В. Н. Ильин, В. Д. Полянин

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Часть I

МЕХАНИКА НЕДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Москва 2008

МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ДЕЛАМ ГРАЖДАНСКОЙ ОБОРОНЫ, ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ
И ЛИКВИДАЦИИ ПОСЛЕДСТВИЙ СТИХИЙНЫХ БЕДСТВИЙ

Академия Государственной противопожарной службы

В. Н. Ильин, В. Д. Полянин

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Часть I

МЕХАНИКА НЕДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Допущено Министерством Российской Федерации
по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям
и ликвидации последствий стихийных бедствий в качестве
учебного пособия для курсантов, студентов и слушателей
образовательных учреждений МЧС России*

Москва 2008

УДК 539.318(07)
ББК 30.121я73
И46

Р е ц е н з е н т ы :

Заведующий кафедрой общепрофессиональных дисциплин
Академии гражданской защиты МЧС России
кандидат технических наук, доцент

А. Н. Макурин

Начальник кафедры высшей математики и информатики
Ивановского института ГПС МЧС России
кандидат технических наук, доцент

Е. Г. Родионов

Ильин В.Н., Полянин В.Д.

И46 Прикладная механика. Часть I. Механика недеформируемого твердого тела: Учебное пособие. – М.: Академия ГПС МЧС России, 2008. – 90 с.

ISBN 5 9229-0018-8

Пособие разработано в соответствии с программой курса «Прикладная механика» и предназначено для курсантов, студентов и слушателей образовательных учреждений МЧС России. Представлены варианты заданий контрольных расчетно-графических работ и методика их выполнения.

УДК 539.318(07)
ББК 30.121я73

ISBN 5 9229-0018-8

Учебное издание

Ильин Виктор Николаевич
Полянин Владимир Дмитриевич

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Часть I

МЕХАНИКА НЕДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебное пособие

Редактор *Ю. В. Тихомирова*
Компьютерная верстка *В. Д. Полянина*

Подписано в печать 02.11.07. Формат 60x90 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 5,75. Уч.-изд. л. 4,09.
Тираж 1000 экз. Заказ 425

Академия ГПС МЧС России
129366, Москва, ул. Бориса Галушкина, 4

МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ДЕЛАМ ГРАЖДАНСКОЙ ОБОРОНЫ, ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ
И ЛИКВИДАЦИИ ПОСЛЕДСТВИЙ СТИХИЙНЫХ БЕДСТВИЙ

Академия Государственной противопожарной службы

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Часть I. Механика недеформируемого твердого тела

Пособие для слушателей и курсантов высших
пожарно-технических образовательных учреждений МЧС России

Утверждено Редакционно-издательским советом
Академии ГПС МЧС России

Москва 2007

УДК 539.318(07)

Р е ц е н з е н т ы:
Заведующий кафедрой общепрофессиональных дисциплин
Академии гражданской защиты МЧС России
кандидат технических наук, доцент
Макурин А.Н.

Начальние кафедры высшей математики и информатики
Ивановского института ГПС МЧС России
кандидат технических наук, доцент
Родионов Е.Г.

Ильин В.Н., Полянин В.Д. Прикладная механика. Часть I. Механика недеформируемого твердого тела. Пособие для слушателей и курсантов высших пожарно-технических образовательных учреждений МЧС России. −М.: Академия ГПС МЧС России, 2007. −90 с.

Пособие разработано в соответствии с программой курса "Прикладная механика" и предназначено для слушателей и курсантов высших пожарно-технических образовательных учреждений МЧС России. Представлены варианты заданий контрольных расчетно-графических работ и методика их выполнения.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Общие замечания

Дисциплина "Прикладная механика" является основой естественнонаучной, общетехнической и общепрофессиональной подготовки инженера пожарной безопасности. Она тесно связана с другими математическими, естественнонаучными и общепрофессиональными дисциплинами: "Высшая математика", "Информатика", "Физика", "Инженерная графика", "Материаловедение и технология материалов", "Детали машин".

Материалы курса "Прикладная механика" необходимы при изучении специальных дисциплин: "Здания и сооружения и их устойчивость при пожаре", "Пожарная безопасность в строительстве", "Расследование и экспертиза пожаров", "Пожарная техника", "Пожарная безопасность технологических процессов", "Теория горения и взрыва", "Гидравлика и противопожарное водоснабжение" и непосредственно используются в последующей профессиональной деятельности инженера пожарной безопасности.

Дисциплина "Прикладная механика" состоит из двух частей, первой из которых является *Механика недеформируемого твердого тела.* В ней рассматриваются вопросы статики, кинематики и динамики механических систем.

Изучение первой части заканчивается дифференцированным (с оценкой) зачетом, на котором слушатель должен показать:

– **знание** понятий, определений, аксиом и основных законов механики;

– **умение** определять кинематические характеристики точек и твердых тел при различных способах задания их движения; составлять расчетные схемы несущих конструкций, исследовать их равновесие при различных случаях пространственной ориентации систем сил; исследовать поведение материальных систем в простейших случаях, а также

– **иметь представление** о методах изучения сложных механических систем.

Для изучения предмета необходимо иметь достаточную математическую подготовку. В дисциплине широко используется векторная алгебра, поэтому необходимо знать, как вычисляются проекции вектора на координатные оси, как аналитически и геометрически (построением) находится сумма векторов, как вычисляются векторное и скалярное произведения двух векторов. Необходимо также свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат, уметь исследовать поведение функций и строить их графики, уметь дифференцировать функции, а также находить определенные и неопределенные интегралы от простейших функций.

Изучать материал рекомендуется по учебникам (их список приводится на стр. 11 Пособия), ориентируясь на приводимую ниже рабочую программу. Особое внимание необходимо обратить на формулировки определений и теорем, в них существенно каждое слово. Заучивать их наизусть не следует, достаточно понять смысл, а также уметь изложить суть определения или теоремы своими словами.

Необходимо приобрести навыки решения задач. Для этого, изучив теоретический материал какой-либо темы, надо обязательно разобраться в примерах, приведенных в настоящем методическом пособии, а также в других учебниках и учебных пособиях, указанных в списке литературы.

Приводимая рабочая программа предназначена для слушателей факультета заочного обучения. Она определяет содержание и структуру дисциплины, составлена в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности 330400 "Пожарная безопасность", и в значительной степени учитывает потребности специальных дисциплин.

Рабочая программа дисциплины "Прикладная механика"

Раздел I. *Механика недеформируемого твердого тела*

Введение

Место механики в ряду естественных наук. Роль механики в технике. Структура современной механики. Роль отечественных и зарубежных ученых в развитии механики.

Тема 1. Основные понятия статики

Абсолютно твердое тело. Сила, эквивалентные системы сил, равнодействующая. Силы внешние и внутренние. Связи и силы реакций связей. Аксиомы статики. Момент силы относительно точки. Главный вектор и главный момент системы сил. Теорема Вариньона для системы сил, приложенных к точке.

Тема 2. Теория пар сил

Пара сил. Теорема о сумме моментов сил, образующих пару, относительно центра. Момент пары сил как вектор. Теоремы об эквивалентности пар. Сложение пар. Условия равновесия системы пар.

Тема 3. Произвольная система сил

Теорема о параллельном переносе сил. Основная теорема статики о приведении системы сил к центру. Классификация систем сил. Условия равновесия. Теорема Вариньона для произвольной системы сил. Сходящаяся система сил; условия равновесия. Плоская система сил; условия равновесия. Нахождение реакций связей при действии на тело плоской системы сил. Равновесие конструкций, состоящих из нескольких тел. Статически определимые и статически неопределимые конструкции. Момент силы относительно оси. Условия равновесия пространственной системы сил. Нахождение опорных реакций пространственных конструкций. Приложения к пожарной технике.

Тема 4. Центр параллельных сил и центр тяжести тела

Условия равновесия системы параллельных сил. Центр параллельных сил. Формулы для определения координат центра параллельных сил. Центр тяжести тела, способы его нахождения. Статический момент плоской фигуры. Примеры из пожарной техники.

Тема 5. Кинематика точки

Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Вектор скорости и вектор ускорения точки. Координатный способ задания движения точки. Определение траектории точки. Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси. Естественный способ задания движения точки. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения по его проекциям на оси естественного трехгранника – касательное и нормальное ускорения точки.

Тема 6. Простейшие виды движения твердого тела

Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела при поступательном движении. Вращательное движение твердого тела, уравнение вращательного движения тела. Угловая скорость и угловое ускорение тела, их представление в виде векторов. Нахождение скоростей и ускорений точек тела.

Тема 7. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела

Плоскопараллельное движение твердого тела и движение плоской фигуры. Угловая скорость и угловое ускорение. Связь между скоростями двух точек плоской фигуры. Теорема о проекциях скоростей двух точек твердого тела на отрезок, их соединяющий. Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Определение ускорений точек плоской фигуры.

Тема 8. Произвольное движение твердого тела

Сферическое движение твердого тела. Понятие о мгновенной оси вращения и мгновенной угловой скорости. Формула Эйлера для скоростей точек тела при сферическом движении. Понятие об общем случае движения твердого тела.

Тема 9. Сложное движение точки

Системы отсчета. Абсолютное и относительное движения точки. Абсолютные, относительные и переносные скорости и ускорения точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений. Кориолисово ускорение, его нахождение. Применение понятий сложного движения при изучении специальных дисциплин.

Тема 10. Динамика материальной точки

Законы динамики Галилея-Ньютона. Две задачи динамики материальной точки. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки. Начальные условия. Относительное движение материальной точки. Переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

Тема 11. Механическая система

Механическая система. Классификация сил, действующих на механическую систему. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс системы, радиус-вектор и координаты центра масс. Момент инерции относительно оси. Радиус инерции тела. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Главные центральные оси инерции тела. Момент инерции тела относительно плоскости и полюса. Примеры вычисления моментов инерции.

Тема 12. Принцип Даламбера

Силы инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Приведение сил инерции точек твердого тела к центру, главный вектор и главный момент сил инерции. Использование принципа Даламбера для нахождения динамических реакций связей. Примеры из пожарной техники.

Тема 13. Общее уравнение динамики

Элементарная работа силы. Работа силы на конечном перемещении. Работа силы тяжести, силы упругости. Механические связи, налагаемые на систему. Возможные перемещения материальной точки и механической системы. Число степеней свободы. Работа сил на возможном перемещении. Идеальные связи. Общее уравнение динамики (принцип Эйлера-Лагранжа-Даламбера). Принцип возможных перемещений. Применение общего уравнения динамики для расчета движения механических систем (в частности для расчета движения противопожарного занавеса). Применение принципа возможных перемещений для определения реакций связей.

Тема 14. Уравнения Лагранжа 2-го рода

Кинетическая энергия механической системы. Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела. Обобщенные координаты системы, обобщенные скорости. Выражение элементарной работы сил через обобщенные перемещения. Обобщенные силы и их вычисление. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа 2-го рода). Начальные условия. Дифференциальные уравнения вращательного и плоскопараллельного движения твердого тела. Движение балки при обрушении. Принцип Гамильтона-Остроградского. Малые свободные колебания механической системы. Собственные частоты и формы. Элементарная теория удара.

Тема 15. Общие теоремы динамики

Теорема о движении центра масс механической системы. Теорема об изменении количества движения системы, импульс силы. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно точки и оси. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Законы сохранения. Применение общих теорем динамики системы для нахождения характеристик пожарной техники. Элементарная теория гироскопа.

Выбор варианта задания

В первой части курса прикладной механики изучаются три раздела: статика, кинематика и динамика.

В соответствии с учебным планом слушатели и курсанты должны выполнить расчетно-графические работы (РГР), относящиеся к этим разделам.

Количество, содержание и сроки выполнения РГР на факультетах очной формы обучения назначаются преподавателями кафедры во время проведения занятий.

Слушатели факультета заочного обучения должны выполнить две расчетно-графические работы. В первой РГР необходимо решить задания 1, 2, 3, 4, 5 и 6 из настоящего пособия, во второй − задания 7, 8, 9, 10 и 11. Сроки выполнения РГР определены учебным планом факультета.

К каждому заданию дается 10 рисунков (исключение составляет задание 1: к нему рисунков нет, и задание 9: к нему дается один рисунок) и таблица, содержащая дополнительные к общему тексту условия. Таблица имеет тот же номер, что и задание, а нумерация рисунков двойная, например рис. 4.7 − это рисунок 7 к заданию 4.

Слушатели и курсанты выбирают из таблицы данные в соответствии со СВОИМ вариантом задания, который определяется совокупностью трех цифр, условно обозначаемой буквами **АБВ** так, что первой цифре соответствует буква **А**, второй − **Б**, а третьей − **В**.

Слушателям и курсантам факультетов очной формы обучения варианты задания **АБВ** назначаются преподавателями кафедры во время проведения первого практического занятия.

Слушатель заочного факультета вариант **АБВ** выбирает из *Таблицы выбора варианта задания* (с. 12−15) по трем последним цифрам номера своей зачетной книжки НЗК. Если НЗК $>$ 499, то предварительно из номера зачетной книжки следует вычесть 500.

В таблицах исходных данных в левом столбце стоят номера строк, а буквами **А**, **Б** или **В** помечены снизу столбцы. Из столбцов таблицы выбираются данные (числа, функции), находящиеся в той строке, номер которой соответствует букве столбца.

Приведем пример выбора варианта заданий для слушателя заочного факультета, у которого номер зачетной книжки − 990507. Три последние цифры номера — 507 дают число, большее 499, поэтому из 990507 вычитаем 500, получаем число 990007, откуда НЗК=007. Из таблицы *Выбор варианта задания* находим **АБВ**=342, т.е. **А**=3, **Б**=4 и **В**=2. Теперь при выполнении, например, задания 2 необходимо из табл. 2 выбрать номер рисунка на пересечении столбца *Номер рисунка* и строки 3, поскольку столбец помечен снизу буквой А=3. Аналогично описанному выбираем остальные данные к этому заданию. Для наглядности они заключены в табл. 2 в фигурные скобки.

При выполнении работы необходимо учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. Всегда считается, если не оговорено противоположное, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми, невесомыми, идеально гибкими; нити, перекинутые через блоки, а также намотанные на катки или колеса, не проскальзывают; катки и колеса катятся по плоскостям без проскальзывания. Все связи, если не сказано иное, считаются идеальными.

Когда на рисунке звенья механизма пронумерованы, то в условиях задач и в таблицах данных величины P_1, ℓ_1, R_1, r_1, ω_1, ε_1 и т.п. относятся к телу 1; аналогично величины P_2, ℓ_2, R_2, r_2, ω_2, ε_2 — к телу 2 и т.д. V_B, a_B обозначают скорость и ускорение точки B; а V_C и a_C — скорость и ускорение точки C.

Следует иметь в виду, что некоторые из заданных в таблицах величин при решении задачи конкретного варианта могут не понадобиться, т.е. оказаться лишними. Необходимо внимательно разобраться с условием, отобрав из таблицы только то, что относится к конкретному варианту.

Требования, предъявляемые к содержанию и оформлению расчетно-графических работ по прикладной механике

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради 12-18 страниц или на сброшюрованных листах формата А4, строго по варианту своего индивидуального шифра.

Все страницы должны иметь поля 20-25 мм.

Перед выполнением задания необходимо записать его условие, выбранные исходные данные и в соответствии с ними изобразить расчетную схему.

Решение записывается подробно и аккуратно со всеми вычислениями, вспомогательными чертежами и пояснениями.

Расчетные схемы рисуются крупно на отдельной странице (на развороте) с помощью чертежных инструментов, **строго в масштабе**, с указанием всех размеров, числовых данных и осей. Углы должны вычерчиваться точно с использованием транспортира.

Исправления после проверки преподавателем записываются в конце РГР на чистых листах (а не в тексте решения), или в отдельной тетради. Пометки преподавателя не убираются. Следует иметь в виду, что преподаватель при проверке работы отмечает, как правило, лишь место появления ошибки и ее характер.

Разобравшись по учебнику с теоретическим материалом, слушатель должен исправить допущенную ошибку, а затем внести исправления во все расчеты, оказавшиеся ошибочными, начиная с места появления ошибки и до конца решения задачи.

К работе, высылаемой на повторную проверку, в обязательном порядке должен прилагаться ее первоначальный (незачтенный) вариант.

Работа, не соответствующая своему варианту, или выполненная с нарушением изложенных требований, не зачитывается и возвращается для исправления.

Рекомендуемая литература

Основная

1. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1995.

2. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1981.

3. *Яблонский А.А.* Курс теоретической механики. Ч. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1984.

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/ Под редакцией *А.А.Яблонского* – М.: Высшая школа, 1978.

5. Настоящее методическое пособие.

Дополнительная

6. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1990, 1991.

7. *Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990.

8. *Полянин А.Д., Полянин В.Д., Путятин Б.В. и др.* Справочник для студентов технических вузов. – М.: ООО "Издательство Астрель", 2005.

Таблица

Таблица выбора варианта задания (НЗК=000 ÷ 124)

НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ
000	054	025	500	050	630	075	278	100	914
001	203	026	931	051	399	076	724	101	493
002	145	027	754	052	918	077	387	102	285
003	117	028	733	053	485	078	614	103	509
004	665	029	610	054	725	079	967	104	173
005	700	030	868	055	551	080	629	105	947
006	527	031	621	056	526	081	189	106	252
007	342	032	926	057	551	082	733	107	456
008	167	033	332	058	129	083	295	108	812
009	152	034	649	059	049	084	859	109	336
010	376	035	279	060	185	085	559	110	349
011	684	036	258	061	736	086	886	111	115
012	082	037	161	062	170	087	843	112	408
013	897	038	068	063	075	088	181	113	421
014	217	039	717	064	246	089	510	114	346
015	388	040	301	065	384	090	859	115	694
016	098	041	096	066	660	091	734	116	901
017	172	042	232	067	871	092	183	117	502
018	966	043	746	068	582	093	483	118	737
019	543	044	106	069	405	094	734	119	509
020	584	045	096	070	539	095	713	120	368
021	809	046	452	071	065	096	289	121	366
022	072	047	582	072	858	097	547	122	122
023	905	048	719	073	729	098	532	123	059
024	354	049	779	074	762	099	475	124	035

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы

Таблица выбора варианта задания (НЗК=125 ÷ 249)

НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ
125	114	150	040	175	855	200	070	225	131
126	769	151	576	176	433	201	717	226	234
127	764	152	366	177	678	202	327	227	808
128	517	153	627	178	523	203	345	228	784
129	435	154	518	179	345	204	077	229	936
130	127	155	430	180	333	205	879	230	417
131	462	156	785	181	129	206	100	231	364
132	474	157	124	182	176	207	202	232	017
133	577	158	820	183	510	208	622	233	427
134	526	159	871	184	352	209	046	234	494
135	744	160	644	185	686	210	276	235	542
136	071	161	189	186	659	211	961	236	361
137	937	162	814	187	554	212	659	237	054
138	679	163	567	188	047	213	859	238	605
139	010	164	305	189	574	214	244	239	989
140	930	165	271	190	692	215	281	240	399
141	078	166	876	191	165	216	688	241	632
142	197	167	500	192	035	217	782	242	421
143	052	168	957	193	543	218	820	243	070
144	512	169	295	194	558	219	120	244	821
145	243	170	338	195	157	220	829	245	115
146	289	171	856	196	321	221	115	246	107
147	192	172	189	197	130	222	448	247	264
148	949	173	180	198	563	223	374	248	501
149	122	174	194	199	360	224	151	249	602

Продолжение на следующей странице

Таблица выбора варианта задания (НЗК=250 ÷ 374)

НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ
250	646	275	758	300	764	325	155	350	437
251	164	276	454	301	610	326	750	351	446
252	191	277	898	302	642	327	747	352	610
253	922	278	975	303	791	328	602	353	826
254	870	279	526	304	383	329	772	354	411
255	015	280	829	305	948	330	597	355	575
256	050	281	834	306	543	331	169	356	219
257	723	282	938	307	047	332	651	357	482
258	743	283	633	308	132	333	568	358	149
259	672	284	494	309	296	334	776	359	615
260	446	285	350	310	129	335	260	360	652
261	556	286	297	311	649	336	055	361	890
262	913	287	199	312	462	337	748	362	351
263	100	288	367	313	461	338	181	363	952
264	030	289	059	314	873	339	659	364	806
265	290	290	751	315	565	340	724	365	882
266	192	291	847	316	312	341	059	366	083
267	158	292	680	317	309	342	523	367	512
268	842	293	399	318	776	343	431	368	298
269	639	294	475	319	330	344	865	369	399
270	073	295	162	320	746	345	872	370	547
271	306	296	869	321	096	346	353	371	707
272	456	297	211	322	627	347	271	372	856
273	984	298	639	323	500	348	624	373	564
274	495	299	387	324	845	349	508	374	093

Продолжение на следующей странице

Таблица выбора варианта задания (НЗК=375 ÷ 499)

НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ	НЗК	АБВ
375	362	400	843	425	805	450	143	475	144
376	026	401	913	426	092	451	726	476	254
377	564	402	386	427	351	452	106	477	083
378	864	403	069	428	743	453	044	478	610
379	190	404	552	429	353	454	722	479	984
380	033	405	573	430	325	455	637	480	940
381	502	406	838	431	453	456	675	481	999
382	491	407	307	432	923	457	069	482	087
383	350	408	548	433	184	458	023	483	958
384	732	409	863	434	549	459	939	484	361
385	503	410	289	435	985	460	675	485	455
386	004	411	375	436	149	461	352	486	609
387	927	412	640	437	685	462	437	487	204
388	775	413	638	438	758	463	962	488	592
389	157	414	538	439	861	464	432	489	285
390	462	415	409	440	076	465	739	490	196
391	173	416	139	441	735	466	902	491	227
392	711	417	068	442	005	467	857	492	245
393	441	418	210	443	515	468	698	493	043
394	764	419	021	444	926	469	376	494	975
395	016	420	316	445	332	470	973	495	665
396	686	421	526	446	734	471	610	496	419
397	867	422	336	447	176	472	857	497	394
398	481	423	820	448	942	473	346	498	258
399	835	424	102	449	497	474	161	499	307

ЗАДАНИЕ 1. Кинематика точки

Точка B движется в плоскости xy. Закон движения точки задан в табл. 1 зависимостями $x{=}f_1(t)$, $y{=}f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах. Найти уравнение траектории и построить ее на чертеже. Для момента времени t_1 определить и показать на чертеже: а) положение точки на траектории, б) вектор ее скорости, в) векторы касательного, нормального и полного ускорений, и г) радиус кривизны трактории в соответствующей точке.

Указания

Задание 1 выполняется с использованием формул для определения скорости и ускорения точки при координатном способе задания ее движения. Численные значения всех искомых величин нужно определить только для момента времени t_1.

В некоторых вариантах задачи окажутся полезными тригонометрические формулы: $\cos 2\alpha{=}1{-}2\sin^2\alpha{=}2\cos^2\alpha{-}1$; $\sin 2\alpha{=}2\sin\alpha\cos\alpha$.

Пример 1

Движение точки в плоскости xy задано уравнениями:
$x{=}{-}2\cos(\pi t/4){+}3$, $y{=}2\sin(\pi t/8){-}1$, (x, y – в см, t – в с).

Определить уравнение траектории и построить ее на чертеже. Для момента времени $t_1{=}1$с найти и показать на рисунке положение точки, векторы ее скорости, касательного, нормального и полного ускорений, а также центр и радиус кривизны траектории.

Решение

Найдем траекторию точки, исключив из заданных уравнений движения время t.

Сначала находим $\cos(\pi t/4){=}(3{-}x)/2$, $\sin(\pi t/8){=}(y{+}1)/2$. Подставляя полученные выражения в формулу $\cos 2\alpha{=}1{-}2\sin^2\alpha$, получим уравнение траектории: $(3{-}x)/2{=}1{-}(y{+}1)^2/2$, которое после упрощений принимает вид $x{=}(y{+}1)^2{+}1$. Это парабола, изображенная на рис. 1. Положение точки на траектории при $t_1{=}1$ определяем, вычисляя ее координаты из уравнений движения при $t_1{=}1$: $x(1){=}1{,}59$ см, $y(1){=}{-}0{,}23$ см.

Таблица 1

Номер строки	$f_1(t)$, см	$f_2(t)$, см			t_1 , с
0	$2-3\cos(\pi t/6)$	$12\sin(\pi t/6)$	$2t^2+2$	$4\cos(\pi t/6)-2$	1,25
1	$6\cos(\pi t/6)-3$	$-4-6\cos(\pi t/3)$	$8\sin(\pi t/4)$	$14-16\cos^2(\pi t/6)$	1,45
2	$4\cos(\pi t/6)$	$-3\sin^2(\pi t/6)$	$(2+t)^2$	$4\cos(\pi t/3)$	1,65
3	$2-t$	$9\sin(\pi t/6)-4$	$2t^3$	$-10\cos(\pi t/6)$	1,85
4	$2t$	$3\cos(\pi t/3)-2$	$2+2\cos(\pi t/4)$	$-4\cos^2(\pi t/6)$	2,05
5	$t-4$	$-10\sin(\pi t/6)$	$2-3t^2$	$8-12\cos(\pi t/3)$	2,25
6	$4-2t$	$2-6\sin^2(\pi t/6)$	$2-2\sin(\pi t/4)$	$3\cos(\pi t/6)$	2,45
7	$12\sin(\pi t/6)$	$2\sin(\pi t/6)-2$	$(t+1)^3$	$6-8\cos(\pi t/3)$	2,65
8	$4-6\sin(\pi t/6)$	$9\cos(\pi t/3)+5$	$2-t^3$	$9\cos(\pi t/6)-3$	2,85
9	$8\sin(\pi t/6)-2$	$3-8\sin(\pi t/6)$	$4\cos(\pi t/4)$	$-6\cos(\pi t/3)$	3,05
	А	**Б** для **А**=0, 1, 2	**Б** для **А**=3, 4, 5, 6	**Б** для **А**=7, 8, 9	**В**

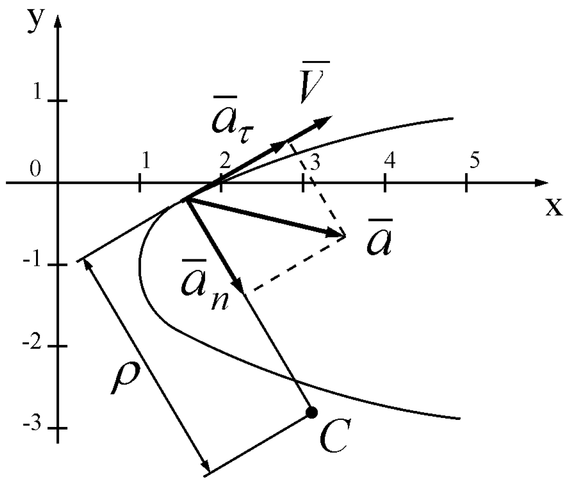


Рис. 1.

Скорость точки $\vec{V}$ найдем по ее проекциям на координатные оси, дифференцируя функции x и y по времени t:

$V_x{=}\dot{x}{=}\pi\sin(\pi t/4)/2,\ V_y{=}\dot{y}{=}\pi\cos(\pi t/8)/4,\ V{=}\sqrt{V_x^2+V_y^2}.$

Здесь и далее используются общепринятые компактные обозначения первой и второй производных по времени: одна точка над символом функции обозначает первую производную, две точки над символом – вторую производную.

При $t{=}t_1$: $V_x(1){=}1{,}11$ см/с, $V_y(1){=}0{,}73$ см/с, $V(1){=}1{,}33$ см/с.

Вектор скорости $\vec{V}$ построим по проекциям V_x и V_y (с учетом их знаков), он направлен по касательной к траектории.

Далее определяем вектор ускорения $\vec{a}$:

$a_x{=}\dot{V}_x{=}\ddot{x}{=}\pi^2\cos(\pi t/4)/8,\quad a_y{=}\dot{V}_y{=}\ddot{y}{=}-\pi^2\sin(\pi t/8)/32,\ a{=}\sqrt{a_x^2{+}a_y^2}.$

При $t{=}t_1$: $a_x(1){=}0{,}87$ см/с^2, $a_y(1){=}-0{,}12$ см/с^2, $a(1){=}0{,}88$ см/с^2.

Вектор $\vec{a}$ построим по его проекциям a_x, a_y. Касательное a_τ и нормальное a_n ускорения найдем по формулам:

$$a_\tau{=}\dot{V}{=}(V_x a_x{+}V_y a_y)/V, \qquad a_n{=}\sqrt{a^2{-}a_\tau^2}.$$

При $t{=}t_1$: $a_\tau(1){=}0{,}66$ см/с^2, $a_n(1){=}0{,}58$ см/с^2.

Векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ построим на рис. 1 в соответствии с векторным равенством $\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$. Вектор $\vec{a}_n$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории, а $\vec{a}_\tau$ – по касательной к траектории, причем, если $a_\tau>0$, то направления $\vec{V}$ и $\vec{a}_\tau$ совпадают, и движение точки в данный момент времени является ускоренным. Если $a_\tau<0$, то направления $\vec{V}$ и $\vec{a}_\tau$ противоположны, а движение точки – замедленное.

Найдем радиус кривизны траектории $\rho = V^2/a_n$. При $t = t_1$: $\rho = 3{,}05$ см.

Ответ :

при $t = t_1 = 1$с : $V = 1{,}33$ см/с, $a = 0{,}88$ см/с^2,

$a_\tau = 0{,}66$ см/с^2, $a_n = 0{,}58$ см/с^2, $\rho = 3{,}05$ см,

точка в рассматриваемый момент времени $t = t_1 = 1$ с движется ускоренно.

ЗАДАНИЕ 2. Простейшие движения твердого тела: поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси

Механизм состоит из двухступенчатых колес 1, 2, 3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, движущегося поступательно и привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. 2.0-2.9). Радиусы ступеней колес $1-3$ равны соответственно: r_1=2 см, R_1=4 см, r_2=6 см, R_2=8 см, r_3=12 см, R_3=16 см. На ободах колес расположены точки A, B и C.

Таблица 2

Номер		Дано		t_1, с
строки	рисунка	Заданная функция	$f(t)$	
0	2.0	S_4	$4(7-t^2)$	0,5
1	2.1	S_5	$2(t^2-3)$	0,75
2	2.2	φ_1	$\left\{2t^2-9\right\}$	1,0
3	$\left\{2.3\right\}$	φ_2	$7t-3t^2$	$\left\{1{,}25\right\}$
4	2.4	$\left\{\varphi_3\right\}$	$3t-7t^2$	1,5
5	2.5	φ_1	$5t-3t^2$	2,0
6	2.6	φ_2	$2(t^2-7t)$	0,25
7	2.7	S_4	$3t^2-8$	0,5
8	2.8	S_5	$3t^2-5t$	0,75
9	2.9	φ_3	$8t-3t^2$	1,5
	А	**Б**	**В**	**А**

В фигурных скобках стоят данные, соответствующие варианту **АБВ=342** (см. правило выбора варианта во ВВЕДЕНИИ).

В столбце *Дано* табл. 2 указан закон движения одного из звеньев механизма, причем под $\varphi_i = f(t)$, рад — подразумевается закон вращения колеса, а $S_i = f(t)$, см — обозначает закон поступательного движения рейки или груза; время t измеряется в секундах.

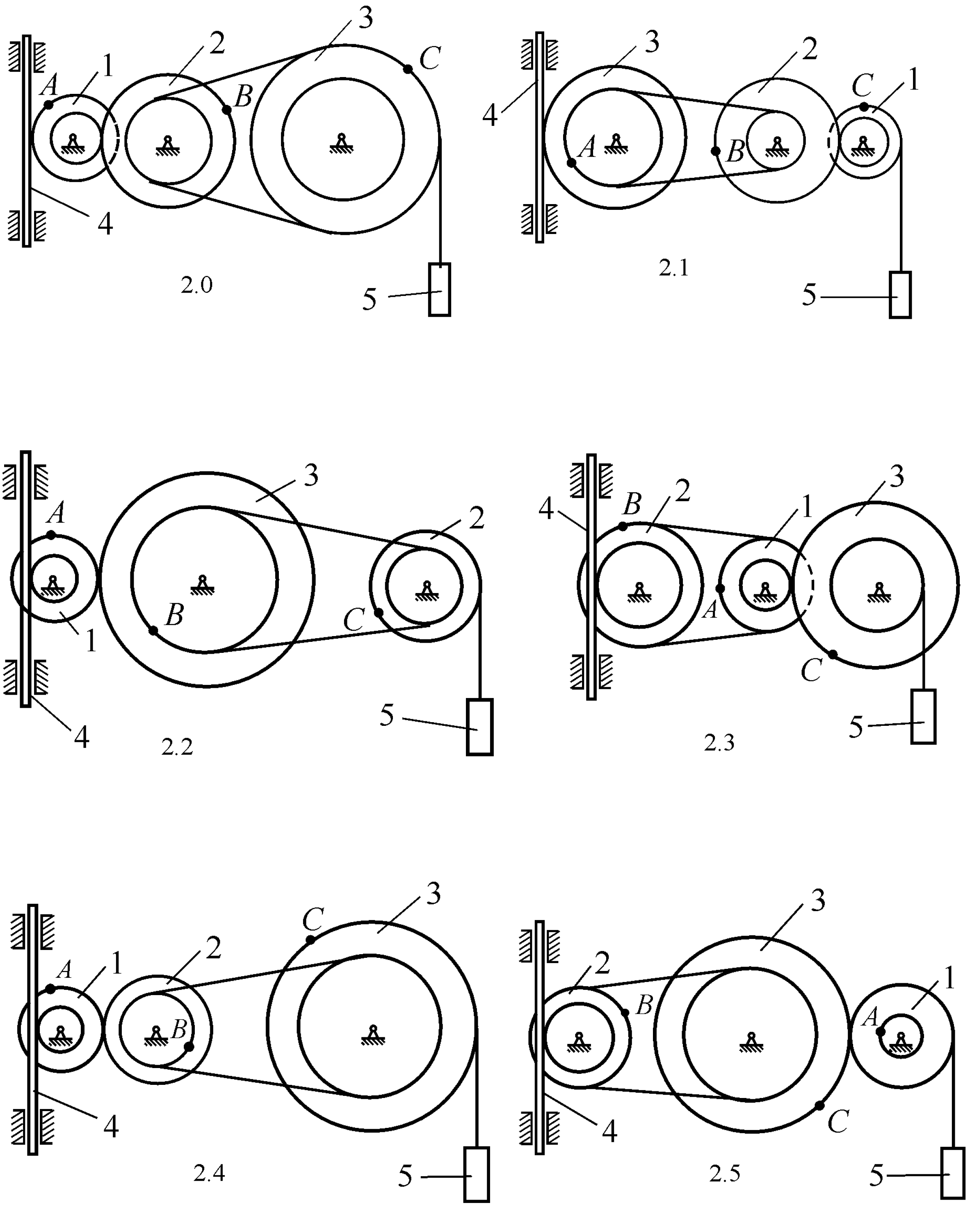
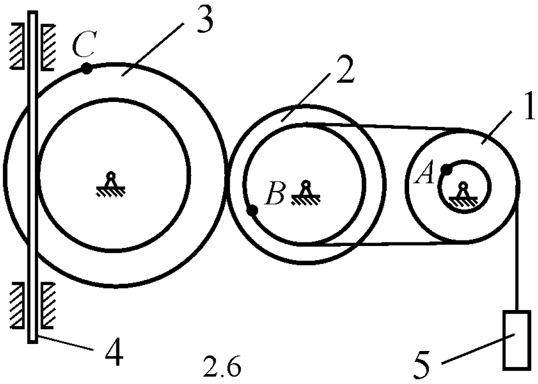
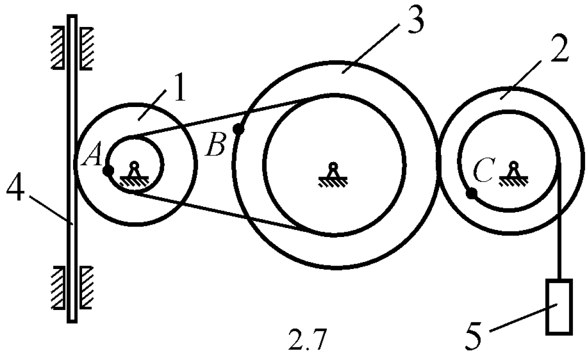


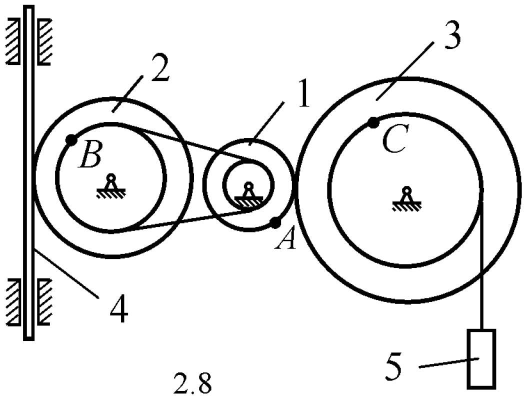
Рис. 2.0 — 2.5



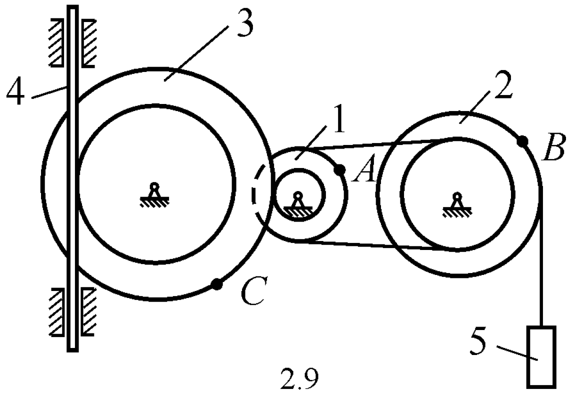
2.6



2.7



2.8



2.9

Рис. 2.6 — 2.9

Положительным для φ_i считается направление против хода часовой стрелки, а для S_i — вертикально сверху вниз.

Для механизма, изображенного на рисунке, по заданному закону движения одного из звеньев найти в момент времени t_1 величины скоростей и ускорений точек A, B, C, рейки 4, груза 5, а также угловые скорости и угловые ускорения колес 1, 2, 3.

Указания

Задание 2 — на исследование поступательного и вращательного движения твердого тела. При решении задачи необходимо учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорости их точек контакта равны, поскольку зацепление предполагает отсутствие проскальзывания. Аналогично, если два колеса связаны ременной передачей так, что проскальзывание отсутствует, скорости всех точек ремня и точек, лежащих на ободе каждого из колес, численно одинаковы.

Пример 2

По заданному уравнению $x{=}x(t)$ прямолинейного поступательного

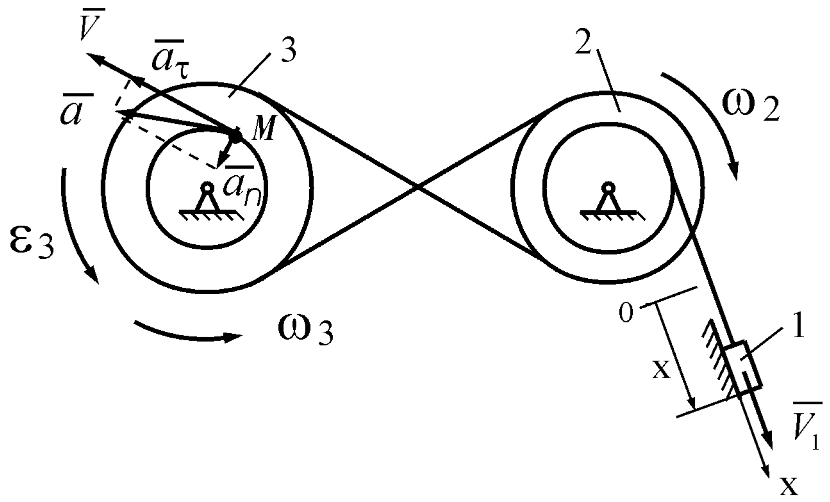


Рис. 2

движения груза 1 (время t измеряется в секундах) определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки M механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен L (рис. 2):

$x = 2 + 70t^2$ см, $R_2 = 50$ см, $r_2 = 30$ см,
$R_3 = 60$ см, $r_3 = 40$ см, $L = 40$ см.

Решение

Найдем момент времени t_1, когда путь L, пройденный грузом, равен 40 см: $L{=}x(t_1){-}x(0) = 70\,t_1^2$, откуда $t_1{=}\sqrt{L/70}{=}0{,}76$ с. Затем, дифференцируя x по времени, найдем скорость груза: $V_1{=}\dot{x}{=}140\,t$. Изобразим вектор $\vec{V}_1$ на рисунке.

Так как нить, связывающая груз 1 и колесо 2, нерастяжима и движется поступательно, скорости груза и точки, лежащей на ободе малого радиуса второго колеса, одинаковы, т.е. $V_1{=}\omega_2\,r_2$, где ω_2 – угловая скорость звена 2, откуда $\omega_2{=}V_1/r_2{=}4{,}67\,t$. Так как ветвь нерастяжимой нити, связывающей колеса 2 и 3, движется поступательно, скорости точек, лежащих на внешних ободьях колес 2 и 3, одинаковы, т.е. $\omega_2\,R_2{=}\omega_3\,R_3$, откуда следует $\omega_3{=}\omega_2\,R_2/R_3{=}3{,}89\,t$.

Найдем угловое ускорение: $\varepsilon_3{=}\dot{\omega}_3{=}3{,}89\,\text{с}^{-2}$. С учетом знаков изобразим на рисунке дуговые стрелки ω_2, ω_3, ε_3.

Вычислим скорость точки M: $V{=}\omega_3\, r_3{=}156\,t$, она направлена перпендикулярно радиусу в сторону, соответствующую вращению колеса 3. При $t{=}t_1$: $V{=}119$ см/с.

Касательное ускорение точки $a_\tau{=}\varepsilon_3\, r_3{=}156\,\text{см/с}^2$ от времени не зависит и имеет одинаковое со скоростью направление, так как знаки ω_3 и ε_3 совпадают (вращение колес ускоренное).

Нормальное ускорение точки найдем по формуле $a_n{=}\omega_3^2\, r_3{=}605\,t^2$, оно направлено по радиусу к центру колеса.

Вычислим полное ускорение точки M: $a{=}\sqrt{a_\tau^2{+}a_n^2}{=}383$ см/с^2.

Ответ :

при $t{=}t_1{=}0{,}76$ с: $\omega_3{=}2{,}94$ с$^{-1}$, $\varepsilon_3{=}3{,}89$ с$^{-2}$,
$V{=}118$ см/с, $a_\tau{=}156$ см/с^2, $a_n = 349$ см/с^2,
$a{=}383$ см/с^2.

ЗАДАНИЕ 3. Плоское движение твердого тела

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B или E (рис. 3.0$-$3.9), соединенных шарнирами друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2; шарнир D находится в середине стержня AB. Длины стержней равны соответственно: $\ell_1{=}0{,}4$ м, $\ell_2{=}1{,}2$ м, $\ell_3{=}1{,}4$ м, $\ell_4{=}0{,}6$ м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. 3а (для вариантов, в которых $\mathbf{А} \geqslant \mathbf{Б}$) или в табл. 3б (для вариантов, в которых $\mathbf{А} < \mathbf{Б}$).

Определить скорости всех точек механизма, обозначенных буквами на схемах, а также угловые скорости всех стержней.

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. 3.6 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на рис. 3.9 $-$ против хода часовой стрелки).

Построение чертежа необходимо начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изображать так, как в примере 3 (см. рис. 3, *б*).

Заданную угловую скорость считать направленной против хода часовой стрелки, а заданную скорость $\vec{V}_B$ $-$ от точки B к K (на рис. 3.5$-$3.9).

Таблица 3а

Данные для вариантов **А** $\geqslant$ **Б**

Номер		Углы, град					Дано	
строки	рисунка	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/c	ω_4, 1/c
0	3.0	0	60	30	0	120	6	–
1	3.1	90	120	150	0	30	–	4
2	3.2	30	60	30	0	120	5	–
3	3.3	60	150	150	90	30	–	5
4	3.4	30	30	60	0	150	4	–
5	3.0	90	120	120	90	60	–	6
6	3.1	90	150	120	90	30	3	–
7	3.2	0	60	60	0	120	–	2
8	3.3	60	150	120	90	30	2	–
9	3.4	30	120	150	0	60	–	8
	А	**Б**					**В**	

Таблица 3б

Данные для вариантов **А** $<$ **Б**

Номер		Углы, град					Дано	
строки	рисунка	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/c	V_B, м/c
0	3.5	120	30	30	90	150	2	–
1	3.6	0	60	90	0	120	–	4
2	3.7	60	150	30	90	30	3	–
3	3.8	0	150	30	0	60	–	6
4	3.9	30	120	120	0	60	4	–
5	3.5	90	120	90	90	60	–	8
6	3.6	0	150	90	0	120	5	–
7	3.7	30	120	30	0	60	–	2
8	3.8	90	120	120	90	150	6	–
9	3.9	60	60	60	90	30	–	5
	А	**Б**					**В**	

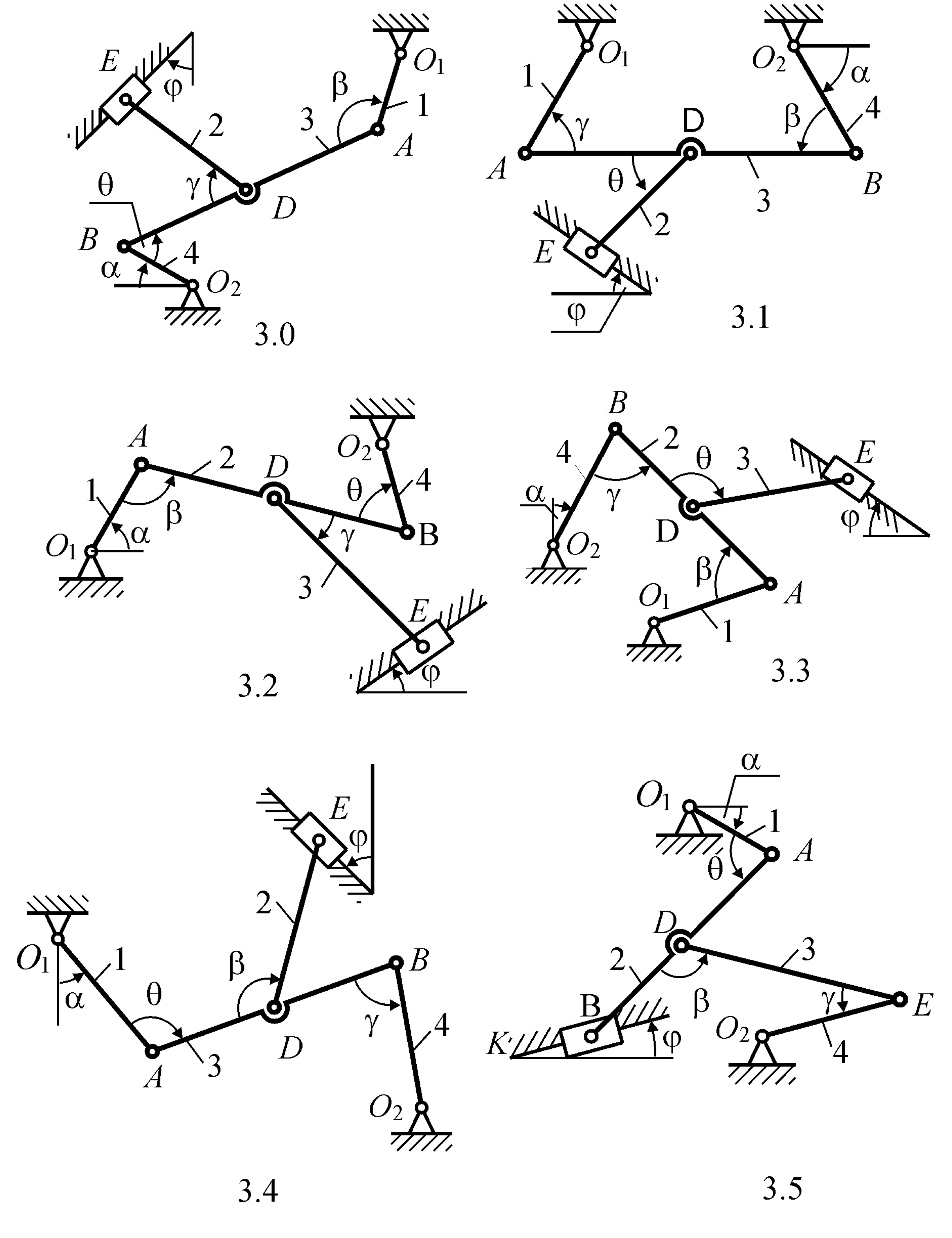
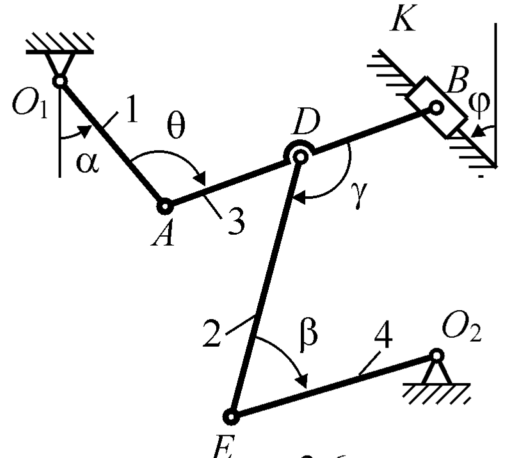
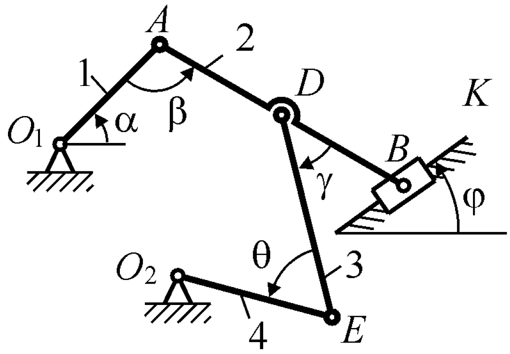

E
φ
O1
β
1
2
3
A
θ
γ
D
B
4
α
O2
3.0
O1
O2
1
α
γ
D
4
β
A
θ
B
3
2
E
φ
3.1
A
2
D
O2
1
β
θ
4
O1
α
γ
B
3
E
φ
3.2
B
2
4
θ
3
E
α
γ
O2
D
φ
β
O1
A
1
3.3
E
φ
2
O1
1
β
B
θ
α
γ
D
A
3
4
O2
3.4
α
O1
1
A
θ
D
2
3
B
β
γ
E
K
φ
O2
4
3.5

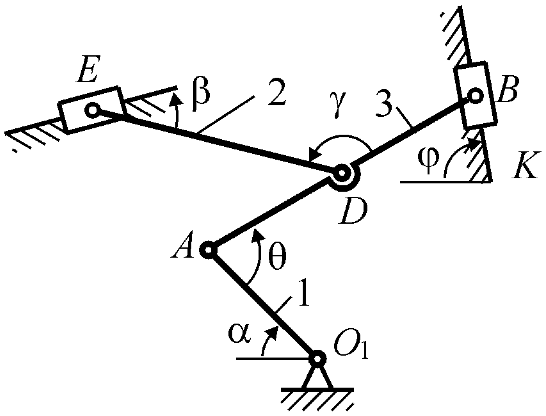
Рис. 3.0 – 3.5



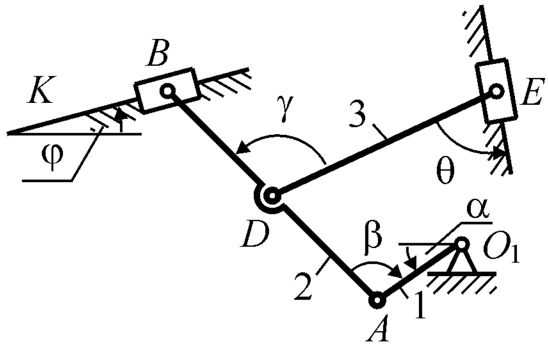
3.6



3.7



3.8



3.9

Рис. 3.6 – 3.9

Указания

Задание 3 – на исследование плоского (плоскопараллельного) движения твердого тела. При его выполнении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о равенстве проекций скоростей двух произвольных точек твердого тела на соединяющую их прямую, а также понятием мгновенного центра скоростей. Применять эту теорему (или понятие) необходимо к каждому звену механизма в отдельности.

Методика нахождения скоростей точек плоского механизма приводится ниже. Прежде чем приступить к решению подобных задач, надо хорошо усвоить кинематику простейших движений твердого тела – поступательного и вращательного вокруг неподвижной оси.

Пример 3

Плоский механизм (рис. 3,*а*) состоит из стержней 1, 2, 3 и 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Найти $\vec{V}_B$, $\vec{V}_E$ и угловые скорости всех стержней, если α=60°, β=150°, γ=90°, φ=30°, θ=30°, AD=DB, ℓ_1=0,4 м, ℓ_2=1,2 м, ℓ_3=1,4 м, ℓ_4=0,6 м, ω_1=2 с$^{-1}$ (направление ω_1 – против хода часовой стрелки).

Решение

Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 3,*б*).

Определяем $\vec{V}_B$. Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти $\vec{V}_B$, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\vec{V}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\vec{V}_A$:

$$V_A = \omega_1\,\ell_1 = 0{,}8\ \text{м/с}\,,\ \vec{V}_A \perp O_1A\,.$$

Так как точка B стержня AB принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно, то направление $\vec{V}_B$ известно. Теперь, зная $\vec{V}_A$ и направление $\vec{V}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB: это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, восстановленных из точек A и B. По направлению вектора $\vec{V}_A$ определяем направление поворота стержня АВ вокруг МЦС C_3, а также находим его угловую скорость ω_3 :

$$\omega_3{=}V_A/C_3A{=}V_A/(\ell_3\,\cos 30°){=}0{,}66\ \text{с}^{-1}\,,$$

изображаем на рисунке дуговую стрелку угловой скорости ω_3. Тогда

$$V_B{=}\omega_3\,C_3B{=}\omega_3\ell_3\cos 60°{=}0{,}46\ \text{м/с}\,.$$

Определим $\vec{V}_E$: точка E принадлежит стержню DE, следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\vec{V}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержням AB и ED. Вектор $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону, соответствующую повороту стержня AB. $\triangle\,BC_3D$ является равносторонним, поскольку $C_3B{=}AB\,\sin 30°{=}AB/2$. Поэтому $C_3B{=}C_3D$ и $V_D{=}\omega_3\,C_3D{=}0{,}46\ \text{м/с}$.

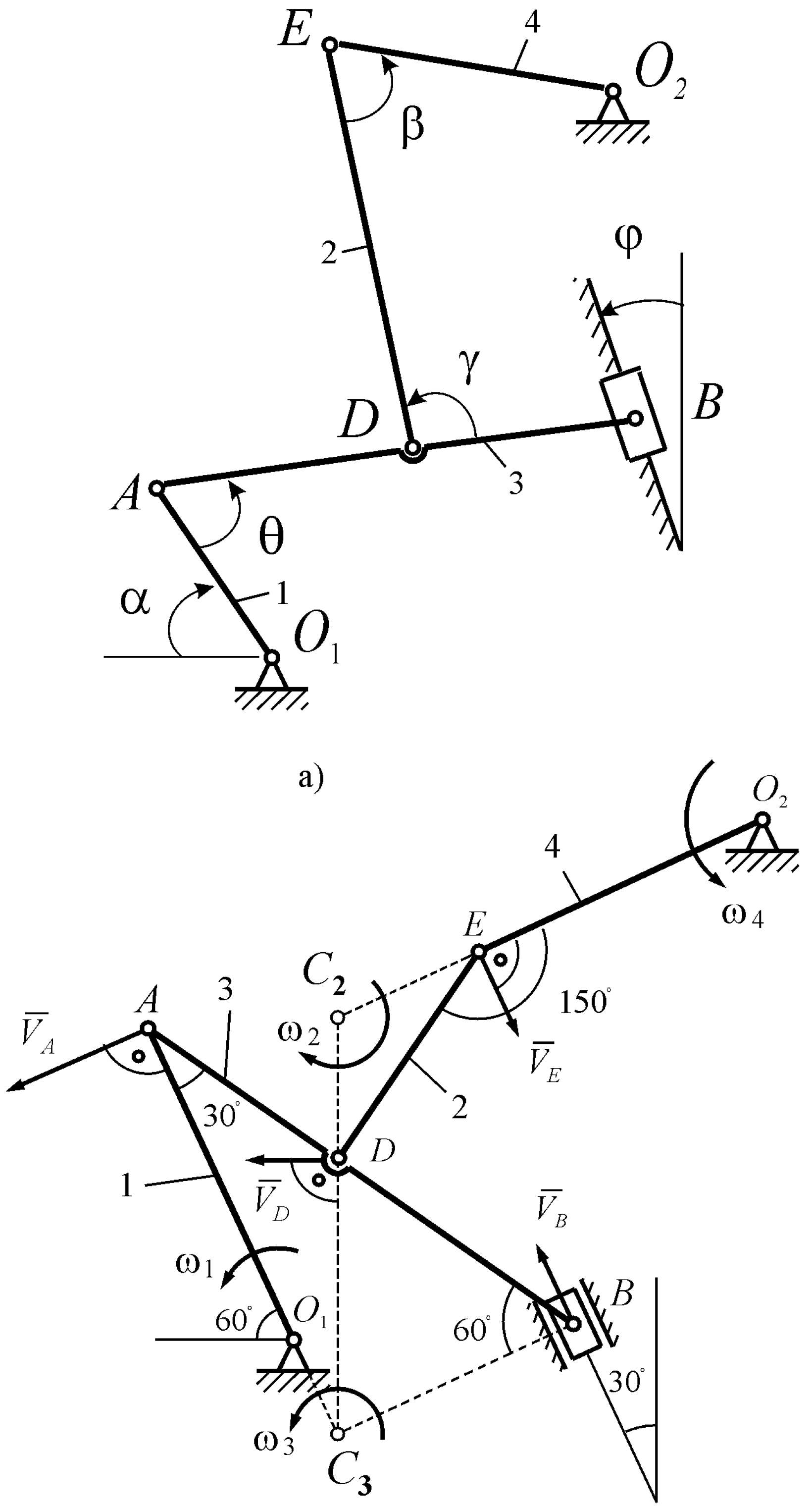


Рис. 3

Точка E принадлежит также стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, поэтому $\vec{V}_E \perp O_2E$. Проводя из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_E$ и $\vec{V}_D$, найдем точку C_2 – МЦС стержня DE. По направлению найденного ранее вектора $\vec{V}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\vec{V}_E$ направлен в сторону, соответствующую повороту этого стержня. Из рис. 3,*б* видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, следовательно $C_2E = C_2D = \ell_2/(2\cos 30°)$. Далее находим угловую скорость стержня DE и скорость точки E:

$$\omega_2 = V_D/C_2D = 0{,}67\ \text{с}^{-1},\ V_E = \omega_2\, C_2E = 0{,}46\ \text{м/с}.$$

Определяем далее $\omega_4 = V_E/O_2E = 0{,}77\ \text{с}^{-1}$. Направление вращения стержня вокруг неподвижной точки O_2 изображаем дуговой стрелкой ω_4, согласовав её с вектором $\vec{V}_E$.

