Практическое занятие № 1 (по теме 3).

Исследование и построение частотных характеристик звеньев
(Продолжительность работы – 2 часа)

Под логарифмическими характеристиками понимается совокупность логарифмической амплитудно-частотной (ЛАЧХ) и логарифмической фазо-частотной характеристик (ЛФЧХ).

ЛАЧХ строится в координатах:

• по оси ординат - логарифм модуля частотной передаточной функции, определяемого в размерных единицах – децибелах (дБ), то есть $L(\omega) = = 20\lg|W(j\ \omega)| = 20\lg A(\omega)$; проще сказать – коэффициент передачи на определенной частоте, выраженный в децибелах.

• по оси абсцисс – логарифм частоты, $\lg \omega$. Надо сказать, что для удобства восприятия вдоль оси чаще ставятся действительные значения частоты, а не ее логарифм, хотя масштаб остается логарифмический.

При построении ЛФЧХ по оси ординат откладывается значение сдвига фазы $\varphi(\omega)$ в угловых градусах (или в радианах), а по оси абсцисс – также логарифм частоты.

Более детальное построение ЛЧХ рассмотрим на примерах.

Пример 1. Идеальное дифференцирующее звено $W(s) = к\cdot s$, где к – коэффициент пропорциональности. Модуль частотной передаточной функции $|W(j\ \omega)| = A(\omega) = к\ \cdot\omega$. $L(\omega) = 20\lg к\ \cdot\omega = 20\lg к + 20\lg \omega$. Первое слагаемое есть постоянная величина, а второе изменяется пропорционально логарифму частоты с коэффициентом, равным +20. Следовательно график ЛАЧХ (аналогичен графику функции $y = a + bx$, в котором $y = L(\omega)$, $a = =20\lg к$, $b = 20$ и $x = \lg \omega$) представляет собой прямую линию. В этом случае прямая линия строится по двум точкам. Пусть частота $\omega = 1c^{-1}$, тогда $L(1) = = 20\lg к$, дБ. Увеличим частоту в 10 раз (на декаду), то есть ω станет равной $10\ c^{-1}$. Тогда $L(10) = (20\lg к + 20)$ дБ. Таким образом, при увеличении частоты на декаду ордината получила приращение +20 дБ. Именно изменением модуля, приходящимся на декаду, и определяется наклон прямой ЛАЧХ. В нашем случае наклон составляет +20дБ/дек. и его просто называют плюс первым наклоном – (+1). Логарифмическая фазо-частотная характеристика $\varphi(\lg\omega) = \mathrm{arc\ tg}\ к\omega/(\to 0) = \mathrm{arc\ tg}(\to\ \infty) = +\ 90^\circ$ представляет собой прямую линию, параллельную оси частот.

Пусть передаточная функция звена $W(s) =2s$. Модуль $A(\omega) = 2\omega$. ЛАЧХ определяется выражением $L(\omega) = 20\lg2 + 20\lg\ \omega$. Прямую можно построить по двум точкам. Одну получим, положив $\omega = 1\ c^{-1}$, и $L(1) = 20\lg 2 = 6$ дБ. Другую – взяв $\omega = 10\ c^{-1}$, получим $L(10) = 6 + 20 = 26$ дБ. Через них проводится прямая линия с наклоном (+1). Фазочастотная характеристика – горизонтальная линия, проведенная на уровне +90 градусов (смотри пунктирную линию на рис.1).

Для упражнения подсчитайте значения ЛАЧХ при следующих значениях ω: $100c^{-1}$; $1000\ c^{-1}$ и $10000\ c^{-1}$. Полученные результаты сверьте со значениями по графику

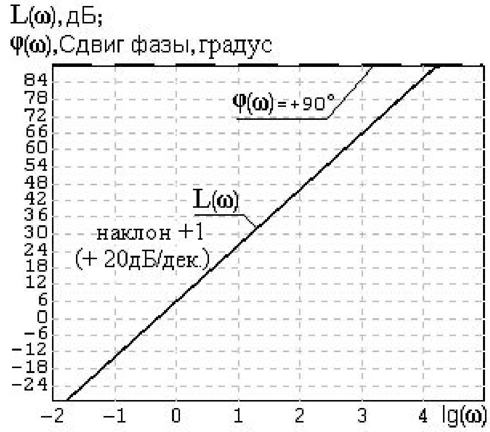

Рис.1.

