение в ответе на этот вопрос, то предлагается дополнительное задание.)

— Сравним каждый последующий член последовательности с предыдущим, заполнив окошки схемы 2.

— Итак, каждый член последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 2. Такая последовательность является примером арифметической прогрессии.

Определение. Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

— Это определение можно записать в виде формулы, которую получим, заполнив окошки схемы 3.

Пусть члены прогрессии записаны в виде: a_1; a_2; a_3; ...; a_n.

Число, которое прибавляется к каждому члену прогресии, может быть не только 2, обозначим его буквой d (заполняются окошки схемы 3).

Итак, для любого натурального n выполняется условие $a_{n+1} = a_n + d$, где d — некоторое число.

d — называют разностью арифметической прогрессии, так как $d = a_{n+1} - a_n$.

Усвоение определения

На этапе усвоения определения арифметической прогрессии ставятся *две задачи*: выучить определение и научиться проверять, является ли последовательность арифметической прогрессией или нет. Эти две задачи решаются одновременно, если ученики дают пояснения, почему предлагаемая последовательность является или не является арифметической прогрессией.

На скрытой доске заранее записаны примеры.

Задание 1. Выберите арифметические прогрессии среди примеров, записанных на доске. Объясните свой ответ.

1) $0; -5; -10; -15; ...; -5\cdot(n + 1); ...$

2) $1; 3; 5; 10; ...$

3) $x + 7$

4) $7; 7; 7; 7; ...$

5) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 1\frac{1}{3}; ...$

6) $0; 0; 0; 0; 0.$

7) $-1; -1 ; -1; -1.$

8) $-1; 0; -1; 0; -1$

9) $\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; ...$

10) $5; 3; 1; -1; -3; -5.$

В выбранных примерах назовите разность арифметической прогрессии и ее первый член.

Задание 2.

а) Приведите свой пример арифметической прогрессии.

б) Мы рассматривали размеры одежды и пришли к определению арифметической прогрессии. Где еще в практической жизни можно встретиться с арифметической прогрессией? (Номера домов четной стороны улицы, размеры обуви.)

в) На размеры одежды можно посмотреть как на последовательность чисел, делящихся на 2. Будет ли последовательность чисел, которые при делении на число 2 дают остаток 1, являться арифметической прогрессией? Приведите свой пример.

— Итак, мы рассмотрели примеры арифметических прогрессий, *заданных перечислением своих членов*. Рассмотрим иное задание арифметической прогрессии.

<u>**Задание 3.**</u> Запишите несколько первых членов арифметической прогрессии, заданных первым членом и разностью:

а) $a_1 = 3$, $d = 2$;
б) $a_1 = 0$, $d = -2$;
в) $a_1 = -3$, $d = 0$;
г) $a_1 = -\frac{1}{5}$, $d = -3$;
д) $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{2}$.

— Итак, каким способом может быть задана арифметическая прогрессия? Предложите свои примеры арифметических прогрессий, заданных этим способом.

— Итак, что в связи с понятием арифметической прогрессии мы узнали? (Определение, виды, два способа задания.)

Замечание. Возможен другой вариант введения определения арифметической прогрессии, когда арифметическая и геометрическая прогрессии изучаются совместно.

Закрепление понятия арифметической прогрессии

Закрепление понятия арифметической прогрессии осуществляется при выводе и использовании формулы n-го члена для решения как прямых, так и обратных задач, причем арифметическая прогрессия может быть задана разными способами (перечислением своих членов, первым членом и разностью, любыми двумя членами); при выводе и использовании формулы суммы n первых членов; при решении задач, где предварительно требуется доказать, что заданная последовательность чисел является арифметической прогрессией, а затем уже найти недостающие члены прогрессии или сумму заданных чисел и т. д.

Методика формирования понятия трапеции

I. Проведем *логико-математический анализ* следующего определения: «Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны» [11].

Выделим термин, род, видовые отличия и их логические связи:

термин — трапеция,
род — четырехугольник,
видовые отличия — 1) две стороны параллельны,
2) две другие стороны не параллельны.

Видовые отличия связаны логическим союзом «и», значит, имеет место конъюнктивное определение.

Определение трапеции в учебнике [90] аналогичное, однако, видовые отличия сформулированы несколько иначе — «..., у которого только две противолежащие стороны параллельны ...». С учащимися необходимо провести выяснение того, что это означает: две противолежащие стороны параллельны, а две другие противолежащие стороны не параллельны. После этого очевидно логическое строение определения и его конъюнктивный характер.