Ответ :

$$V_B = 0{,}46\ \text{м/с},\quad V_E = 0{,}46\ \text{м/с},\quad \omega_2 = 0{,}67\ \text{с}^{-1},$$
$$\omega_3 = 0{,}66\ \text{с}^{-1},\quad \omega_4 = 0{,}77\ \text{с}^{-1}.$$

ЗАДАНИЕ 4. Сложное движение точки

Прямоугольная (рис. 4.0–4.4) или круглая пластина радиуса R=60 (рис. 4.5–4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в табл. 4.

Таблица 4

Номер		$\varphi = f_1(t)$	Для рис. 4.0–4.4		Для рис. 4.5–4.9	
строки	рисунка		b, см	$S = AM = f_2(t)$	ℓ	$S = \overset{\smile}{AM} = f_2(t)$
0	4.0	$4(t^2-t)$	12	$50(3t-t^2)-64$	R	$\pi R(4t^2-2t^3)/3$
1	4.1	$3t^2-8t$	16	$40(3t^2-t^4)-32$	$4R/3$	$\pi R(2t^2-t^3)/2$
2	4.2	$6t^3-12t^2$	10	$8(t^2-t)+40$	R	$\pi R(2t^2-1)/3$
3	4.3	t^2-2t^3	16	$60(t^4-3t^2)+56$	R	$\pi R(3t-t^2)/6$
4	4.4	$10t^2-5t^3$	8	$80(2t^2-t^3)-48$	R	$\pi R(t^3-2t)/3$
5	4.5	$2(t^2-t)$	20	$60(t^3-2t^2)$	R	$\pi R(t^3-2t)/3$
6	4.6	$5t-4t^2$	12	$40(t^2-3t)+32$	$3R/4$	$\pi R(t^3-2t^2)/2$
7	4.7	$15t-3t^3$	8	$60(t-t^3)+24$	R	$\pi R(t-5t^2)/6$
8	4.8	$2t^3-11t$	10	$50(5t^3-t)-30$	R	$\pi R(3t^2-t)/3$
9	4.9	$6t^2-3t^3$	20	$40(t-2t^3)-40$	$4R/3$	$\pi R(t-2t^2)/2$
	А	**Б**	**В**		**В**	

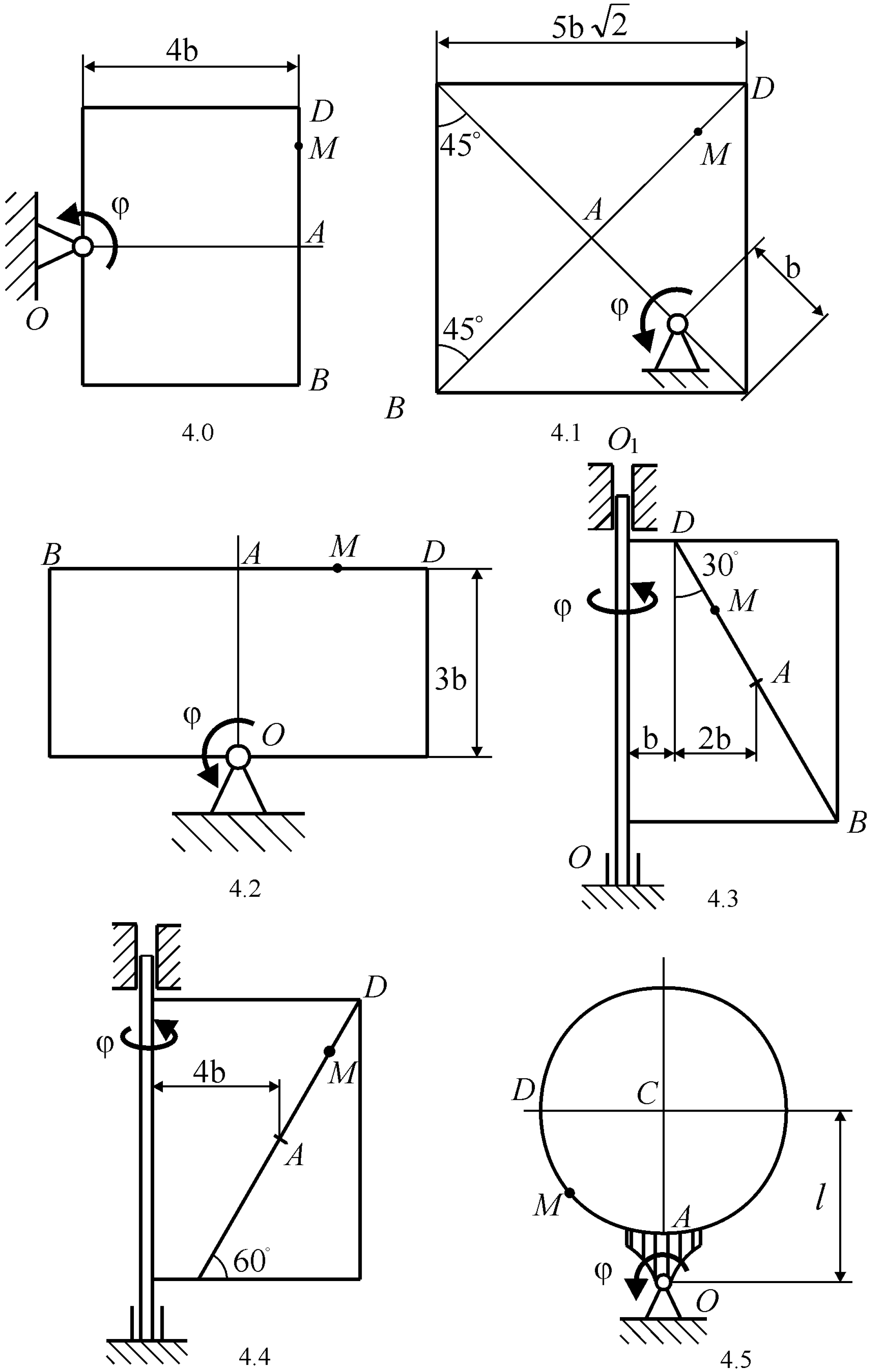
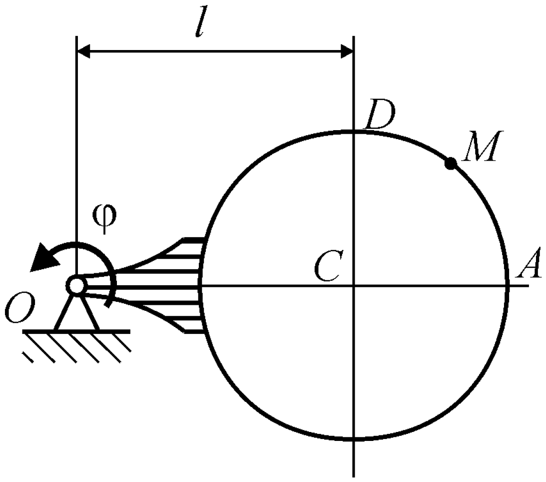
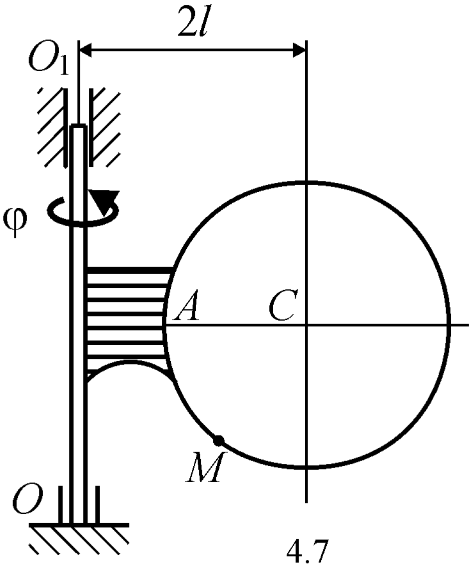

4b
D
M
φ
A
O
B
4.0
5b √2
D
45°
M
A
b
φ
45°
B
4.1
O1
B
A
M
D
3b
φ
O
4.2
D
30°
φ
M
A
b
2b
B
O
4.3
D
φ
M
4b
A
60°
4.4
D
C
M
l
A
φ
O
4.5

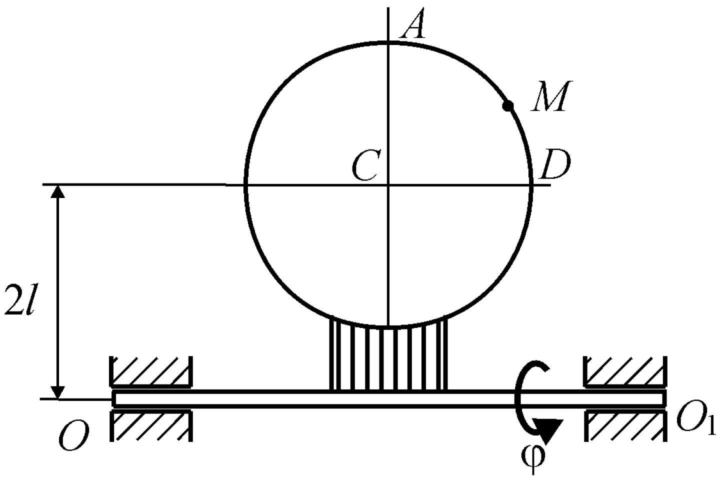
Рис. 4.0–4.5



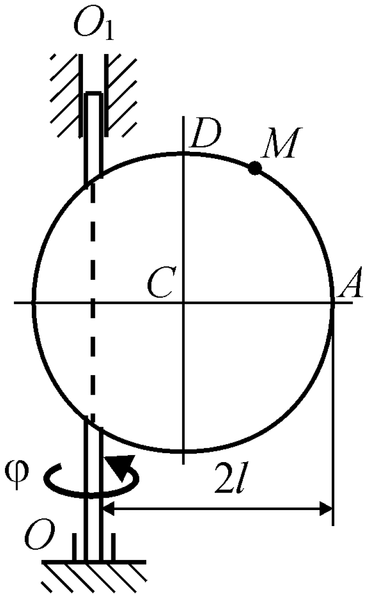
4.6



4.7



4.8



4.9

Рис. 4.6−4.9

Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 4.0, 4.1, 4.2, 4.5, 4.6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 4.3, 4.4, 4.7, 4.8, 4.9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 4.0−4.4) или по окружности радиуса R (рис. 4.5−4.9) движется точка M. Закон ее относительного движения (зависимость $S{=}AM\,=\,f_2(t)$, где S выражено в сантиметрах, t − в секундах) задан в таблице отдельно для рис. 4.0−4.4 и для рис. 4.5−4.9; там же даны размеры b и ℓ. Точка M изображена на рисунках в положениях, когда $S{=}AM{>}0$ (при $S{<}0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти скорость и ускорение точки M в момент времени $t_1{=}1$ с.

Указания

Для решения задачи удобно воспользоваться теоремами о сложении скоростей и ускорений точки при ее сложном (составном) движении.

Прежде чем производить расчеты, следует по условию задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени t_1, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к заданию).

В случаях, относящихся к рис. 4.5−4.9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени t_1, а также угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Пример 4

Треугольная пластинка ABC в момент $t{=}0$ начинает вращаться из состояния покоя $\omega_0{=}0\,\text{с}^{-1}$ вокруг своей оси AB (оси z) с постоянным угловым ускорением $\varepsilon{=}0{,}1\,\text{с}^{-2}$.

Одновременно по гипотенузе BC из ее середины L начинает движение точка M. Закон движения точки M по прямой BC определяется уравнением $S{=}LM{=}0{,}2\sin(\pi t/3)\,\text{см}$, причем координата S отсчитывается в сантиметрах от точки L в сторону точки C (рис. 4,*а*). Кроме того, дано: $BL{=}LC{=}10$ см, $\angle CBA{=}\alpha{=}40°$.

Найти скорость и ускорение точки M при $t{=}1$ с.

Решение

Выберем подвижную систему отсчета, жестко связав ее с вращающейся пластинкой.

Найдем угловую скорость движения подвижной системы:

$$\omega{=}\omega_0{+}\int_0^t \varepsilon\, dt{=}\varepsilon\, t{=}0{,}1\,t\,, \quad \text{при } t{=}1\,\text{с}, \quad \omega{=}0{,}1\ \text{с}^{-1}.$$

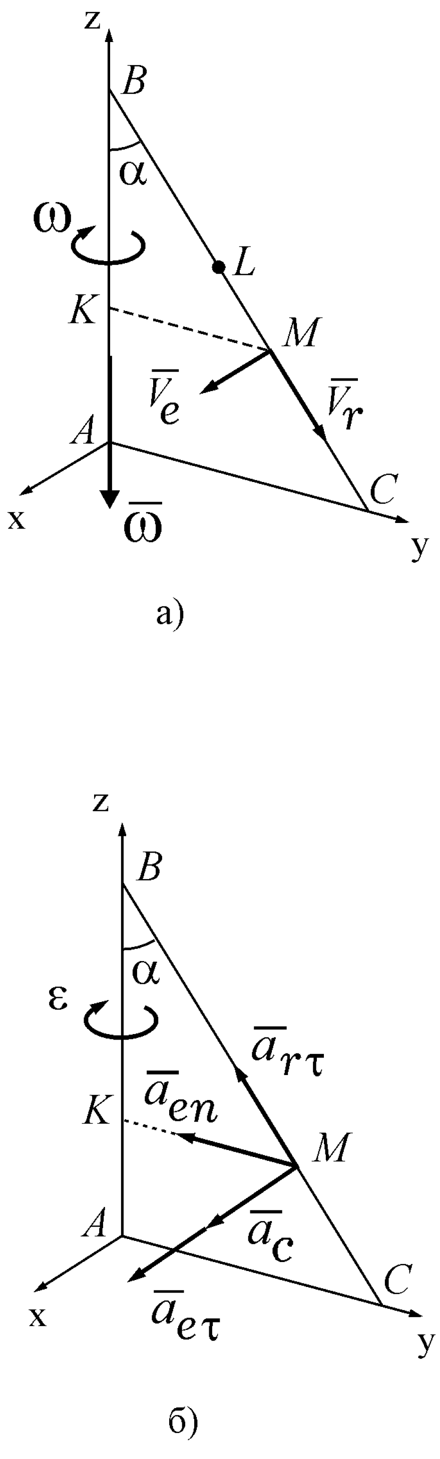
В соответствии с направлением вращения пластинки вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ подвижной системы отсчета при $t{=}1$ с направлен по оси вращения от B к A (правило правого буравчика).

Найдем положение точки M на пластинке при $t{=}1$ с:

$$LM{=}0{,}2\ \sin(\pi/3){=}0{,}173\,\text{см}\,.$$

Величину относительной скорости $\vec{V}_r$ найдем по формуле $V_r = \dot{S} = \pi \cos(\pi t/3)/15$, при $t = 1$ с : $V_r = 0{,}1$ см/с .

Вектор $\vec{V}_r$ направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону увеличения дуговой координаты S, так как $V_r > 0$.



а)

б)

Рис. 4

Величину переносной скорости $\vec{V}_e$ определим по формуле

$$V_e{=}\omega\, MK{=}0{,}65\ \text{см/с}\,,$$

где радиус вращения $MK{=}BM\sin\alpha{=}6{,}5$ см.

Вектор $\vec{V}_e$ направлен перпендикулярно плоскости пластинки и согласован с направлением ее вращения.

Абсолютную скорость точки $\vec{V}_a$ теперь можно найти, использовав теорему о скоростях точки при сложном движении:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e\,.$$

Проектируя последнее векторное соотношение на оси x, y, z (рис. 4,а), получим:

$$\begin{aligned} V_{a\,x} &= \quad V_e &&= \quad 0{,}65\ \text{см/с}\,,\\ V_{a\,y} &= \quad V_r\sin\alpha &&= \quad 0{,}06\ \text{см/с}\,,\\ V_{a\,z} &= -V_r\cos\alpha &&= -0{,}08\ \text{см/с}\,. \end{aligned}$$

По найденным проекциям можно определить модуль скорости точки M:

$$V_a = \sqrt{(V_{a\,x})^2 + (V_{a\,y})^2 + (V_{a\,z})^2} = 0{,}66\ \text{см/с}\,.$$

Вектор скорости $\vec{V}_a$ на рис. 4,а не изображён (чтобы не загромождать чертёж). Его легко построить по найденным проекциям $V_{a\,x}, V_{a\,y}$ и $V_{a\,z}$. Это построение может стать дополнительным вопросом на зачёте, поэтому желательно его выполнить заранее.

Ускорение точки $\vec{a}$ найдём при помощи теоремы об ускорениях точки при сложном движении.

Найдем величину касательного относительного ускорения:
$a_{r\,\tau}{=}\dot{V}_r{=}\ddot{S}{=}-\pi^2\sin(\pi t/3)/45$, при t=1 с: $a_{r\,\tau}{=}{-}0{,}19$ см/с^2.

Знак минус показывает, что при $t{=}1$ с вектор $\vec{a}_{r\,\tau}$ направлен по гипотенузе BC от M к B (рис. 4,*б*), т.е. в сторону уменьшения дуговой координаты.

Так как относительное движение точки прямолинейное ($\rho_r{=}\infty$), ее нормальное относительное ускорение равно нулю: $a_{r\,n}{=}V_r^2/\rho_r{=}0$.

Переносное ускорение удобно разложить на касательное – $\vec{a}_{e\,\tau}$ и нормальное – $\vec{a}_{e\,n}$.

Нормальное переносное ускорение направлено к оси вращения пластинки по MK, причем

$$a_{e\,n}{=}\omega^2\,MK{=}0{,}065\ \text{см/с}^2\ .$$

Так как ω и ε одного знака, то направление касательного переносного ускорения совпадает с направлением переносной скорости. При этом

$$a_{e\,\tau}{=}\varepsilon\,MK{=}0{,}65\ \text{см/с}^2\ .$$

Найдем величину и направление ускорения Кориолиса:

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega}\times\vec{V}_r\,.$$

В соответствии с определением векторного произведения вектор $\vec{a}_c$ перпендикулярен обоим сомножителям (векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{V}_r$) и направлен так, что если посмотреть ему навстречу, то ближайший поворот от первого сомножителя ($\vec{\omega}$) ко второму ($\vec{V}_r$) должен казаться происходящим против хода часовой стрелки (т.е. $\vec{a}_c$ в рассматриваемом случае параллелен оси x).

Модуль ускорения Кориолиса будет равен:

$$|\vec{a}_c|{=}2\,|\vec{\omega}|\,|\vec{V}_r|\ \sin 40^\circ{=}0{,}013\ \ \text{см/с}^2\ .$$

Для нахождения абсолютного ускорения точки M при $t{=}1$ с запишем теорему о сложении ускорений точки при ее сложном движении:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{a}_{r\,\tau} + \vec{a}_{r\,n} + \vec{a}_{e\,\tau} + \vec{a}_{e\,n} + \vec{a}_c\,,$$

и спроектируем векторное соотношение на оси x, y, z. Используя рис. 4,*б*, получим:

$$\begin{array}{llllllllll}
a_{a\,x}{=} & 0 & + & 0 & + & a_{e\,\tau} & + & 0 & + & a_c{=}\ \ 0{,}663\ \ \text{см/с}^2\,,\\
a_{a\,y}{=} & -a_{r\,\tau}\sin\alpha & + & 0 & + & 0 & - & a_{e\,n} & + & 0\ {=}{-0{,}187}\ \text{см/с}^2\,,\\
a_{a\,z}{=} & a_{r\,\tau}\cos\alpha & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0\ {=}\ \ 0{,}144\ \text{см/с}^2\,.
\end{array}$$

Находим модуль ускорения точки M:

$$a_a = \sqrt{(a_{a\,x})^{\,2} + (a_{a\,y})^{\,2} + (a_{a\,z})^{\,2}} = 0{,}704\ \text{см/с}^2\ .$$

Ответ :

при $t{=}1$ с : $\quad V_M{=}0{,}66$ м/с , $\ a_M{=}0{,}704$ м/с^2 .

ЗАДАНИЕ 5. Равновесие тела, находящегося под действием плоской системы сил

Жесткая рама (рис. 5.0 – 5.9) закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз $P = 25$ кН. На раму действует пара сил с моментом $M = 60$ кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в табл. 5.

Определить реакции связей в точках A и B, вызванные действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять a=0,5 м.

Таблица 5

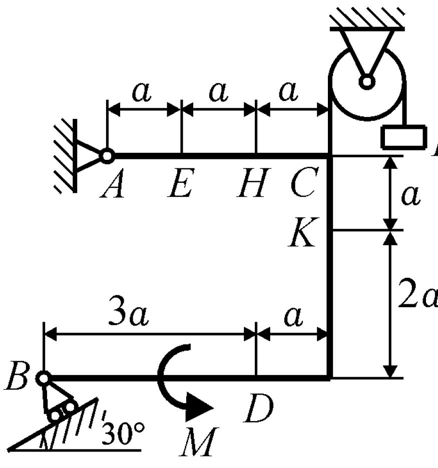
Номер		$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН	
строки	рисунка	Точка прилож.	α_1	Точка прилож.	α_2
0	5.0	H	0°	D	30°
1	5.1	K	15°	E	45°
2	5.2	C	30°	D	60°
3	5.3	H	45°	E	75°
4	5.4	K	60°	D	90°
5	5.5	C	75°	E	0°
6	5.6	H	90°	D	15°
7	5.7	K	0°	E	30°
8	5.8	C	15°	D	45°
9	5.9	H	30°	E	60°
	А	**Б**	**В**	**А**	**Б**

В таблице приняты обозначения: α_k (k=1,2) – угол между горизонтальной осью x, идущей слева направо, и направлением силы $\vec{F}_k$, отсчитываемый против хода часовой стрелки.

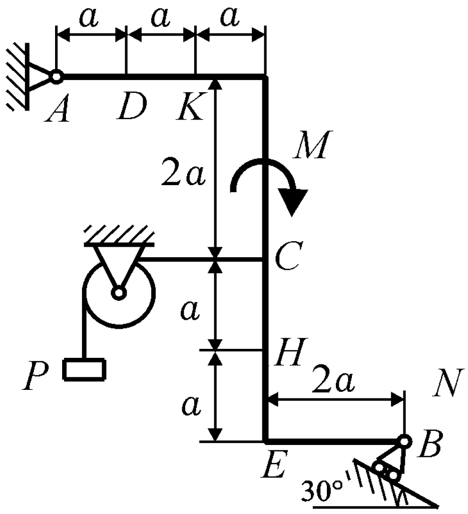
Указания

Задание 5 – на равновесие тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил.

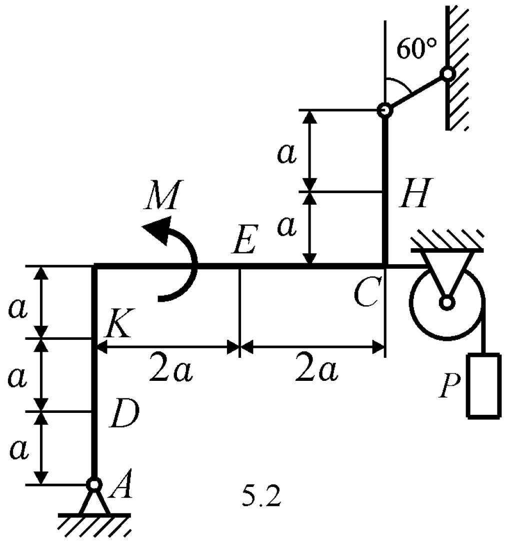
Перед решением задачи (а также во время подготовки к зачёту) полезно вспомнить основные понятия и теоремы статики.