Пример 2. Построить ЛЧХ интегрирующего звена с передаточной функцией $W(s) = 2/s$. Модуль $W(j\omega)$ равен $A(\omega) = 2/\omega$, а ЛАЧХ строится по уравнению $L(\omega) = 20\lg 2 - 20\lg \omega$. Так как ось частот логарифмическая, то график представляет собой прямую линию с коэффициентом –20. Наклон прямой установим путем определения приращения, приходящегося изменение частоты на декаду, например с $\omega = 0{,}1c^{-1}$ до $\omega = 1\ c^{-1}$.

Вычисления показывают, что наклон составляет –20дБ/дек. и называют его (–1) наклоном. Логарифмическая фазочастотная характеристика $\varphi(\lg\omega) = -\ \mathrm{arc\ tg}\ (к/\omega)/(\ \to 0) = -\mathrm{arc\ tg}(\to\infty) = -\ 90^{\circ}$ представляет собой прямую линию, параллельную оси частот. Графики ЛАЧХ и ЛФЧХ приведены на рис.2.

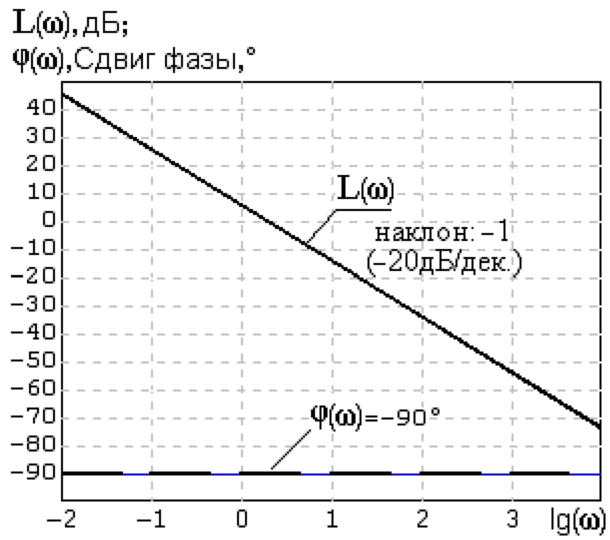

Рис.2.

Упражнение. Подсчитайте значения ЛАЧХ для частот ω равных: 0,01; 10; 100; 1000 $с^{-1}$ и сверьте их со значениями по графику.

Пример 3.

Построить ЛЧХ апериодического звена W(s) = к/(Ts + 1).

Напомним необходимые для этого сведения:

Действительная и мнимая части частотной передаточной функции апериодического звена соответственно равны:

$U(\omega) = \mathrm{Re}\, W(j\omega) = к/(1 + T^2\omega^2)$;

$V(\omega) = \mathrm{Im}\, W(j\omega) = -кT\omega/(1 + T^2\omega^2)$, а амплитуда равна:

$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2 + V^2} = к\big/\sqrt{1 + T^2\omega^2}$.

ЛАЧХ определяется по уравнению $L(\omega) = 20\lg к - 20\lg\sqrt{1 + T^2\omega^2}$, но с достаточной степенью точности строится приближенно в виде двух асимптотических прямых для двух отдельных частотных диапазонов (низкочастотного и высокочастотного), границей которых является частота сопряжения $\omega_{сопр}$:

а) для $\omega < 1/T = \omega_{сопр}$, чему соответствует $1 > T\omega$, $L(\omega) \approx 20\lg к$, дБ – постоянная величина, не зависящая от частоты;

б) для $\omega > 1/T = \omega_{сопр}$, чему соответствует $1 < T\omega$, $L(\omega) \approx 20\lg к - 20\lg T\omega$, дБ.