На основе проведенного логико-математического анализа определяют пути введения определения и составляют систему упражнений для его усвоения.

Полезно составлять карту введения определения, указав в ней мотив темы, возможные варианты введения определения и их мотивацию, этапы реализации каждого варианта:

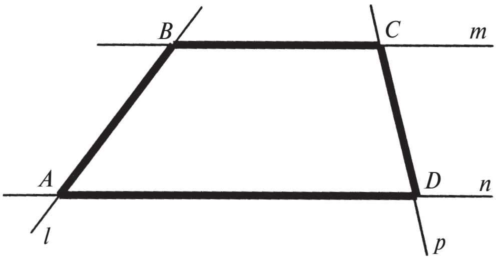
II. *Этапы формирования понятия.*

Введение определения

Рассмотрим введение определения трапеции на основе построения четырехугольника с двумя видовыми отличиями.

<u>Задание</u> для учащихся:

1) с помощью линейки и угольника проведите две параллельные прямые m и n;



2) проведите две не параллельные прямые l и p, которые пересекают прямые m и n,

3) обозначьте точки пересечения прямых m, n с прямыми l, p и выделите получившийся четырехугольник $ABCD$;

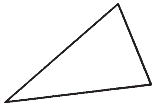
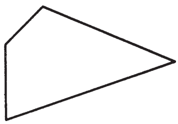
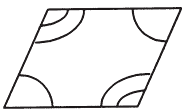
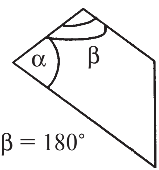
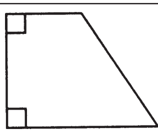
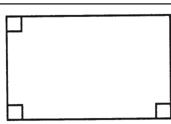
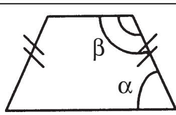
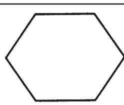
4) укажите и запишите отношения сторон в четырехугольнике $ABCD$ – $BC \parallel AD$, $BA \nparallel CD$.

Далее учитель сообщает, что построенный четырехугольник называется трапецией, акцентирует внимание на соотношениях сторон в четырехугольнике и предлагает учащимся дать определение трапеции, а затем сравнить полученную формулировку с формулировкой определения в учебнике. Учителю полезно сообщить учащимся, что «трапеция» – греческое слово, означавшее в древности «столик». По-гречески «трапезион» означает обеденный столик, отсюда произошли слова трапеза, трапезная.

Вернувшись к отношению между сторонами трапеции, можно ввести понятия «основания трапеции», «боковые стороны трапеции».

Усвоение определения

Усвоение определения можно осуществить с помощью таблицы на основе выполнения следующего **задания**: установите, какие из фигур, представленных в таблице, являются трапециями, и обоснуйте свой ответ.

№	Пример	Свойства объектов			
		Четырехугольник (да «+», нет «–»)	Две стороны параллельны (да «+», нет «–»)	Две другие стороны не параллельны (да «+», нет «–»)	Вывод: данный объект есть трапеция (да «+», нет «–»)
1		–			–
2		+	–		–
3		+	+	–	–
4	 $\alpha + \beta = 180°$	+	+	+	+
5		+	+	+	+ (прямоугольная)
6		+	+	–	–
7	 $\alpha + \beta = 180°$	+	+	+	+ (равнобокая)
8		–			–

Закрепление понятия

Закрепление понятия трапеции происходит как при изучении темы «Четырехугольники», так и темы «Площади фигур». Рассмотрим закрепление в теме «Четырехугольники».

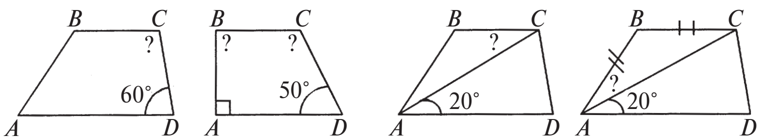
Первый этап закрепления понятия трапеции происходит в процессе получения и использования следствий из определения трапеции:

1) сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°,

2) противолежащие углы не равны, но диагональ выделяет в них равные углы.

