Министерство информационных технологий и связи РФ
Федеральное агентство связи
ГОУ ВПО «Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики»
Уральский технический институт связи и информатики (филиал)

Я.П. Бирюков

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

домашняя контрольная работа и материалы для подготовки к экзамену

Методические указания для студентов заочной формы обучения
специальностей 200900 и 201000

ЕКАТЕРИНБУРГ
2006

ББК 22.171
УДК 519.2

Бирюков Я.П.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. Домашняя контрольная работа и материалы для подготовки к экзамену. Методические указания для студентов заочной формы обучения специальностей 200900 и 201000 / Екатеринбург: УрТИСИ ГОУ ВПО СибГУТИ, 2006, 63 с.

Содержит варианты типовых заданий домашней контрольной работы по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» вместе с образцами их решения, тематический план и содержание рабочей программы дисциплины, а также методические материалы для подготовки к экзамену.

Рекомендовано НМС УрТИСИ ГОУ ВПО «СибГУТИ» в качестве методических указаний для студентов заочной формы обучения специальностей 200900 «Сети связи и системы коммутации», 201000 «Многоканальные телекоммуникационные системы». Может использоваться также для организации самостоятельной работы студентов дневной формы обучения всех специальностей направления «Телекоммуникации».

Рецензент:
к.ф.-м.н, доцент *Кокорина Е.Е.*

Кафедра физики, прикладной
математики и информатики

1 Пояснительная записка

Методические указания к выполнению домашней контрольной работы по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» составлены в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования, направление подготовки дипломированного специалиста «Телекоммуникации», 2000 г.

Базовыми дисциплинами для курса являются «Математика» и «Дискретная математика».

Цель преподавания дисциплины состоит в освоении студентами математического аппарата, применяемого для описания и моделирования случайных (недетерминированных) событий, случайных величин и случайных процессов.

В результате изучения курса студент должен:

- знать структуру и ключевые понятия теории вероятностей, понимать содержание и смысл их определений;
- знать типовые теоретико-вероятностные модели, принципы их построения и условия применимости;
- уметь обоснованно выбирать подходящие теоретико-вероятностные модели для решения профессиональных задач, поставленных в предметной формулировке;
- иметь навыки выполнения расчётов в рамках теоретико-вероятностных моделей, а также анализа и интерпретации полученных результатов;
- иметь навык самостоятельной работы со справочной и учебной литературой по теории вероятностей и математической статистике.

2 Тематический план

Разделы и темы		Расчёт часов		
		лекции	практич. занятия	самост. работа
	Введение	1	—	1
1.	СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ	5	4	20
1.1	Математические основы теории вероятностей	2	2	5
1.2	Элементарная теория вероятностей случайных событий	2	2	4
1.3	Типовые модели испытаний, выполняемых по сложным схемам	1	—	11
2.	СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	8	4	48
2.1	Определение и классификация случайных величин	2	—	8
2.2	Численные характеристики случайных величин	2	2	12
2.3	Функция случайной величины	—	—	8
2.4	Системы случайных величин (случайные векторы)	2	2	4
2.5	Производящие и характеристические функции	—	—	10
2.6	Закон больших чисел и предельные теоремы	2	—	6

	Разделы и темы	Расчёт часов		
		лекции	практич. занятия	самост. работа
3.	СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ	—	—	28
3.1	Математические основы теории случайных процессов	—	—	14
3.2	Корреляционный и спектральный анализ случайных процессов	—	—	14
4.	МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	—	—	34
4.1	Статистические методы обработки результатов эксперимента	—	—	14
4.2	Точечное и интервальное оценивание	—	—	10
4.3	Проверка статистических гипотез	—	—	10
	ИТОГО:	14	8	131

3 Содержание учебной дисциплины

Введение

Испытание и последовательность испытаний с недетерминированным исходом. Случайное событие и его эмпирические характеристики. Устойчивость относительных частот. Постановка задачи о математическом моделировании испытаний с недетерминированным исходом.

Раздел 1. Случайные события

Математические основы теории вероятностей. События достоверные и невозможные, совместные и несовместные. Операции над событиями. Вероятностное пространство: пространство элементарных событий, алгебра событий, вероятностная мера. Примеры построения вероятностных пространств.

Элементарная теория вероятностей случайных событий. Следствия из аксиом вероятностной меры. Вывод элементарных формул для вероятностей случайных событий. Условные вероятности и статистическая зависимость случайных событий. Полная группа попарно несовместных событий; формула полной вероятности и формулы Байеса.

Типовые модели испытаний, выполняемых по сложным схемам: "выборка без возвращения", "выборка с возвращением". Схема Бернулли и её предельные случаи; формулы Муавра-Лапласа, формула Пуассона.

Раздел 2. Случайные величины

Определение и классификация случайных величин. Функция распределения как универсальный способ описания случайных величин. Особенности описания дискретных и непрерывных случайных величин; закон распределения и плотность вероятности.

Численные характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, моменты. Примеры дискретных и непрерывных случайных величин, важные для практических приложений.

Функция случайной величины, её численные характеристики. Преобразование закона распределения или плотности вероятности для функции случайной величины.

Системы случайных величин (случайные векторы); определение и описание с помощью совместных распределений. Статистически независимые случайные величины. Численные характеристики системы случайных величин. Ковариация и коэффициент корреляции.

Производящие и характеристические функции случайной величины: математический аппарат и примеры решения теоретико-вероятностных задач.

Закон больших чисел и предельные теоремы. Неравенство Чебышёва, его модификации. Закон больших чисел. Последовательности случайных величин и сходимость по вероятности. Центральная предельная теорема.

Раздел 3. Случайные процессы

Математические основы теории случайных процессов. Траектория и сечение случайного процесса. Классификация случайных процессов. Модели случайных процессов: винеровский и пуассоновский случайные процессы, марковская цепь.

Корреляционный и спектральный анализ стационарных случайных процессов; теорема Винера-Хинчина. Преобразование стационарного случайного процесса линейной динамической системой.

Раздел 4. Методы математической статистики

Статистические методы обработки результатов эксперимента. Понятие выборки,табличные и графические способы её представления. Выборочная функция распределения. Численные характеристики выборки: выборочное среднее и выборочная дисперсия; выборочные моменты. Уравнение регрессии; определение его коэффициентов методом наименьших квадратов.

Точечное и интервальное оценивание. Задача оценки неизвестных параметров теоретического распределения по данным выборки. Точечная оценка: несмещённые, состоятельные, эффективные оценки; принцип максимального правдоподобия. Интервальные оценки: доверительная вероятность; доверительный интервал. Решение задачи для случая нормального распределения генеральной совокупности.

Проверка статистических гипотез. Статистическая гипотеза; определения и классификация: нулевая и конкурирующая, простая и сложная гипотезы; ошибки первого и второго рода. Статистический критерий, его уровень значимости и мощность. Критерий Пирсона.

4 Требования к оформлению контрольной работы и варианты типовых заданий

Домашняя контрольная работа по «Теории вероятностей и математической статистике» состоит из семи типовых заданий, в соответствии с тематикой практических занятий, предусмотренных рабочей программой дисциплины. Номер варианта определяется индивидуально; он равен последней цифре номера студенческого билета. Выполнение не своих вариантов заданий категорически не допускается. При оформлении работы соблюдайте следующие требования:

1. Контрольную работу оформляйте в отдельной тетради, на обложку которой наклейте заполненный титульный лист установленной формы, взятый в деканате.

2. Работу излагайте в рукописном виде, аккуратным почерком, чернилами синего или чёрного цвета. Компьютерные распечатки допускаются только в виде отдельных графиков или таблиц, вклеенных в тетрадь непосредственно по ходу изложения.

3. Прежде, чем излагать решение, выпишите номер задания и его полные условия. Задания должны следовать строго в установленном порядке, без пропусков или перестановок.

4. С краю страниц оставляйте поля для замечаний рецензента. Возможная работа над ошибками должна выполняться в этой же тетради, поэтому предусмотрите несколько чистых страниц в конце.

5. Представьте работу к проверке заблаговременно, не позднее чем за две недели до начала сессии.

Нарушение этих требований может стать причиной отказа в регистрации работы.

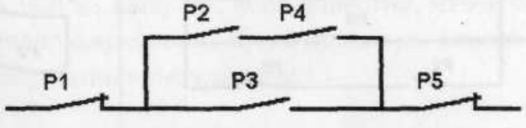
Задание №1. Элементарные формулы для вероятностей случайных событий

Участок электрической цепи, представленный на схеме, содержит размыкающие и замыкающие контакты $P1 \div P5$ пяти реле. Каждое реле функционирует *независимо от остальных* и при включении срабатывает с определённой вероятностью:

Вариант:	Вероятность срабатывания реле:					Обозначения:	
	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$	$P5$	X	Y
1	0.2	0.3	0.7	0.4	0.5	$P2$	$P4$
2	0.3	0.5	0.8	0.6	0.2	$P4$	$P3$
3	0.4	0.3	0.5	0.6	0.7	$P1$	$P3$
4	0.5	0.2	0.7	0.8	0.3	$P2$	$P1$
5	0.6	0.4	0.8	0.3	0.7	$P5$	$P3$
6	0.8	0.3	0.5	0.6	0.7	$P1$	$P5$
7	0.6	0.2	0.5	0.4	0.3	$P3$	$P2$
8	0.8	0.4	0.6	0.3	0.5	$P2$	$P3$
9	0.7	0.2	0.8	0.4	0.5	$P4$	$P2$
0	0.4	0.3	0.2	0.5	0.6	$P2$	$P1$
Образец	0.3	0.6	0.5	0.7	0.2	$P4$	$P2$

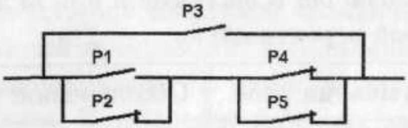
Каждое реле включили ровно один раз. С какой вероятностью после этого: а) участок цепи пропускает постоянный ток; б) участок цепи не пропускает постоянный ток, *если реле X сработало*; в) реле Y сработало, *если участок цепи пропускает постоянный ток*? (Вероятности вычислять с точностью до 0.00001).

Схема варианта "Образец":

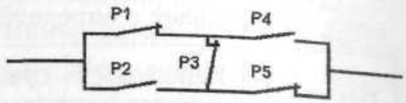


Напоминаем, что в случае срабатывания реле замыкающий контакт (—⟋—) переходит в *замкнутое*, а размыкающий контакт (—⟋⊥—) – в *разомкнутое* состояние.

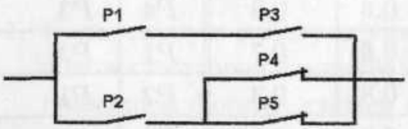
Вариант 1



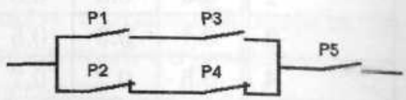
Вариант 2



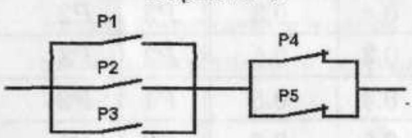
Вариант 3



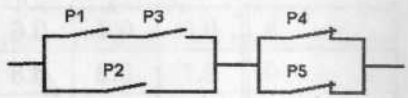
Вариант 4



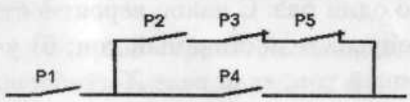
Вариант 5



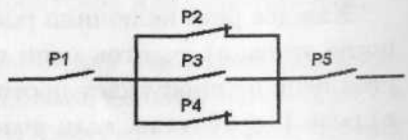
Вариант 6



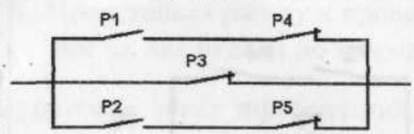
Вариант 7



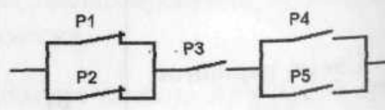
Вариант 8



Вариант 9



Вариант 0



Задание №2. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Система связи состоит из четырёх независимых каналов. Каждый канал характеризуется своей долей в общем потоке исходящих сообщений, а также определённой вероятностью успешной передачи сообщения (значения, *выраженные в процентах*, представлены в таблице):

Вариант:	Доля канала в потоке исходящих сообщений:				Вероятность успешной передачи через канал:			
	№1	№2	№3	№4	№1	№2	№3	№4
1	25	35	32	8	88	70	74	93
2	52	20	13	15	79	84	62	98
3	22	11	29	38	67	96	71	83
4	59	23	6	12	77	72	99	61
5	5	65	20	10	90	81	89	65
6	36	29	14	21	64	73	87	92
7	7	52	28	13	75	63	60	97
8	13	9	33	45	85	93	68	76
9	8	15	40	37	98	64	72	86
0	18	42	16	24	82	65	94	78
Образец	28	10	31	31	91	95	80	69

С какой вероятностью исходящее сообщение, выбранное наугад из общего потока: а) будет передано успешно; б) не будет передано успешно?