Второе слагаемое приближенного равенства определяет зависимость амплитуды от частоты и эта зависимость носит линейный характер при логарифмическом масштабе частоты.

ЛФЧХ определяется уравнением $\varphi(\omega) = \mathrm{arc\,tg}[V(\omega)]/[U(\omega)] = -\mathrm{arc\,tg}\, T\omega$. Вычислим сдвиг фазы апериодического звена для некоторых значений частоты: а) $\omega = 0$, $\varphi(0) = 0^\circ$; б) $\omega = 1/T$, $\varphi(1/T) = -45^\circ$; в) $\omega \to \infty$, $\varphi \to -90^\circ$.

Получим ЛАЧХ и ЛФЧХ апериодического звена $W(s) = 2/(0{,}2s + 1)$, имеющего конкретные числовые значения параметров. Коэффициент передачи

$к = 2$, а частота сопряжения $\omega_{сопр}=1/0{,}2= 5c^{-1}$.

Для значений частоты $\omega < 1/0{,}2 = 5c^{-1}$ $L(\omega) \approx 20\lg 2 = 6$дБ (рис.27);

для диапазона частот $\omega > 5c^{-1}$ $L(\omega) \approx 20\lg 2 - 20\lg 0{,}2\omega = 6дБ - 20\lg 0{,}2 - 20\lg\omega$. Определение амплитуд для двух значений частот, удаленных друг от друга на декаду: $\omega_1 = 5c^{-1}$ и $\omega_2 = 50c^{-1}$ дает следующие результаты:

$L(5) = 20\lg 2 - 20\lg 0{,}2\cdot5 = 6дБ$ и $L(50) = 20\lg 2 - 20\lg 0{,}2\cdot50 = -14дБ$. Таким образом, при изменении частоты в сторону увеличения на декаду произошло снижение амплитуды на 20 = (6 +14) дБ. Асимптотическая ЛАЧХ

будет представляться двумя прямыми: горизонтальной на уровне 6дБ до частоты сопряжения $\omega_{сопр} = 5c^{-1}$ и от этой частоты прямой с наклоном (–1). Фазо-частотная характеристика $\varphi(\omega)$, изменяясь от нуля по закону arc tg, на частоте сопряжения имеет фиксированный сдвиг фазы равный -45°, а предельный фазовый сдвиг (при $\omega \to \infty$) составит –90 градусов (рис.3).

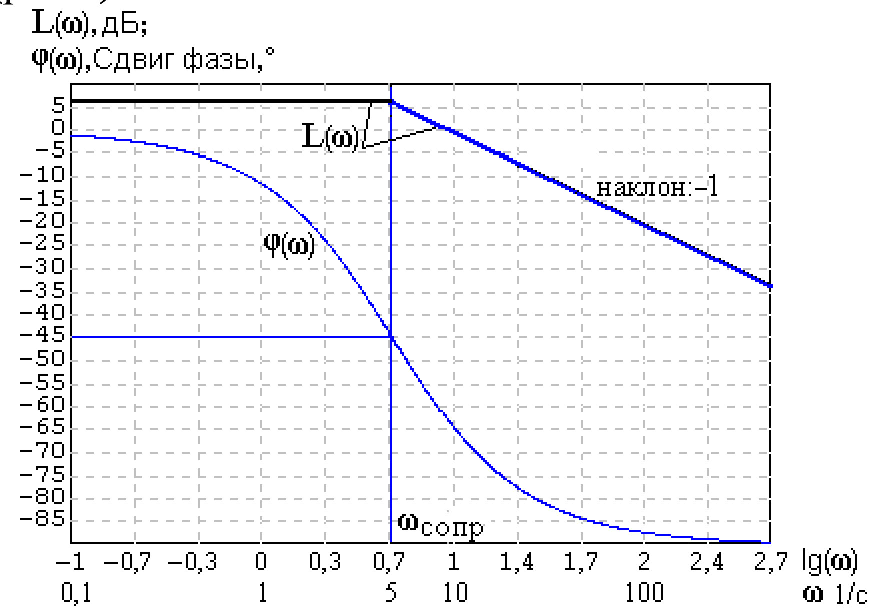

Рис.3.