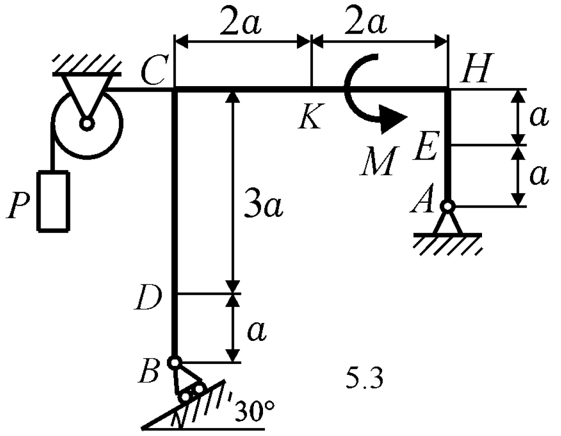
5.0



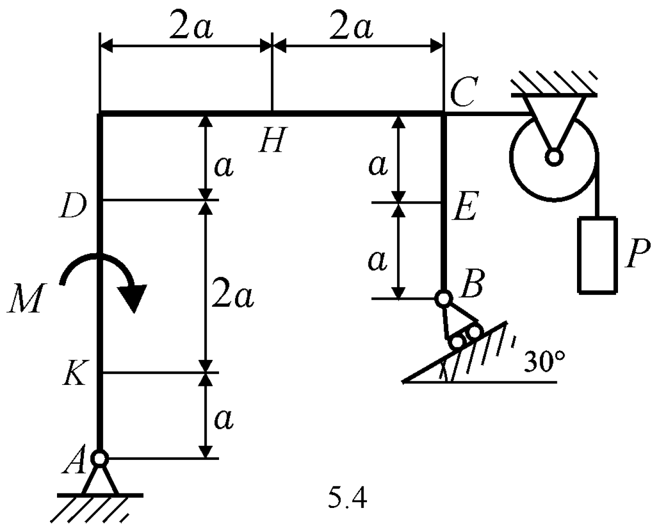
5.1



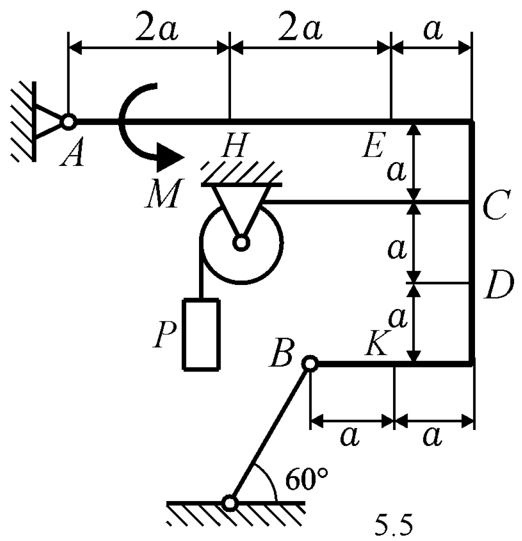
5.2



5.3

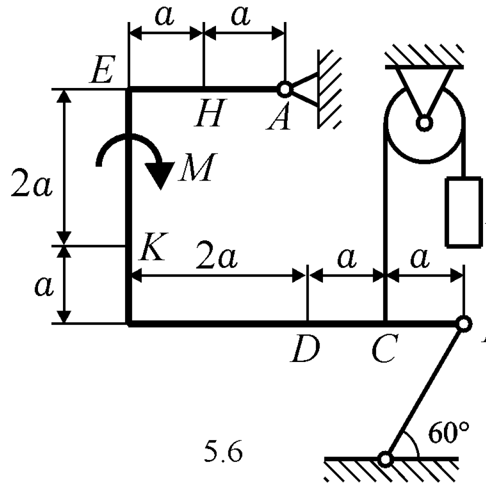


5.4

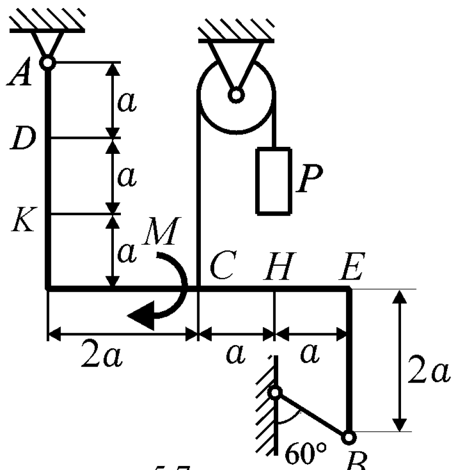


5.5

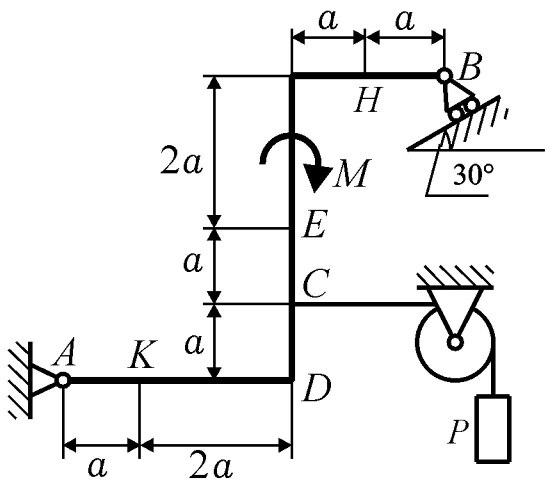
Рис. 5.0 – 5.5



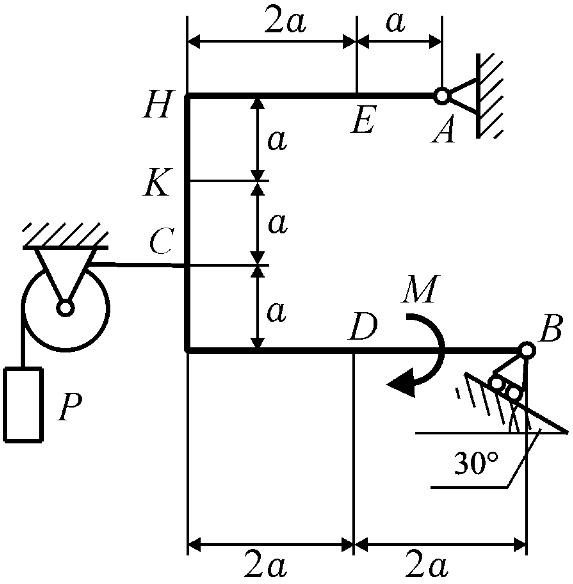
5.6



5.7



5.8



5.9

Рис. 5.6—5.9

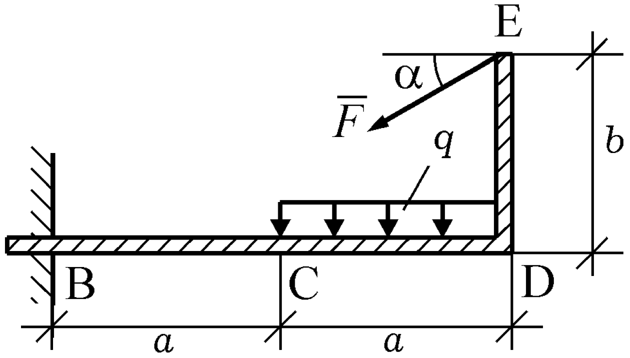
Для этой цели подойдёт любой учебник, приведенный в списке литературы. Кроме этого очень краткие "выжимки" теории приведены в Приложении настоящего пособия, оно не заменяет учебника, но может помочь в разрешении возникающих вопросов.

Добавим к этому, что натяжения в ветвях нитей, переброшенных через блок, будут одинаковы (предполагается, что силами трения в оси блока можно пренебречь в силу их малости).

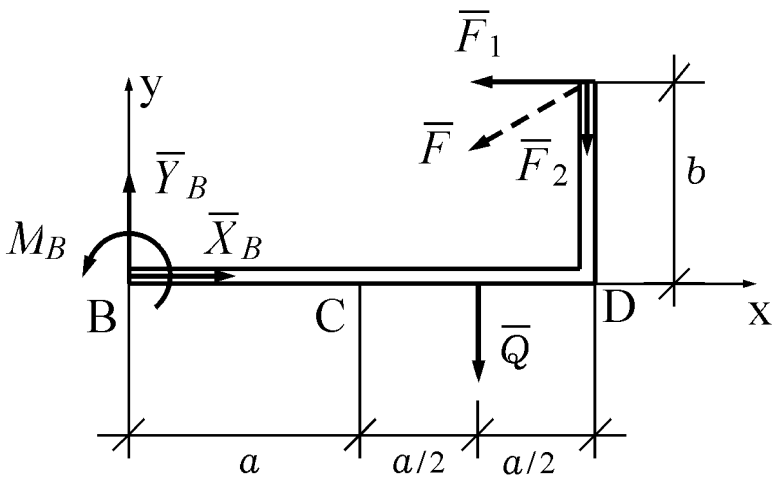
Кроме того, уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если в качестве моментной точки выбрать точку пересечения линий действия двух сил реакций связей.

Пример 5

Найти реакцию жесткой заделки B изогнутой невесомой балки BDE (рис. 5,a), находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q=2 кН/м и силы F=20 кН при следующих данных: α=30°, a=0,4 м, b=0,3 м.



а)



б)

Рис. 5

Решение

Рассмотрим равновесие балки, показав на рисунке: силу $\vec{F}$, равнодействующую распределенной нагрузки $\vec{Q}$ $(Q{=}qa)$, приложенную в середине отрезка CD, реакцию в заделке, состоящую из трех силовых факторов: $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ и M_B (рис. 5,*б*). Эта система сил уравновешена, т.е. $\{\vec{F}, \vec{Q}, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, M_B\} \sim 0$.

Составим уравнения равновесия полученной системы сил:

$$
\begin{array}{ll}
\sum F_x{=}0\ : & X_B{-}F\cos\alpha{=}0\,,\\
\sum F_y{=}0\ : & Y_B{-}Q{-}F\sin\alpha{=}0\,,\\
\sum m_{_B}(\vec{F}){=}0\ : & F\cos\alpha\, b{-}F\sin\alpha\, 2a{-}Q\,3a/2{+}M_B{=}0\,.
\end{array}
$$

При составлении последнего уравнения моментов была использована теорема Вариньона: сила $\vec{F}$ была заменена двумя составляющими $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, моменты которых легко найти. При этом $F_1 = F\cos\alpha$, $F_2 = F\sin\alpha$.

Решая систему, находим после подстановки численных значений :
$X_B{=}F\cos\alpha{=}17{,}3$ кН,
$Y_B{=}Q{+}F\sin\alpha{=}10{,}8$ кН,
$M_B{=}Q\,1,5a{+}F\sin\alpha\,2a{-}F\cos\alpha\, b{=}3{,}28$ кН·м.
$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 20{,}4$ кН.

Ответ :

$$R_B = 20{,}4 \text{ кН}\,,\ M_B = 3{,}28 \text{ кН·м}\,.$$

ЗАДАНИЕ 6. Равновесие системы двух тел, находящейся под действием плоской системы сил

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке C или соединены друг с другом шарнирно (рис. 6.0$-$6.5), или свободно опираются друг на друга (рис. 6.6$-$6.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию в точке , являются шарнир, или жесткая заделка; в точке B $-$ невесомый стержень BB' (рис. 6.0 и 6.1), или гладкая плоскость (рис. 6.2 и 6.3), или шарнир (рис. 6.4$-$6.9), в точке D $-$ невесомый стержень DD' (рис. 6.1, 6.2, 6.7), или шарнирная опора на катках (рис. 6.8).

На конструкцию действуют: пара сил с моментом $M{=}60$кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q{=}20$кН/м и еще две силы $-$ $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Направления сил и точки их приложения указаны в табл. 6; там же в столбце *Участок* указано, на каком участке действует распределенная нагрузка.

Определить реакции связей в точках A, B, C (для рис. 6.1, 6.2, 6.7, 6.8 еще и в точке D), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять a=0,2 м. Вектор $\vec{q}$ равномерно распределенной нагрузки перпендикулярен отрезку, к которому она приложена, при этом либо $q_x<0$, если же $q_x=0$, то нагрузку необходимо приложить так, чтобы выполнялось неравенство $q_y<0$.

Таблица 6

Номер		$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		Участок
строки	рисунка	Точка прилож.	α_1	Точка прилож.	α_2	
0	6.0	H	0°	L	90°	CL
1	6.1	K	15°	C	75°	CK
2	6.2	E	30°	L	60°	AE
3	6.3	H	45°	C	45°	CL
4	6.4	K	60°	L	30°	CK
5	6.5	E	75°	C	15°	AE
6	6.6	H	90°	L	0°	CL
7	6.7	K	0°	C	90°	CK
8	6.8	E	15°	L	75°	AE
9	6.9	H	30°	C	60°	CL
	А	**Б**	**В**	**А**	**Б**	**В**

В таблице приняты обозначения: α_k (k=1,2) – угол между горизонтальной осью x, идущей слева направо, и направлением силы $\vec{F}_k$, отсчитываемый против хода часовой стрелки.

Указания

Задание 6 – на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. Возможны два подхода к его выполнению: а) рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, считая ее единым твердым телом, а затем – равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно; б) расчленить систему на два тела, учитывая при этом закон равенства действия и противодействия; затем рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности.

В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция эквивалентна паре сил, момент которой неизвестен, и силе, неизвестной по величине и направлению (см. пример 5).

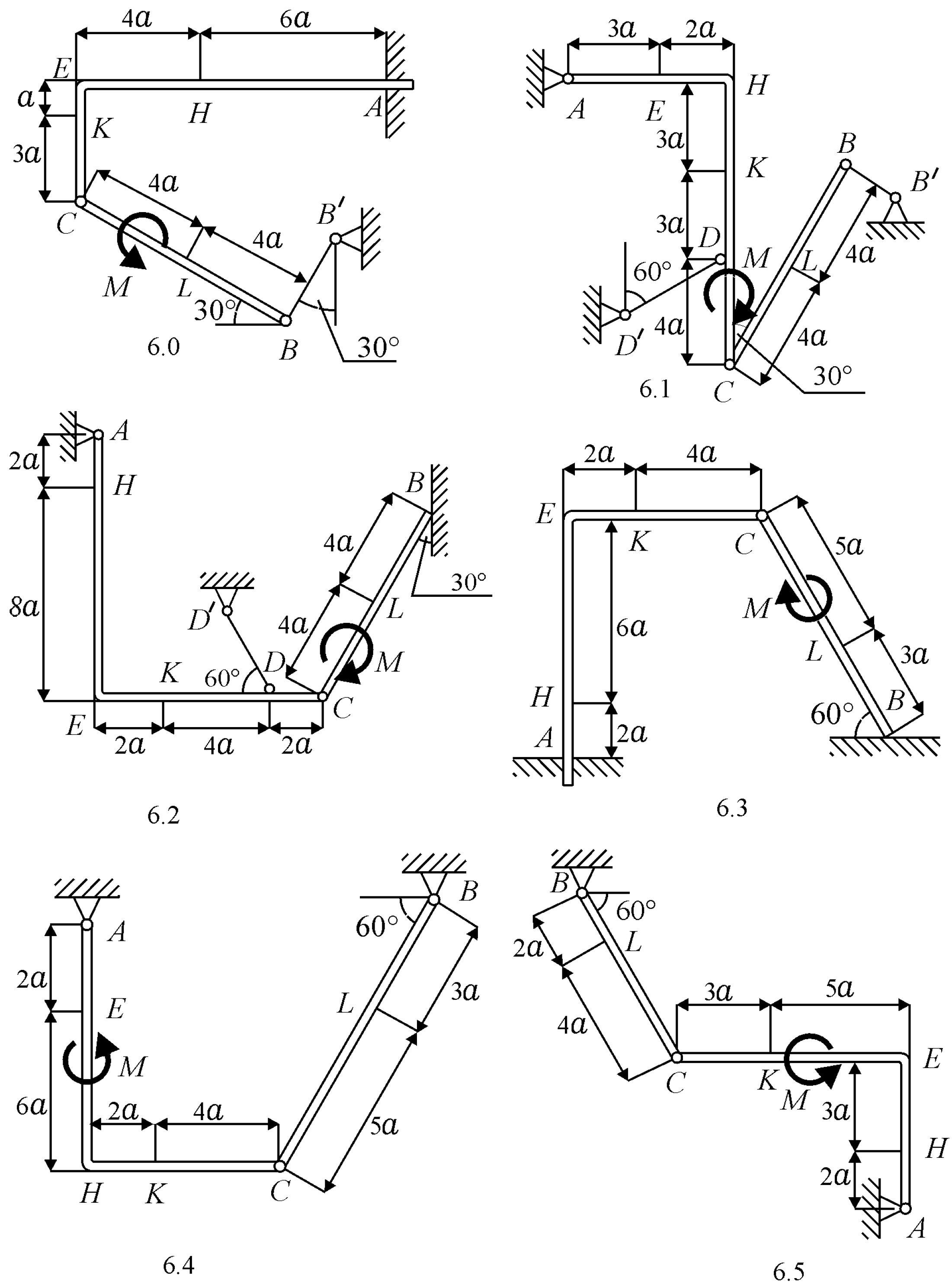
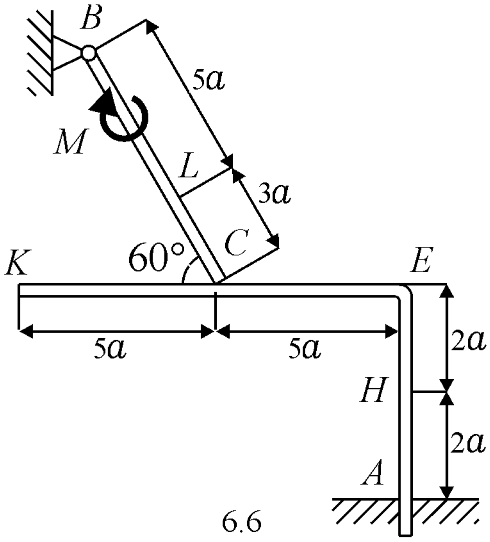
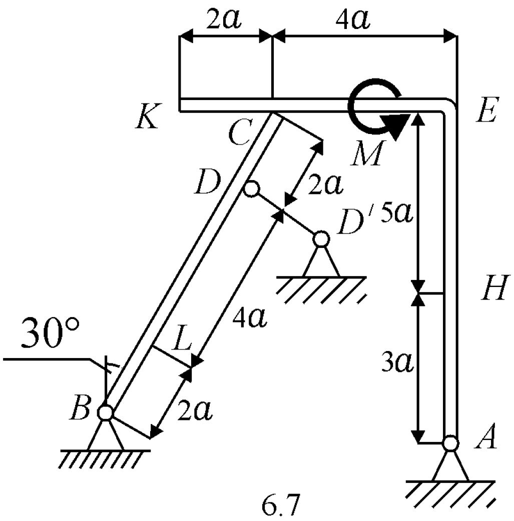


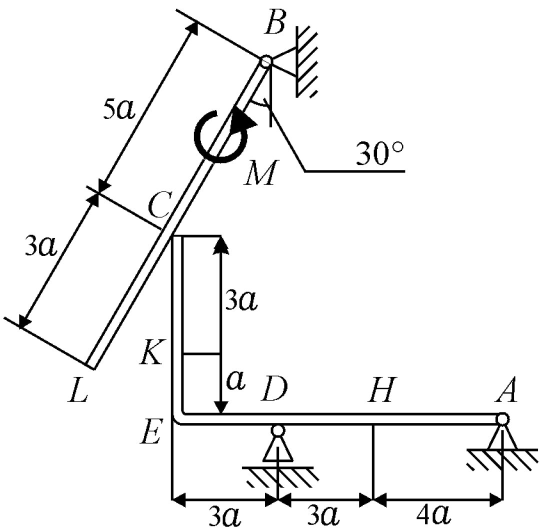
Рис. 6.0 – 6.5



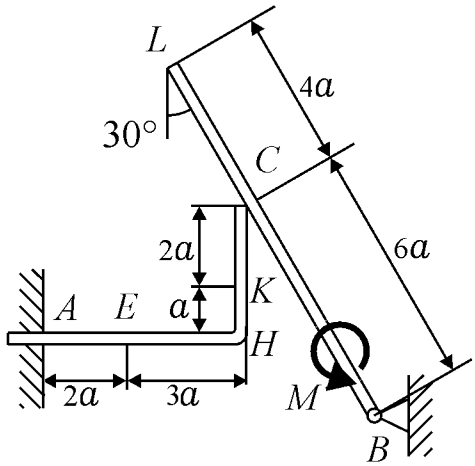
6.6



6.7



6.8



6.9

Рис. 6.6−6.9

Пример 6

Найти реакции шарнирно-неподвижных опор, а также усилие R_C, возникающее в соединительном шарнире C трехшарнирной арки, находящейся под действием сил F=30кН, T=10 кН и пары сил с моментом M=40 кН·м, a=1,5м, b=2м, α=53° (рис. 6,а).

Решение

Арка состоит из двух полуарок (твердых тел), соединенных шарниром C. Выберем систему координат и рассмотрим равновесие каждого тела отдельно, расчленив арку по шарниру.

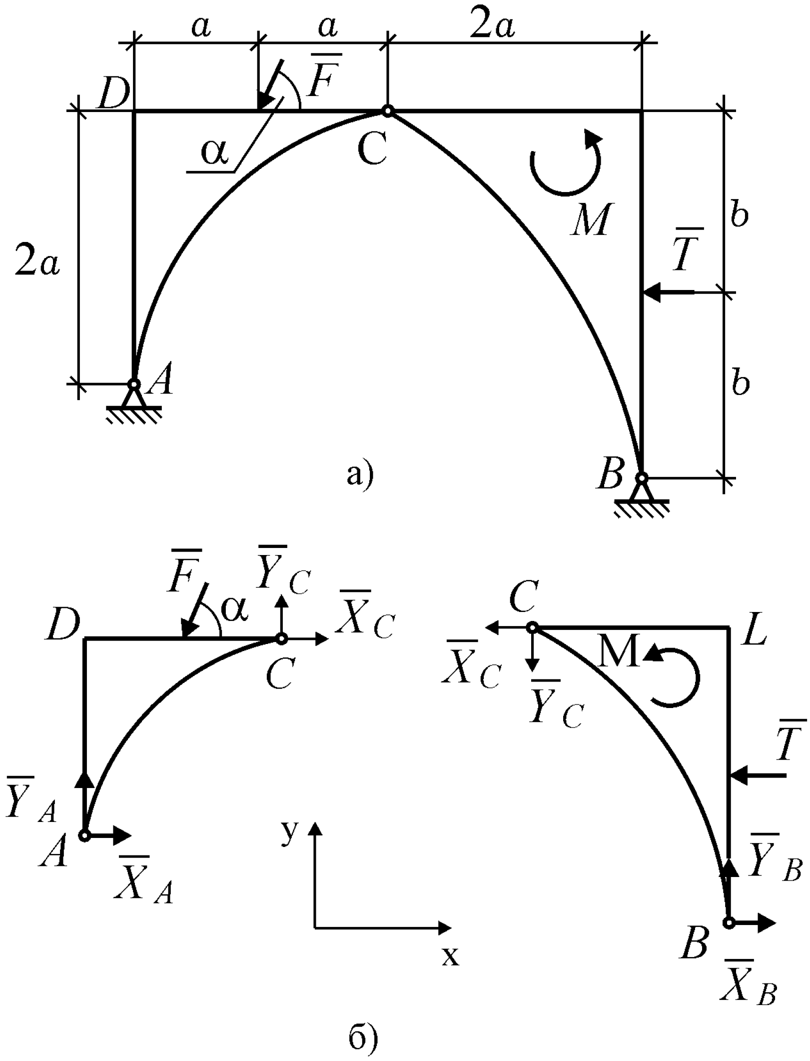


Рис. 6

Система сил, действующая на полуарку ADC, состоит из заданной силы $\vec{F}$, составляющих $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ силы реакции опоры $\vec{R}_A$, и составляющих $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ реакции $\vec{R}_C$, с которой полуарка BLC действует на рассматриваемую полуарку (рис. 6,*б*). Соответственно на правую полуарку BLC действует система сил $\vec{T}, M, \vec{X}_B,\ \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C$. Согласно третьему закону Ньютона, силы взаимодействия, возникающие в шарнире B, равны по величине и противоположны по направлению, что и учтено на рисунках.

Составим уравнения равновесия для системы сил, действующих на полуарку ADC:

$$\sum F_x{=}0\ :\qquad X_A{+}X_C{-}F\cos\alpha{=}0\,,$$
$$\sum F_y{=}0\ :\qquad Y_A{+}Y_C{-}F\sin\alpha{=}0\,,$$
$$\sum m_{_A}(\vec{F}){=}0\ :\ \ -X_C\,2a{+}Y_C\,2a{-}F\sin\alpha\ a{+}F\cos\alpha\ 2a{=}0\,.$$

Аналогично для полуарки BLC:

$\sum F_x{=}0$: $\quad X_B{-}X_C{-}T{=}0$,
$\sum F_y{=}0$: $\quad Y_B{-}Y_C{=}0$,
$\sum m_B(\vec{F}){=}0$: $\quad X_C\,2b{+}Y_C\,2a{+}T\,b{+}M{=}0$.

Получаем систему шести линейных уравнений с шестью неизвестными: X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C.

В третье и шестое уравнения входят только два неизвестных: X_C и Y_C. Тогда из третьего следует $X_C{=}Y_C{+}F\,(\cos\alpha{-}\,\sin\alpha/2)$.
Подставив полученное выражение в шестое уравнение, получим

$Y_C\,2b{+}F(\cos\alpha{-}\,\sin\alpha/2)\,2b{+}Y_C\,2a{+}T\,b{+}M{=}0$, откуда находим :

$Y_C{=}{-}(M{+}T\,b{+}F\,b\,(2\cos\alpha{-}\,\sin\alpha))/(2a{+}2b){=}{-}12$ кН.

Затем легко определяются все оставшиеся неизвестные:

$$\begin{array}{lll} X_A = \ \ 24\,\text{кН}, & X_B = \ \ 4\,\text{кН}, & X_C = -6\,\text{кН}, \\ Y_A = \ \ 36\,\text{кН}, & Y_B = -12\,\text{кН}, & Y_C = -12\,\text{кН}. \end{array}$$

Отрицательные значения указывают, что силы $\vec{Y}_B$, $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$ направлены противоположно показанным на рисунках.

Далее находим: $R_A{=}\sqrt{X_A^2{+}Y_A^2}{=}43{,}3$ кН, $R_B{=}\sqrt{X_B^2{+}Y_B^2}{=}12{,}6$ кН и $R_C{=}\sqrt{X_C^2{+}Y_C^2}{=}13{,}4$ кН.

Ответ :

$R_A = 43{,}3$ кН, $R_B = 12{,}6$ кН, $R_C = 13{,}4$ кН.

ЗАДАНИЕ 7. Равновесие тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке A, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем 1 (рис. 7.0−7.7) или же двумя подшипниками в точках A и B и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. 7.8, 7.9); все стержни прикреплены к плитам и неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках, вес плиты бóльшей площади $P_1{=}5$ кН, вес мéньшей плиты $P_2{=}3$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей.

Таблица 7

Номер		$F_1 = 10$ кН, $F_{1y}<0$		$F_2 = 20$ кН, $F_{2z}<0$	
строки	рисунка	Точка прилож.	α_1	Точка прилож.	α_2
0	7.0	K	75°	D	15°
1	7.1	H	15°	E	75°
2	7.2	K	30°	D	60°
3	7.3	H	45°	E	45°
4	7.4	K	60°	D	30°
5	7.5	H	75°	E	15°
6	7.6	K	15°	D	75°
7	7.7	H	30°	E	60°
8	7.8	K	45°	D	45°
9	7.9	H	60°	E	30°
	А	**Б**	**В**	**А**	**Б**

В таблице приняты обозначения: α_k – угол между положительным направлением оси x и направлением силы $\vec{F}_k$, k=1,2.

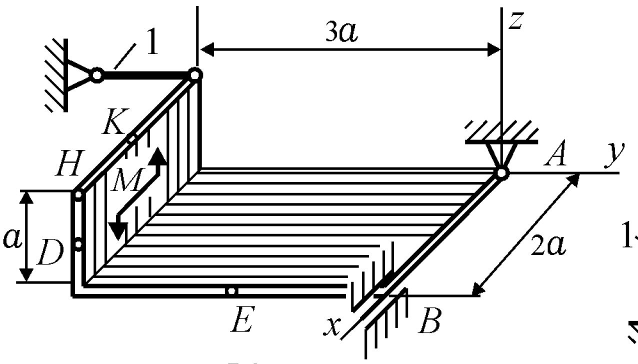
На плиты действует пара сил с моментом M=4 кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 7. Сила $\vec{F}_1$ параллельна плоскости xy, при этом $F_{1y}<0$; а сила $\vec{F}_2$ – параллельна плоскости xz, при этом $F_{2z}<0$. Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или в серединах ребер плит.

Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять a=0,6 м.

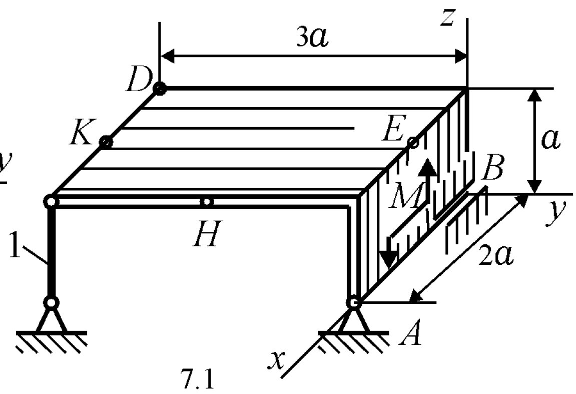
Указания

Задание 7 – на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При решении задачи учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (параллельные трем координатным осям), а реакция подшипника – две составляющие, перпендикулярные его оси.

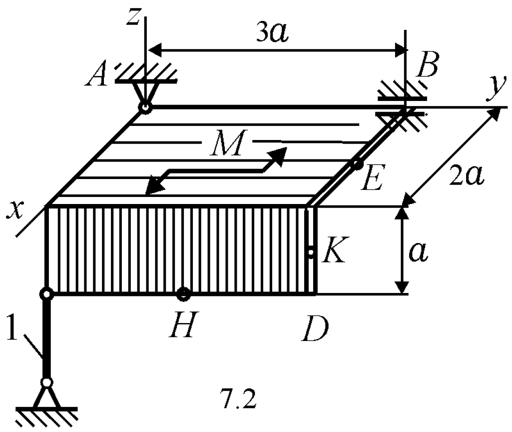
При вычислении момента силы $\vec{F}$ относительно оси удобно представить силу двумя (иногда тремя) составляющими и затем воспользоваться теоремой Вариньона (см. задание 5).