Вычислить *апостериорные* вероятности передачи некоторого сообщения через каждый из каналов, если известно, что это сообщение: а) было получено адресатом; б) не дошло до своего адресата. Истолковать полученные результаты.

Задание №3. Схемы испытаний "выборка без возвращения" и "выборка с возвращением"

Кабель, состоящий из N одинаковых жил, получил механическое повреждение, затронувшее S *процентов* его поперечного сечения. С какой вероятностью среди выбранных наугад n жил окажутся повреждёнными: а) *ровно* m_1; б) *не более* m_2?

Представим далее, что связист пытается установить соединение через жилы этого кабеля. Рассмотрим ситуацию, когда условия работы *не позволяют* отбирать для попытки соединения более одной жилы, а также исключить повторный выбор жил, оказавшихся на поверку повреждёнными. С какой вероятностью из L попыток соединения неудачными окажутся: а) *ровно* ℓ_1; б) *не менее* ℓ_2?

С какой вероятностью *первая успешная* попытка окажется: а) *ровно* k_1*-й* по счёту; б) *не менее, чем* k_2*-й* по счёту? Какими будут эти вероятности, если связист воспользуется появившейся возможностью *исключить повторный выбор жил, оказавшихся на поверку повреждёнными*?

Значения $N, S; n, m_1, m_2; L, \ell_1, \ell_2; k_1, k_2$ возьмите из таблицы:

Вариант:	N	S	n	m_1	m_2	L	ℓ_1	ℓ_2	k_1	k_2
1	8	37.5	5	2	1	6	3	3	4	2
2	12	50.0	6	3	2	5	2	4	3	2
3	10	30.0	7	2	2	4	1	2	1	3
4	11	54.5	4	3	1	5	3	1	2	4
5	9	55.6	5	2	3	4	2	2	3	1
6	8	62.5	4	2	1	7	4	3	2	2
7	10	60.0	5	3	3	6	4	2	4	3
8	9	44.4	6	1	3	5	3	2	3	3
9	12	33.3	5	2	2	6	1	3	2	4
0	11	27.3	6	1	2	4	2	3	1	3
Образец	13	38.5	7	3	2	5	2	1	4	4

Задание №4. Предельные случаи схемы Бернулли: Формула Пуассона

При передаче дискретного сообщения объёмом N тысяч бит через некоторый *канал связи без памяти* искажаются, в среднем, n бит. С какой вероятностью сообщение объёмом K тысяч бит содержит после трансляции:

а) ровно k_1 ошибок?

б) не более k_2 ошибок?

в) не менее k_3 ошибок?

Какой должна быть вероятность искажения бита для *канала связи без памяти*, чтобы сообщение объёмом L тысяч бит содержало после трансляции не более ℓ ошибок с *надёжностью*: а) $\gamma_1\%$; б) $\gamma_2\%$?

Значения $N, n; K, k_1, k_2, k_3; L, \ell, \gamma_1, \gamma_2$ возьмите из таблицы:

Вариант:	N	n	K	k_1	k_2	k_3	L	ℓ	γ_1	γ_2
1	200	5	120	3	3	2	250	2	85	98
2	280	3	190	2	2	1	420	3	88	92
3	190	6	130	4	2	3	280	3	89	94
4	360	8	160	3	4	3	220	2	84	93
5	240	4	270	4	3	5	330	1	81	90
6	180	2	310	3	1	4	210	2	91	99
7	150	3	125	3	2	2	340	3	87	96
8	260	5	150	2	3	2	120	3	86	91
9	170	3	230	4	5	2	190	1	83	97
0	220	4	140	2	1	3	230	1	82	94
Образец	120	2	210	3	2	4	300	2	90	95

Задание №5. Предельные случаи схемы Бернулли: Формулы Муавра-Лапласа

Реле игрового автомата настроено так, чтобы срабатывать при включении случайным образом, в среднем, n раз из двадцати.

Для последовательности из K включений оценить вероятность, с которой реле сработает:

а) ровно k_1 раз;

б) ровно k_2 раз;

в) не более m раз;

г) от m_1 до m_2 раз.

Сколько раз следует включить это реле, чтобы не менее L срабатываний произошло с надёжностью: а) $\gamma_1\%$; б) $\gamma_2\%$?

Значения $n; K, k_1, k_2, m, m_1, m_2; L, \gamma_1, \gamma_2$ возьмите из таблицы:

Вариант:	n	K	k_1	k_2	m	m_1	m_2	L	γ_1	γ_2
1	9	700	315	321	300	320	345	205	81	92
2	14	900	630	623.	605	590	615	165	87	98
3	15	750	563	569	550	540	570	120	83	90
4	7	450	158	160	140	155	170	80	89	96
5	10	950	475	470	462	455	500	145	85	99
6	8	600	240	233	229	255	270	230	82	91
7	13	500	325	328	305	300	320	250	84	93
8	5	850	212	205	200	205	240	90	88	97
9	11	550	302	310	280	260	315	150	86	94
0	6	650	195	200	174	165	210	185	80	89
Образец	12	800	480	474	465	460	485	100	90	95

Задание №6. Дискретная случайная величина

Дискретная случайная величина ξ задана своим законом распределения $p_\xi(x_i)$:

Вар.:	Закон распределения:						a	b	g
1	x_i	-8	-3.5	-1	0.9	2	-2	$3/2$	-1
	$p_\xi(x_i)$	0.16	0.11	0.21	C	0.38			
2	x_i	-3	-0.5	0.5	1	4	0	$5/2$	1
	$p_\xi(x_i)$	0.04	0.40	0.23	0.31	C			
3	x_i	-5	-2	1.5	2.9	6	$1/2$	3	-2
	$p_\xi(x_i)$	C	0.09	0.30	0.25	0.12			
4	x_i	-4.5	-1	0.8	3	5	-1	$3/2$	3
	$p_\xi(x_i)$	0.10	0.43	C	0.17	0.08			
5	x_i	-6	-3	-1.5	0.7	3	$1/2$	$5/4$	3
	$p_\xi(x_i)$	0.15	C	0.06	0.13	0.50			
6	x_i	-9	-7	-0.6	2	4.2	-1	5	2
	$p_\xi(x_i)$	0.41	0.03	0.26	0.12	C			
7	x_i	-7	-2.4	1	1.6	7	$1/2$	$3/2$	1
	$p_\xi(x_i)$	C	0.08	0.37	0.05	0.27			
8	x_i	-1.5	0.4	2	5	8	0	$9/2$	5
	$p_\xi(x_i)$	0.29	0.39	C	0.07	0.14			
9	x_i	-5.5	-1.6	-1	1	2	-2	$1/2$	-1
	$p_\xi(x_i)$	0.21	0.09	0.28	C	0.32			
0	x_i	-4	-3	0.2	4	5.6	-1	$9/2$	4
	$p_\xi(x_i)$	0.07	C	0.42	0.33	0.15			
Обр.	x_i	-2	-1	0.9	1.5	3	$1/2$	$5/2$	-1
	$p_\xi(x_i)$	C	0.22	0.34	0.20	0.05			

Найти значение C и графически изобразить закон распределения $p_\xi(x_i)$. Вычислить математическое ожидание $\mathbf{M}\xi$, дисперсию $\mathbf{D}\xi$ и среднее квадратическое отклонение σ_ξ. Вычислить вероятности $P\{a \leqslant \xi < b\}$ и $P\{\xi < g\}$ (значения a, b, g взять из таблицы). Получить функцию распределения $F_\xi(x)$ и построить её график.

Задание №7. Непрерывная случайная величина

Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью вероятности $f_\xi(x)$:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} C \cdot \rho(x), & x \in [A; B]; \\ 0\,, & x \notin [A; B]. \end{cases}$$

Найти значение нормировочного коэффициента C и построить график плотности вероятности $f_\xi(x)$. Вычислить математическое ожидание $\mathbf{M}\xi$, дисперсию $\mathbf{D}\xi$ и среднее квадратическое отклонение σ_ξ. Вычислить вероятности $P\{a \leqslant \xi < b\}$ и $P\{\xi < g\}$ Получить функцию распределения $F_\xi(x)$ и построить её график.

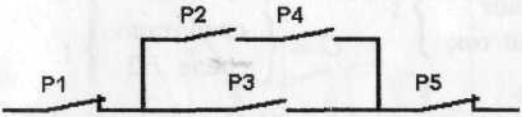
Функцию $\rho(x)$ и значения $A, B; a, b, g$ и взять из таблицы:

Вар.:	Функция $\rho(x)$:	A	B	a	b	g
1	$\rho(x) = x^2;$	$1/2$	$5/2$	$2/3$	$5/3$	$3/2$
2	$\rho(x) = \sin 3x;$	$\pi/12$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/2$	$\pi/4$
3	$\rho(x) = \cos 2x;$	$-\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/12$	$\pi/3$	$\pi/8$
4	$\rho(x) = 1 - x;$	$-3/2$	$3/4$	$1/4$	$5/8$	$1/2$
5	$\rho(x) = 1 - x^2;$	$-1/3$	$2/3$	$1/3$	$1/2$	$1/4$
6	$\rho(x) = \sin(x/4);$	π	4π	$\pi/2$	3π	2π
7	$\rho(x) = \cos(x/3);$	$-\pi$	$3\pi/2$	$-\pi/2$	π	$5\pi/2$
8	$\rho(x) = x + 1;$	$-1/2$	$3/2$	$-1/4$	$3/4$	$1/3$
9	$\rho(x) = x^2 + 1;$	$-5/2$	$1/2$	$-3/2$	-1	$1/6$
0	$\rho(x) = \sqrt{x};$	$1/4$	$9/4$	-2	$3/4$	$4/9$
Обр.	$\rho(x) = \cos(x/2);$	$-\pi/2$	π	$-\pi/3$	$5\pi/4$	$2\pi/3$

5 Примеры решения типовых заданий

Задание №1. Элементарные формулы для вероятностей случайных событий (решение)

Участок электрической цепи, представленный на схеме, содержит размыкающие и замыкающие контакты $P1 \div P5$ пяти реле. Каждое реле функционирует ***независимо от остальных*** и при включении срабатывает с определённой вероятностью p_i:



$$p_1 = 0.3\,; \quad p_4 = 0.7\,;$$
$$p_2 = 0.6\,; \quad p_5 = 0.2\,;$$
$$p_3 = 0.5\,;$$

Каждое реле включили ровно один раз. С какой вероятностью после этого: а) участок цепи пропускает постоянный ток; б) участок цепи не пропускает постоянный ток, *если реле $P4$ сработало*; в) реле $P2$ сработало, *если участок цепи пропускает постоянный ток*?

Решение:

Будем рассматривать *совокупность* включений каждого реле как единое **испытание**, в теоретико-вероятностном смысле. Тогда **элементарным исходом** следует считать *совокупность* результатов включения *каждого* реле: сработало или нет. Поскольку схема содержит пять реле, всего имеется $2^5 = 32$ элементарных исходов. Примем для них систему обозначений, принцип которой объясним на примере: $\{1\,\bar{2}\,\bar{3}\,4\,5\}$ обозначает исход, при котором сработали реле $P1$, $P4$ и $P5$; и не сработали — $P2$ и $P3$.

В качестве **статистического веса** элементарного исхода назначим произведение $\prod_{i=1}^{5} \alpha_i$, где $\alpha_i = p_i$ или $\alpha_i = 1 - p_i$, в зависимости от того, сработало или нет реле P_i в данном элементарном исходе. Статистический вес исхода $\{1\,\bar{2}\,\bar{3}\,4\,5\}$, например, равен $0.3 \cdot (1 - 0.6) \cdot (1 - 0.5) \cdot 0.7 \cdot 0.2 = 0.00840$.

Выбор такого способа назначения статистических весов *отвечает условиям задачи постольку, поскольку реле срабатывают или не срабатывают независимо друг от друга*; фактически мы вычисляем вероятность произведения независимых событий: $\{1\,\overline{2}\,\overline{3}\,4\,5\} = \{1\} \cdot \{\overline{2}\} \cdot \{\overline{3}\} \cdot \{4\} \cdot \{5\}$. Кроме того, назначенные этим способом статистические веса автоматически удовлетворяют условию нормировки.