Пример 4.

Построить асимптотическую ЛАЧХ и примерный вид ЛФЧХ колебательного звена $W(s) = к/[(Ts)^2 +2\cdot dTs + 1]$, в котором $к = 4$, $T = 0{,}2$ с., $d = 0{,}8$. Частота сопряжения $\omega = 1/T = 5c^{-1}$ условно разделяет всю частотную ось на диапазоны низких ($\omega < 5c^{-1}$) и высоких ($\omega > 5c^{-1}$) частот. Модуль частотной передаточной функции колебательного звена с приведенными числовыми параметрами определяется равенством:

$$A(\omega)=\frac{4}{\sqrt{(1-0{,}2^2\cdot\omega^2)^2+(2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot\omega)^2}}.$$

Для низкочастотного диапазона $L(\omega)\approx 20\lg 4 = 12$дБ, то есть до частоты $\omega = 5c^{-1}$ ЛАЧХ представляет горизонтальную линию, проходящую на уровне 12дБ. При построении ЛАЧХ в области высоких частот вторым слагаемым подкоренного выражения и единицей ввиду их малости по сравнению со слагаемым $(0{,}2^2\omega^2)^2$ можно пренебречь. Тогда $L(\omega)\approx 20\lg 4 - 20\lg(0{,}2\omega)^2 = 12 - 40\lg 0{,}2 - 40\lg\omega$. Так как зависимая от частоты часть представляет собой прямую линию с коэффициентом –40, то прямую можно построить по двум точкам. Амплитуду первой точки определим при значении $\omega = 5\ c^{-1}$, $L(5) = 12 - 40\lg 0{,}2 - 40\lg 5 = 12 + 28 - 28 = 12$ дБ. Амплитуду второй точки найдем при десятикратном увеличении частоты, то есть при $\omega = 50c^{-1}$. $L(50) = 12 + 28 - 68 = -28$ дБ. Снижение амплитуды, приходящееся на декаду, составляет 40 дБ. Следовательно, прямую проводим с наклоном –40дБ/дек., наклон (–2). ЛФЧХ колебательного звена изменяется по закону arc tg, но выходит за пределы главного значения этой обратной тригонометрической функции. Поэтому график строится отдельно до частоты сопряжения по формуле:

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arc\,tg} 2dT\omega/(1 - T^2\omega^2),$$

а за частотой сопряжения по формуле:

$$\varphi(\omega) = -\pi - \operatorname{arc\,tg} 2dT\omega/(1 - T^2\omega^2).$$

Характерными значениями сдвига фазы являются: $\varphi(0)= 0^\circ$, $\varphi(1/T)= -90^\circ$, $\varphi(\infty)= -180^\circ$, которые и являются опорными для приближенного построения ЛФЧХ. Ниже (рис.4) приведены графики ЛАЧХ и ЛФЧХ.