Закреплению способствует решение простейших задач по готовым чертежам:

ABCD —трапеция



Второй этап закрепления осуществляется при доказательстве свойств углов и диагоналей равнобокой трапеции (прямое и обратное утверждения), решении задач, связанных с равнобокой трапецией, со средней линией трапеции, и решении задач на построение трапеции по ее элементам с помощью циркуля и линейки.

Методика формирования понятия средней линии трапеции

I. Проведем *логико-математический анализ* определения: «Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон» [90].

Выделим термин, род, видовые отличия и их логические связи:

термин — средняя линия трапеции,

род — отрезок,

видовые отличия — соединяет: 1) середину одной боковой стороны с 2) серединой другой боковой стороны.

Видовые отличия связаны логическим союзом «и», т. е. определение — конъюнктивное.

II. *Этапы формирования понятия.*

Введение определения

Видовые отличия имеют конструктивный характер, поэтому определение средней линии трапеции желательно ввести на основе задания на построение.

Задание для учащихся:

1) постройте трапецию;

2) с помощью масштабной линейки отметьте середину боковой стороны трапеции и обозначьте ее буквой M;

3) отметьте и обозначьте середину другой боковой стороны буквой N;

4) постройте отрезок MN, концами которого являются середины боковых сторон трапеции.

На основе выполненного задания вводятся определение средней линией трапеции, ее обозначение на чертежах и запись: MN — средняя линия трапеции.

Другой путь – дедуктивное введение определения средней линии трапеции (формулировка определения дается сразу после мотива рассмотрения еще одного элемента трапеции, который называется «средняя линия трапеции»). Проанализировав определение, т. е. выделив в нем род и видовые отличия, учащиеся переходят от определения к построению средних линий для конкретных трапеций.

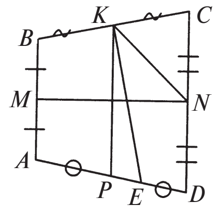
Усвоение определения

Так как определение конъюнктивное, то усвоение определения можно провести с помощью таблицы, аналогичной рассмотренной для усвоения определения трапеции. Покажем несколько иной вариант.

Усвоение определения средней линии трапеции проведем *по следующим этапам*:

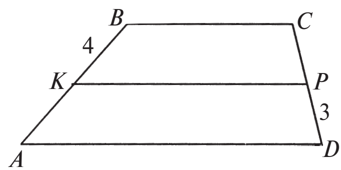
1) построение средней линии для равнобокой и прямоугольной трапеции,

2) рассмотрение контрпримеров и примера на одном рисунке, причем расположение трапеции изменено:



Будут ли отрезки *MN, KN, KE, KP* средними линиями трапеции? Почему?

3) решение задачи:



KP — средняя линия трапеции *ABCD*. Известно, что *PD* = 3 см, *BK* = 4 см. Найдите боковые стороны трапеции. Является ли трапеция равнобокой? Какое условие задачи не насено на чертеж?

Закрепление понятия средней линии трапеции

Параллельно с процессом построения средней линии трапеции желательно подвести учащихся к «открытию» ее свойств, доказательство которых будет соответствовать первому этапу закрепления понятия.

Процесс обогащения понятия осуществляется при решении задач, связанных с применением этих свойств для вычисления как средней линии трапеции, так и ее оснований; при решении задач, когда предварительно необходимо доказать, что заданный четырехугольник является трапецией, а проведенный в нем отрезок – ее средней линией (см., например, № 66, § 6 [90]).

При изучении темы «Площади фигур» учащиеся выведут формулу вычисления площади трапеции с использованием длины ее средней линии и высоты.

Приложение 2

Система упражнений, связанная с формированием понятия

Система упражнений, связанная с формированием понятия, должна включать в себя:

1) основное задание (фокус-пример), на основе которого вводится определение;
2) задания на подключение образного, словесного и чувственного опыта учащихся (возможна интерпретация фокус-примера через образ, чувства, слово);
3) задания на подключение предметного или жизненного опыта учащихся;

На этапе введения определения

4) задания на распознавание объектов, принадлежащих объему понятия (задания на «да» и «нет»);
5) задания, в которых понятие представлено в различных формах (задания на формирование способности к словесно-образному переводу);
6) задания на выведение следствий из определения понятия;

На этапе усвоения определения

7) задания на включение исходного понятия в систему связей с другими понятиями (возможно составление родословной понятия);
8) задания на применение понятия в различных ситуациях;
9) задания на систематизацию понятий, возможно, через их классификацию;
10) задания на развитие мыслительных операций, лежащих в основе образования понятий (анализ, синтез, обобщение, сравнение, конкретизация, абстрагирование).