Обозначим интересующие нас события:

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \text{Участок цепи} \\ \text{пропускает} \\ \text{постоянный ток} \end{array} \right\}; \qquad \begin{array}{l} B = \left\{ \begin{array}{c} \text{сработало} \\ \text{реле } P4 \end{array} \right\}; \\ C = \left\{ \begin{array}{c} \text{сработало} \\ \text{реле } P2 \end{array} \right\}; \end{array}$$

Теперь, чтобы получить вероятность $P\{A\}$, следует найти *все* элементарные исходы, удовлетворяющих условию A и затем просуммировать их статистические веса. Обратимся к схеме. Постоянный ток *не пройдёт* через этот участок цепи, если будет *разомкнут* (реле *сработало*) хотя бы один из *размыкающих* контактов $P1$ и $P5$. Это означает, что множество исходов, удовлетворящих A, содержит только исходы вида $\{\overline{1}\ldots\overline{5}\}$. В случае, когда оба контакта $P1$ и $P5$ остаются замкнутыми, ток *не пройдёт*, если останутся *разомкнутыми* (реле *не сработало*) *замыкающий* контакт $P3$ и вместе с ним хотя бы один из *замыкающих* контактов $P2$ и $P4$. Поэтому исключаем исходы $\{\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5}\}$, $\{\overline{1}\,2\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5}\}$ и $\{\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,4\,\overline{5}\}$. Результат:

$$A = \{\overline{1}\,2\,3\,4\,\overline{5}\} + \{\overline{1}\,2\,3\,\overline{4}\,\overline{5}\} + \{\overline{1}\,2\,\overline{3}\,4\,\overline{5}\} + \{\overline{1}\,\overline{2}\,3\,4\,\overline{5}\} + \{\overline{1}\,\overline{2}\,3\,\overline{4}\,\overline{5}\}$$

$$P\{A\} = 0.11760 + 0.05040 + 0.11760 + 0.7840 + 0.3360 = 0.39760\,;$$

(детальный расчёт статистических весов не показан; его несложно выполнить по аналогии с примером для $\{1\,\overline{2}\,\overline{3}\,4\,5\}$)

Условные вероятности $P\{\overline{A}\,|B\}$ и $P\{C|A\}$ вычислим по формулам:

$$P\{\overline{A}\,|B\} = \frac{P\{\overline{A} \cdot B\}}{P\{B\}}\,; \qquad P\{C|A\} = \frac{P\{C \cdot A\}}{P\{A\}}\,;$$

Вероятность $P\{B\}$, как следует из условий задачи, равна $p_4 = 0.7$; вероятности $P\{\overline{A} \cdot B\}$ и $P\{C \cdot A\}$ получим тем же способом, что и P{A}. Чтобы упорядочить отыскание *всех* исходов, удовлетворяющих условиям $\overline{A} \cdot B$ или $C \cdot A$, построим вспомогательную таблицу (здесь она разделена на две части, в целях размещения в пределах одной страницы):

	1															
	2								$\mathbf{\overline{2}}$							
	3				$\overline{3}$				3				$\mathbf{\overline{3}}$			
	4		$\overline{4}$		4		$\overline{4}$		4		$\overline{4}$		**4**		$\overline{4}$	
	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$	**5**	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$
$\overline{A} \cdot B$	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
$C \cdot A$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−

	$\overline{1}$															
	2								$\overline{2}$							
	3				$\overline{3}$				3				$\overline{3}$			
	4		$\overline{4}$		4		$\overline{4}$		4		$\overline{4}$		4		$\overline{4}$	
	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$	5	$\overline{5}$
$\overline{A} \cdot B$	+	−	−	−	+	−	−	−	+	−	−	−	+	+	−	−
$C \cdot A$	−	+	−	+	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−

Каждый столбец соответствует одному элементарному исходу (например, столбец, выделенный в заголовке таблицы крупным шрифтом, — исходу $\{1\,\overline{2}\,\overline{3}\,4\,5\}$). Последовательно рассмотрим каждый из 32-х исходов и отметим знаком "+" те из них, которые *удовлетворяют условию B и при этом противоречат условию A* (в строчке $\overline{A} \cdot B$) или же *удовлетворяют условию A и при этом удовлетворяют условию C* (в строчке $C \cdot A$). Если критерий не выполняется — ставим в ячейке знак "−". После того, как таблица заполнена, несложно представить события $\overline{A} \cdot B$

и $C \cdot A$ в виде суммы элементарных исходов:

$$\begin{aligned}
\overline{A} \cdot B = \ & \{1\,2\,3\,4\,5\} + \{1\,2\,3\,4\,\overline{5}\} + \{1\,2\,\overline{3}\,4\,5\} + \{1\,2\,\overline{3}\,4\,\overline{5}\} + \\
+ \ & \{1\,\overline{2}\,3\,4\,5\} + \{1\,\overline{2}\,3\,4\,\overline{5}\} + \{1\,\overline{2}\,\overline{3}\,4\,5\} + \{1\,\overline{2}\,\overline{3}\,4\,\overline{5}\} + \\
+ \ & \{\overline{1}\,2\,3\,4\,5\} + \{\overline{1}\,2\,\overline{3}\,4\,5\} + \{\overline{1}\,\overline{2}\,3\,4\,5\} + \{\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,4\,5\} + \\
+ \ & \{\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,4\,\overline{5}\};
\end{aligned}$$

$$C \cdot A = \{\overline{1}\,2\,3\,4\,\overline{5}\} + \{\overline{1}\,2\,3\,\overline{4}\,\overline{5}\} + \{\overline{1}\,2\,\overline{3}\,4\,\overline{5}\};$$

Теперь для расчёта вероятностей остаётся просуммировать соответствующие статистические веса:

$$\begin{aligned}
P\{\overline{A} \cdot B\} = \ & 0.01260 + 0.05040 + 0.01260 + 0.05040 + \\
+ \ & 0.00840 + 0.03360 + 0.00840 + 0.03360 + \\
+ \ & 0.02940 + 0.02940 + 0.01960 + 0.01960 + \\
+ \ & 0.07840 = 0.38640;
\end{aligned}$$

$$P\{C \cdot A\} = 0.11760 + 0.05040 + 0.11760 = 0.28560;$$

Осталось вычислить условные вероятности:

$$P\{\overline{A}\,|B\} = \frac{P\{\overline{A} \cdot B\}}{P\{B\}} = \frac{0.38640}{0.7} = 0.55200;$$

$$P\{C|A\} = \frac{P\{C \cdot A\}}{P\{A\}} = \frac{0.28560}{0.39760} = 0.71831;$$

<u>Ответ:</u> $P\{A\} = 0.39760$; $P\{\overline{A}\,|B\} = 0.55200$; $P\{C|A\} = 0.71831$.

<u>Замечание:</u> Данную задачу можно решить и другими методами, с меньшими выкладками. Однако при этом потребовались бы хорошо развитые навыки синтеза и последующих преобразований булевых выражений. Рассмотренный метод отличается последовательностью и универсальностью; с его помощью одинаково легко (или одинаково сложно) решаются все варианты задания №1.

Задание №2. Формула полной вероятности. Формулы Байеса (решение)

Система связи состоит из четырёх независимых каналов, характеристики которых указаны в таблице:

Доля канала в потоке исходящих сообщений:				Вероятность успешной передачи через канал:			
№1	№2	№3	№4	№1	№2	№3	№4
28%	10%	31%	31%	91%	95%	80%	69%

С какой вероятностью исходящее сообщение, выбранное наугад из общего потока: а) будет передано успешно; б) не будет передано успешно?

Вычислить *апостериорные* вероятности передачи некоторого сообщения через каждый из каналов, если известно, что это сообщение: а) было получено адресатом; б) не дошло до своего адресата. Истолковать полученные результаты.

<u>**Решение:**</u>

Обозначим интересующее нас событие:

$$A = \left\{ \text{Сообщение передано успешно} \right\}$$

Согласно условиям задачи, сообщение передаётся *через один и только один* из четырёх каналов связи. Обозначим события, соответствующие передаче через определённый канал:

$$B_1 = \left\{ \text{Сообщение отправлено через канал №1} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \text{Сообщение отправлено через канал №2} \right\}$$

$$B_3 = \left\{ \text{Сообщение отправлено через канал №3} \right\}$$

$$B_4 = \left\{ \text{Сообщение отправлено через канал №4} \right\}$$

При этом события $B_{i=1..4}$ *взаимоисключающие*, а их сумма $B_1 + B_2 + B_3 + B_4$ будет *достоверным событием* — если только *испытание* имело место (сообщение передавалось), одно и только одно из B_i обязательно должно было произойти. То есть события $B_{i=1..4}$ составляют **полную группу**.

При наличии *полной группы* вероятность любого события, в частности A, можно вычислить по **формуле полной вероятности**:

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^{4} P\{B_i\} \cdot P\{A|B_i\};$$

Для сообщения, взятого среди *всех* исходящих *наугад*, вероятность быть отправленным через i-й канал равна доле этого канала в общем потоке. Следовательно, вероятности событий $B_{i=1..4}$ известны — указаны в условиях задачи:

$$P\{B_1\} = 0.28; \quad P\{B_2\} = 0.10; \quad P\{B_3\} = 0.31; \quad P\{B_4\} = 0.31;$$

(убедитесь, что сумма этих вероятностей равна единице; это необходимое условие того, что $B_{i=1..4}$ составляют *полную группу*)

Несложно также догадаться, что известные вероятности успешной передачи через канал — это вероятности события A *в условиях* $B_{i=1..4}$, то есть *условные вероятности*:

$$P\{A|B_1\} = 0.91; \quad P\{A|B_2\} = 0.95;$$
$$P\{A|B_3\} = 0.80; \quad P\{A|B_4\} = 0.69;$$

Теперь выполним расчёт вероятности события A:

$$\begin{aligned} P\{A\} = {} & P\{B_1\} \cdot P\{A|B_1\} + P\{B_2\} \cdot P\{A|B_2\} + \\ + {} & P\{B_3\} \cdot P\{A|B_3\} + P\{B_4\} \cdot P\{A|B_4\} = \\ = {} & 0.28 \cdot 0.91 + 0.10 \cdot 0.95 + 0.31 \cdot 0.80 + 0.31 \cdot 0.69 = \\ = {} & 0.8117; \end{aligned}$$

(убедитесь, что результат для $P\{A\}$ больше наименьшего и меньше наибольшего среди значений $P\{A|B_{i=1..4}\}$)

Если сообщение отправлено, но безуспешно, имеет место $\overline{A}$ — событие, противоположное событию A. Вероятность $P\{\overline{A}\}$ вычисляется особенно просто, если уже известна вероятнось $P\{A\}$:

$$P\{\overline{A}\} = 1 - P\{A\} = 1 - 0.8117 = 0.1883;$$

Для расчёта *апостериорных* вероятностей передачи сообщения через определённый канал $P\{B_{i=1..4}|A\}$ (***при состоявшемся успешном исходе*** A), применяются **формулы Байеса**:

$$P\{B_i|A\} = \frac{P\{B_i\}\cdot P\{A|B_i\}}{P\{A\}}\,, \qquad i = 1..4\,;$$

$$P\{B_1|A\} = \frac{0.28\cdot 0.91}{0.8117} = 0.3139, \quad P\{B_2|A\} = \frac{0.10\cdot 0.95}{0.8117} = 0.1170,$$

$$P\{B_3|A\} = \frac{0.31\cdot 0.80}{0.8117} = 0.3055, \quad P\{B_4|A\} = \frac{0.31\cdot 0.69}{0.8117} = 0.2635;$$

(убедитесь, что не нарушилось условие нормировки: сумма всех вероятностей $P\{B_{i=1..4}|A\}$ должна остаться равной единице, по крайней мере, в пределах ошибки округления)

Те же *формулы Байеса* используются для расчёта *апостериорных* вероятностей передачи сообщения через определённый канал $P\{B_{i=1..4}|\overline{A}\}$ (***при состоявшемся безуспешном исходе*** $\overline{A}$):

$$P\{\overline{A}|B_1\} = 1 - P\{A|B_1\} = 0.09\,; \quad P\{\overline{A}|B_2\} = 1 - P\{A|B_2\} = 0.05\,;$$
$$P\{\overline{A}|B_3\} = 1 - P\{A|B_3\} = 0.20\,; \quad P\{\overline{A}|B_4\} = 1 - P\{A|B_4\} = 0.31\,;$$

$$P\{B_1|\overline{A}\} = \frac{0.28\cdot 0.09}{0.1883} = 0.1338, \quad P\{B_2|\overline{A}\} = \frac{0.10\cdot 0.05}{0.1883} = 0.0266,$$

$$P\{B_3|\overline{A}\} = \frac{0.31\cdot 0.20}{0.1883} = 0.3293, \quad P\{B_4|\overline{A}\} = \frac{0.31\cdot 0.31}{0.1883} = 0.5104;$$

Ответ: $P\{A\} = 0.8117$; $P\{\overline{A}\} = 0.1883$;

Апостериорные вероятности $P\{B_{i=1..4}\|A\}$:				*Апостериорные* вероятности $P\{B_{i=1..4}\|\overline{A}\}$			
B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4
0.3139	0.1170	0.3055	0.2635	0.1338	0.0266	0.3293	0.5104

Для истолкования результатов проанализируйте, как изменились *апостериорные вероятности* $P\{B_{i=1..4}|A\}$ и $P\{B_{i=1..4}|\overline{A}\}$ по сравнению с долями каналов в *общем* потоке исходящих сообщений. Попробуйте объяснить качественный характер этих изменений, исходя из сопоставления значений $P\{A\}$ и $P\{A|B_{i=1..4}\}$; $P\{\overline{A}\}$ и $P\{\overline{A}|B_{i=1..4}\}$.