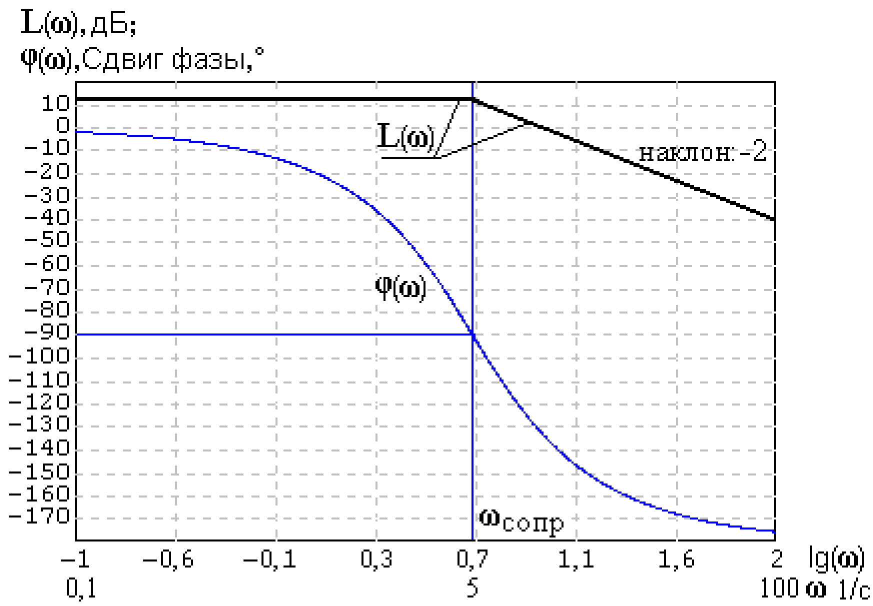

Рис.4.

Пример 5.

Построить асимптотическую ЛАЧХ и примерную ЛФЧХ звена с передаточной функцией W(s) = кs /(Ts + 1) при следующих значениях параметров: к = 4, T = 0,2 c^{-1}. Передаточная функция представляет сочетание элементарных звеньев: пропорционального (к), идеального дифференцирующего (s) и апериодического [1/(Ts + 1)]. Такое сочетание простейших звеньев называют ещё реальным (или инерционным) дифференцирующим звеном. Для построения ЛАЧХ необходимо получить модуль частотной передаточной функции W(jω). Известно, что модуль произведения равен произведению модулей. Поэтому, зная модули простейших звеньев, путем их перемножения получим искомый модуль. |W(jω)| = A(ω)= $к \cdot \omega/\sqrt{T^2\omega^2+1}$.

ЛАЧХ получается как L(ω) = 20lg к + 20lg ω – 20lg$\sqrt{T^2\omega^2+1}$. Следовательно, результирующая ЛАЧХ - $L_р(\omega)$ получается геометрическим сложением ЛАЧХ пропорционального, идеального дифференцирующего и апериодического звеньев. В числовом выражении при заданных значениях параметров получим:

$L_п(\omega)$ = 20lg 4 = 12 дБ ЛАЧХ –пропорционального звена;

$L_д(\omega)$ = 20lg ω дБ; ЛАЧХ идельного дифференцирующего звена;

$L_а(\omega)$ = $-20\lg\sqrt{0{,}2^2\omega^2+1}$ ЛАЧХ апериодического звена.

Далее строятся ЛАЧХ для отдельных звеньев и с учетом знаков геометрически складываются (см. графики Lп, Lд, La и Lp на рис.5).

Результирующая ЛФЧХ, определяющая итоговый фазовый сдвиг – $\varphi_р(\omega)$, строится как сумма фазовых сдвигов, вносимых каждым звеном:

$\varphi_п(0<\omega<\infty)=0^o$;

$\varphi_д\ (0<\omega<\infty)= +90^o$;

$\varphi_а(0) =0^o$; $\varphi_а(\omega_{сопр}=5) = -45^o$; $\varphi_а(\infty)= -90^o$;

И в результате на определенных частотах значения сдвига фазы равны: $\varphi_р(0) = 90^\circ$, $\varphi_р(5) = 45^\circ$, $\varphi_р(\infty) = 0^\circ$(рис.5).