На этапе закрепления понятия

Пример. *Формирование понятия модуля числа* *в учебнике [27].*

*Математическая карта введения определения модуля
и комментарий к ней*

Знакомство с модулем числа

НАЧИНАЮТ С ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ ЧИСЕЛ НА ЧИСЛОВОЙ ОСИ

Комментарий
Фокус-пример: числа 3 и –3

что мотивирует необходимость введения еще одной, кроме знака, характеристики числа и приводит к

ОПРЕДЕЛЕНИЮ МОДУЛЯ ЧИСЛА ЧЕРЕЗ РАССТОЯНИЕ (MODULUS — МЕРА)

Комментарий
Жизненный опыт: величина изменения уровня воды

Обращается внимание на

ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ РАССТОЯНИЯ

В итоге

Приводится свойство модуля

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \text{ — положительное} \\ -a, \text{ если } a \text{ — отрицательное} \\ 0, \text{ если } a \text{ — нуль} \end{cases}$$

Дается определение противоположным числам с использованием понятия «модуль»

Комментарий
Связь с другими понятиями

Комментарий
Чувственный опыт:
|Карабас-Барабас| = добрый дядя;
|Мальвина| = Мальвина;
|пустой карман| = пустой карман

Комментарий
Образы: числовая ось и «модулерубка»

Усвоение определения

Задание 1.

1) Заполните таблицу:

Число	Модуль числа	Расстояние от точки, соответствующей числу, до точки *O*	Положение точки относительно *O*
–2	…	…	слева
…	…	15	справа
…	100	…	…
–37	…	37	…
29	…	…	слева
…	52	–52	слева
a	…	…	слева

Разные формы понятий

2) Есть ли в каких-нибудь строках лишние данные?

3) Есть ли строки, которые можно заполнить неединственным способом?

4) Есть ли строки, которые вообще нельзя заполнить?

Развитие мыслительных операций

Задание 2.

1) Найдите координаты точек *A, B, C*, изображенных на числовой оси (*дан рисунок*), и запишите расстояние от точек до начала отсчета, используя знак модуля.

2) Есть ли среди данных точек точки с противоположными координатами? Если да, то сравните модули координат этих точек.

Разные формы понятия и его связи с другими понятиями

Задание 3.

Даны равенства:

а) $|-2| = 2$;

б) $|3| = -3$;

в) $|-3| = -(-3)$;

г) $-|3| = -3$.

Проверьте равенства. Если есть ошибка, то исправьте ее и прочитайте равенство, используя слова «модуль» и «расстояние».

Закрепление понятия

Задание 4.

Отметьте на числовой оси точки с координатами, модуль которых равен числам 4, 12, 0. Сколько точек вы отметили в каждом из случаев?

Различные ситуации: Дан модуль, надо отметить точки на числовой оси (пропедевтика уравнений с модулем)

Задание 5.

Для каждого числа из строчки найдите модуль этого числа в столбце. Проведите стрелку от числа к его модулю.

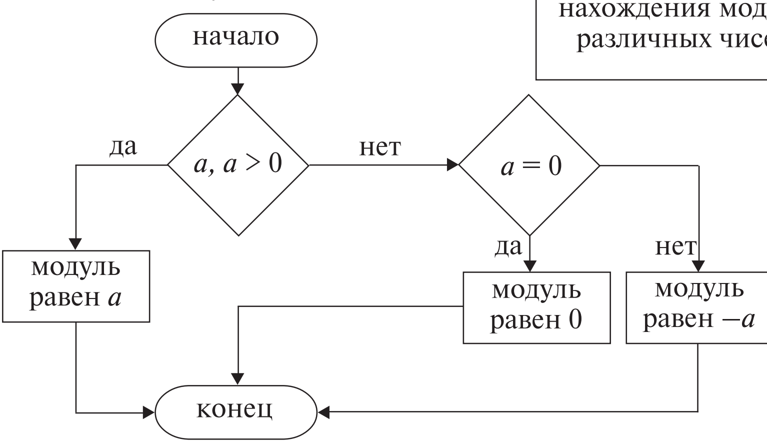
Образное представление свойства: модуль — *число неотрицательное*

5
4
3
2
1
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
−1
−2
−3
−4
−5

Задание 6.