Задание №3. Схемы испытаний "выборка без возвращения" и "выборка с возвращением" (решение)

Кабель, состоящий из $N = 13$ одинаковых жил, получил механическое повреждение, затронувшее $\simeq 38.5\%$ его поперечного сечения. С какой вероятностью среди выбранных наугад $n = 7$ жил окажутся повреждёнными: а) *ровно три*; б) *не более двух*?

Представим далее, что связист пытается установить соединение через жилы этого кабеля. Рассмотрим ситуацию, когда условия работы *не позволяют* отбирать для попытки соединения более одной жилы, а также исключить повторный выбор жил, оказавшихся на поверку повреждёнными. С какой вероятностью из $L = 5$ попыток соединения неудачными окажутся: а) *ровно две*; б) *не менее одной*?

С какой вероятностью *первая успешная* попытка окажется: а) *ровно четвёртой* по счёту; б) *не менее, чем четвёртой* по счёту? Какими будут эти вероятности, если связист воспользуется появившейся возможностью *исключить повторный выбор жил, оказавшихся на поверку повреждёнными*?

<u>Решение:</u>

Определим количество повреждённых жил M; по условию задачи оно равняется 38.5% от общего количества: $M = 13 \cdot 0.385 \cong 5$.

Когда *испытание* заключается в случайном отборе n жил и последующей проверке *каждой* из них *один и только один раз*, реализуется схема, называемая **"выборкой без возвращения"**. Если $\mu_n \leq M$ обозначает количество повреждённых жил среди n отобранных, то вероятность события $\{\mu_n = m\}$ в испытаниях по этой схеме вычисляется по формуле **гипергеометрического распределения**:

$$P\{\mu_n = m\} = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\,; \qquad \text{где } C_s^t = \frac{s!}{t! \cdot (s-t)!}\,.$$

В нашем случае $N = 13$ жил всего; из них $M = 5$ повреждённых. Вычислим вероятность того, что среди отобранных $n = 7$

жил окажутся *ровно* $m_1 = 3$ повреждённые:

$$P\{\mu_7 = 3\} = \frac{C_5^3 \cdot C_8^4}{C_{13}^7} = \frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{8!}{4!\cdot 4!}}{\frac{13!}{7!\cdot 6!}} = \frac{5!\cdot 8!\cdot 7!\cdot 6!}{13!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 4!} =$$

Прямой расчёт этой дроби по схеме "числитель $\to$ знаменатель $\to$ деление" затруднителен благодаря *ОЧЕНЬ* громоздким промежуточным результатам. Предварительно упростим дробь, используя свойства факториалов:

$$= \frac{\cancel{8!}\cdot\overbrace{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}^{=7!}\cdot\overbrace{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}^{=6!}\cdot\overbrace{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}^{=5!}}{\underbrace{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot \cancel{8!}}_{=13!}\cdot\cancel{4!}\cdot\cancel{4!}\cdot\cancel{3!}\cdot\underbrace{2}_{=2!}} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 6\cdot 5\cdot 5\cdot 4}{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 2} =$$

$$= \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5\cdot(\cancel{3}\cdot\cancel{2})\cdot\cancel{5}\cdot 5\cdot(\cancel{2}\cdot\cancel{2})}{13\cdot(\cancel{6}\cdot\cancel{2})\cdot 11\cdot(\cancel{5}\cdot\cancel{2})\cdot(\cancel{3}\cdot 3)\cdot\cancel{2}} = \frac{7\cdot 5\cdot 5}{13\cdot 11\cdot 3} = \frac{175}{429} \simeq 0.4079$$

Вычисляя вероятность обнаружить среди $n = 7$ отобранных жил не более $m_2 = 2$-х повреждённых, заметим, прежде всего, что *"не более двух"* означает **или** *"ровно две"* **или** *"ровно одну"* **или** *"ни одной"*, поэтому:

$$\{\mu_7 \le 2\} = \{\mu_7 = 2\} + \{\mu_7 = 1\} + \{\mu_7 = 0\}\,;$$

$$P\{\mu_7 \le 2\} = P\{\mu_7 = 2\} + P\{\mu_7 = 1\} + P\{\mu_7 = 0\}\,,$$

так как события $\{\mu_7 = 2\}$, $\{\mu_7 = 1\}$ и $\{\mu_7 = 0\}$ — взаимоисключающие. Их вероятности вычислим по формуле *гипергеометрического распределения*, теми же приёмами, что и $P\{\mu_7 = 3\}$:

$$P\{\mu_7 = 2\} = \frac{C_5^2\cdot C_8^5}{C_{13}^7} = \frac{140}{429}\,; \qquad P\{\mu_7 = 1\} = \frac{C_5^1\cdot C_8^6}{C_{13}^7} = \frac{35}{429}\,;$$

$$P\{\mu_7 = 0\} = \frac{C_5^0\cdot C_8^7}{C_{13}^7} = \frac{2}{429}\,; \qquad \Bigl(\text{помните, что } 0! = 1\Bigr)$$

$$P\{\mu_7 \le 2\} = \frac{140}{429} + \frac{35}{429} + \frac{2}{429} = \frac{177}{429} = \frac{59}{143} \simeq 0.4126\,;$$

Проанализируем следующую часть условий задачи. Когда *испытание* представляет собой *серию* попыток соединения, и при *каждой* попытке отбирается наудачу *одна жила из всех 13-ти*, реализуется схема, называемая **"выборкой с возвращением"**. Принципиальное отличие от *"выборки без возвращения"* состоит в том, что теперь *одна и та же жила* может быть выбрана *несколько раз* в рамках *одной и той же серии*. Если *серия* состоит из L попыток соединения, а $\mu_L \leq L$ обозначает количество неудачных попыток, то вероятность события $\{\mu_L = \ell\}$ в испытаниях по схеме *"выборки с возвращением"* вычисляется по **формуле Бернулли**:

$$P\{\mu_L = \ell\} = C_L^\ell \cdot p^\ell \cdot (1-p)^{L-\ell},$$

где $p = M/N$ — вероятность неудачи в результате единичной попытки соединения (вероятность выбрать наугад среди *всех* жил *какую-нибудь* из повреждённых).

В нашем случае $N = 13$ и $M = 5$, поэтому $p = 5/13$. Вычислим вероятность того, что из $L = 5$ попыток соединения *ровно* $\ell_1 = 2$ окажутся неудачными:

$$P\{\mu_5 = 2\} = C_5^2 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{5}{13}\right)^{5-2} = 10 \cdot (5/13)^2 \cdot (8/13)^3 \simeq 0.3447;$$

Теперь вычислим вероятность события $\{\mu_5 \geq 1\}$ — *не менее одной* неудачной попытки. Можно, в принципе, представить это событие как сумму взаимоисключающих $\{\mu_5 = 1\}, \ldots \{\mu_5 = 5\}$; вычислить вероятности $P\{\mu_5 = 1\}, \ldots P\{\mu_5 = 5\}$ по *формуле Бернулли*, сложить результаты... Более рациональным будет иной способ представления $\{\mu_5 \geq 1\}$, а именно, через *противоположное* событие — *ни одной* неудачной попытки:

$$\{\mu_5 \geq 1\} = \{\overline{\mu_5 = 0}\};$$

$$P\{\mu_5 \geq 1\} = P\{\overline{\mu_5 = 0}\} = 1 - P\{\mu_5 = 0\};$$

$$P\{\mu_5 \geq 1\} = 1 - C_5^0 \cdot (5/13)^0 \cdot (8/13)^{5-0} = 1 - (8/13)^5 \simeq 0.9117;$$

Переходим к последней части задания №3. По-прежнему рассматриваем *серию* попыток соединения, выполняемую по схеме *"выборки с возвращением"*. Если v — номер попытки, оказавшейся *первой успешной*, то вероятность события $\{v = k\}$ вычисляется по формуле **геометрического распределения**:

$$P\{v = k\} = (1-p)^{k-1} \cdot p\,;$$

Но теперь, в отличие от второй части задания, p обозначает вероятность *успешного* соединения в результате единичной попытки (вероятность выбрать наугад среди *всех* жил *какую-нибудь* из неповреждённых: $p = (N-M)/N = 8/13$).

Вычислим вероятность того, что *первая успешная* попытка будет *ровно* $k_1 = 4$*-й* по счёту.

$$P\{v = 4\} = \left(1 - \frac{8}{13}\right)^{4-1} \cdot \frac{8}{13} = (5/13)^3 \cdot (8/13) \simeq 0.0350\,;$$

Вероятность события $\{v \geq 4\}$ (*первая успешная* попытка — *не менее, чем* $k_2 = 4$*-я* по счёту) проще всего вычисляется через вероятность *противоположного* события:

$$\{v \geq 4\} = \{\overline{v \leq 3}\}\,;$$

$$P\{v \geq 4\} = P\{\overline{v \leq 3}\} = 1 - P\{v \leq 3\} =$$

$$= 1 - P\{v = 3\} - P\{v = 2\} - P\{v = 1\}\,;$$

$$P\{v \geq 4\} = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^{3-1} \cdot \frac{8}{13} - \left(\frac{5}{13}\right)^{2-1} \cdot \frac{8}{13} - \left(\frac{5}{13}\right)^{1-1} \cdot \frac{8}{13} =$$

$$= 1 - (8/13) \cdot \left((5/13)^2 + 5/13 + 1\right) = (5/13)^3 \simeq 0.0569\,;$$

(Неожиданно простой по форме результат: $(5/13)^3$. Попробуйте самостоятельно истолковать его и воспроизвести, *не опираясь на формулу геометрического распределения*)

Рассмотрим ситуацию, когда повреждённые жилы, выявленные при неудачных попытках соединения, *исключаются из дальнейшего рассмотрения* и уже не могут быть выбраны в последующих попытках. В этих условиях *серия* попыток соединения уже не будет *испытанием по схеме "выборки с возвращением"*, и вероятности $P\{v = k\}$ уже нельзя рассчитывать по формуле *геометрического распределения*.

Обозначим события, связанные с результатом j-й по счёту попытки соединения: $\{\,\mathbf{j}\,\}=\{j\text{-я попытка — успешная}\}$, $\{\,\overline{\mathbf{j}}\,\}=\{j\text{-я попытка — неудачная}\}$. Через них можно выразить события типа $\{v = k\}$; например:

$$\{v = 4\} = \{\,\overline{\mathbf{1}} \cdot \overline{\mathbf{2}} \cdot \overline{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{4}\,\};$$

причём это представление справедливо вне зависимости от выбранной схемы испытаний. Для расчёта $P\{v = 4\}$ последовательно применяем *формулу произведения вероятностей*:

$$\begin{aligned}
P\{v = 4\} &= \underbrace{P\{\,\overline{\mathbf{1}} \cdot \overline{\mathbf{2}} \cdot \overline{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{4}\,\}} = \\
&= P\{\,\overline{\mathbf{1}}\,\} \cdot \underbrace{P\{\,\overline{\mathbf{2}} \cdot \overline{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{4} \mid \overline{\mathbf{1}}\,\}} = \\
&= P\{\,\overline{\mathbf{1}}\,\} \cdot P\{\,\overline{\mathbf{2}} \mid \overline{\mathbf{1}}\,\} \cdot \underbrace{P\{\,\overline{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{4} \mid \overline{\mathbf{1}} \cdot \overline{\mathbf{2}}\,\}} = \\
&= P\{\,\overline{\mathbf{1}}\,\} \cdot P\{\,\overline{\mathbf{2}} \mid \overline{\mathbf{1}}\,\} \cdot P\{\,\overline{\mathbf{3}} \mid \overline{\mathbf{1}} \cdot \overline{\mathbf{2}}\,\} \cdot P\{\mathbf{4} \mid \overline{\mathbf{1}} \cdot \overline{\mathbf{2}} \cdot \overline{\mathbf{3}}\};
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждый из этих множителей:

Вероятность неудачи в первой попытке соединения (вероятность выбрать наугад среди 13-ти жил кабеля одну из 5-ти повреждённых): $P\{\,\overline{\mathbf{1}}\,\} = 5/13$.

Вероятность неудачи во второй попытке соединения *при условии, что первая попытка оказалась неудачной*: $P\{\,\overline{\mathbf{2}} \mid \overline{\mathbf{1}}\,\} = 4/12$; (выбор повреждённой жилы, выявленной при первой неудачной попытке, теперь исключён, поэтому остаётся выбирать из 12-ти жил; среди которых — 4 повреждённые).

Вероятность неудачи в третьей попытке соединения *при условии, что первые две оказалась неудачными*: $P\{\,\overline{\mathbf{3}} \mid \overline{\mathbf{1}} \cdot \overline{\mathbf{2}}\,\} = 3/11$.