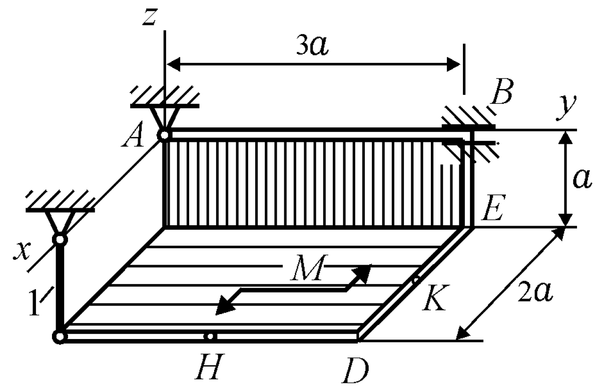
7.0



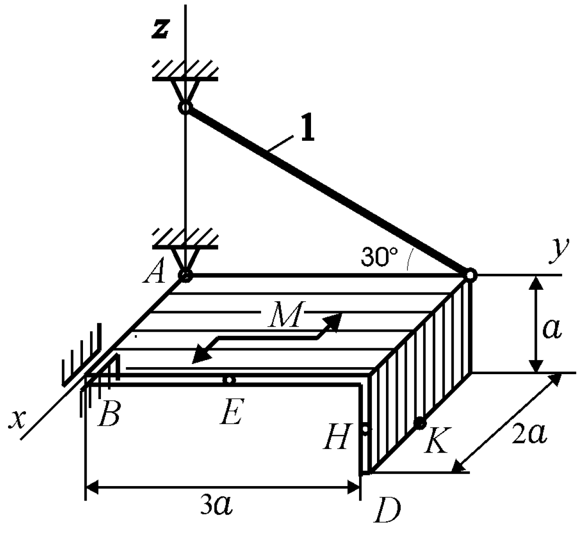
7.1



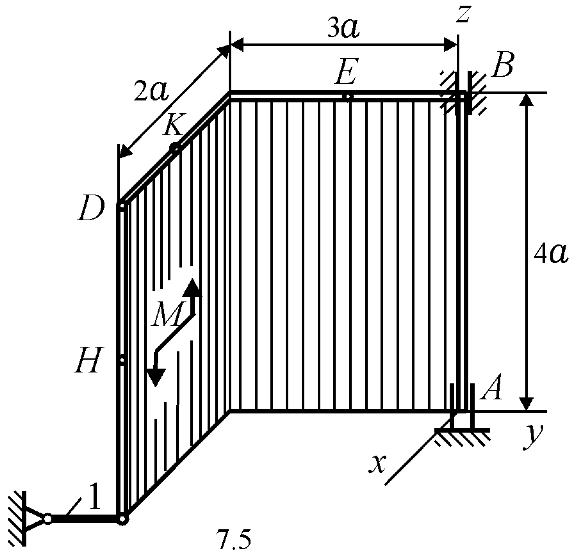
7.2



7.3

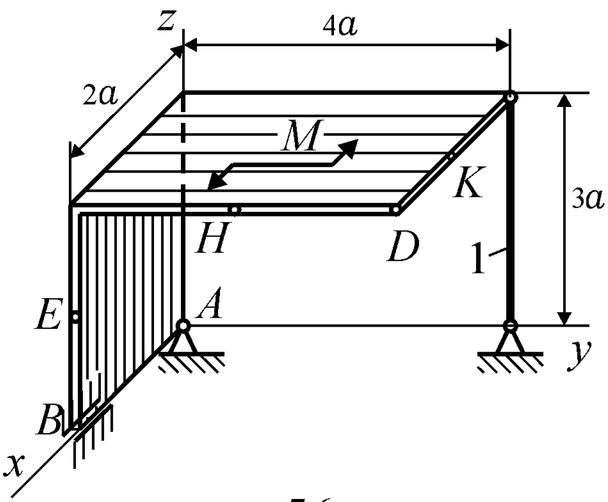


7.4

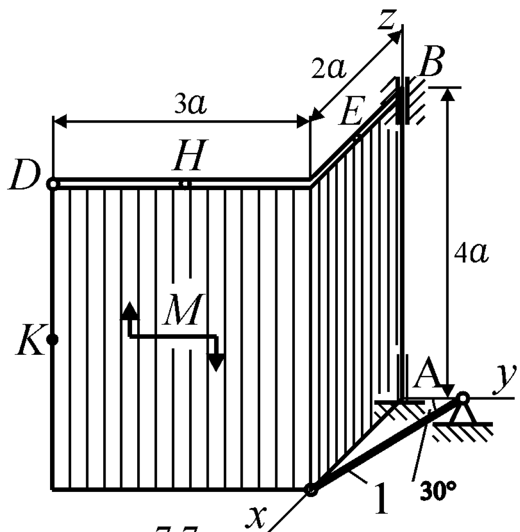


7.5

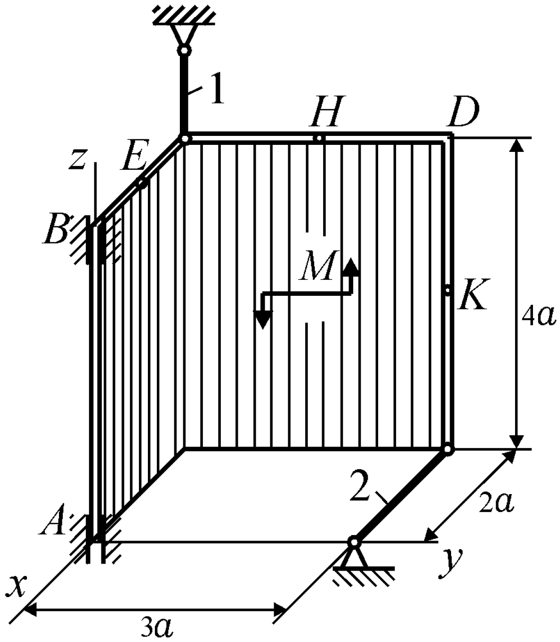
Рис. 7.0−7.5



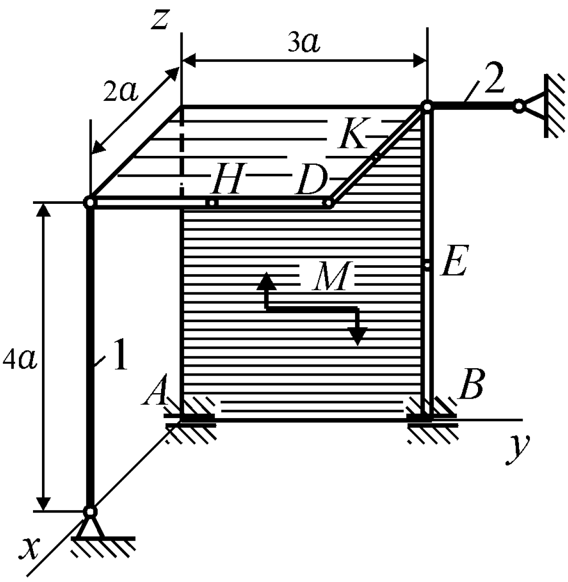
7.6



7.7



7.8



7.9

Рис. 7.6 – 7.9

Пример 7

Система, состоящая из двух жестко соединенных прямоугольных однородных плит $ABCD$ весом P_1 и $BCGE$ весом P_2 (рис. 7,a), находится в состоянии равновесия. Конструкция прикреплена к стене при помощи сферического шарнира D, петли A и удерживается в равновесии тросом CK (плита $ABCD$ расположена горизонтально, а плита $BCGE$ – вертикально). В точке G приложена сила $\vec{Q}$, линия действия которой образует с осями координат x, y, z углы α, β, γ. В плоскости плиты $ABCD$ действует пара сил с моментом M.

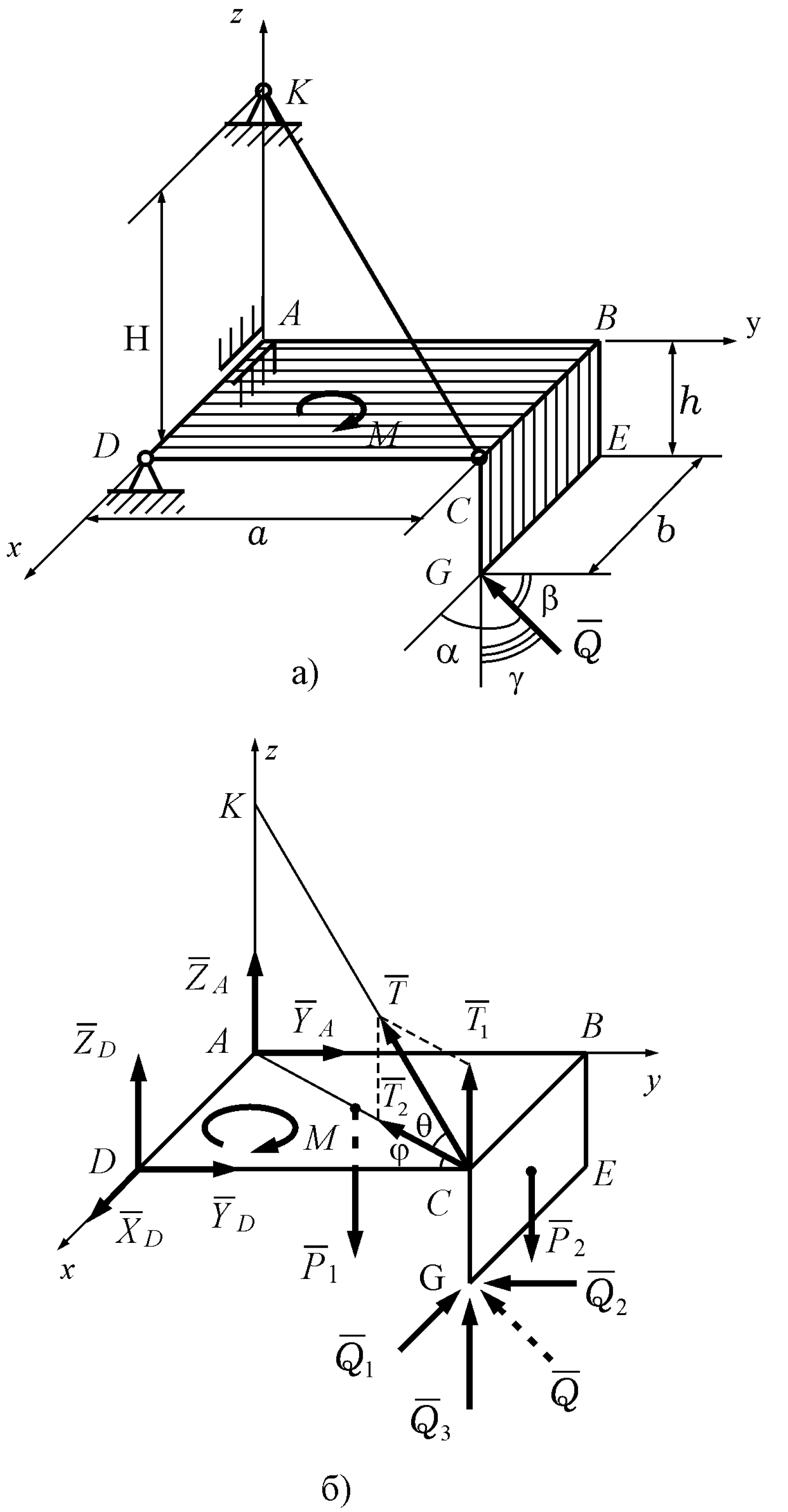


Рис. 7

Найти натяжение троса, реакции петли и шарнира при следующих числовых значениях: a=4 м; b=3 м; h=2 м; $H=5\sqrt{3}$ м; P_1=10 кН; P_2=20 кН; Q=40 кН; M=10 кН·м; $\alpha=60°$; $\beta=45°$; $\gamma<90°$.

Решение

Рассмотрим равновесие конструкции, мысленно отбросив связи и заменив их действие реакциями. Силы, действующие на конструкцию, показаны на рис. 7,*б*. Буквой Θ обозначен угол, образуемый реакцией троса $\vec{T}$ с плоскостью DAB. Среди этих сил шесть неизвестных: Y_A, Z_A, X_D, Y_D, Z_D, T.

Для облегчения составления уравнений заменим силу $\vec{Q}$ тремя составляющими $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$, $\vec{Q}_3$, направленными параллельно осям координат, а силу $\vec{T}$ разложим на две перпендикулярные составляющие – $\vec{T}_1$ параллельно оси z, и $\vec{T}_2$ вдоль диагонали CA (рис. 7,*б*):

$Q_1 = Q\cos\alpha$, $Q_2 = Q\cos\beta$, $Q_3 = Q\cos\gamma$, $T_1 = T\sin\Theta$, $T_2 = T\cos\Theta$.

Составим уравнения равновесия (буквой φ обозначен угол ACD):

$$\sum F_x = 0 : \quad X_D - Q_1 - T_2\sin\varphi = 0\,,$$
$$\sum F_y = 0 : \quad Y_D + Y_A - Q_2 - T_2\cos\varphi = 0\,,$$
$$\sum F_z = 0 : \quad Z_D + Z_A + T_1 + Q_3 - P_1 - P_2 = 0\,,$$
$$\sum m_x(\vec{F}) = 0 : -P_1\,a/2 - P_2\,a + T_1\,a - Q_2\,h + Q_3\,a = 0\,,$$
$$\sum m_y(\vec{F}) = 0 : \quad P_1 b/2 + P_2 b/2 - Z_D b - T_1 b + Q_1 h - Q_3 b = 0\,,$$
$$\sum m_z(\vec{F}) = 0 : \quad Y_D\,b + Q_1\,a - Q_2\,b - M = 0\,.$$

Из соотношения $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ найдем $\cos^2\gamma = 1/4$. Кроме того, $\operatorname{tg}\Theta = H/\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\varphi = b/a = 3/4$, из чего следует: $\gamma = 60^\circ$, $\Theta = 60^\circ$, $\varphi = 37^\circ$.

Решая систему уравнений, найдем:

$$\begin{array}{lll} T \;\; = 22{,}1\,\text{кН}; & Y_A = 32{,}2\,\text{кН}; & Z_A = \;\;\; 1{,}67\,\text{кН}; \\ X_D = 26{,}6\,\text{кН}; & Y_D = 4{,}95\,\text{кН}; & Z_D = -10{,}8\,\text{кН}. \end{array}$$

Отрицательное значение неизвестной Z_D означает, что составляющая $\vec{Z}_D$ направлена противоположно изображённой на схеме.

Далее вычислим

$R_A = \sqrt{Y_A^2 + Z_A^2} = 32{,}2$ кН; $R_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2 + Z_D^2} = 29{,}1$ кН.

Ответ :

$T = 22{,}1$ кН; $R_A = 32{,}2$ кН; $R_D = 29{,}1$ кН.

ЗАДАНИЕ 8. Динамика материальной точки

Груз массой m, получив в точке A начальную скорость V_0, движется по наклонной плоскости вдоль прямой AB по направлению к точке B (рис. 8.0–8.9). На груз кроме силы тяжести $\vec{P}$ действует сила трения $\vec{F}$ (коэффициент трения скольжения груза о поверхность f=0,2) и переменная сила $\vec{F}$, направление которой показано на рисунках, а ее зависимость от времени t задана в табл. 8. Найти закон движения груза.

Таблица 8

Номер строки	Номер рисунка	m, кг	V_0, м/с	α, град	β, град	$F(t)$, Н; t, с
0	8.0	5	20	20	30	$5(e^{0,2t}-1)$
1	8.1	15	10	10	20	$30\sqrt{t}$
2	8.2	10	30	15	25	$30(1+e^{-0,2t})$
3	8.3	8	20	10	20	$8(1+e^{-0,1t})$
4	8.4	12	40	15	30	$24(1-e^{-0,2t})$
5	8.5	20	30	20	30	$40\sqrt{t}$
6	8.6	16	15	10	20	$1{,}6t^2$
7	8.7	15	20	15	25	$30(e^{0,1t}-1)$
8	8.8	14	10	20	30	$2{,}8t^2$
9	8.9	18	30	10	20	$18(1-e^{-0,1t})$
	А	**Б**	**В**	**А**	**Б**	**В**

Указания

Задание 8 – на составление и интегрирование дифференциального уравнения движения материальной точки. При составлении уравнения движения рекомендуется ось x направить вдоль прямой AB от A к B, поместив начало отсчета в точку A, где находился груз в начальный момент.

Найденный в результате интегрирования уравнения закон движения груза x=$x(t)$ будет справедлив либо до момента остановки груза (обращения в нуль скорости V), либо до момента отрыва груза от поверхности (обращения в нуль нормальной составляющей реакции поверхности N).

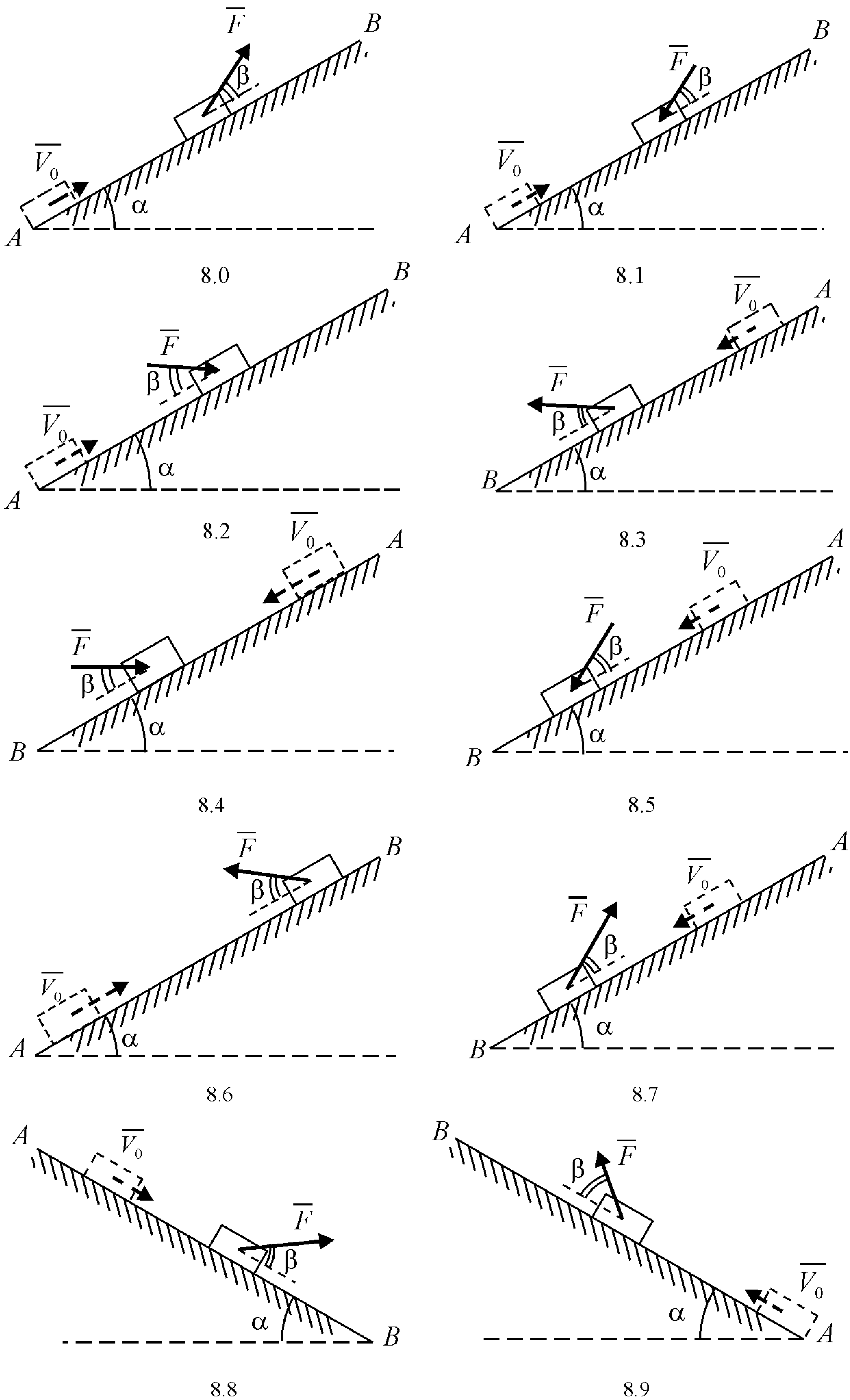


Рис. 8.0 – 8.9

Пример 8

Груз массой m=12 кг находится на горизонтальной поверхности и движется по прямой AB, имея в точке A начальную скорость V_0=20 м/с (рис. 8). Коэффициент трения скольжения груза о плоскость f=0,2. Переменная сила $\vec{F}$ составляет угол 30° с прямой AB и меняется со временем по закону F=12($e^{0,3t}$−1) Н. Найти закон движения груза.

Решение

Составим дифференциальное уравнение движения груза, полагая его материальной точкой. Изобразим груз в произвольном положении на траектории и покажем все действующие на него силы: силу тяжести $\vec{P}$, переменную силу $\vec{F}$, силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленную противоположно вектору скорости, нормальную составляющую силы реакции поверхности $\vec{N}$.

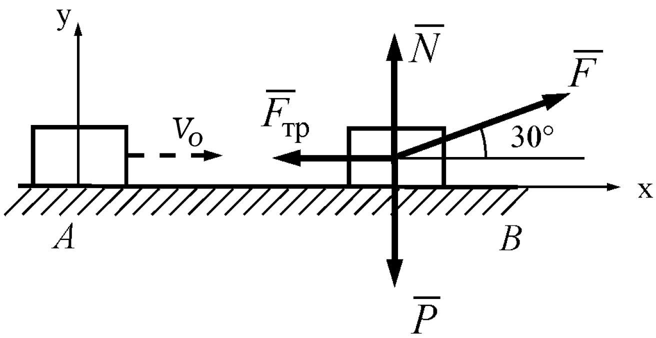


Рис. 8

Запишем векторное равенство, следующее из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}, \qquad (*)$$

где $\vec{a}$ – ускорение груза.

Проведем ось x, направляя ее вдоль траектории AB от A к B; начало отсчета поместим в точку A, где находился груз при t=0.

Спроектируем векторное равенство (∗) на ось x и, учитывая, что $a_x \equiv \ddot{x}$, получим

$$m\ddot{x} = P_x + F_x + N_x + F_{\text{тр}\,x}\,.$$

Подставляя в последнее выражение величины: m=12, P_x=0, F_x=$F\cos 30°$, N_x=0, $F_{\text{тр}\,x}$ =−$F_{\text{тр}}$=−fN=−0,2N , придем к уравнению

$$12\ddot{x} = 12{\cdot}0{,}87(e^{0{,}3t} - 1) - 0{,}2N\,. \qquad (**)$$

В его правой части находится неизвестная величина N. Найдем ее, проектируя соотношение (∗) на ось y:

$$m\ddot{y} = P_y + F_y + N_y + F_{\text{тр}\, y}\,.$$

Подставив в последнее выражение величины: $\ddot{y}{=}0$ (ускорение груза $\vec{a}$ перпендикулярно оси y), $g{\approx}10$ м/с^2, $F_y{=}F\cos 60^\circ$, $N_y{=}N$, $F_{\text{тр}\, y}{=}0$, $P_y{=}{-}P{=}{-}mg$, и разрешая его относительно N, найдем $N{=}126{-}6e^{0,3t}$.

Используя в $(**)$ найденное выражение для N, получим после преобразований обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее движение груза:

$$\ddot{x} = 0{,}97e^{0{,}3t} - 2{,}97\,. \qquad (***)$$

Для нахождения закона движения груза необходимо проинтегрировать уравнение $(***)$ с учетом двух начальных условий:

$$\text{при} \quad t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = V_0 = 20\,.$$

Учитывая $\ddot{x} \equiv \dot{V}$, перепишем $(***)$ в виде

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}97e^{0{,}3t} - 2{,}97\,.$$

После интегрирования получим:

$$V = 0{,}97e^{0{,}3t}/0{,}3 - 2{,}97t + C_1\,,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Ее находим из начального условия: $t = 0$, $V = V_0 = 20$

$$20 = 0{,}97e^{0{,}3\cdot 0}/0{,}3 - 2{,}97{\cdot}0 + C_1\,,$$

откуда $C_1{=}16{,}8$. Теперь закон изменения скорости груза записывается так:

$$V = 3{,}23e^{0{,}3t} - 2{,}97t + 16{,}8\,.$$

С учетом $V \equiv \dot{x}$, последнее выражение принимает вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = 3{,}23e^{0{,}3t} - 2{,}97t + 16{,}8\,,$$

после интегрирования которого получим :

$$x = 10{,}8e^{0{,}3t} - 1{,}49t^2 + 16{,}8t + C_2\,,$$

где C_2 – произвольная постоянная, которую находим, используя второе начальное условие: $t{=}0$, $x{=}0$

$$0 = 10{,}8e^{0{,}3\cdot 0} - 1{,}49{\cdot}0^2 + 16{,}8{\cdot}0 + C_2\,,$$

откуда $C_2{=}{-}10{,}8$.

Ответ :

Закон движения груза: $x{=}10{,}8e^{0{,}3t}{-}1{,}49t^2{+}16{,}8t - 10{,}8$; x измеряется в метрах, t – в секундах.

Примечание. Закон движения будет справедлив, пока реакция N неотрицательна (до момента отрыва груза от поверхности). Определим этот момент из полученного ранее неравенства $N = 126 - 6e^{0,3t} \geqslant 0$. Решая его, приходим к выводу, что полученный закон движения справедлив для $t \leqslant 10{,}1$ с.

ЗАДАНИЕ 9. Принцип Даламбера

Вертикальный вал (рис. 9,a), вращающийся с постоянной угловой скоростью ω=10 с$^{-1}$, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. 9 (AB=BD=DE=EK=b). К валу жестко прикреплены невесомый стержень 1 длиной ℓ_1=0,4 м с точечной массой m_1=6 кг на конце и однородный стержень 2 длиной ℓ_2=0,6 м, имеющий массу m_2=4 кг; вал и оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней к валу и углы между стержнями и валом (α и β) указаны в таблице.

Пренебрегая весом вала, определить реакции связей. При окончательных подсчетах принять b=0,4 м.

Таблица 9

Номер строки	Подшипник в точке	Точки крепления стержней		α, град	β, град
		1	2		
0	K	B	B	30	45
1	E	D	D	45	60
2	D	E	E	60	75
3	B	K	K	75	90
4	K	B	E	90	120
5	E	D	D	120	135
6	D	E	B	135	150
7	B	K	K	150	30
8	K	B	B	165	45
9	E	D	D	30	60
	А	**Б**	**В**	**А**	**Б**

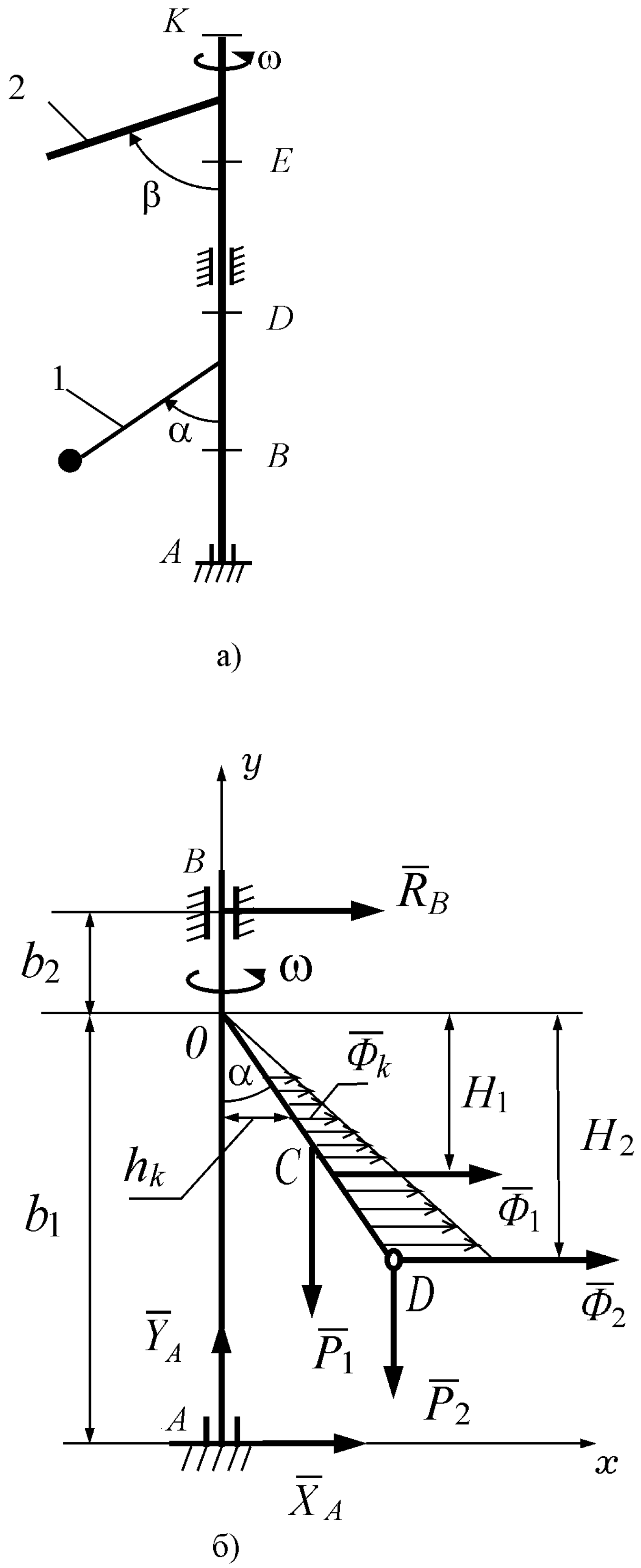

K
ω
2
E
β
D
1
α
B
A
a)
y
B
$\overline{R}_B$
b_2
ω
0
$\overline{\Phi}_k$
H_1
H_2
α
h_k
C
$\overline{\Phi}_1$
b_1
D
$\overline{\Phi}_2$
$\overline{Y}_A$
$\overline{P}_1$
$\overline{P}_2$
A
x
$\overline{X}_A$
б)

Рис. 9

Указания

Задание 9 – на применение принципа Даламбера к изучению движения системы. При решении задачи необходимо учесть, что силы инерции стержня 2 имеют равнодействующую $\vec{\Phi}=-m\vec{a}_c$, где $\vec{a}_c$ - ускорение центра масс C стержня, но линия действия силы Φ не проходит через точку C (см. пример 9).