1. Правильно ли составлен алгоритм нахождения модуля числа?

Алгоритм нахождения модуля различных чисел



2. Покажите движение по блок-схеме при вычислении модуля числа a, если $a = -307, 0, 13$.

Задание 7.

1. Заполните таблицу:

Число	Модуль числа	Противоположное число	Модуль противоположного числа
x	$\|x\|$	$-x$	$\|-x\|$
–30	...	30	...
...	...	...	5
10	...	...	...
...	...	0	...
...	...	–28	...
...	4	...	...

1) зная модуль, найти число (и наоборот);
2) зная модуль противоположного числа, найти число (и наоборот)

2. Какие строки можно заполнить несколькими способами?

3. Сравните модули противоположных чисел. Дайте определение противоположных чисел, используя понятие «модуль».

Развитие мыслительных операций и связи между понятиями

Задание 8.

1. Даны числа *–300, –10, –3, 0, 2, 3, 11, 274:*

а) Какому из чисел соответствует на числовой оси точка, находящаяся на самом большом (самом маленьком) расстоянии от точки O?

б) Какое из чисел имеет наибольший (наименьший) модуль?

2. Расположите числа *–31, –2, –3, –242, 240, 30, 0, –22* в порядке убывания их модулей.

Пропедевтика сравнения, сложения

Задание 9.

1. Заполните таблицу:

a	$-a$	Расстояние между $A(a)$ и $O(0)$	Расстояние между $A(a)$ и $B(-a)$
	x		
		y	

Углубление

2. Какие значения (положительные, отрицательные или нуль) может принимать x; y?

Далее следуют *уравнения с модулем.*

Приложение 3

Типичные методические ошибки при изучении понятий

Типичными методическими ошибками при изучении понятий являются ошибки следующих видов:

I. Ошибки в подборе содержания:

- для обсуждения на этапе введения определения выбран частный случай;
- на этапе усвоения представлен не полный набор упражнений на существенные и несущественные признаки понятия;
- при подборе заданий не учитываются связи между понятиями.

II. Ошибки в структуре изложения:

- пропущен этап мотивации;
- пропущен этап усвоения;
- пропущен этап подведения итогов перед переходом к этапу закрепления (в процессе закрепления; при обобщении знаний по рассматриваемому понятию).

III. Ошибки в ведении диалога:

- предложен монолог вместо диалога, что лишает учеников возможности участия в процессе формирования определения;
- признаки понятия на основном примере обсуждаются в терминологии, отличной от терминологии определения;
- исправление ошибок учащихся берет на себя учитель вместо того, чтобы:
  - — привести контрпример и предложить ученикам обсудить, подходит он под определение или нет;
  - — привлечь учеников к обнаружению и исправлению ошибок.

IV. Ошибки в логике изложения:

- связи с прошлым материалом отсутствуют или являются для учащихся необоснованными; связь считается необоснованной, если учитель задает вопросы по прошлому материалу, не связывая их с изучаемым понятием;
- нет логического перехода от примера к определению (например, вместо: «Вот такие числа, которые..., называются...» используется «Вот такие числа называются»);
- не намечены пути дальнейшей работы с изучаемым понятием.

Часть II. Методика формирования математических умений

Методика формирования математических умений опирается на следующие *психолого-педагогические требования*:

1) при формировании умения следует четко выделять этапы его выполнения (или его алгоритм);

2) выделенные этапы следует формулировать в общем виде, что позволяет решать целый класс задач;

3) *каждый* этап должен быть отработан *отдельно* от других с помощью *специально подобранных* упражнений;

Наиважнейшее требование!!!

4) при первоначальной отработке умения каждый этап следует проговаривать вслух, поскольку многие ученики не могут пропустить этап «внешней речи» при переходе от общего к частному;

5) желательно, чтобы учащиеся самостоятельно составляли алгоритм выполнения данного умения, хотя результаты выполнения умения в этом случае будут теми же, что и в случае, когда алгоритм будет дан в готовом виде. Участие учеников в создании алгоритма способствует их развитию.