Вероятность *успеха* в четвёртой попытке соединения *при условии, что первые три попытки оказалась неудачными* (вероятность выбрать наугад среди 10-ти оставшихся жил кабеля одну из 8-ми неповреждённых): $P\{\,\mathbf{4}\,|\,\overline{\mathbf{1}}\cdot\overline{\mathbf{2}}\cdot\overline{\mathbf{3}}\,\} = 8/10$.

$$P\{\upsilon = 4\} = \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{8}{10} = \frac{4}{143} \simeq 0.0280\,;$$

Аналогичным образом вычислим вероятность *первого успешного* соединения *не ранее, чем с четвёртой попытки*:

$$P\{\upsilon \ge 4\} = 1 - P\{\upsilon = 3\} - P\{\upsilon = 2\} - P\{\upsilon = 1\}\,;$$

$$P\{\upsilon = 3\} = (5/13)\cdot(4/12)\cdot(8/11) = 40/429\,;$$

$$P\{\upsilon = 2\} = (5/13)\cdot(8/12) = 10/39\,;$$

$$P\{\upsilon = 1\} = 8/13\,;$$

$$P\{\upsilon \ge 4\} = 1 - \frac{40}{429} - \frac{10}{39} - \frac{8}{13} = \frac{15}{429} = \frac{5}{143} \simeq 0.0350\,;$$

Ответ:

по схеме "выборка без возвращения":

$$P\{\mu_7 = 3\} = \frac{175}{429}\,; \qquad P\{\mu_7 \le 2\} = \frac{59}{143}\,;$$

по схеме "выборка с возвращением":

$$P\{\mu_5 = 2\} = 10\cdot\left(\frac{5}{13}\right)^2\cdot\left(\frac{8}{13}\right)^3\;; \qquad P\{\mu_5 \ge 1\} = 1 - \left(\frac{8}{13}\right)^5\,;$$

$$P\{\upsilon = 4\} = \left(\frac{5}{13}\right)^3\cdot\frac{8}{13}\,; \qquad P\{\upsilon \ge 4\} = \left(\frac{5}{13}\right)^3\,;$$

при последовательном исключении повреждённых жил:

$$P\{\upsilon = 4\} = \frac{4}{143}\,; \qquad P\{\upsilon \ge 4\} = \frac{5}{143}\,;$$

Задание №4. Предельные случаи схемы Бернулли: Формула Пуассона (решение)

При передаче дискретного сообщения объёмом 120 тысяч бит через некоторый *канал связи без памяти* искажаются, в среднем, 2 бита. С какой вероятностью сообщение объёмом 210 тысяч бит содержит после трансляции: а) ровно 3 ошибки; б) не более 2-х ошибок; в) не менее 4-х ошибок?

Какой должна быть вероятность искажения бита для *канала связи без памяти*, чтобы сообщение объёмом 300 тысяч бит содержало после трансляции не более 2-х ошибок с *надёжностью*: а) 90%; б) 95%?

Решение:

Канал связи без памяти характеризуется *статистической независимостью* результатов трансляции любых отдельно взятых битов передаваемого сообщения. В этих условиях трансляцию каждого *отдельно взятого* бита можно рассматривать как самостоятельное, *независимое* испытание с двумя взаимоисключающими исходами: *сохранением* или *искажением* значения бита. Вероятность *искажения* при трансляции *отдельно взятого* бита будет равна: $p = n/N = \frac{2}{120000} = \frac{1}{60000}$ — соответствующей средней относительной частоте.

При таком подходе передача *всего дискретного сообщения* попадает под определение *испытания по* **схеме Бернулли** — последовательности независимых одинаковых испытаний с двумя взаимоисключающими исходами в каждом из них. Ещё один частный случай *схемы Бернулли*, схема испытаний *"выборка с возвращением"*, уже рассматривался в ходе решения задания №3; там же приводилась *формула Бернулли* для расчёта вероятности наблюдать один из двух взаимоисключающих исходов, например, *искажение* бита, определённое число раз.

Из вышесказанного следует, что вероятность ровно $k_1 = 3$-х ошибок в результате трансляции сообщения объёмом $K = 210$ тысяч бит можно рассчитать, *в принципе*, по формуле Бернулли. Однако *практическое* выполнение расчёта по *формуле Бернул-*

ли приведёт в данном случае к серьёзным проблемам вычислительного характера по причине *ОЧЕНЬ* большого значения K и *ОЧЕНЬ* малого значения p.

Чтобы избежать этих проблем, в *предельных случаях* схемы Бернулли для *очень длинных последовательностей испытаний и очень редких событий* ($K \gg 1$; $p \lesssim 0.1$) вместо *формулы Бернулли* можно воспользоваться **формулой Пуассона**:

$$P\{\mu_K = k\} = \frac{(K \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-K \cdot p},$$

Расчёт вероятностей по *формуле Пуассона* выполняется аналогично расчётам по *формуле Бернулли*, подробно рассмотренным в ходе решения задания №3:

Вероятность получить *ровно* $k_1 = 3$ ошибки в результате трансляции сообщения объёмом $K = 210000$ бит:

$$K \cdot p = 210000 \cdot \frac{1}{60000} = 3.5;$$

$$P\{\mu_{210000} = 3\} = \frac{3.5^3}{3!} \cdot e^{-3.5} \simeq 0.2158;$$

Вероятность *не более* $k_2 = 2$-х ошибок:

$$\{\mu \leq 2\} = \{\mu = 2\} + \{\mu = 1\} + \{\mu = 0\};$$

$$P\{\mu \leq 2\} = P\{\mu = 2\} + P\{\mu = 1\} + P\{\mu = 0\} =$$

$$= \frac{3.5^2}{2!} \cdot e^{-3.5} + \frac{3.5^1}{1!} \cdot e^{-3.5} + \frac{3.5^0}{0!} \cdot e^{-3.5} =$$

$$= \left(3.5^2/2 + 3.5 + 1\right) \cdot e^{-3.5} \simeq 0.3208;$$

Вероятность *не менее* $k_3 = 4$-х ошибок:

$$\{\mu \geq 4\} = \left\{\overline{\mu \leq 3}\right\};$$

$$P\{\mu \geq 4\} = P\left\{\overline{\mu \leq 3}\right\} = 1 - P\{\mu \leq 3\} =$$

$$= 1 - P\{\mu = 3\} - P\{\mu = 2\} - P\{\mu = 1\} - P\{\mu = 0\};$$

$$P\{\mu \geq 4\} = 1 - \frac{3.5^3}{3!} \cdot e^{-3.5} - \frac{3.5^2}{2!} \cdot e^{-3.5} - \frac{3.5^1}{1!} \cdot e^{-3.5} - \frac{3.5^0}{0!} \cdot e^{-3.5} =$$

$$= 1 - \left(3.5^3/6 + 3.5^2/2 + 3.5 + 1\right) \cdot e^{-3.5} \simeq 0.4634;$$

Переходим ко второй части задания. Утверждение о том, что сообщение объёмом L бит содержит после трансляции *не более ℓ ошибок с надёжностью* γ, равносильно неравенству

$$P\{\mu_L \leq \ell\} \geq \gamma;$$

В случае, когда $\ell = 2$, имеем неравенство для $P\{\mu_L \leq 2\} = P\{\mu_L = 2\} + P\{\mu_L = 1\} + P\{\mu_L = 0\}$:

$$\left(\frac{\varkappa^2}{2} + \varkappa + 1\right) \cdot e^{-\varkappa} \geq \gamma, \qquad \text{где} \quad \varkappa = L \cdot p;$$

Решим это неравенство графическим способом. Вместе с графиком функции $\phi(x) = \left(x^2/2 + x + 1\right) \cdot e^{-x}$ нанесём на чертёж горизонтальные линии: $\gamma_1 = 0.90$ и $\gamma_2 = 0.95$:

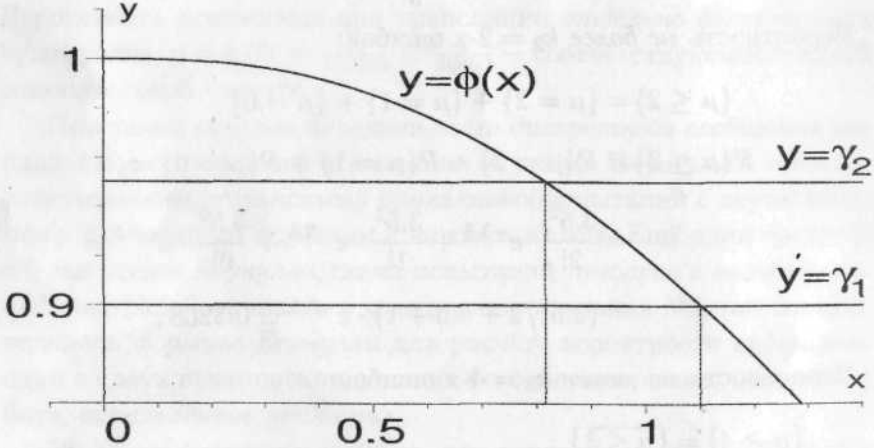


График показывает, что при $\gamma_1 = 0.90$ неравенство выполняется, если $\varkappa \lesssim 1.100$; при $\gamma_2 = 0.95$ — если $\varkappa \lesssim 0.816$ (разумеется, чтобы получить результаты с такой точностью, следует выбрать *подходящий масштаб*). Для вероятности искажения бита $p = \varkappa/L$ получаем при L=300000:

$$p \lesssim 3.7 \cdot 10^{-6} \quad (\text{при } \gamma = 0.90)\,; \qquad p \lesssim 2.7 \cdot 10^{-6} \quad (\text{при } \gamma = 0.95)\,.$$

Ответ:

$$P\{\mu_{210000} = 3\} = (3.5^3/6) \cdot e^{-3.5} \simeq 0.2158\,;$$

$$P\{\mu_{210000} \leq 2\} = (3.5^2/2 + 3.5 + 1) \cdot e^{-3.5} \simeq 0.3208\,;$$

$$P\{\mu_{210000} \geq 4\} = 1 - \left(3.5^3/6 + 3.5^2/2 + 3.5 + 1\right) \cdot e^{-3.5} \simeq 0.4634\,.$$

вероятность искажения бита, допустимая при трансляции сообщения объёмом 300 тысяч бит при условии не более двух ошибок:

$$p \lesssim 3.7 \cdot 10^{-6} \quad (\text{с надёжностью } 90\%)\,;$$
$$p \lesssim 2.7 \cdot 10^{-6} \quad (\text{с надёжностью } 95\%)\,.$$

Задание №5. Предельные случаи схемы Бернулли: Формулы Муавра-Лапласа (решение)

Реле игрового автомата настроено так, чтобы срабатывать при включении случайным образом, в среднем, 12 раз из двадцати.

Для последовательности из 800 включений оценить вероятность, с которой реле сработает:

а) ровно 480 раз; в) не более 465 раз;

б) ровно 474 раза; г) от 460 до 485 раз.

Сколько раз следует включить это реле, чтобы не менее 100 срабатываний произошло с надёжностью: а) 90%; б) 95%?

Решение:

Как и в задании №4, здесь имеет место *последовательность испытаний по схеме Бернулли.* Каждое из восьмисот включений можно считать *самостоятельным испытанием* с двумя взаимоисключающими исходами: *срабатыванием* или *несрабатыванием* реле. *Вероятность срабатывания* p соответствует средней относительной частоте: $p = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Формулировка "срабатывает при включении случайным образом" подразумевает *независимость* испытаний, если иное не оговаривается особо.

Так же, как и в задании №4, последовательность испытаний слишком длинная, чтобы без особых проблем вычислительного характера использовать для расчёта вероятностей формулу Бернулли. Но и формулу Пуассона теперь использовать нельзя, поскольку по условиям задачи интересующие нас исходы, *срабатывания реле*, не являются редкими.