Пример 9

С невесомым валом AB, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω, жестко скреплен однородный стержень OD длиной ℓ и массой m_1, несущий на конце груз D массой m_2 (рис. 9,*б*).

Определить реакции подпятника A и подшипника B, если b_1=0,6 м, b_2=0,2 м, $\alpha=30°$, ℓ=0,5 м, m_1=3 кг, m_2=2 кг, $\omega=6\,\text{с}^{-1}$.

Решение

Для определения искомых реакций применим принцип Даламбера к механической системе, состоящей из вала AB, стержня OD и груза. Проведем вращающиеся вместе с валом оси $A\,x\,y$ так, чтобы стержень лежал в плоскости $x\,y$. Затем изобразим внешние силы, действующие на систему: силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ реакции подшипника с подпятником и реакцию $\vec{R}_B$ подшипника B.

В соответствии с принципом Даламбера система внешних сил и сил инерции уравновешена. Изобразим силы инерции, приложив их к стержню и грузу, считая последний материальной точкой. Мысленно разобьём стержень на малые отрезки, каждый из которых можно считать материальной точкой. Тогда стержень можно считать системой материальных точек. Так как вал вращается равномерно (ω=const), то все элементы системы имеют только нормальные составляющие ускорения $\vec{a}_{nk}$, направленные к оси вращения. По величине $a_{nk}=\omega^2 h_k$, где h_k - расстояние элемента от оси. Тогда силы инерции $\vec{\Phi}_k=-\triangle m_k\,\vec{a}_{nk}$ будут направлены от оси вращения и равны $\Phi_k=\triangle m_k\,a_{nk}=\triangle m_k\,\omega^2 h_k$, где $\triangle m_k$ – масса элемента. Поскольку все $\vec{\Phi}_k$ пропорциональны h_k, то эпюра этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей $\vec{\Phi}_1$, линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника, т.е. на расстоянии H_1 от вершины O, где $H_1 = 2H_2/3$, $H_2 = \ell\,\cos\alpha$ (см. рис. 9,*б*).

Равнодействующая любой системы сил равна ее главному вектору, а по величине главный вектор сил инерции стержня $\Phi_1=m_1 a_c$, где a_c – ускорение центра масс стержня; при этом

$$a_c{=}a_{cn}{=}\omega^2 h_c{=}\omega^2 OC\sin\alpha\,,\ \ OC{=}\ell/2\,.$$

В результате получим : $\Phi_1{=}m_1\omega^2\ell\sin\alpha/2 = 135$ Н .

Аналогично для силы инерции $\vec{\Phi}_2$ груза найдем, что она направлена от оси вращения, а численно $\Phi_2{=}m_2\omega^2\ell\sin\alpha = 18$ Н .

Так как все силы инерции лежат в плоскости $x\,y$, то и реакции подпятника A и подшипника B тоже лежат в этой плоскости, что было учтено при их изображении.

По принципу Даламбера, изображенные на рисунке внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составляя для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим:

$$\begin{aligned}
&\sum F_x = 0\ : && X_A + R_B + \Phi_1 + \Phi_2 = 0\,,\\
&\sum F_y = 0\ : && Y_A - P_1 - P_2 = 0\,,\\
&\sum m_B(\vec{F}) = 0\ : && X_A(b_1+b_2) - P_1\ell\sin\alpha/2 - P_2\ell\sin\alpha +\\
& && \qquad + \Phi_1(H_1+b_2) + \Phi_2(H_2+b_2) = 0\,.
\end{aligned}$$

Подставив в уравнения числовые значения всех заданных и вычисленных величин и решив систему уравнений, найдем искомые реакции.

Ответ :

$$X_A{=}{-}11{,}8\text{ Н},\quad Y_A{=}49{,}1\text{ Н},\quad R_B{=}{-}19{,}7\text{ Н},\quad R_A{=}\sqrt{X_A^2{+}Y_A^2}{=}50{,}5\text{ Н}.$$

Знаки указывают, что силы $\vec{X}_A$ и $\vec{R}_B$ направлены противоположно показанным на рис. 9,*б*.

ЗАДАНИЕ 10. Общее уравнение динамики

Механическая система состоит из шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, и грузов 3, 4, 5, прикрепленных к этим нитям (рис. 10.0 − 10.9). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и двух пар сил: пары с моментом M_1, приложенной к шкиву 1, и пары с моментом M_2, приложенной к шкиву 2. Радиусы ступеней шкива 1 равны: R_1=0,3 м, r_1=0,15 м, а шкива 2 − R_2=0,2 м, r_2=0,1 м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно: ρ_1=0,2 м, ρ_2=0,1 м.

Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего наибольший вес. Веса $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_5$ шкивов и грузов заданы в табл. 10 в ньютонах, а моменты − в ньютонометрах.

Примечание. Шкивы должны всегда изображаться на чертеже, даже в случаях, когда их масса равна нулю.

Указания

Задание 10 – на применение общего уравнения динамики (принципа Эйлера-Лагранжа-Даламбера) к исследованию движения материальной системы с одной степенью свободы.

Напомним формулировку общего уравнения динамики: при движении механической системы с идеальными связями сумма работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^a) + \sum \delta A(\vec{\Phi}_k) = 0$$

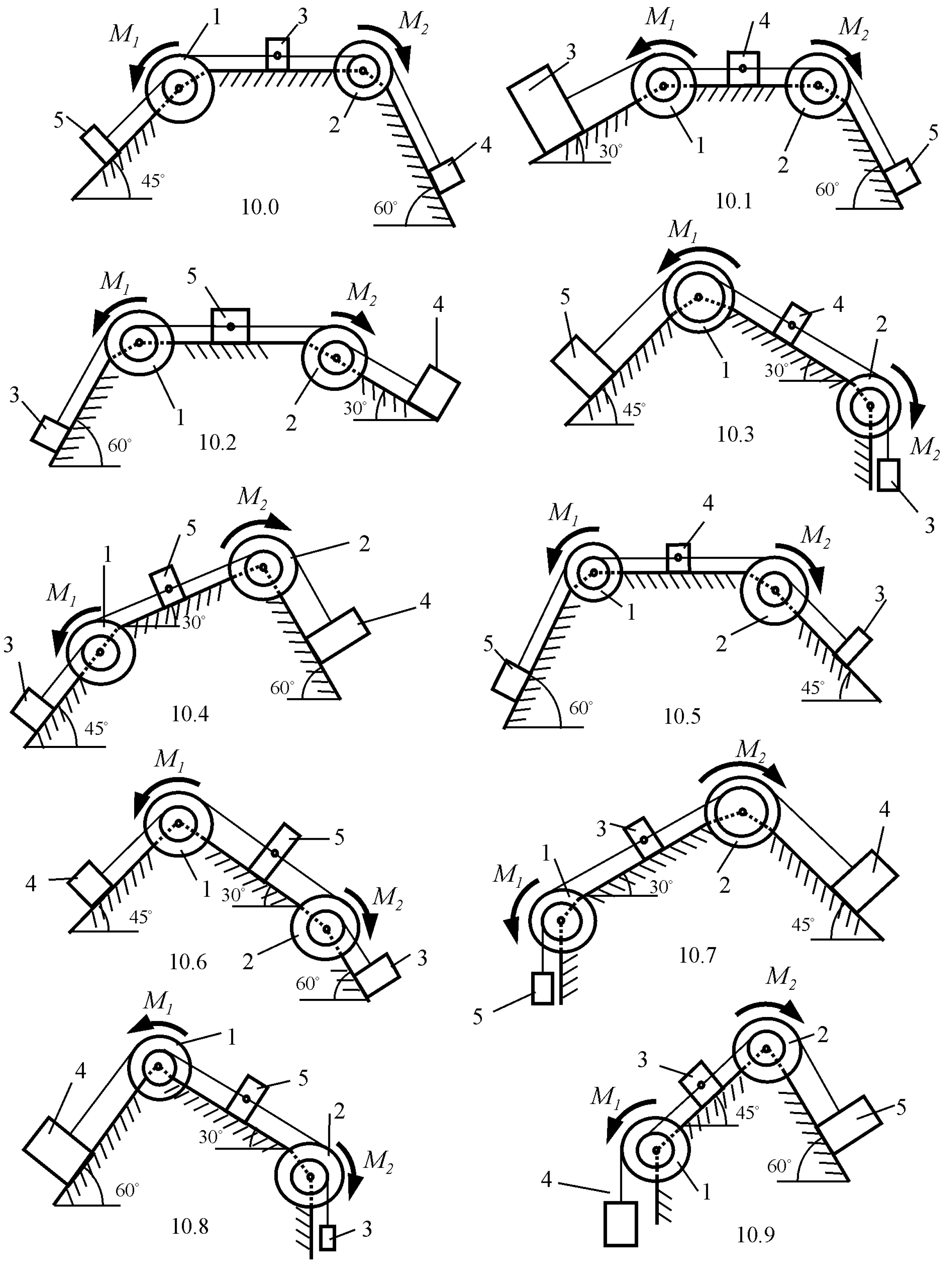
Силой инерции $\vec{\Phi}$ точки массой m называется вектор $\vec{\Phi}{=}{-}m\vec{a}$, направленный в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}$ точки (рис. 10,*а*) и равный по модулю произведению массы точки на модуль ускорения.

Система сил инерции, приложенных к точкам твердого тела, может быть заменена эквивалентной системой, состоящей из одной силы и одной пары сил.

При поступательном движении тела силы инерции всех его точек заменяются одной силой (рис. 10,*б*), приложенной в центре масс тела $\vec{\Phi}{=}{-}m\vec{a}_c$, где $\vec{a}_c$ – ускорение центра масс тела.

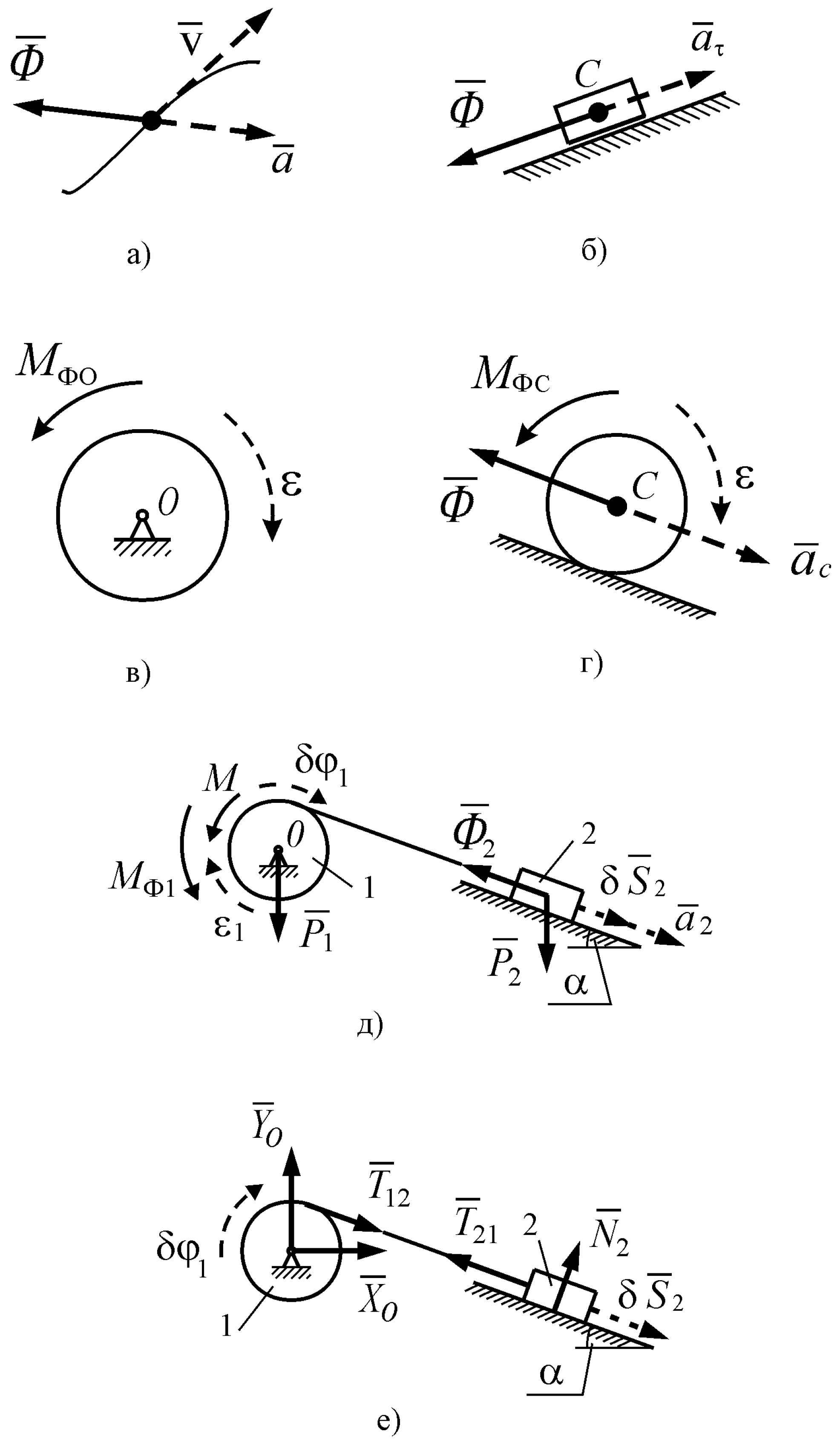
Таблица 10

Номер		Силы, Н					Моменты, Н·м	
строки	рисунка	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	M_1	M_2
0	10.0	10	0	20	0	30	0,3	0
1	10.1	0	30	20	10	0	0	0,4
2	10.2	0	20	0	30	10	0,6	0
3	10.3	30	0	10	20	0	0	0,6
4	10.4	10	0	0	30	20	0	0,6
5	10.5	0	10	30	0	20	0,3	0
6	10.6	0	30	0	10	20	0	0,6
7	10.7	20	0	30	0	10	0	0,2
8	10.8	0	10	20	30	0	0,3	0
9	10.9	20	0	0	10	30	0,6	0
	А	**Б**		**В**			**А**	



M1 1 3 M2 5 2 4 45° 60° 10.0
M1 4 M2 3 1 2 5 30° 60° 10.1
M1 5 M2 4 3 1 2 30° 60° 10.2
M1 5 4 2 1 30° 45° M2 3 10.3
M2 5 2 1 M1 4 3 30° 60° 45° 10.4
4 M1 M2 3 1 2 5 60° 45° 10.5
M1 5 4 1 30° M2 45° 2 3 60° 10.6
M2 4 3 1 2 M1 30° 45° 5 10.7
M1 1 4 5 2 30° M2 60° 3 10.8
M2 2 3 M1 45° 5 60° 4 1 10.9

Рис. 10.0–10.9



Φ
v
a
а)
Φ
C
aτ
б)
MФO
O
ε
в)
MФC
Φ
C
ε
ac
г)
δφ1
M
MФ1
O
1
ε1
P1
Φ2
2
δS2
a2
P2
α
д)
YO
T12
T21
2
N2
δφ1
XO
δS2
1
α
е)

Рис. 10

Если тело вращается вокруг неподвижной оси O, являющейся осью материальной симметрии тела, то система сил инерции эквивалентна паре сил с моментом $\vec{M}_\Phi = -I_o\vec{\varepsilon}$, где I_o – момент инерции тела относительно оси вращения, $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела. Направление пары противоположно направлению дуговой стрелки ε (рис. 10,*в*).

При плоском движении тела, имеющего плоскость материальной симметрии, система сил инерции заменяется эквивалентной системой, состоящей из силы $\vec{\Phi} = -m\vec{a}_c$, приложенной в центре масс тела, и пары сил с моментом $\vec{M}_\Phi = -I_c\vec{\varepsilon}$ (рис. 10,*г*).

Пример 10

Механическая система (рис. 10,*д*) состоит из блока 1 весом P_1 и груза 2 весом P_2, скользящего по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. К грузу прикреплена нить, намотанная на блок радиуса r_1, радиус инерции блока относительно оси вращения равен ρ_1. К блоку приложена пара сил с моментом M, направленным против хода часовой стрелки. Найти угловое ускорение блока.

Решение

Исследуемая механическая система несвободная, так как на тела, из которых она состоит, наложены связи: неподвижный шарнир O, наклонная плоскость, нерастяжимая нить (на рис. 10,*е* показаны реакции этих связей). Эта система имеет одну степень свободы, поскольку ее положение однозначно определяется заданием одного параметра (например, φ_1 – угла поворота блока, или s_2 – перемещения груза вдоль плоскости).

Напомним, что возможным перемещением системы называется совокупность бесконечно малых перемещений ее точек, допускаемых связями. Возможные перемещения системы не связаны с действующими на систему силами. Поэтому для блока на рис. 10,*д* возможным перемещением будет поворот вокруг оси O на бесконечно малый угол $\delta\varphi_1$ как против хода, так и по ходу часовой стрелки.

Так как мы предполагаем, что нить нерастяжима и остается натянутой, то груз при этом получит бесконечно малое перемещение вверх или вниз вдоль наклонной плоскости на величину $\delta s_2 = r_1\delta\varphi_1$.

Связи, наложенные на систему, называются идеальными, если сумма работ реакций связи на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Работа силы $\vec{F}$ на возможном перемещении $\delta\vec{s}$ находится по формуле $\delta A(\vec{F}){=}\vec{F}{\cdot}\delta\vec{s}{=}F\,\delta s\cos\gamma$, где γ – угол между направлением силы $\vec{F}$ и направлением возможного перемещения точки приложения этой силы $\delta\vec{s}$. Для пары сил $\delta A(M) = \pm M\,\delta\varphi$, где M – величина момента пары, $\delta\varphi$ – угол поворота тела; при этом знак плюс берется, если направления вращения пары и угла поворота тела совпадают, и знак минус – если они противоположны.

Проверим идеальность связей для рассматриваемой системы. Работа составляющих $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$ реакции шарнира O равна нулю, так как при любом возможном перемещении системы точка О остается неподвижной. Работа реакции $\vec{N}$ наклонной плоскости равна нулю, так как $\vec{N}$ перпендикулярна направлению возможного перемещения груза δs_2. Сумма работ сил реакции нити $\vec{T}_{12}$ и $\vec{T}_{21}$ ($\vec{T}_{12}{=}{-}\vec{T}_{21}$, так как нить невесома) обращается в нуль в силу нерастяжимости нити.

При решении задачи с помощью общего уравнения динамики реакции идеальных связей на чертеже обычно не показывают (рис. 10,*е* сделан для пояснения понятия идеальных связей). На чертеже следует показывать лишь активные силы (в нашем случае это силы $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и пара с моментом M) и силы инерции блока и груза (рис. 10,∂).

Чтобы изобразить силы инерции, надо задаться направлением ускорения груза $\vec{a}_2$ и согласованного с ним углового ускорения блока ε_1.

После этого необходимо вынести на рисунок силу инерции груза $\vec{\Phi}_2{=}{-}m_2\vec{a}_2{=}{-}P_2\vec{a}_2/g$, движущегося поступательно, и пару сил инерции вращающегося блока, момент которой равен $\vec{M}_{\Phi 1}{=}{-}I_o\,\vec{\varepsilon}$. Момент инерции блока I_o относительно оси вращения находится по формуле $I_o{=}m_1\rho_1^2{=}P_1\rho_1^2/g$.

Выберем направление возможного перемещения так, как показано на рис. 10,∂ и подсчитаем работу каждой активной силы и силы инерции на этом перемещении:

$\delta A(\vec{P}_1){=}0$, $\quad\delta A(M){=}{-}M\,\delta\varphi_1$, $\quad\delta A(\vec{P}_2){=}P_2\,\delta s_2\cos(90^\circ{-}\alpha){=}P_2\,\delta s_2\sin\alpha$,
$\delta A(\vec{\Phi}_2){=}\Phi_2\,\delta s_2\cos(180^\circ){=}{-}\Phi_2\delta s_2$, $\quad\delta A(M_{\Phi 1}){=}{-}M_{\Phi 1}\,\delta\varphi_1$.

В соответствии с общим уравнением динамики приравниваем к нулю сумму этих работ:

$$P_2\sin\alpha\delta s_2 - M\,\delta\varphi_1 - \Phi_2\delta s_2 - M_{\Phi 1}\delta\varphi_1 = 0\,.$$

С учетом $\delta s_2{=}r_1\delta\varphi_1$ перепишем последнее выражение в виде: $(P_2 r_1\sin\alpha{-}M{-}\Phi_1 r_1{-}M_{\Phi 1})\,\delta\varphi_1 = 0$. Так как значение $\delta\varphi_1$ произвольно, то равенство может быть справедливо лишь в случае, если множитель при $\delta\varphi_1$, заключенный в круглые скобки, равен нулю, т.е.

$$P_2 r_1 \sin\alpha - M - \Phi_2 r_1 - M_{\Phi 1} = 0\,.$$

Далее надо подставить в полученное соотношение Φ_2 и $M_{\Phi 1}$, выраженные через ускорения, и учесть, что $a_2 = r_1 \varepsilon_1$. В результате получаем уравнение:

$$P_2 r_1 \sin\alpha - M - P_2 r_1^2 \varepsilon_1 / g - P_1 \rho_1^2 \varepsilon_1 / g = 0\,,$$

откуда найдем угловое ускорение ε_1.

Ответ :

$$\varepsilon_1 = g\,(P_2 r_1 \sin\alpha - M)\,/\,(P_1 \rho_1^2 + P_2 r_1^2)\,.$$

ЗАДАНИЕ 11. Уравнения Лагранжа 2-го рода

Механическая система состоит из ступенчатых шкивов 1 и 2, весом P_1 и P_2 с радиусами ступеней $R_1{=}R$, $r_1{=}0{,}4R$, $R_2{=}R$, $r_2{=}0{,}8R$, $R{=}0{,}25$ м, грузов 3, 4 весом P_3 и P_4, а также сплошного однородного цилиндрического катка 5 весом P_5 (рис. 11.0−11.9, табл. 11).

Таблица 11

Номер строки	Номер рисунка	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	M_1	M_2	F
0	11.0	12P	0	P	0	3P	0,2PR	0	8P
1	11.1	0	10P	0	4P	2P	0	0,3PR	6P
2	11.2	10P	0	0	2P	P	0,3PR	0	4P
3	11.3	0	12P	2P	0	3P	0	0,2PR	10P
4	11.4	8P	0	10P	0	2P	0	0,3PR	5P
5	11.5	12P	0	2P	0	P	0	0,4PR	8P
6	11.6	0	12P	0	3P	4P	0,2PR	0	6P
7	11.7	10P	0	8P	0	2P	0,3PR	0	5P
8	11.8	12P	0	0	5P	4P	0	0,2PR	6P
9	11.9	0	12P	2P	0	3P	0,2PR	0	10P
	А	**Б**		**В**			**А**		**Б**

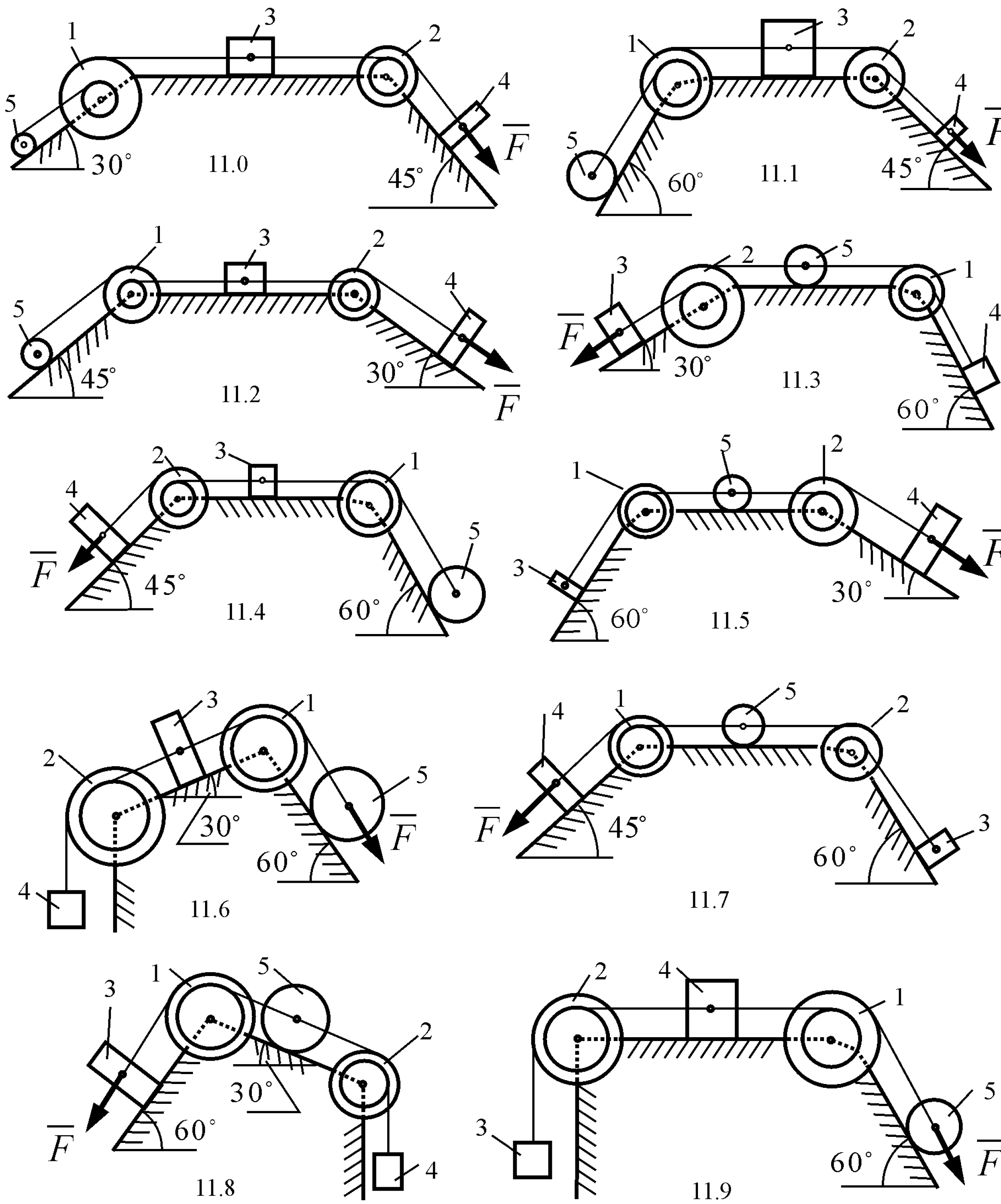


Рис. 11.0−11.9

Масса каждого шкива равномерно распределена по его внешнему ободу. Тела системы соединены нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Грузы скользят по плоскостям без трения, а катки катятся без проскальзывания.

Кроме сил тяжести на одно из тел действует постоянная сила $\vec{F}$, параллельная соответствующей плоскости, а на шкивы 1 и 2 при их вращении действуют постоянные моменты сил сопротивления, равные M_1 и M_2 соответственно.

Определить ускорение центра катка, составив для заданной механической системы уравнение Лагранжа 2-го рода.

Примечание. Шкивы всегда должны присутствовать на схеме, а грузы, вес которых равен нулю, изображать на чертеже не обязательно.

Указания

Задание 11 — на применение уравнений Лагранжа 2-го рода к исследованию движения материальной системы с одной степенью свободы. В этом случае положение системы определяется одной обобщенной координатой, а движение системы описывается одним уравнением Лагранжа.

Уравнения Лагранжа 2-го рода — это дифференциальные уравнения движения механической системы с идеальными связями в обобщенных координатах. Обобщенными координатами системы называются любые независимые между собой параметры, однозначно определяющие положение системы.

Уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q_k}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots S\,.$$

Здесь S — число степеней свободы системы; q_k — обобщенные координаты системы, $Q_k{=}Q_k(q_j, t)$ — обобщенные силы, соответствующие координатам q_k; $T{=}T(\dot{q}_j, q_j, t)$ — кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенные скорости $\dot{q}_j$ (производные от обобщенных координат по времени), обобщенные координаты q_j и время t $(j{=}1, 2, \ldots S)$.

Пример 11

Механическая система состоит из блока 1 массой m_1 и катка 2 массой m_2, катящегося без проскальзывания по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 11); к центру катка привязана невесомая нить, намотанная на блок и параллельная наклонной плоскости; радиус блока равен r_1, радиус катка — r_2, радиус инерции блока относительно оси вращения — ρ_1. Каток следует считать сплошным диском (цилиндром). При движении системы на блок действует пара сил сопротивления с постоянным моментом M; движение начинается из состояния покоя. Найти ускорение центра катка.

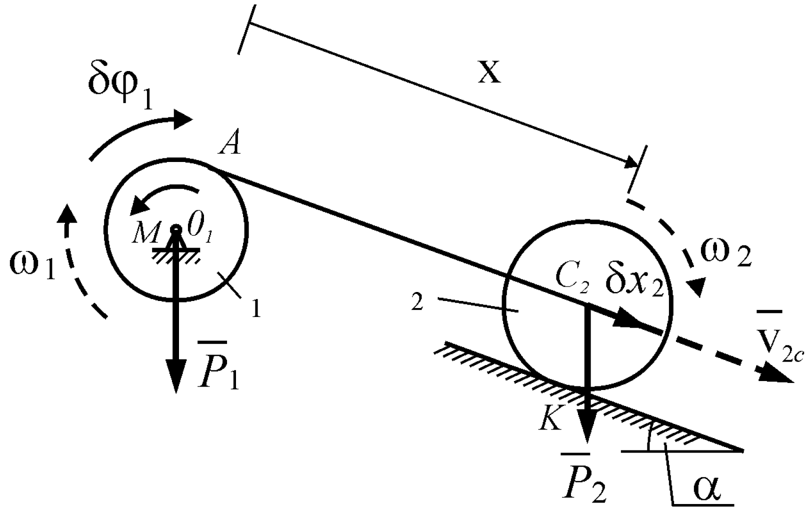


Рис. 11

Решение

Рассматриваемая механическая система (блок и каток, соединенные нитью) имеет одну степень свободы, поскольку ее положение однозначно определяется заданием одного параметра (им может быть, например, угол поворота блока φ_1, либо $x{=}AC_2$ – длина прямолинейного участка нити, либо какой-нибудь другой параметр).

Поскольку требуется найти ускорение центра катка, за обобщенную координату разумно принять расстояние $AC_2 = x$, т.е. $q \equiv x$. Уравнение Лагранжа для рассматриваемой задачи будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x\ . \qquad (*)$$

Вычислим кинетическую энергию системы $T{=}T_1{+}T_2$, где T_1 – кинетическая энергия блока, T_2 – кинетическая энергия катка.

Выражение для кинетической энергии твердого тела зависит от вида движения тела.

Блок вращается вокруг неподвижной оси, поэтому $T_1{=}I_1\omega_1^2/2$, где $I_1{=}m_1\rho_1^2$ – момент инерции блока относительно его оси вращения O_1, ω_1 – угловая скорость блока.

Каток совершает плоское движение, поэтому $T_2{=}m_2V_{2C}^2/2{+}I_2\omega_2^2/2$, где $I_2{=}m_2r_2^2/2$ – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения, ω_2 – угловая скорость катка, V_{2C} – скорость центра масс катка.

Скорость V_{2C} и угловые скорости ω_1, ω_2 надо выразить через обобщенную скорость $\dot{x}{\equiv}\ V_{2C}$. Каток катится без проскальзывания, поэтому

$V_{2C}{=}\omega_2\,C_2K{=}\omega_2 r_2$, т.к $V_K = 0$ (точка K – мгновенный центр скоростей катка). В то же время $V_{2C}{=}V_A{=}\omega_1 r_1$, откуда получаем $\omega_2 = \dot{x}/r_2$, $\omega_1 = \dot{x}/r_1$. Подставляя эти кинематические соотношения в формулы для T_1, T_2 и T, находим $T{=}B\dot{x}^2/2$, здесь для удобства введено обозначение $B{=}(m_1\rho_1^2/r_1^2{+}3m_2/2){=}\mathrm{const}$.

Понятие обобщенной силы Q_k связано с выражением суммы элементарных работ активных сил на возможном перемещении системы. Напомним, что возможное перемещение системы – это совокупность бесконечно малых перемещений ее точек, допускаемых наложенными на систему связями. Если перемещения всех точек системы выразить через вариации обобщенных координат δq_k, то выражение для суммы элементарных работ активных сил приводится к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{i=1}^{S} Q_i\,\delta q_i\,.$$

Коэффициенты Q_i, стоящие множителями при δq_i в этом выражении, называются обобщенными силами, соответствующими обобщенным координатам q_i.

Чтобы в рассматриваемой задаче вычислить обобщенную силу Q_x, надо рассмотреть возможное перемещение системы, при котором $\delta x > 0$ (см. рис. 11). На чертеже надо показать все активные силы, действующие на систему. Это силы тяжести тел $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$.

Поскольку величина момента сопротивления M известна, пару сил сопротивления можно отнести к активным силам. Момент M направлен противоположно вращению блока. Движение начинается из состояния покоя, каток скатывается вниз, поэтому блок будет вращаться по ходу движения часовой стрелки, что учтено на рисунке.

Подсчитаем сумму работ всех перечисленных сил на возможном перемещении системы:

$$\sum \delta A_k = P_2 \sin\alpha\,\delta x_2 - M\delta\varphi_1\,.$$

Все перемещения, находящиеся в правой части, нужно выразить через $\delta x{=}\delta x_2$. В данном случае $\delta x{=}r_1\delta\varphi_1$, откуда $\delta\varphi_1{=}\delta x/r_1$. Поэтому:

$$\sum \delta A_k = P_2 \sin\alpha\,\delta x - (M/r_1)\,\delta x = (m_2 g \sin\alpha - M/r_1)\,\delta x\,,$$

откуда следует выражение для обобщенной силы

$$Q_x = m_2 g \sin\alpha - M/r_1.$$

Остается подставить найденные выражения для T и Q_x в уравнение Лагранжа 2-го рода, для чего удобно предварительно вычислить частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(B \frac{\dot{x}^2}{2} \right) = B \dot{x} \,, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\dot{x}^2}{2} \right) = 0 \,.$$

Подставляя найденные выражения в $(*)$, получим:

$$\frac{d}{dt} \left(B \dot{x} \right) - 0 = m_2 g \sin\alpha - M/r_1 \,,$$

или

$$B \ddot{x} = m_2 g \sin\alpha - M/r_1 \,.$$

Последнее выражение – это дифференциальное уравнение движения рассматриваемой механической системы. Чтобы найти закон движения $x = x(t)$, уравнение надо проинтегрировать, учитывая начальные условия: при $t = 0 \,, x = \ell_0 \,, \dot{x} = 0 \,.$

Ускорение центра катка a_{2C} находится непосредственно из дифференциального уравнения, поскольку $a_{2C} \equiv \ddot{x}$.

Ответ :

$a_{2C} = (m_2 g \sin\alpha - M/r_1) \,/\, (m_1 \rho_1^2/r_1^2 + 3m_2/2) \,.$

Примечание. Наличие момента сил сопротивления M требует дополнительной проверки решения задачи, если движение начинается из состояния покоя. В этом случае скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}_{2C}$ имеют одинаковые направления и результат $a_{2C}>0$ означает, что направление движения системы совпадает с предполагаемым.

Отрицательное значение a_{2C} говорило бы о том, что либо система остается в состоянии покоя, либо направление движения противоположно выбранному.

Для продолжения исследования надо изменить направление предполагаемого движения (при этом изменяются направления сил трения) и вновь найти a_{2C}. Если новое значение ускорения a_{2C} снова окажется отрицательным, то это будет означать, что силы трения велики, и система не начнет движения, оставаясь в состоянии покоя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Что делать, если контрольная работа не зачтена?

При выполнении контрольных работ по прикладной механике слушатели и курсанты нередко допускают ошибки и неточности. Некоторые из них проявляются в виде небрежности или описки, другие свидетельствуют о неверном понимании теоретического материала. В случаях, когда доля допущенных ошибок и неточностей велика, контрольная работа не зачитывается и возвращается для исправления.

Опыт показывает, что из большого разнообразия допускаемых ошибок некоторые появляются чаще всего. Эти ошибки классифицированы и собраны в настоящем параграфе. Каждая из рассмотренных возможных ситуаций имеет номер и выделена курсивом. Далее обычным шрифтом даются рекомендации и указания по ее исправлению. В рецензии на контрольную работу (а также в замечаниях по ходу решения задачи) преподаватель может сослаться на упомянутый номер, что облегчит работу над ошибками.

Ошибки, имеющие общий характер

0.0. Все задачи контрольной работы (или их часть) не соответствуют номеру зачетной книжки или/и отсутствует решение одной или нескольких задач контрольной работы. В этих случаях рецензируются только задачи, решения которых соответствуют номеру его зачетной книжки. Работа не зачитывается и возвращается слушателю, который должен в случае необходимости провести работу над ошибками, затем решить недостающие задачи и прислать работу на повторное рецензирование.

0.1. Оформление присланной работы настолько небрежно, что разобраться в решении задачи невозможно. Работа не зачитывается и возвращается без рецензии. Слушатель должен повторно представить работу, выполненную в соответствии с указаниями настоящего Пособия.

0.2. Рисунки и чертежи, сопутствующие решению задачи, имеют один или несколько следующих недостатков: 1) рисунок выполнен без применения линейки и циркуля; 2) рисунок выполнен без соблюдения масштаба; 3) углы отложены без применения транспортира; 4) основные и вспомогательные линии не различаются (имеют, например, одинаковую толщину, либо вспомогательные линии толще основных), из-за чего на рисунке невозможно выделить изучаемый объект (тело, *механизм).* Задача не зачитывается. Слушатель должен представить решение задачи, оформленное в полном соответствии с указаниями настоящего Пособия.

0.3. В представленном тексте решения задачи нарушена логика исследования: в более ранних строках текста решения используются численные значения или символьные выражения, которые берутся неизвестно откуда, либо взяты из строк, расположенных ниже. Слушатель должен представить новую редакцию решения в виде, когда каждая выкладка опирается либо на условие задачи, либо на ранее полученное численное значение или символьное выражение.

0.4. Символьные выражения или численные значения величин, имеющих неодинаковые физические размерности, либо суммируются, либо стоят по разные стороны от знака равенства. Такая ситуация недопустима (нельзя, к примеру, из ампера вычесть метр, или секунду приравнять вольту). Слушатель должен самостоятельно найти ошибку (или описку) и исправить ее, начиная с места вхождения и до получения окончательного ответа.

0.5. В работе, поступившей на повторное рецензирование, исправлена указанная преподавателем ошибка только в месте ее появления. Дальнейшие вычисления или преобразования остались прежними. Слушатель должен заново проделать работу над ошибками и полностью устранить последствия допущенной ранее ошибки, начиная с места ее появления и до конца решения задачи.

0.6. Большое количество алгебраических и тригонометрических ошибок, неверное дифференцирование, интегрирование, ошибки при нахождении констант интегрирования. Ошибки такого рода слушатель исправляет самостоятельно, пользуясь соответствующими учебниками и учебными пособиями.

0.7. Небрежность при записи математических выражений. Отмеченное выражение содержит **скалярные** величины, поэтому стрелки над символами, которые используются для обозначения **векторов**, здесь совершенно неуместны. При исправлении работы и/или перед зачетом необходимо отредактировать записи, избавившись от ошибочных украшений не только в указанном месте, но и во всей работе.

0.8. Небрежность графического оформления: отмеченный вектор изображен вместе с его составляющими и не является их *геометрической суммой.* При устранении этой небрежности необходимо проследить, чтобы изображения вектора и его составляющих соответствовали правилу параллелограмма (см., например, $\vec{a}, \vec{a}_\tau, \vec{a}_n$ на рис. 1 настоящего пособия, или $\vec{T}, \vec{T}_1, \vec{T}_2$ на рис. 7).

Задание 1

1.0. На рисунке либо неверно изображена траектория или/и положение точки в исследуемый момент времени или/и векторы $\vec{V}$ *,* $\vec{a}$ *,* $\vec{a}_\tau$ *,* $\vec{a}_n$ *.* Необходимо на новом рисунке 1) изобразить оси координат, 2) правильно нарисовать траекторию точки, 3) на траектории указать положение движущейся точки в исследуемый момент времени t_1, 4) правильно нарисовать все векторы, проверив при этом, чтобы $\vec{V}$ и $\vec{a}_\tau$ были направлены по касательной к траектории, чтобы вектор $\vec{a}_\tau$ был перпендикулярен $\vec{a}_n$, а вектор $\vec{a}$ был диагональю прямоугольного параллелепипеда, сторонами которого служат векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$.

Задание 2

2.0. На рисунке направления векторов скоростей точек и дуговых стрелок угловых скоростей не согласованы, либо они вообще (или частично) отсутствуют на чертеже. Необходимо исправить рисунок, изобразив на нем кинематически согласованные векторы скоростей и дуговые стрелки угловых скоростей.

Задание 3

3.0. На рисунке направления векторов скоростей точек и дуговых стрелок угловых скоростей не согласованы, либо они вообще (или частично) отсутствуют на чертеже. Необходимо исправить рисунок, изобразив на нем кинематически согласованные векторы скоростей и дуговые стрелки угловых скоростей.

Задание 4

4.0. В тексте решения не указан выбор подвижной системы отсчета, без чего все выкладки сразу теряют всякий смысл. Отредактировать решение, ясно указав выбор и характер движения подвижной системы отсчета.

4.1. Из рисунка невозможно понять, какова пространственная ориентация векторов относительных и переносных векторов скоростей и ускорений, ускорения Кориолиса, а также вектора угловой скорости *подвижной системы отсчета.* Необходимо выполнить рисунок заново, сделав его более понятным, кроме того, в тексте пояснить словами пространственное направление каждого из упомянутых выше векторов.

4.2. Векторы относительных и переносных скоростей и ускорений, а также ускорения Кориолиса не соответствуют выбранной подвижной системе отсчета. Необходимо по учебнику разобраться в теоретическом материале и решить задачу заново.

Задание 5

Приступая к исправлению ошибок, допущенных в решениях заданий 5, 6 и 7, полезно предварительно освежить в памяти основные определения, понятия и теоремы статики. Это можно сделать с помощью учебников, приведенных в списке литературы. Кроме того, самые необходимые сведения приводятся в Приложении настоящего пособия, они помогут разобраться в существе допущенных ошибок.

5.0. Неправильно расставлены силы реакций механических связей. Необходимо с помощью учебника разобраться с вопросом расстановки сил реакций и заново решить задачу.

5.1. Число неизвестных больше или меньше числа составленных уравнений равновесия. Как правило, эта ситуация связана с допущенной ошибкой 5.0.

5.2. При составлении уравнений равновесия неверно подсчитываются проекции сил на координатные оси, моменты сил относительно точек (задание 5) и моменты сил относительно осей (задание 6). При использовании теоремы Вариньона потерян отличный от нуля момент одной из составляющих силы. При исправлении ошибки рекомендуется в **строке**, упомянутой в п.5.3., записать вместо силы все ее составляющие и действовать затем в соответствии с указаниями к п.5.3.

5.3. В уравнениях равновесия потеряны либо проекции сил, либо моменты сил (или моменты пар), отличные от нуля. При составлении уравнений равновесия эта ошибка встречается чаще всего.

Чтобы этого не случилось, рекомендуется выписать в одной **строке** все силы и пары, приложенные к телу, равновесие которого исследуется. Теперь уравнения равновесия следует записать так, чтобы проекции сил (моменты) в уравнениях располагались в той же последовательности, что и в **строке**. Если проекция (момент) равна нулю, то этот нуль нужно явно записать в уравнении для самоконтроля. При таком порядке в каждом из уравнений равновесия окажется ровно столько слагаемых, сколько элементов содержит **строка**, и пропажа какой-либо силы будет исключена.

Задание 6

6.0, 6.1, 6.2, 6.3 — ошибки аналогичны ошибкам 5.0—5.3 задания 5, поэтому рекомендации по их исправлению те же.

6.4. Аксиома действия-противодействия применяется неверно. Причину появления этой ошибки поясним, вернувшись к примеру, разобранному в задании 6.

Для бо́льшей ясности рассуждений переобозначим силу $\vec{x}_C$, действующую на полуарку BLC через $\vec{x}\,'_C$, обозначение силы $\vec{x}_C$, действующей на полуарку ADC, оставим без изменения (для силы $\vec{y}_C$ аналогичные рассуждения можно провести самостоятельно). Векторы $\vec{x}_C$ и $\vec{x}\,'_C$ могут быть представлены в виде

$$\vec{x}_C = \vec{i}x_C, \quad \vec{x}\,'_C = -\vec{i}x'_C, \tag{1}$$

где $\vec{i}$ — единичный орт оси x, а x_C и x'_C — алгебраические значения соответствующих векторных величин: если они окажутся положительными, то это будет означать, что силы реакций связей $\vec{x}_C$ и $\vec{x}\,'_C$ будут направлены так же, как и на рисунке, если отрицательными — направления сил реакций будут противоположны тому, что изображено на рисунке.

В соответствии с аксиомой действия-противодействия

$$\vec{x}_C = -\vec{x}\,'_C, \tag{2}$$

что и учтено на рисунках.

Если (1) подставить в (2), то после преобразований получим

$$x_C = x'_C, \tag{3}$$

что никак не противоречит, наоборот — согласуется с векторным соотношением (2).

Описываемая ошибка состоит в том, что слушатель в процессе решения совершенно правильно записанной системы уравнений равновесия при замене значения x'_C пользуется не соотношением (3), а соотношением (2) со снятыми обозначениями векторов. При этом не учитывается, что, во-первых, (2) связывает векторы, а не алгебраические значения и, во-вторых, аксиома действия-противодействия была уже учтена на расчетных схемах и неправильно применять ее повторно. В итоге описанные действия приводят к неверному ответу задачи.

Задание 7

7.0, 7.1, 7.2, 7.3 – ошибки аналогичны ошибкам 5.0– 5.3 задания 5, поэтому рекомендации по их исправлению те же. Добавим здесь, что в пространстве трех измерений сила может быть представлена как двумя, так и тремя составляющими.

Задание 8

8.0. Неверно определяются константы интегрирования, из-за чего окончательное выражение не удовлетворяет начальным условиям. На примере задачи, разобранной в задании 8, отметим несколько особенностей, присущих решению задач динамики материальной точки.

Во-первых, векторное равенство $(*)$ из примера к заданию 8, следующее из второго закона Ньютона, зависит лишь от условия задачи и не меняется в зависимости от выбора системы отсчета и выбранного метода решения.

Во-вторых, вид дифференциального уравнения движения материальной точки $(***)$, которое получается из $(*)$, а также начальные условия, которым должно удовлетворять решение $(***)$, существенным образом зависят от выбора системы отсчета.

Если в разобранном примере ввести ось x в направлении от B к A, а начало отсчета поместить в точку, находящуюся правее A на 2 метра, то дифференциальное уравнение движения $(***)$ примет другой вид:

$$\ddot{x} = -0{,}97e^{0{,}3t} + 2{,}97\,;$$

трансформациям подвергнутся также выражения для начальных условий:

$$t = 0: \quad x = 2, \quad \dot{x} = V_0 = -20\,.$$

Все это, как правило, повлечет за собой:

1) другой способ интегрирования уравнения $(***)$;

2) другие величины констант интегрирования C_1 и C_2;

3) другой вид аналитического выражения закона движения груза.

На отмеченные обстоятельства слушатель должен обратить внимание при выполнении работы по исправлению допущенных ошибок. Отметим здесь же, что ось x в этих задачах рациональнее выбирать в направлении начальной скорости V_0.

Задание 9

9.0, 9.1, 9.2 – ошибки аналогичны ошибкам 5.0– 5.2 задания 5, поэтому рекомендации по их исправлению те же самые.

9.3. Точка приложения равнодействующей системы сил инерции для материального однородного стержня указана неверно. Необходимо повторно разобраться с примером 9 настоящего пособия и заново решить задачу.

Задание 10

10.0. На расчетной схеме кинематически не согласованы направления векторов возможных перемещений (скоростей, ускорений) материальных точек и тел, движущихся поступательно, а также направления дуговых стрелок элементарных углов поворота (угловых скоростей, угловых ускорений) тел, совершающих плоское движение, либо вращающихся вокруг неподвижной оси. Ошибки необходимо найти и исправить самостоятельно.

10.1. Выражения для элементарных работ сил инерции имеют разные знаки. Это означает, что либо используются неверные формулы для вычисления элементарных работ, либо проявились последствия ранее допущенной ошибки 10.0.

10.2. Сумма элементарных работ активных сил подсчитана неверно. Это означает, что либо используются неверные формулы для вычисления элементарных работ, либо проявились последствия ранее допущенной ошибки 10.0.

Задание 11

11.0 – ошибка, аналогичная ошибке 10.0, поэтому рекомендации по её исправлению те же самые.

11.1. Неверно вычислено выражение обобщенной силы. Либо используются неверные формулы для вычисления элементарных работ, либо проявились последствия ранее допущенной ошибки 11.0. С ошибкой необходимо разобраться самостоятельно.

11.2. Неверно вычислено выражение кинетической энергии механической системы. Использованы неверные соотношения между скоростями материальных точек (твердых тел, совершающих поступательное движение) и угловыми скоростями тел, совершающих плоское движение или вращающихся вокруг неподвижной оси. С ошибкой необходимо разобраться самостоятельно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В приложении в минимальном объёме приводятся основные определения, понятия и формулировки некоторых теорем статики. Этих сведений недостаточно для сдачи зачета по курсу "Прикладная механика"(часть I Механика недеформируемого твердого тела). Дисциплину необходимо изучать по учебникам, приводимым в списке рекомендуемой литературы, тем более, что в пособии внимание сосредоточено лишь на статике и совершенно не затронуты вопросы, относящиеся к кинематике и динамике.

Важность дополнительного обращения к вопросам статики объясняется просто: во-первых, наибольшее количество ошибок в контрольных работах допускается слушателями при решении задач статики, во-вторых, часть II курса – Механика деформируемого твердого тела – базируется на умении решать задачи статики.

Для решения задач статики необходимо освоить понятия и научиться вычислять: *проекцию силы на ось; момент силы относительно точки и момент силы относительно оси.*

Проекция силы на ось

При равновесии твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил, все силы располагаются в одной плоскости, например, в плоскости xOy (рис. П1,а).

Чтобы подсчитать, например, проекцию силы $\vec{F}$ на ось x (обозначается F_x) необходимо:

1. Из начала вектора $\vec{F}$ и из его конца опустить на ось x перпендикуляры (рис. П1,а).

2. Подсчитать длину отрезка, заключённого между точками пересечения оси и перпендикуляров. Эта длина и будет являться модулем искомой проекции $|F_x|$. В рассматриваемом примере $|F_x|=F\sin\alpha$, где F – величина силы $F=|\vec{F}|$.

3. Окончательно подсчитать проекцию силы на ось, присвоив вычисленному значению знак "плюс" или "минус". Для этого надо мысленно двигаться вдоль силы от её начала к концу и смотреть, в каком направлении проходится проекция. Если это направление совпадает с положительным направлением оси, проекции присваивается положительный знак, в противном случае – отрицательный.

Аналогично подсчитывется F_y – проекция силы $\vec{F}$ на ось y. В рассматриваемом случае $F_x=-F\sin\alpha$ и $F_y=+F\cos\alpha$.

4. Из изложенного следует что проекция силы на ось равна нулю, если сила перпендикулярна оси.

5. Если силу проектировать на параллельные оси x и x', то проекции окажутся одинаковыми: $F_x = F_{x'}$.

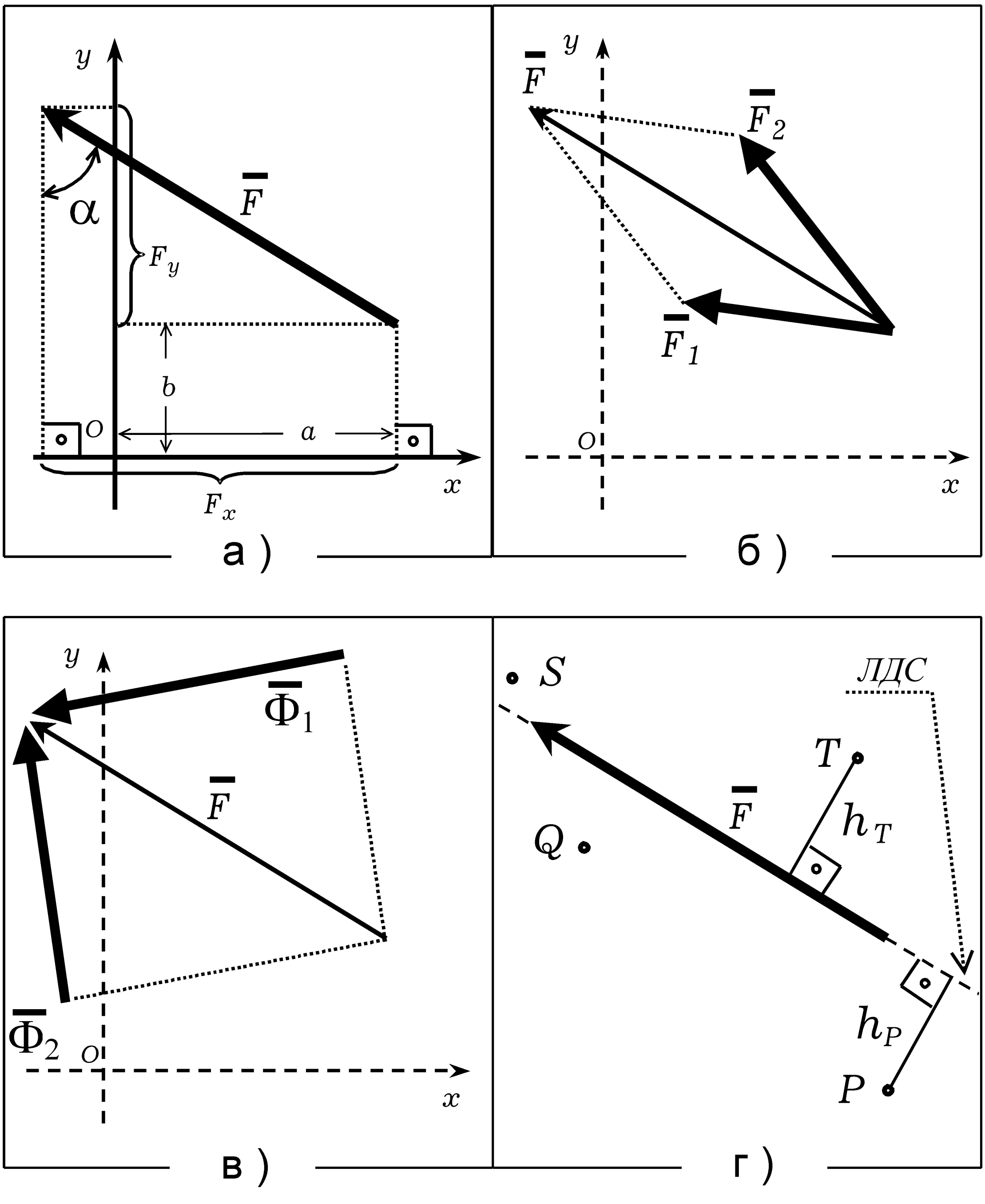


Рис. П1

6. Проекция силы на ось не изменится, если силу параллельно перенести вдоль линии действия в другую точку.

При решении задач о равновесии твердого тела, находящегося под действием произвольной системы сил, все силы располагаются в трёхмерном пространстве.