Методика формирования умений включает следующие *этапы*:

- ***Введение алгоритма.*** Введение может осуществляться двумя методами: *конкретно-индуктивным*, когда алгоритм составляется на основе общего примера, и *абстрактно-дедуктивным*, когда алгоритм дается в готовом виде или на основе теоретического положения (формулы, определения, теоремы). На этом этапе демонстрируется образец выполнения задания и обосновывается алгоритм решения. Если какой-то шаг алгоритма может быть выполнен неоднозначно, то необходимо рассмотреть на том же задании все возможные способы решения.
- ***Усвоение алгоритма.*** Усвоение преследует следующие *цели*: *усвоить признаки*, по которым можно определить, что можно пользоваться изученным алгоритмом; *усвоить отдельные шаги* алгоритма; *запомнить алгоритм* выполнения умения; *изучить частные случаи* применения алгоритма.
- ***Закрепление умения.*** Этап закрепления включает различные случаи и ситуации применения алгоритма. В процессе закрепления *важно подводить итоги* по обогащению знаний по формируемому умению.

Приложение 4

Примеры конструирования методики формирования умений

Методика формирования умения определять, является ли данное число членом данной арифметической прогрессии

I. Введение схемы решения

I. Решается задание: *Содержит ли арифметическая прогрессия 2; 9;... число 156?* (№ 359 (а)).

Сначала выясняется и д е я р е ш е н и я, которая позволяет составить план ответа на вопрос задачи.

— Как на языке последовательности сказать иначе, что последовательность содержит (или не содержит) какое-то число?

— Это значит, что число является (или не является) членом последовательности.

— Чем определяется место члена последовательности?

— Номером члена последовательности.

— Каким числом является номер?

— Натуральным.

— Итак, если нам удастся определить номер числа 156 в арифметической прогрессии, то как мы ответим на вопрос задачи?

— Прогрессия содержит число 156.

— Что известно об арифметической прогрессии и достаточно ли этих данных для ответа на этот вопрос?

— В прогрессии известны первый и второй члены, значит, прогрессия задана полностью, поэтому, данных достаточно.

— Что позволит найти номер члена прогрессии?

— Формула n-го члена (записывается на доске, и анализируются известные величины). В ней известны n-й член и первый, разность прогрессии можем найти по условию задачи. Значит, сможем найти число n.

Составляется п л а н р е ш е н и я и записывается решение.

1) Найдем для данной арифметической прогрессии разность d по формуле $x_2 – x_1 = d$, т. е. $d = 9 – 2 = 7$.

2) Запишем формулу n-го члена арифметической прогрессии:

$$x_n = x_1 + d\,(n – 1).$$

3) Подставим в эту формулу значения x_1 и d, а вместо x_n данное число 156, получим уравнение: $156 = 2 + 7\,(n – 1)$.

4) Решим полученное уравнение относительно неизвестного n.

$$156 = 2 + 7n – 7;$$

$$7n = 151;$$
$$n = 23.$$

5) Так как n, равное 23, является натуральным числом, то делаем вывод, что данная арифметическая прогрессия содержит число 156; оно будет 23 членом этой прогрессии.

Ответ: число 156 является членом данной арифметической прогрессии.

II. Составляется схема выполнения заданий рассмотренного вида.

1. Найти или указать первый член и разность арифметической прогрессии (x_1 и d).

2. Записать формулу n-го члена прогрессии $x_n = x_1 + d\,(n - 1)$.

3. Подставить в эту формулу найденные значения x_1 и d, а вместо x_n – заданное число.

4. Решить полученное уравнение относительно n.

5. Сделать вывод: если $n \in N$, то данное число является членом прогрессии, если $n \notin N$, то данное число не является членом данной арифметической прогрессии.

6. Записать ответ.

II. Выполнение упражнений на отработку шагов алгоритма

I. *Упражнения на повторение умения находить первый член и разность для арифметической прогрессии* (1-й шаг алгоритма).

1) Найдите разность арифметической прогрессии

а) $-\frac{1}{2}$; 1;...

б) 4,5; –6;...

в) 3; $4\frac{1}{2}$;...

г) $y_1 = 8$, $y_2 = 24$.

д) $a_1 = 3\frac{1}{2}$, $a_7 = 9\frac{1}{2}$.

2) Найдите первый член арифметической прогрессии, если:

а) $a_5 = 162$, $d = 2$;

б) $a_8 = -27$, $d = -1{,}5$.

3) Найдите первый член арифметической прогрессии, если известно:

а) $c_5 = -2$; $c_8 = -9$;

б) $a_3 = 5{,}5$; $a_9 = 14{,}5$.