Если последовательность испытаний по схеме Бернулли *длинная*, а события *нередкие*, то для оценки вероятностей типа $P\{\mu_K = m\}$ или $P\{m_1 \le \mu_K \le m_2\}$ используют **формулы Муавра-Лапласа**:

- *локальная формула Муавра-Лапласа*:

$$P\{\mu_K = m\} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi K p\,(1-p)}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{где } x = \frac{m - Kp}{\sqrt{Kp\,(1-p)}};$$

• *интегральная формула Муавра-Лапласа*:

$$P\{m_1 \le \mu_K \le m_2\} \simeq \Phi(x_2) - \Phi(x_1)\,, \quad \text{где} \quad x_{1,2} = \frac{m_{1,2} - Kp}{\sqrt{Kp\,(1-p)}}\,;$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \qquad - \text{ функция Лапласа.}$$

(основные сведения о функции Лапласа $\Phi(x)$ и таблица её значений приведены в Приложении)

Заметим, что формулы Муавра-Лапласа содержат характерные величины Kp и $Kp\,(1-p)$, имеющие смысл *ожидаемого в среднем* и *дисперсии* количества срабатываний. Эти величины целесообразно вычислить до расчёта самих вероятностей. При $K = 800$ и $p = \frac{3}{5}$ получаем:

$$Kp = 800 \cdot \frac{3}{5} = 480\,; \qquad Kp\,(1-p) = 800 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 192\,;$$

Оценим вероятность *ровно* $k_1 = 480$ срабатываний реле в последовательности из $K = 800$ включений:

$$x = \frac{480 - 480}{\sqrt{192}} = 0\,; \qquad P\{\mu_{800} = 480\} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 192}} \cdot e^0 \simeq 0.0288\,;$$

Вероятность *ровно* $k_2 = 474$ срабатываний:

$$x = \frac{474 - 480}{\sqrt{192}} \simeq -0.433\,;$$

$$P\{\mu_{800} = 474\} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 192}} \cdot e^{-\frac{(-0.433)^2}{2}} \simeq 0.0262\,;$$

Вероятность *не более* $m = 465$ срабатываний, $P\{0 \le \mu_{800} \le 465\}$, оцениваем по *интегральной формуле Муавра-Лапласа*:

$$x_1 = \frac{0 - 480}{\sqrt{192}} \simeq -34.64\,, \qquad x_2 = \frac{465 - 480}{\sqrt{192}} \simeq -1.08\,;$$

$$P\{0 \le \mu_{800} \le 465\} \simeq \Phi(-1.08) - \Phi(-34.64) = -\Phi(1.08) + \\ + \Phi(34.64) \simeq -0.3599 + 0.5 = 0.1401\,;$$

(использовано свойство нечётности функции Лапласа; значения $\Phi(1.08)$ и $\Phi(34.64)$ взяты из Приложения).

Аналогичным образом оцениваем вероятность от $m_1 = 460$ до $m_2 = 485$ срабатываний:

$$x_1 = \frac{460 - 480}{\sqrt{192}} \simeq -1.44\,, \quad x_2 = \frac{485 - 480}{\sqrt{192}} \simeq 0.36\,;$$

$$P\{460 \le \mu_{800} \le 485\} \simeq \Phi(0.36) - \Phi(-1.44) = \Phi(0.36) + \\ + \Phi(1.44) \simeq 0.1406 + 0.4251 = 0.5657\,;$$

Переходим ко второй части задания. Утверждение о том, что в серии из N включений происходит не менее L срабатываний реле *с надёжностью* γ, равносильно неравенству

$$P\{L \le \mu_N < +\infty\} \ge \gamma\,;$$

Очевидно, что количество включений N должно быть *не меньше* требуемого количества срабатываний $L = 100$, значит эта последовательность испытаний будет достаточно длинной, чтобы воспользоваться *интегральной формулой Муавра-Лапласа* для оценки $P\{L \le \mu_N < +\infty\}$:

$$\Phi\left(\frac{+\infty - Np}{\sqrt{Np\,(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{L - Np}{\sqrt{Np\,(1-p)}}\right) \gtrsim \gamma\,;$$

Обозначим $\sqrt{Np} = \varkappa$ и получим при $L = 100$ и $p = 3/5$:

$$\Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{100 - \varkappa^2}{\varkappa\sqrt{2/5}}\right) \gtrsim \gamma\,;$$

Наконец, с учётом свойств функции Лапласа $\Phi(x)$, приведём неравенство к виду:

$$\Phi\left(\frac{\varkappa^2 - 100}{\varkappa\sqrt{2/5}}\right) \gtrsim \gamma - 0.5\,;$$

Правую часть этого неравенства целесообразно представить в виде функции Лапласа $\Phi(x)$, взятой при определённом $x = t$: $\gamma - 0.5 = \Phi(t)$. После этого, благодаря монотонности возрастания $\Phi(x)$ во всей области определения, можно перейти от неравенства для значений функций Лапласа к неравенству для их аргументов:

$$\Phi\left(\frac{\varkappa^2 - 100}{\varkappa\sqrt{2/5}}\right) \gtrsim \Phi(t); \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\varkappa^2 - 100}{\varkappa\sqrt{2/5}} \gtrsim t;$$

Последнее, в свою очередь, преобразуется к неравенству, квадратичному относительно $\varkappa$:

$$\varkappa^2 - \sqrt{2/5} \cdot t \cdot \varkappa - 100 \gtrsim 0;$$

Его можно решить, например, методом интервалов. Учитывая неотрицательность $\varkappa = \sqrt{Np}$, получим:

$$\varkappa \gtrsim \sqrt{\frac{t^2}{10}} + \sqrt{\frac{t^2}{10} + 100}; \qquad N = \frac{\varkappa^2}{p} \gtrsim \frac{t^2 + t \cdot \sqrt{t^2 + 1000} + 500}{5p},$$

где t определено как решение уравнения: $\Phi(t) = \gamma - 0.5$.

Уравнение $\Phi(t) = \gamma - 0.5$ решается приближённо, например, по таблице значений функции Лапласа (см. Приложение). Находим *значение* функции $\Phi(x)$, равное $\gamma - 0.5$; при этом слева, в колонке *аргументов*, получаем искомое t. Если же значения функции Лапласа, в точности равного $\gamma - 0.5$, в таблице нет, находим *ближайшее большее* значение, что будет соответствовать незначительному превышению фактической *надёжности* над расчётной.

$$\gamma_1 - 0.5 = 0.40 \simeq 0.4015 = \Phi(1.29); \quad \Rightarrow \quad t_1 \simeq 1.29; \quad N_{\gamma_1} \gtrsim 180.8;$$
$$\gamma_2 - 0.5 = 0.45 \simeq 0.4505 = \Phi(1.65); \quad \Rightarrow \quad t_2 \simeq 1.65; \quad N_{\gamma_2} \gtrsim 185.0;$$

Результаты для N в ответе округлим до целого значения в большую сторону.

Ответ: $P\{\mu_{800} = 480\} \simeq 0.0288$; $P\{0 \le \mu_{800} \le 465\} \simeq 0.1401$;
$P\{\mu_{800} = 474\} \simeq 0.0262$; $P\{460 \le \mu_{800} \le 485\} \simeq 0.5657$;
$N_{\gamma=0.90} \ge 181$; $N_{\gamma=0.95} \ge 185$;

Задание №6. Дискретная случайная величина (решение)

Дискретная случайная величина ξ задана своим законом распределения $p_\xi(x_i)$:

x_i	-2	-1	0.9	1.5	3
$p_\xi(x_i)$	C	0.22	0.34	0.20	0.05

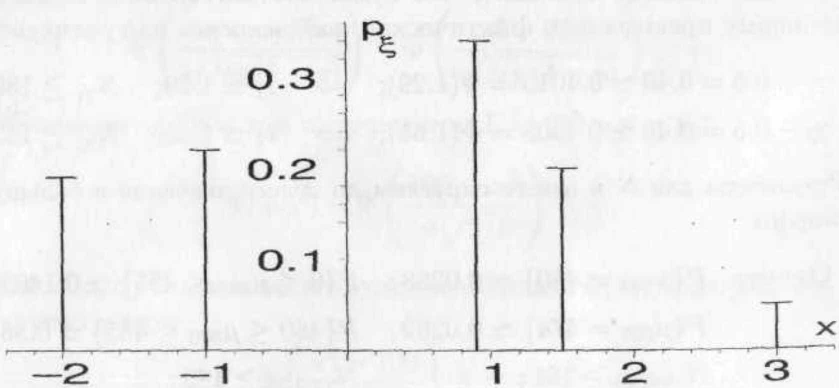
Найти значение C и графически изобразить закон распределения $p_\xi(x_i)$. Вычислить математическое ожидание $\mathbf{M}\xi$, дисперсию $\mathbf{D}\xi$ и среднее квадратическое отклонение σ_ξ. Вычислить вероятности $P\{1/2 \leqslant \xi < 5/2\}$ и $P\{\xi < -1\}$. Получить функцию распределения $F_\xi(x)$ и построить её график.

<u>**Решение:**</u>

Значение C найдём из *условия нормировки* — сумма вероятностей $\sum p_\xi(x_i)$, взятая *по всем* значениям дискретной случайной величины, должна быть равна единице:

$$C + 0.22 + 0.34 + 0.20 + 0.05 = 1; \quad \Rightarrow \quad C = 1 - 0.81 = 0.19;$$

График закона распределения *дискретной* случайной величины состоит из вертикальных отрезков, размещение и длины которых соответствуют значениям x_i и вероятностям $p_\xi(x_i)$:



Расчёт математического ожидания $\mathbf{M}\xi$, дисперсии $\mathbf{D}\xi$ и среднего квадратического отклонения σ_ξ дискретной случайной величины ξ выполняется по формулам:

$$\mathbf{M}\xi = \sum x_i \cdot p_\xi(x_i)\,; \qquad \mathbf{M}\xi^2 = \sum x_i^2 \cdot p_\xi(x_i)\,;$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2\,; \qquad \sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{D}\xi}\,;$$

(суммирование выполняется по *всем* значениям x_i).

Вычисляя $\mathbf{M}\xi$, помните, что результат должен остаться в пределах диапазона значений случайной величины; в нашем случае от -2 до 3:

$$\mathbf{M}\xi = (-2)\cdot 0.19 + (-1)\cdot 0.22 + 0.9\cdot 0.34 + 1.5\cdot 0.20 + 3\cdot 0.05 = \\ = -0.38 - 0.22 + 0.306 + 0.3 + 0.15 = 0.156\,;$$

Вычисляя $\mathbf{M}\xi^2$, помните, что результат должен остаться в пределах диапазона *квадрата* значений случайной величины; в нашем случае от $0.9^2 = 0.81$ до $3^2 = 9$:

$$\mathbf{M}\xi^2 = (-2)^2\cdot 0.19 + (-1)^2\cdot 0.22 + 0.9^2\cdot 0.34 + 1.5^2\cdot 0.20 + \\ + 3^2\cdot 0.05 = 0.76 + 0.22 + 0.2754 + 0.45 + 0.45 = 2.1554\,;$$

Вычисляя $\mathbf{D}\xi$, помните, что результат должен быть *неотрицательным*:

$$\mathbf{D}\xi = 2.1554 - 0.156^2 = 2.131064\,; \qquad \sigma_\xi = \sqrt{2.131064} \simeq 1.46\,;$$

Вероятности $P\{1/2 \leqslant \xi < 5/2\}$ и $P\{\xi < -1\}$ для *дискретной* случайной величины ξ вычисляются по формуле

$$P\{a \leqslant \xi < b\} = \sum_{a \leqslant x_i < b} p_\xi(x_i)\,;$$

(суммирование выполняется *только* по тем значениям x_i, которые удовлетворяют неравенству $a \leqslant x_i < b$).

Неравенству $1/2 \leqslant x_i < 5/2$ удовлетворяют только $x_i = 0.9$ и $x_i = 1.5$, а неравенству $x_i < -1$ удовлетворяет только $x_i = -2$. Поэтому:

$$P\left\{\tfrac{1}{2} \leqslant \xi < \tfrac{5}{2}\right\} = p_\xi(0.9) + p_\xi(1.5) = 0.34 + 0.20 = 0.54\,;$$

$$P\{\xi < -1\} = p_\xi(-2) = 0.19\,;$$

Переходим к *функции распределения* $F_\xi(x)$. Эта функция действительного аргумента x определяется как вероятность события $\{\xi < x\}$, то есть реализации меньшего, чем x, значения случайной величины ξ. Поэтому расчёт $F_\xi(x)$ будет аналогичен расчёту $P\{\xi < -1\}$.

Начнём с интервала $\underline{-\infty < x \leqslant -2}$, так как $x_i = -2$ — минимальное значение ξ. На этом интервале $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = 0$, поскольку *ни одно* x_i не удовлетворяет неравенству $x_i < x \leqslant -2$.

Возьмём интервал до следующего значения случайной величины *включительно*: $\underline{-2 < x \leqslant -1}$. Теперь неравенству $x_i < x$ удовлетворяет только $x_i = -2$. Следовательно, на этом интервале $F_\xi(x) = p_\xi(-2) = 0.19$.

При выборе следующего интервала руководствуемся тем же принципом: $\underline{-1 < x \leqslant 0.9}$. Неравенству $x_i < x$ удовлетворяют теперь $x_i = -2$ и $x_i = -1$, поэтому $F_\xi(x) = p_\xi(-2) + p_\xi(-1) = 0.19 + 0.22 = 0.41$.