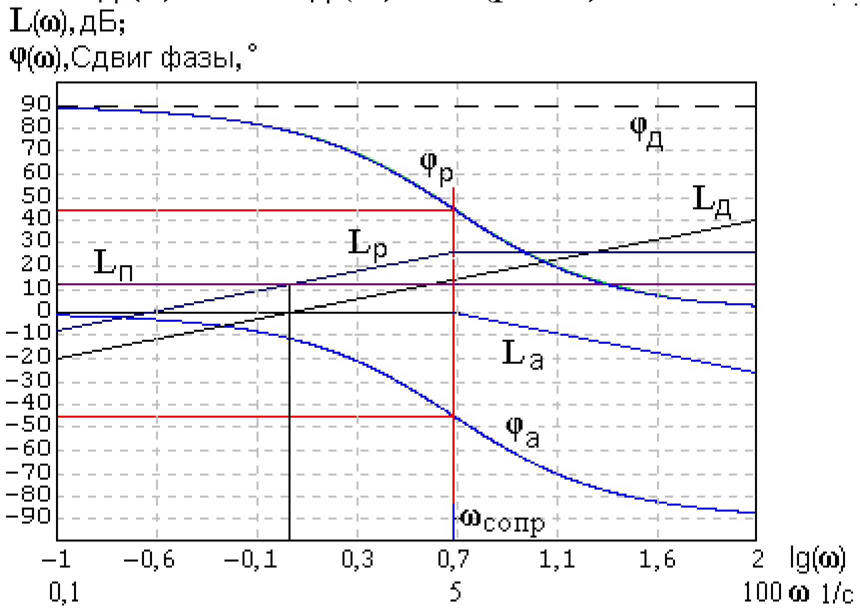

Рис.5.

На практике часто приходится строить ЛАЧХ системы, имеющей сложную передаточную функцию. Для успешного выполнения подобной задачи сформулировали правило построения ЛЧХ, состоящее из 4-х пунктов:

1. По данной передаточной функции определяем все частоты сопряжения и отмечаем их на оси частот в логарифмическом масштабе в порядке возрастания (убывания постоянных времени);

2. Через значение частоты равное единице (ω = 1с$^{-1}$, lg 1 = 0) проводится вертикальная ось амплитуд с разметкой в децибелах, на которой отмечается точка L = 20 lg K, дБ. Через эту точку оси ординат проводится низкочастотная асимптота с нулевым наклоном, если система статическая, или с наклоном $-20\cdot\nu$ дБ/дек., где ν – порядок астатизма.

3. На каждой частоте сопряжения, начиная с наименьшей, изменяют наклон ЛАЧХ на:

–20 дБ/дек, если эта частота принадлежит апериодическому звену;

+20 дБ/дек., если эта частота принадлежит форсирующему (дифференцирующему) звену 1-го порядка;

–40дБ/дек., если частота сопряжения принадлежит колебательному звену;

+40дБ/дек., если частота принадлежит форсирующему (дифференцирующему) звену 2-го порядка и так далее.

4. Исходя из закономерностей изменения фазо-частотных характеристик, входящих в передаточную функцию звеньев, строят примерную фазо-частотную характеристику разомкнутой системы. Опорными точками ЛФЧХ служат частоты сопряжения, на которых звенья имеют фиксированные фазовые сдвиги.

Приведем примеры построения ЛЧХ сложных систем.

Пример 6. Построить логарифмические частотные характеристики (амплитудную и фазовую) системы, имеющей передаточную функцию

$$W(s)=\frac{100(0{,}25s+1)}{(2{,}5s+1)[(0{,}016s)^2+2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}016s+1)]\cdot s}$$

Решение. Заданная передаточная функция состоит из следующих звеньев: апериодического (с постоянной времени 2,5 с.), колебательного (с постоянной времени 0,016 с. и коэффициентом демпфирования равным 0,9), форсирующего 1-гопорядка (с постоянной времени 0,25 с.) и интегрирующего.

Определим частоты сопряжения в порядке их возрастания: ω_1 = 1/2,5 = 0,4 с$^{-1}$; ω_2 = 1/0,25 = 4 с$^{-1}$; ω_3 = 1/0,016 ≈ 63 с$^{-1}$; и отметим их расположение на оси частот (рис.6) в логарифмическом масштабе, откладывая отрезки от вертикальной оси:

$x_1 = m_\omega\cdot \lg\,\omega_1 = m_\omega\cdot \lg\,0{,}4 = -0{,}4m_\omega$; $x_2 = m_\omega\cdot \lg\,\omega_2 = 0{,}6m_\omega$; $x_3 = m_\omega\cdot \lg\,\omega_3 = 1{,}8m_\omega$, где m_ω выбранный масштаб декады.