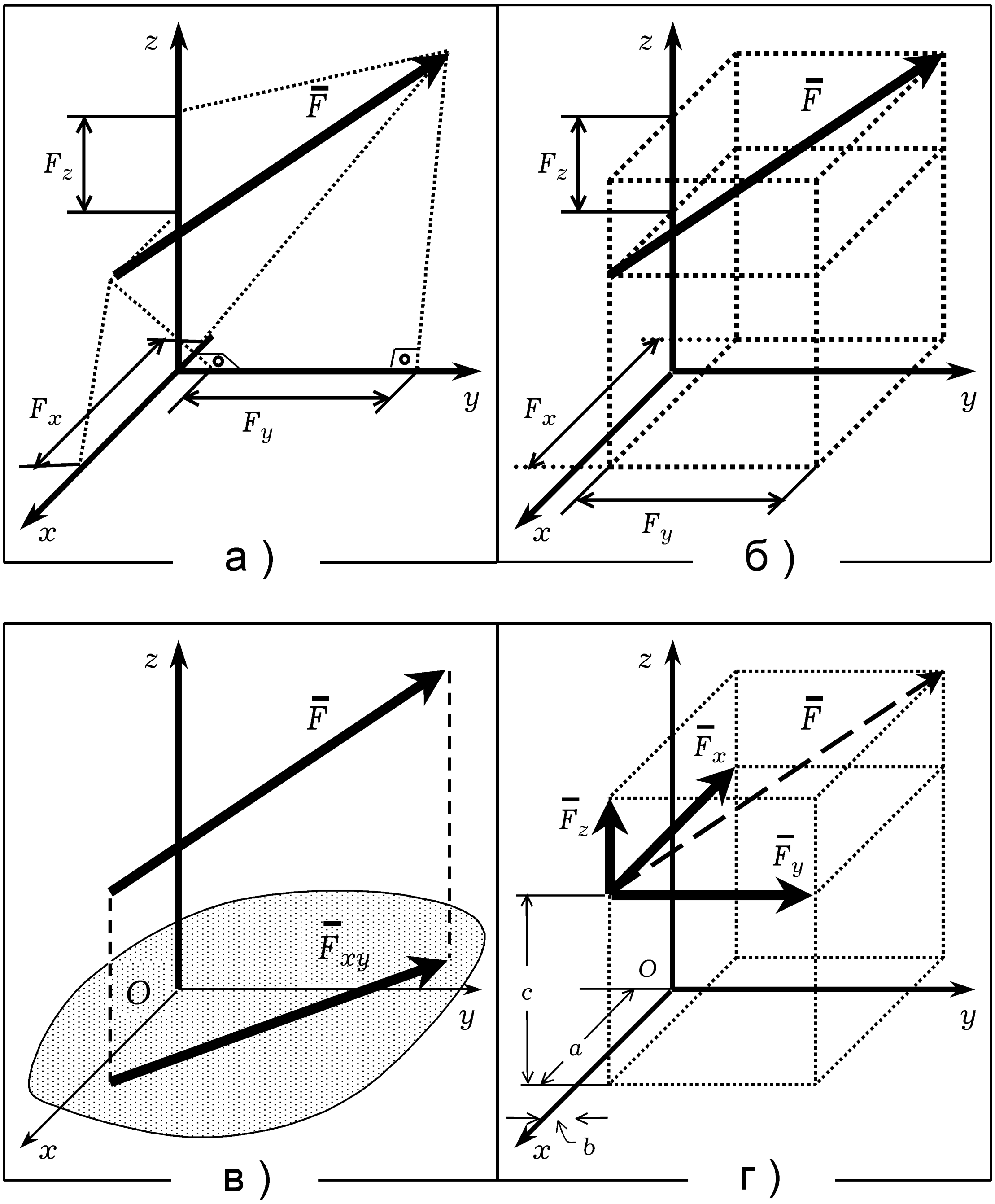


Рис. П2

Проекции силы $\vec{F}$ на оси координат – F_x, F_y и F_z вычисляются так же, как и в плоском случае (рис. П2,а). Следует иметь в виду, что перпендикуляры, опущенные на координатные оси, могут таковыми не казаться (например, F_y), это связано с пространственной ориентацией силы и координатных осей. Более наглядно с помощью дополнительного построения проекции силы на координатные оси показаны на рис. П2,б. В рассматриваемом случае (рис. П2,а) $F_x<0$, $F_y>0$ и $F_z>0$.

7. Поскольку оси координат перпендикулярны друг другу, выполняется равенство $F^2=F_x^2+F_y^2$ в плоском случае и $F^2=F_x^2+F_y^2+F_z^2$ – в случае произвольного пространственного расположения силы.

Разложение силы на составляющие, понятие равнодействующей силы

Согласно аксиомам статики, силу $\vec{F}$, приложенную к твердому телу, можно заменить двумя силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действие которых на твердое тело будет таким же, как и силы $\vec{F}$ (математически это записывается так: $\vec{F} \sim \{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$) . Эта замена производится в соответствии с правилом параллелограмма, и участвующие в этом построении силы либо исходят из одной точки (рис. П1,б), либо сходятся в одной точке (рис. П1,в). В этом случае говорят, что сила $\vec{F}$ является *равнодействующей системы сходящихся сил* $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. П1,б), или системы сил $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ ($\vec{F} \sim \{\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2\}$, рис. П2,в), а сами силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ или $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2$ называются *составляющими* силы $\vec{F}$ (на всех четырёх рис. П1,а – 1,г сила $\vec{F}$ одна и та же).

Математически правило параллелограмма записывается в виде выражений: $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ и $\vec{F}=\vec{\Phi}_1+\vec{\Phi}_2$.

Разложение силы на составляющие может быть осуществлена бесчисленным множеством способов (на практике, как правило, направления составляющих выбираются параллельно координатным осям).

Количество составляющих может быть равно двум или больше, однако, в плоском случае обычно ограничиваются двумя составляющими, а в пространственном – двумя или тремя.

На рис. П2,г представлена ситуация: $\vec{F} \sim \{\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z\}$, $\vec{F}=\vec{F}_x+\vec{F}_y+\vec{F}_z$, здесь сила разложена на три составляющие, параллельные осям координат. Эти составляющие нельзя называть проекциями силы на оси – это не скалярные величины, а векторы: над ними стоят соответствующие обозначения. Правда, связь между составляющими и проекциями в данном случае (рис. П2,г) имеется: модули составляющих равны модулям соответствующих проекций.

В общем случае говорят, что система сил $\{\vec{F}_i\}$ имеет равнодействующую $\vec{R}^*$ (иначе $\vec{R}^* \sim \{\vec{F}_i\}$), если порознь приложенные к твёрдому телу система сил $\{\vec{F}_i\}$ и сила $\vec{R}^*$ производят на него совершенно одинаковое действие.

У рассмотренной выше системы двух сходящихся сил существовала равнодействующая. Однако не каждая система сил эквивалентна одной силе, например равнодействующей нет у системы двух скрещивающихся (линии действия непараллельны и не пересекаются) сил.

Момент силы относительно центра (плоская система сил)

В случае плоской системы сил момент силы $\vec{F}$ относительно точки (центра, полюса) P (обозначается $M_P\vec{F}$) удобнее считать скалярной величиной. Чтобы его подсчитать необходимо :

1. Провести *линию действия силы (ЛДС)* – пунктир на рис. П1,г. Из центра P на *ЛДС* опустить перпендикуляр. Образовавшийся отрезок h_P называется *плечом силы* $\vec{F}$ *относительно полюса* P.

2. Подсчитать модуль вычисляемого момента по формуле $|M_P\vec{F}|=F\,h_P$.

3. Окончательно вычислить момент $M_P\vec{F}$ по формуле $M_P\vec{F}=\pm|M_P\vec{F}|$. Знак момента зависит от направления вращения силы относительно полюса : если сила стремится повернуться относительно полюса против часовой стрелки, моменту присваивается положительный знак, вращению по ходу часовой стрелки соответствует отрицательное значение момента.

В соответствии с принятым правилом знаков $M_P\vec{F}>0$, $M_Q\vec{F}>0$, $M_T\vec{F}<0$, $M_S\vec{F}<0$ (рис. П1,г).

4. Момент силы не изменится, если силу параллельно перенести вдоль её линии действия.

5. Момент силы обращается в нуль $M_K\vec{F}=0$, если полюс K лежит на линии действия силы $\vec{F}$.

Момент силы относительно оси (произвольная пространственная система сил)

В случае произвольной пространственной системы сил в уравнениях равновесия участвуют моменты сил относительно координатных осей (обозначаются $M_x\vec{F}$, $M_y\vec{F}$, $M_z\vec{F}$).

Чтобы подсчитать, например, $M_z\vec{F}$ необходимо :

1. Провести плоскость, перпендикулярную оси, и отметить точку пересечения оси и плоскости. Плоскостей, перпендикулярных оси z, существует бесконечное множество, можно выбрать любую из них. В рассматриваемом случае была выбрана координатная плоскость xOy (на рис. П2,в эта плоскость отмечена затемнением), точкой пересечения её с

осью z оказалась точка O.

2. Силу $\vec{F}$ спроектировать на проведённую плоскость, в результате получится вектор проекции силы на плоскость (в рассматриваемом случае – вектор $\vec{F}_{xy}$).

3. Подсчитать вычисляемый момент по формуле $M_z\vec{F}{=}\pm|M_O\vec{F}_{xy}|$ (в левой части равенства вычисляется модуль момента силы $\vec{F}_{xy}$ относительно центра O).

4.Присвоить знак полученному значению, глядя со стороны положительного направления оси z (в разбираемом примере нужно смотреть сверху – навстречу оси z – в результате получим $M_z\vec{F}{=}{+}|M_O\vec{F}_{xy}|$).

Из изложенного следует, что:

5. Момент силы относительно оси не меняется, если силу перенести параллельно самой себе в любую точку, лежащую на линии действия силы.

6. Момент силы относительно оси обращается в нуль, если а) сила параллельна оси, или б) линия действия силы пересекает ось.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей силы

Как в плоском, так и в пространственном случаях применение теоремы Вариньона может значительно облегчить составление уравнений моментов.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: если система сил $\{\vec{F}_k\}$ имеет равнодействующую $\vec{R}^*$, $(\{\vec{F}_k\} \sim \vec{R}^*)$, то ее момент относительно любого центра P (оси u) равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра (оси):

$$M_P(\vec{R}^*) = \sum_{k=1}^{n} M_P(\vec{F}_k), \qquad M_u(\vec{R}^*) = \sum_{k=1}^{n} M_u(\vec{F}_k).$$

Применение теоремы Вариньона даёт, в частности, следующие величины момента силы относительно центра:

$M_O(\vec{F}) = +|F_x|\,b{+}|F_y|\,a{=}M_O(\vec{F}_1){+}M_O(\vec{F}_2){=}M_O(\vec{\Phi}_1){+}M_O(\vec{\Phi}_2)$

(на рис. П1,а,б,в фигурирует одна и та же сила $\vec{F}$);

и моментов силы относительно трёх координатных осей:

$M_x(\vec{F}) = -|F_y|\,c{+}|F_z|\,b\,;\qquad M_y(\vec{F}) = -|F_x|\,c{-}|F_z|\,a\,;$

$M_z(\vec{F}) = +|F_x|\,b{+}|F_y|\,a$ (рис. П2,г).

Пара сил и её свойства

Парой сил называется система $\{\vec{F}\,', \vec{F}\,''\}$ двух равных по величине $F' = F''$ антипараллельных сил $\vec{F}\,' = -\vec{F}\,''$ (рис. П3), приложенных к одному и тому же твердому телу (если у сил будет общая линия действия, то система сил будет уравновешенной). Кратчайшее расстояние между линиями действия сил – h_F – называется плечом пары.

Сумма проекций этих сил на ЛЮБУЮ ось равна нулю, например, $F'_x + F''_x = 0$.

Для плоской системы алгебраическая сумма моментов сил пары относительно центра не зависит от выбора этого центра. Эта сумма называется моментом пары, он равен произведению величины одной из сил на плечо пары взятому со знаком и обозначается либо $M_{\{\vec{F}', \vec{F}''\}}$, либо просто M.

Правило знаков такое же, как и при вычислении момента силы относительно центра, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, момент пары положительный, в противном случае – отрицательный. Для пары $\{\vec{F}', \vec{F}''\}$ её момент равен $M = +F\, h_F$.

Для пространственной системы сил алгебраическая сумма моментов сил пары относительно параллельных осей не зависит от выбора оси. Она равна проекции вектора-момента пары на ось.

С понятиями вектора-момента силы относительно полюса $\vec{M}_P$ и вектора-момента пары сил $\vec{M} = \vec{M}_{\{\vec{F}', \vec{F}''\}} = \vec{M}_P \vec{F}' + \vec{M}_P \vec{F}'', \forall P$ необходимо ознакомиться по какому-либо учебнику из списка рекомендуемой литературы.

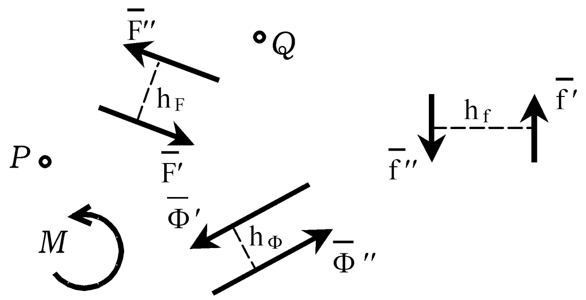


Рис. П3

На рисунке кроме пары $\{\vec{F}', \vec{F}''\}$ изображены ещё две пары: $\{\vec{f}', \vec{f}''\}$ и $\{\vec{\Phi}', \vec{\Phi}''\}$. Все три пары различны: у них неодинаковы величины сил F, f, Φ, разные линии действия сил, разные плечи пар h_F, h_f, h_Φ и приложены пары в разных точках твердого тела. Однако, у пар имеется общее свойство – моменты пар одинаковы : $F\, h_F = f\, h_f = \Phi\, h_\Phi = M$ или

$$M_{\{\vec{F}', \vec{F}''\}} = M_{\{\vec{f}', \vec{f}''\}} = M_{\{\vec{\Phi}', \vec{\Phi}''\}} = M\,.$$

Можно доказать, что эти пары сил эквивалентны, то есть, порознь приложенные к твердому телу, они оказывают на него одинаковое действие. Математически это записывается так: $\{\vec{F}', \vec{F}''\} \sim \{\vec{f}', \vec{f}''\} \sim \{\vec{\Phi}', \vec{\Phi}''\}$.

По этой причине принято изображать конкретную пару сил не в виде двух сил, а при помощи *дуговой стрелки* M, представленной на том же рисунке; направление дуговой стрелки соответствует направлению вращения пары.

Главный вектор и главный момент системы сил

Главным вектором системы сил $\{\vec{F}_i\}$ называется вектор $\vec{R}$ равный геометрической сумме векторов всех сил системы : $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$.

Главным моментом системы сил $\{\vec{F}_i\}$ относительно центра P называется вектор $\vec{M}_P$ равный геометрической сумме векторов-моментов всех сил системы относительно того же центра P: $\vec{M}_P = \sum M_P \vec{F}_i$.

Теорема об эквивалентности систем сил, приложенных к твёрдому телу (основная теорема статики)

Имеет место теорема: две системы сил $\{\vec{F}_i\}$ и $\{\vec{G}_k\}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда у них одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра.

Условия равновесия системы сил

Для того чтобы система сил, приложенных к твердому телу, была *уравновешенной*, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю ее главный вектор и главный момент относительно какого-либо центра:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k = 0; \qquad \vec{M}_P = \sum \vec{M}_P(\vec{F}_k) = 0.$$

Условия уравновешенности системы сил, приложенных к твердому телу, в координатной форме получаются из векторных уравнений и имеют вид системы шести уравнений:

$$\begin{array}{lll} \sum F_{kx} = 0, & \sum F_{ky} = 0, & \sum F_{kz} = 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_k) = 0, & \sum M_y(\vec{F}_k) = 0, & \sum M_z(\vec{F}_k) = 0. \end{array}$$

Верхние три уравнения называются *уравнениями проекций* сил на координатные оси; они отражают тот факт, что при равновесии твердого тела алгебраическая сумма проекций всех сил, приложенных к телу, на каждую координатную ось должна быть равна нулю. Нижние три уравнения называются *уравнениями моментов* сил относительно координатных осей. Эти уравнения указывают на то, что при равновесии тела алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на тело, относительно каждой координатной оси должна быть равна нулю.

Система уравнений называется основной системой уравнений равновесия твердого тела, находящегося под действием произвольной системы сил. Существуют другие формы системы уравнений равновесия, каждая из которых состоит из шести уравнений. При использовании таких систем приходится следить за выполнением условий, накладывающих ограничения на выбор осей, относительно которых вычисляются суммы моментов сил.

Уравнения равновесия в случае плоской системы сил

Система сил называется *плоской*, если силы располагаются в одной плоскости. Направим координатные оси так, чтобы все силы оказались в плоскости xOy; в этом случае третье, четвертое и пятое уравнения основной системы обращаются в тождества, оставшиеся три

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum M_O(\vec{F}_k) = 0$$

образуют систему уравнений равновесия плоской системы сил.

В случае плоской системы сил можно пользоваться другими формами уравнений равновесия. Одна из них:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum M_P(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_S(\vec{F}_k) = 0,$$

где Pи $S-$ — любые точки плоскости, для которых отрезок PS неперпендикулярен оси x.

Еще одна форма уравнений равновесия:

$$\sum M_P(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_S(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_E(\vec{F}_k) = 0,$$

где P, S, $E-$ — любые точки плоскости, не лежащие на одной прямой.

Статически определимые и статически неопределимые задачи равновесия

В каждой задаче о равновесии твердого тела или конструкции, состоящей из нескольких тел, кроме заданных величин, имеются величины, которые необходимо найти в процессе решения. Задача о равновесии называется *статически определимой*, если она решается до конца методами статики. В этом случае необходимо, чтобы число неизвестных не превышало числа уравнений равновесия. Задача называется *статически неопределимой*, если ее нельзя решить, пользуясь только уравнениями статики. Поэтому задача о равновесии одного тела, содержащая семь и более неизвестных, заведомо является статически неопределимой.

Решение задач статики.

Общая схема решения задач о равновесии тела (или конструкции, состоящей из нескольких тел) содержит несколько этапов. Необходимо:

1. Выбрать тело (или конструкцию), исследование равновесия которого позволит определить требуемые величины. Нарисовать *расчетную схему* – упрощенный рисунок, на который вынесены лишь необходимые для решения линейные размеры и углы, а несущественные детали опущены.

2. Изобразить на схеме активные силы, заданные в условии задачи.

3. Если тело несвободно, отбросить наложенные на него механические связи, заменив их действие реакциями связей. После такой замены тело становится свободным.

4. Проверить выполнение необходимого условия статической определимости задачи: число неизвестных, появившихся на расчетной схеме, не должно превышать числа уравнений равновесия для рассматриваемой системы сил.

5. В случае выполнения этого условия составить систему уравнений равновесия, решить ее и исследовать полученные результаты.

При решении задачи желательно действовать строго по описанной схеме.

Методика расстановки сил реакций механических связей

Опыт показывает, что наиболее часто ошибки допускаются при замене связей их реакциями. Остановимся подробнее на этом вопросе.

Каждая механическая связь представляет либо тело, либо механическое устройство, которое накладывает какие-либо ограничения на перемещение тела в пространстве. При этом, в зависимости от вида связи, некоторые перемещения запрещены, а некоторые – разрешены. Это обстоятельство позволяет заранее, не находя численных значений силовых факторов действия связи, указать на некоторые качественные особенности.

Правило, которому необходимо следовать при замене связей силами реакций, заключается в следующем: реакция связи в общем случае может состоять из двух силовых факторов – силы, приложенной в точке наложения связи, и пары сил. Если связь запрещает поступательное перемещение тела, появляется сила реакции, направление которой противоположно запрещенному перемещению. Если связь запрещает поворот тела, то возникает пара сил реакции связи, которая обеспечивает это запрещение, при этом вектор момента пары будет направлен вдоль оси запрещенного поворота.

Некоторые типы механических связей.

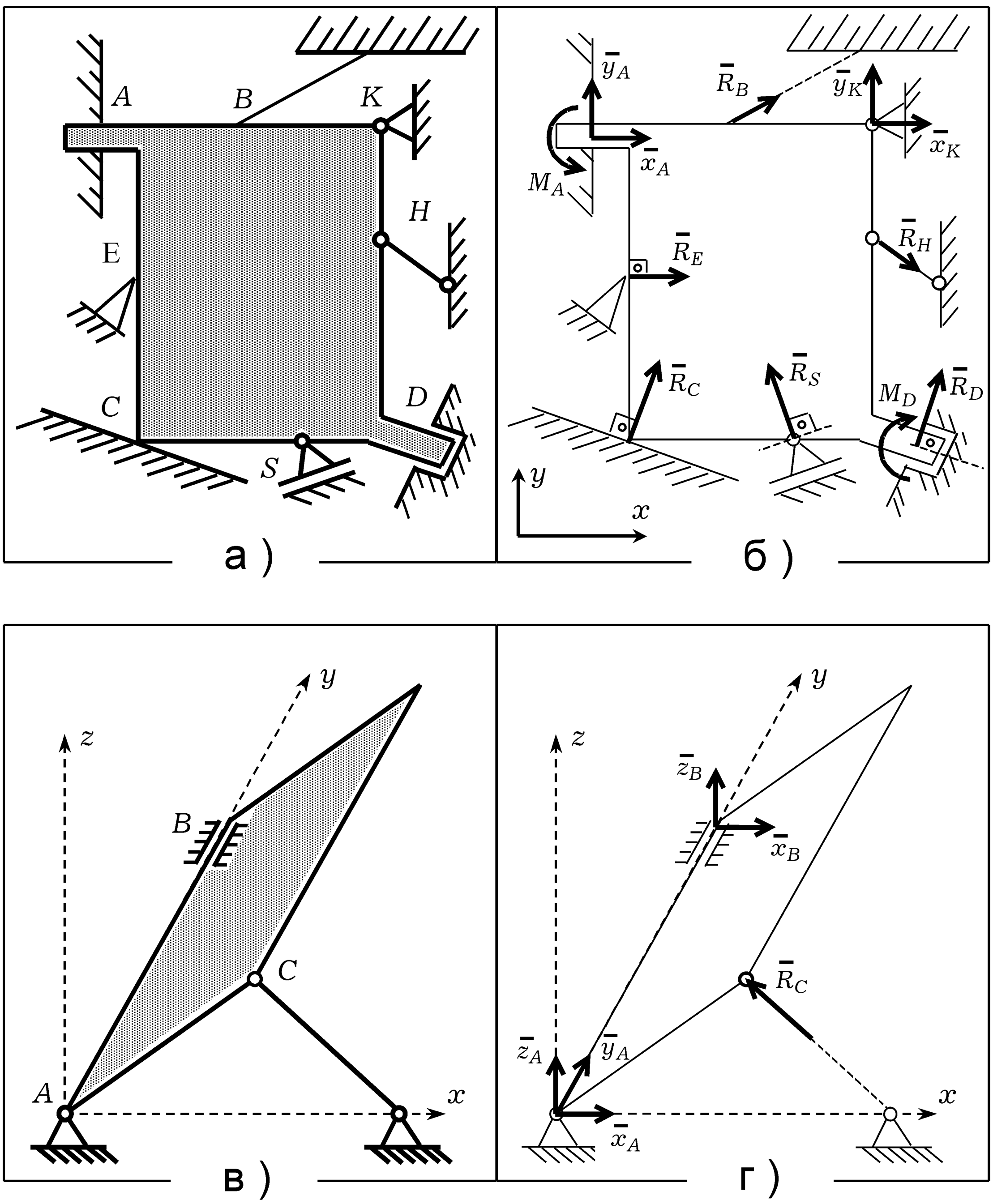


Рис. П4

1. *Идеально гибкая нерастяжимая невесомая нить.* На рис. П4,а изображена нить, прикрепленная к твердому телу в точке B. Рассматриваемая связь наложена в точке B. В силу идеальной гибкости нити

разрешен поворот тела вокруг любой оси, проходящей через эту точку. Это означает, что пары сил реакции не возникает.

Для этого типа связи разрешены малые поступательные перемещения тела, при которых точка B перемещается перпендикулярно нити. В силу этого в направлении разрешенных перемещений сила реакции возникнуть не может. Запрещено поступательное перемещение тела в направлении нити, так как нить нерастяжима. Это означает, что сила реакции нити $\vec{R}_B$, приложенная к телу в точке B, направлена вдоль нити.

Аналогичные рассуждения позволяют заранее определить направление и расставить силы реакции связей:

- $\vec{R}_C$, $\vec{R}_E$ в случаях *свободного опирания двух тел*, поверхность хотя бы одного из тел предполагается гладкой, силы реакций связей направлены перпендикулярно гладким поверхностям;
- $\vec{R}_S$ в случае, когда связью является *подвижный шарнир*, сила реакции связи направлена перпендикулярно поверхности, на которую опирается шарнир;
- $\vec{R}_H$, если связью является *ненагруженный в промежуточных точках стержень, шарнирно закрепленный на концах*, сила реакции связи направлена вдоль прямой, соединяющей концевые шарниры.

2. *Неподвижный шарнир*, находящийся в точке K, не запрещает поворот тела, откуда следует, что что пары сил не возникает. Любое перемещение точки K запрещено, поэтому и сила реакции неподвижного шарнира $\vec{R}_K$ может быть любой. Она неизвестна ни по величине, ни по направлению. Известно только, что вектор $\vec{R}_K$ расположен в плоскости рисунка и может быть представлен минимум двумя своими составляющими. Разложение на составляющие можно выполнить бесчисленным множеством способов, но самым рациональным, как правило, является разложение $\vec{R}_K$ на составляющие $\vec{x}_K$ и $\vec{y}_K$, параллельные координатным осям x и y.

3. *Жёсткая заделка* запрещает поворот тела вокруг точки A, поэтому возникает пара сил, момент которой M_A неизвестен ни по величине, ни по направлению. Кроме того, рассматриваемая связь запрещает любое перемещение точки A, благодаря чему возникает сила реакции связи $\vec{R}_A$, которую можно представить двумя составляющими $\vec{x}_A$ и $\vec{y}_A$.

4. *Скользящая заделка* запрещает поворот тела вокруг точки D, благодаря чему появляется пара сил с моментом M_D. Также в скользящей

заделке образуется сила реакции $\vec{R}_D$, направленная перпендикулярно гладкой поверхности опирания.

Связи, рассмотренные в пп. 2, 3, 4 относились к плоской системе сил. Методика расстановки сил реакций связей в случае произвольной пространственной системы сил остается прежней. Дополнительно к связям п. 1 на рис. П4,в и П4,г представлены связи:

5. *Сферический неподвижный шарнир* запрещает любое перемещение точки A в пространстве и не запрещает вращение твердого тела вокруг любой оси, проходящей через точку A. Силу реакции связи можно представить тремя составляющими, направленными вдоль координатных осей $\vec{x}_A$, $\vec{y}_A$ и $\vec{z}_A$.

6. *Цилиндрический шарнир (петля)* не запрещает поступательное перемещение твердого тела вдоль своей оси, поэтому сила реакции $\vec{R}_B$ перпендикулярна оси (на рисунке это ось y), и может быть разложена на составляющие $\vec{x}_B$, $\vec{z}_B$.

Ненагруженный в промежуточных точках стержень, шарнирно закрепленный на концах, изученный ранее (п. 1), вызывает силу реакции связи $\vec{R}_C$, направленную, как и прежде, вдоль прямой, соединяющей концевые шарниры.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\vec{a}, a$	–	вектор ускорения, модуль ускорения;
a_x, a_y, a_z	–	компоненты ускорения в декартовой системе координат;
a_τ, a_n	–	касательное, нормальное ускорения;
$A, \delta A$	–	работа силы, элементарная работа силы на возможном перемещении;
f	–	коэффициент трения скольжения;
$\vec{F}, \vec{\Phi}$	–	сила, сила инерции;
g	–	ускорение свободного падения ($g \approx 10$м/с^2);
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	–	орты декартовой системы координат;
I_o, I_x	–	моменты инерции твердого тела относительно осей;
m	–	масса точки, тела;
$m_{_B}(\vec{F})$	–	момент силы $\vec{F}$ относительно полюса (точки, центра) B;
M, M_Φ	–	момент пары сил, момент пары сил инерции;
$\vec{P}$	–	сила;
$q, \dot{q}$	–	обобщенная координата, обобщенная скорость;
Q	–	обобщенная сила;
$\vec{R}, \vec{R}_B$	–	сила сопротивления, сила реакции связи;
t	–	время;
T	–	кинетическая энергия точки, системы;
$\vec{V}, V$	–	вектор скорости, модуль скорости;
V_x, V_y, V_z	–	компоненты скорости в декартовой системе координат;
x, y, z	–	декартовы координаты;
$x_{_B}, y_{_B}, z_{_B}$	–	компоненты силы реакции $\vec{R}_B$ в декартовой системе координат в случае, когда ее направление заранее неизвестно;
$\dot{w}, \ddot{w}$	–	краткое обозначение первой и второй производной функции w по времени t;
$\delta\vec{r}, \delta x, \delta q$	–	возможное перемещение точки, вариация декартовой, обобщенной координаты;
ε	–	угловое ускорение;
ρ	–	радиус кривизны траектории;
φ	–	угол поворота;
ω	–	угловая скорость.