Следующий интервал: $\underline{0.9 < x \leqslant 1.5}$. Неравенству $x_i < x$ удовлетворяют $x_i = -2,\ x_i = -1$ и $x_i = 0.9$; и

$$F_\xi(x) = p_\xi(-2) + p_\xi(-1) + p_\xi(0.9) = 0.19 + 0.22 + 0.34 = 0.75\,;$$

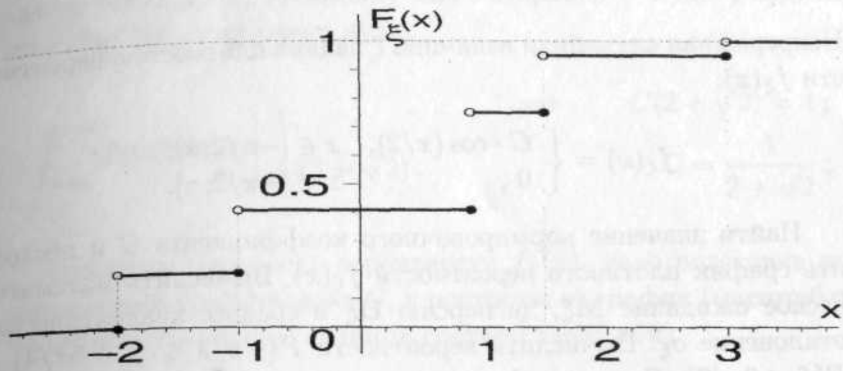
(от интервала к интервалу вероятности $p_\xi(x_i)$ суммируются *нарастающим итогом*).

Следующий интервал: $\underline{1.5 < x \leqslant 3}$. Неравенству $x_i < x$ удовлетворяют $x_i = -2,\ x_i = -1,\ x_i = 0.9$ и $x_i = 1.5$; $\quad\Rightarrow$

$$F_\xi(x) = p_\xi(-2) + p_\xi(-1) + p_\xi(0.9) + p_\xi(1.5) =$$
$$= 0.19 + 0.22 + 0.34 + 0.20 = 0.95\,;$$

И, наконец, интервал $\underline{3 < x < +\infty}$. Событие $\{\xi < x\}$ для x из этого интервала — *достоверное*, так как *все* значения случайной величины ξ не превосходят 3. Поэтому $F_\xi(x > 3) = 1$.

Представим эти результаты графически:



Заметим, что функция распределения $F_\xi(x)$ определена так, что её значения в точках разрыва равны *левосторонним* пределам.

Ответ:

$$C = 0.19\,; \qquad \mathbf{M}\xi = 0.156\,; \qquad \mathbf{D}\xi \simeq 2.13\,; \qquad \sigma_\xi \simeq 1.46\,;$$

$$P\left\{\frac{1}{2} \leqslant \xi < \frac{5}{2}\right\} = 0.54\,; \qquad P\{\xi < -1\} = 0.19\,;$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0\,, & -\infty < x \leqslant -2\,; \\ 0.19\,, & -2 < x \leqslant -1\,; \\ 0.41\,, & -1 < x \leqslant 0.9\,; \\ 0.75\,, & 0.9 < x \leqslant 1.5\,; \\ 0.95\,, & 1.5 < x \leqslant 3\,; \\ 1\,, & 3 < x < +\infty\,. \end{cases}$$

Задание №7. Непрерывная случайная величина (решение)

Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью вероятности $f_\xi(x)$:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} C \cdot \cos(x/2), & x \in [-\pi/2; \pi]; \\ 0\,, & x \notin [-\pi/2; \pi]. \end{cases}$$

Найти значение нормировочного коэффициента C и построить график плотности вероятности $f_\xi(x)$. Вычислить математическое ожидание $\mathbf{M}\xi$, дисперсию $\mathbf{D}\xi$ и среднее квадратическое отклонение σ_ξ. Вычислить вероятности $P\{-\pi/3 \leqslant \xi < 5\pi/4\}$ и $P\{\xi < 2\pi/3\}$. Получить функцию распределения $F_\xi(x)$ и построить её график.

Решение:

Для решения этого задания нам понадобятся три интеграла, которые целесообразно *заранее* рассчитать или найти в справочнике:

$$\int \cos\frac{x}{2}\,dx = 2\sin\frac{x}{2}\,; \quad (\text{для расчёта } C)$$

$$\int x\cos\frac{x}{2}\,dx = 2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2}\,; \quad (\text{для расчёта } \mathbf{M}\xi)$$

$$\int x^2\cos\frac{x}{2}\,dx = 2x^2\sin\frac{x}{2} + 8x\cos\frac{x}{2} - 16\sin\frac{x}{2}\,; \quad (\text{для расчёта } \mathbf{M}\xi^2)$$

(аддитивные постоянные интегрирования здесь опущены).

Значение C найдём из *условия нормировки* — интеграл плотности вероятности $f_\xi(x)$ по всем действительным x должен быть равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = C\int_{-\pi/2}^{+\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx = 2C\sin\frac{x}{2}\Big|_{-\pi/2}^{+\pi} =$$

$$= 2C\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{4})\right) = 2C\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

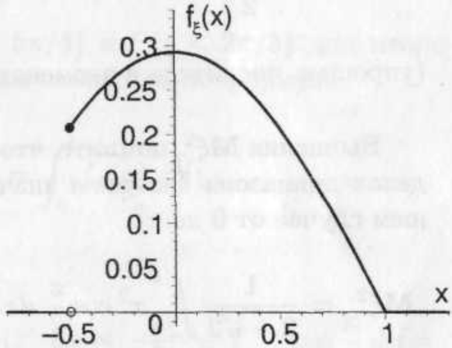
$$= C(2+\sqrt{2})\,;$$

Заметим, что интегрирование фактически выполняется в пределах от $-\pi/2$ до π, поскольку вне интервала $[-\pi/2;\pi]$ подынтегральная функция равна нулю.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = \left|\begin{array}{l} 1\,, \\ C(2+\sqrt{2})\,. \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{r} C(2+\sqrt{2}) = 1\,; \\ C = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\,; \end{array}$$

Выпишем плотность вероятности $f_\xi(x)$, явно подставив нормировочный коэффициент C, и построим её график (масштаб оси x выберем так, чтобы единица соответствовала π):

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x/2)}{2+\sqrt{2}}\,,\ \textit{при} \\ x \in [-\pi/2;\pi]; \\ \\ 0\ ,\ \textit{при} \\ x \notin [-\pi/2;\pi]. \end{cases}$$



Расчёт математического ожидания $\mathbf{M}\xi$, дисперсии $\mathbf{D}\xi$ и среднего квадратического отклонения σ_ξ непрерывной случайной величины ξ выполняется по формулам:

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_\xi(x)\,dx\,; \qquad \mathbf{M}\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx\,;$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2\,; \qquad \sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{D}\xi}\,;$$

(сделанные ранее замечания о пределах интегрирования остаются в силе).

Вычисляя $\mathbf{M}\xi$, помните, что результат должен остаться в пределах диапазона значений случайной величины; в нашем случае от $-\pi/2$ до π:

$$\mathbf{M}\xi = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\,\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\left(2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{2+\sqrt{2}}\left(\pi\sin\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\sin(-\frac{\pi}{4})-2\cos(-\frac{\pi}{4})\right) =$$

$$= (2-\sqrt{2})\cdot\left(\pi+0-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi(5-3\sqrt{2})}{2}-2\cdot(\sqrt{2}-1)\simeq 0.3612\,;$$

(упрощая, числитель и знаменатель дроби домножили на $2-\sqrt{2}$).

Вычисляя $\mathbf{M}\xi^2$, помните, что результат должен остаться в пределах диапазона *квадрата* значений случайной величины; в нашем случае от 0 до π^2:

$$\mathbf{M}\xi^2 = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\left(2x^2\sin\frac{x}{2}+8x\cos\frac{x}{2}-\right.$$

$$\left.-16\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{2+\sqrt{2}}\left(\pi^2\sin\frac{\pi}{2}+4\pi\cos\frac{\pi}{2}-8\sin\frac{\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi^2}{4}\sin(-\frac{\pi}{4})-4(-\frac{\pi}{2})\cos(-\frac{\pi}{4})+8\sin(-\frac{\pi}{4})\right) =$$

$$= (2-\sqrt{2})\cdot\left(\pi^2+0-8+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8}+\pi\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2(7-3\sqrt{2})}{4}+2\pi\cdot(\sqrt{2}-1)-8\simeq 1.4061\,;$$

Вычисляя $\mathbf{D}\xi$, помните, что результат должен быть *неотрицательным*:

$$\mathbf{D}\xi = \frac{\pi^2(7-3\sqrt{2})}{4} + 2\pi\cdot(\sqrt{2}-1) - 8 -$$

$$-\left(\frac{\pi(5-3\sqrt{2})}{2} - 2\cdot(\sqrt{2}-1)\right)^2 =$$

$$= \frac{9\pi^2}{4}(3\sqrt{2}-4) + 6\pi\cdot(3\sqrt{2}-4) + 4\cdot(2\sqrt{2}-5)\,;$$

Приближённо: $\mathbf{D}\xi \simeq 1.2756\,;\quad \sigma_\xi \simeq \sqrt{1.2756} \simeq 1.13\,;$

Вероятности $P\{-\pi/3 \leqslant \xi < 5\pi/4\}$ и $P\{\xi < 2\pi/3\}$ для *непрерывной* случайной величины ξ вычисляются по формуле

$$P\{a \leqslant \xi < b\} = \int_a^b f_\xi(x)\,dx\,;$$

$$P\left\{-\frac{\pi}{3} \leqslant \xi < \frac{5\pi}{4}\right\} = \int_{-\pi/3}^{5\pi/4} f_\xi(x)\,dx = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\int_{-\pi/3}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{2+\sqrt{2}}\,\sin\frac{x}{2}\Big|_{-\pi/3}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{2+\sqrt{2}}\,\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{2+\sqrt{2}}\,\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2+\sqrt{2}} \simeq 0.8787\,;$$

(интегрирование фактически выполнялось в пределах от $-\pi/3$ до π, поскольку в интервале $(\pi; 5\pi/4]$ подынтегральная функция равна нулю.)

Расчёт $P\{\xi < 2\pi/3\}$ выполняется аналогично, с учётом равенства нулю плотности вероятности $f_\xi(x)$ на интервале $(-\infty; -\pi/2)$:

$$P\left\{\xi < \frac{2\pi}{3}\right\} = \int_{-\infty}^{2\pi/3} f_\xi(x)\, dx = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{2\pi/3} \cos\frac{x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{2+\sqrt{2}}\ \sin\frac{x}{2}\,\Big|_{-\pi/2}^{2\pi/3} =$$

$$= \frac{2}{2+\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{2+\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \simeq 0.9215\,;$$

Переходим к расчёту *функции распределения* $F_\xi(x)$, равной вероятности события $\{\xi < x\}$, то есть реализации меньшего, чем x, значения случайной величины ξ. Поскольку плотность вероятности $f_\xi(x)$ отлична от нуля только при $x \in [-\pi/2; \pi]$, все значения случайной величины ξ принадлежат интервалу $[-\pi/2; \pi]$. Поэтому событие $\{\xi < x\}$ будет при *невозможным* при $-\infty < x \leqslant -\pi/2$ и *достоверным* при $\pi < x < +\infty$:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant -\pi/2\,; \\ 1, & \pi < x + \infty\,. \end{cases}$$

При $-\pi/2 < x \leqslant \pi$ функцию распределения получим по формуле:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\, du\,;$$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\, du = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{x} \cos\frac{u}{2}\, du =$$

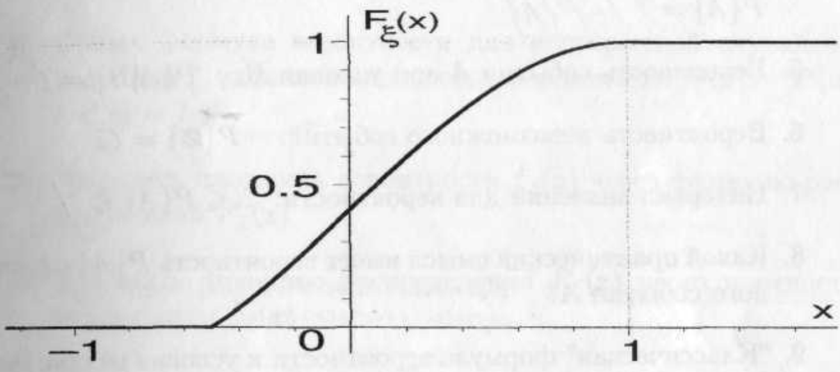
$$= \frac{2}{2+\sqrt{2}}\ \sin\frac{u}{2}\,\Big|_{-\pi/2}^{x} =$$

/ числитель и знаменатель дроби домножим на $(2-\sqrt{2})$ /

$$= (2-\sqrt{2})\left(\sin\frac{x}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = (2-\sqrt{2})\left(\sin\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= (2-\sqrt{2})\sin(x/2) + \sqrt{2} - 1\,;$$

Представим эти результаты графически (масштаб оси x выберем так, чтобы единица соответствовала π):



<u>Ответ:</u>

$$C = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\,; \qquad \mathbf{M}\xi \simeq 0.36\,; \qquad \mathbf{D}\xi \simeq 1.28\,; \qquad \sigma_\xi \simeq 1.13\,;$$

$$P\left\{-\frac{\pi}{3} \leqslant \xi < \frac{5\pi}{4}\right\} = \frac{3}{2+\sqrt{2}} \simeq 0.8787\,;$$

$$P\left\{\xi < \frac{2\pi}{3}\right\} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \simeq 0.9215\,;$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant -\pi/2\,; \\ (2-\sqrt{2})\sin(x/2) + \sqrt{2} - 1\,, & -\pi/2 < x \leqslant \pi\,; \\ 1, & \pi < x + \infty\,. \end{cases}$$

6 Вопросы экзаменационного теста

1. Формула сложения вероятностей: $P\{A+B\} = ?$
$= P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$

2. Формула умножения вероятностей: $P\{AB\} = ?$
$= P\{A\} \cdot P\{B/A\} = P\{B\} \cdot P\{A/B\}$

3. Формула полной вероятности (если $\{B_k\}$ — полная группа попарно несовместных событий)
$P\{A\} = \sum_k P\{B_k\} \cdot P\{A/B_k\}$

4. Вероятность события, противоположного событию A: $P\{\bar{A}\} = ?$ $1 - P\{A\}$

5. Вероятность события A при условии B: $P\{A|B\} = ?$ $\frac{P\{AB\}}{P\{B\}}$

6. Вероятность невозможного события: $P\{\varnothing\} = 0$

7. Интервал значений для вероятности: $?0 \leqslant P\{A\} \leqslant ?1$

8. Какой практический смысл имеет вероятность $P\{A\}$ случайного события A? оценка частоты события A в серии испытаний

9. "Классическая" формула вероятности и условия её применимости: $P\{A\} = \frac{?}{?}$ $\frac{\text{кол-во исходов, благопр. событию } A}{\text{полное кол-во исходов}}$

10. Как математически выражается независимость случайных событий A и B? $P\{A\} = P\{A/B\}$

11. Что такое *закон распределения* $p_\xi(x_i)$ дискретной случайной величины? $= P\{\xi = x_i\}$

12. Что такое *функция распределения* $F_\xi(x)$ случайной величины? $= P\{\xi < x\}$

13. Что такое *плотность вероятности* $f_\xi(x)$ непрерывной случайной величины?