На оси амплитуд откладываем значение 20lg 100 = 40 дБ. Через это значение в сторону низких частот проводим асимптоту с –1 наклоном (–20 дБ/дек), так как разомкнутая система 1-го порядка астатизма (одно интегрирующее звено). Далее на частоте сопряжения ω_1 = 0,4 с$^{-1}$, принадлежащей апериодическому звену, изменяем наклон на –1 (наклон будет составлять –1 + (–1) = – 2), то есть –40 дБ/дек.). Следующее изменение наклона производится на частоте сопряжения ω_2 = 4с$^{-1}$, принадлежащей форсирующему звену 1-го порядка. Это звено изменяет наклон на +1 (на +20дБ/дек). И, следовательно, за этой частотой сопряжения наклон асимптоты составит: –2 +1= –1 и будет продолжаться до частоты сопряжения ω_3 = 63 с$^{-1}$. Эта частота сопряжения принадлежит колебательному звену, а оно снижает ЛАЧХ сразу на два наклона, поэтому наклон асимптоты далее составит: –1 –2 = –3 (–60 дБ/дек.).

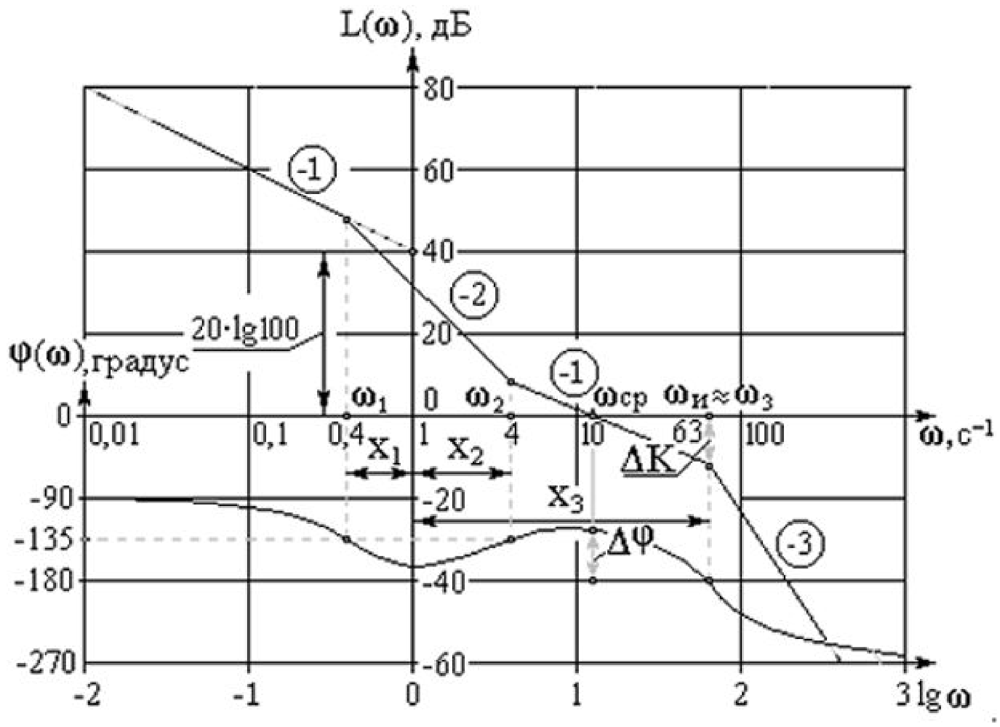

Рис.6

Далее строится примерная ЛФЧХ. Известно, что фазочастотные характеристики изменяются по закону *arc tg* и имеют отрицательные значения фазы для апериодического и колебательного звеньев и положительные – для форсирующего звена 1-го порядка. Причем на своей частоте сопряжения каждое звено
имеет фиксированное значение сдвига фазы: апериодическое –
–45°; колебательное –90°; форсирующее 1-го порядка +45°. Допуская, что всё изменение фазы происходит в пределах двух декад, подсчитаем их приближенные значения на частотах сопряжения. Так для частоты $\omega_1 = 0{,}4$ с$^{-1}$ фазовый сдвиг составит: $\varphi(\omega_1) = -90° - 45° = -135°$(–90° от интегрирующего звена и – 45°от апериодического звена). Аналогично произведем расчет сдвига фазы для частоты сопряжения $\omega_2 = 4$ с$^{-1}$. $\varphi(\omega_2) = -90° - 90° + 45° = -135°$. Здесь –90° от интегрирующего звена, –90° от апериодического звена, фаза которого к частоте ω_2 достигла практически предельного значения, и +45° от форсирующего звена на его частоте сопряжения. Далее оценим значение фазы на частоте сопряжения $\omega_3 = 63$ с$^{-1}$ колебательного звена:
$\varphi(\omega_3) = -90° - 90° + 90° - 90° = -180°$. Здесь –90°от интегрирующего звена, –90° от апериодического звена, +90° от форсирующего звена и –90° от колебательного звена на частоте сопряжения. Следовательно, вблизи частоты ω_3 суммарный сдвиг фазы достигает значения –180°. Частоту, на которой фазовый сдвиг равен –180°, называют инверсной

$\omega_и$, потому что знак обратной связи меняется на противоположный. Вместо отрицательной она становится положительной, что ведет к неустойчивости системы. Таким образом, имеем значения сдвига фазы в трех опорных точках. Плавно соединяя эти опорные точки, придерживаясь формы графика *arc tg* , получим приближенное значение вида ЛФЧХ (рис.6).

Задания на самостоятельную работу

1. Определите значение ЛАЧХ в дБ звена $W(s) = 5\cdot s$, на частоте $\omega = 20\ c^{-1}$;
2. Определите значение модуля АФЧХ звена $W(s)=5\cdot s$, на частоте $\omega=20\ c^{-1}$;
3. Определите значение ЛАЧХ в дБ звена $W(s)=2/s$, на частоте $\omega=0{,}01\ c^{-1}$;
4. Определите значение ЛФЧХ звена $W(s)=0{,}2/s$, на следующей декаде после $\omega = 1\ c^{-1}$;
5. Во сколько раз (на сколько децибел) изменится модуль звена $W(s)=5\cdot s$ за декаду частоты?
6. Определите значение ЛАЧХ в дБ звена $W(s)=\frac{10}{T^2s^2+2\cdot d\cdot T\cdot s+1}$ с параметрами: T = 0,01 с; d = 0,4; на частоте $\omega = 5\ c^{-1}$.
7. Рассчитайте значения ЛАЧХ звена $W(s)=\frac{5}{0{,}2\cdot s+1}$ на частотах 10; 100 c^{-1} и определите её наклон в этом диапазоне частот.
8. Чему равно значение ЛФЧХ звена $W(s)=\frac{2\cdot s}{2\cdot s+1}$, на частоте сопряжения.
9. Определите значение амплитудной частотной характеристики звена $W(s)=\frac{10}{T^2s^2+2\cdot d\cdot T\cdot s+1}$, где T = 2 с; d = 0.9; на частоте сопряжения.

10. Определите округленное до целого числа значение ФЧХ звена $W(s) = \frac{1}{4 \cdot s^2 + 1}$, на частоте ω = 0,26 c^{-1}

11. Чему равна частота сопряжения звена $W(s) = \tau \cdot s + 1$, где τ = 4 с.

12. Запишите чему равны действительна и мнимая части АФЧХ W(jω) =15 и определите расположение её вектора.

13. Определите значение ЛАЧХ колебательного звена с параметрами: T = 0,01 с; d = 0,1 на частоте ω = 100 c^{-1} в дБ с точностью до целого числа.

$$\left|W(j\omega)\right| = A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - (T\omega)^2)^2 + (2dT\omega)^2}}.$$