14. Условие нормировки для закона распределения $p_\xi(x_i)$ дискретной случайной величины ξ. $\sum_i p_\xi(x_i) = 1$

15. Условие нормировки для плотности вероятности $f_\xi(x)$ непрерывной случайной величины ξ
$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) \cdot dx = 1$

16. Предельные значения функции распределения $F_\xi(x)$ непрерывной случайной величины ξ

17. Общая формула вероятности для дискретной случайной величины ξ, заданной законом распределения $p_\xi(x_i)$: $P\{a \leqslant \xi < b\} = ?$

18. Общая формула вероятности для случайной величины ξ, заданной функцией распределения $F_\xi(x)$: $P\{a \leqslant \xi < b\} = ?$

19. Общая формула вероятности для непрерывной случайной величины ξ, заданной плотностью вероятности $f_\xi(x)$: $P\{a \leqslant \xi < b\} = ?$

20. Выразить плотность вероятности $f_\xi(x)$ через функцию распределения $F_\xi(x)$

21. Выразить функцию распределения $F_\xi(x)$ через плотность вероятности $f_\xi(x)$

22. Математическое ожидание дискретной случайной величины ξ, заданной законом распределения $p_\xi(x_i)$: $\mathbf{M}\xi = ?$

23. Математическое ожидание непрерывной случайной величины ξ, заданной плотностью вероятности $f_\xi(x)$: $\mathbf{M}\xi = ?$

24. Дисперсия $\mathbf{D}\xi$ случайной величины ξ (определение)

25. Формула, выражающая дисперсию $\mathbf{D}\xi$ случайной величины ξ через математическое ожидание квадрата ξ

26. Среднее квадратическое отклонение σ_ξ случайной величины ξ (определение)

27. Начальный момент k-го порядка ν_ξ^k случайной величины ξ (определение)

28. Центральный момент k-го порядка μ_ξ^k случайной величины ξ (определение)

29. Математическое ожидание функции $y(\xi)$ дискретной случайной величины ξ, заданной законом распределения $p_{\xi}(x_i)$: $\mathbf{M}y(\xi) = ?$

30. Математическое ожидание функции $y(\xi)$ непрерывной случайной величины ξ, заданной плотностью вероятности $f_{\xi}(x)$: $\mathbf{M}y(\xi) = ?$

31. Математическое ожидание суммы (разности) случайных величин ξ и η: $\mathbf{M}(\xi \pm \eta) = ?$

32. Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин ξ и η: $\mathbf{D}(\xi \pm \eta) = ?$

33. Среднее квадратическое отклонение суммы (разности) независимых случайных величин ξ и η: $\sigma_{(\xi \pm \eta)} = ?$

34. Дисперсия случайной величины ξ, умноженной на постоянную (неслучайную) величину C: $\mathbf{D}C\xi = ?$

35. Математическое ожидание случайной величины ξ, умноженной на постоянную (неслучайную) величину C: $\mathbf{M}C\xi = ?$

36. Дисперсия постоянной (неслучайной) величины C: $\mathbf{D}C = ?$

37. Математическое ожидание постоянной (неслучайной) величины C: $\mathbf{M}C = ?$

38. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин ξ и η: $\mathbf{M}(\xi \cdot \eta) = ?$

39. Какой практический смысл имеет математическое ожидание $\mathbf{M}\xi$ случайной величины ξ?

40. Какой практический смысл имеют дисперсия $\mathbf{D}\xi$ и среднее квадратическое отклонение σ_{ξ} случайной величины ξ?

41. Формула вероятности для случайной величины ξ, равномерно распределенной в интервале $[A; B]$:
$P\{A \leqslant a < \xi \leqslant b \leqslant B\} = ?$

42. Формула вероятности для случайной величины ξ, нормально распределенной с параметрами m и σ:
$P\{a < \xi \leqslant b\} = ?$

43. Формула вероятности для случайной величины τ, показательно распределенной с параметром λ:
$P\{0 \leqslant a < \tau \leqslant b\} = ?$

44. По какой формуле вычисляется *число сочетаний* C_n^m и какой смысл оно имеет?

45. Что означает свойство устойчивости нормального распределения?

46. Какая последовательность испытаний называется схемой Бернулли и какими параметрами она характеризуется?

47. Какая случайная величина подчиняется биномиальному распределению $p_\kappa(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ и какой смысл имеют параметры n и p?

48. Какая случайная величина подчиняется распределению Пуассона $p_\nu(k) = \frac{\gamma^k}{k!} \cdot e^{-\gamma}$ и какой смысл имеет параметр γ?

49. Какой смысл имеют параметры m и σ нормального (гауссова) распределения $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \exp\left[\frac{(m-a)^2}{2\sigma^2}\right]$

50. Какой смысл имеет параметр λ показательного распределения $f_\tau(t \geqslant 0) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$

51. Необходимое и достаточное условие независимости дискретных случайных величин ξ и η, имеющих совместный закон распределения $p_{\xi,\eta}(x_i, y_j)$ и частные законы распределения $p_\xi(x_i)$ и $p_\eta(y_j)$.

52. Необходимое и достаточное условие независимости непрерывных случайных величин ξ и η, имеющих совместную плотность вероятности $f_{\xi,\eta}(x, y)$ и частные плотности вероятности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$.

53. Выразить частный закон распределения $p_\xi(x_i)$ через совместный закон распределения $p_{\xi,\eta}(x_i, y_j)$ системы дискретных случайных величин ξ и η.

54. Выразить частную плотность вероятности $f_\xi(x)$ через совместную плотность вероятности $f_{\xi,\eta}(x, y)$ системы непрерывных случайных величин ξ и η.

55. Ковариация $\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η (определение)

56. Расчетная формула для ковариации $\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η: $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = ?$

57. Коэффициент корреляции $\varrho_{\xi,\eta}$ случайных величин ξ и η (определение): $\varrho_{\xi,\eta} = ?$

58. Интервал значений для коэффициента корреляции $\varrho_{\xi,\eta}$: $? \leqslant \varrho_{\xi,\eta} \leqslant ?$

59. Как истолковать равенство $|\varrho_{\xi,\eta}| = 1$, где $\varrho_{\xi,\eta}$ — коэффициент корреляции случайных величин ξ и η?

60. Как истолковать равенство $\varrho_{\xi,\eta} = 0$, где $\varrho_{\xi,\eta}$ — коэффициент корреляции случайных величин ξ и η?

7 Вопросы экзаменационных билетов

Теоретические вопросы:

1. Случайное событие, его эмпирические характеристики. Свойства относительных частот.

2. События достоверные и невозможные; совместные и несовместные. Сложение и умножение событий. Событие, противоположное данному.

3. Вероятностное пространство: пространство элементарных событий, алгебра событий, вероятностная мера.

4. Вывод формул для вероятностей: невозможного события; противоположного события; суммы событий.

5. Условные вероятности. Статистическая независимость событий. Формула вероятности произведения событий.

6. Полная группа попарно несовместных событий: определение и примеры. Вывод формулы полной вероятности.

7. Вывод формул Байеса. Смысл апостериорных вероятностей событий, составляющих полную группу.

8. Схема испытаний "выборка без возвращения": примеры и формула для вероятностей событий. Гипергеометрическое распределение.

9. Схема испытаний "выборка с возвращением": примеры и формула для вероятностей событий. Биномиальное распределение.

10. Схема Бернулли и её предельные случаи. Формулы Муавра-Лапласа; формула Пуассона.

11. Случайная величина: определение и классификация. Функция распределения случайной величины.

12. Дискретные случайные величины: описание с помощью закона распределения.

13. Непрерывные случайные величины: описание с помощью плотности вероятности.

14. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины: определения и смысл.

15. Случайные величины, связанные функционально. Преобразование закона распределения и плотности вероятности.

16. Системы случайных величин. Совместные функции распределения, совместные законы распределения, совместные плотности вероятности.

17. Частные законы распределения и частные плотности вероятности для случайных величин, входящих в систему.

18. Статистическая независимость случайных величин, её необходимое и достаточное условие. Условные законы распределения и плотности вероятностей.

19. Математическое ожидание суммы и произведения случайных величин. Дисперсия суммы случайных величин. Ковариация и коэффициент корреляции.

20. Производящие и характеристические функции: определения и свойства. Формулы для моментов случайной величины. Центральная предельная теорема.

21. Неравенство Чебышёва и закон больших чисел. Теорема Бернулли. Понятие сходимости по вероятности.

22. Случайный процесс: определение и классификация. Траектория и сечение случайного процесса. Принципы описания случайных процессов.

23. Марковские случайные процессы. Уравнение Чепмена-Колмогорова. Марковские цепи.

24. Случайные процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский и винеровский процессы.

25. Стационарные случайные процессы. Корреляционная функция и спектральная плотность. Теорема Винера-Хинчина.

26. Генеральная совокупность и выборка. Разновидности графического представления выборочных распределений. Эмпирическая функция распределения.

27. Обработка результатов эксперимента методом наименьших квадратов. Вывод уравнения линейной регрессии.

28. Точечная оценка неизвестных параметров теоретического распределения. Несмещённые, состоятельные, эффективные оценки. Принцип максимального правдоподобия.

29. Интервальная оценка неизвестных параметров теоретического распределения. Доверительная вероятность и доверительный интервал.

30. Статистические гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Статистический критерий; его уровень значимости и мощность.

Практические задания:

1. Задача на построение вероятностного пространства.
2. Задача на применение формул элементарной теории вероятностей случайных событий.
3. Задача на применение формулы полной вероятностей и формул Байеса.
4. Задача на расчёт вероятностей событий в испытаниях, выполняемых по сложным схемам.
5. Задача на расчёт вероятностей событий в предельных случаях испытаний по схеме Бернулли.
6. Задача на расчёт численных характеристик дискретных случайных величин.

7. Задача на расчёт численных характеристик непрерывных случайных величин.

8. Задача на использование свойств нормально (показательно) распределённых случайных величин.

9. Задача на расчёт численных характеристик систем случайных величин.

10. Задача на расчёт характеристик поглощающей марковской цепи.

11. Задача на расчёт характеристик стационарного случайного сигнала, преобразованного стационарной линейной динамической системой.

12. Задача на построение графического представления заданного выборочного распределения.

13. Задача на обработку результатов эксперимента методом наименьших квадратов.

14. Задача на оценку неизвестных параметров нормального распределения генеральной совокупности.

15. Задача на статистическую проверку гипотезы о характере распределения генеральной совокупности.

8 Приложение 1. Ответы на вопросы экзаменационного теста

1. $P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$
2. $P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B|A\} = P\{B\} \cdot P\{A|B\}$
3. $P\{A\} = \sum\limits_{k} P\{B_k\} \cdot P\{A|B_k\}$
4. $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}$
5. $P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}}$
6. $P\{\varnothing\} = 0$
7. $0 \leqslant P\{A\} \leqslant 1$
8. Является оценкой относительной частоты появления события A в достаточно длинной серии испытаний.
9. $P\{A\} = \dfrac{\text{количество исходов, благоприятных событию } A}{\text{полное количество исходов}}$; имеет место, если элементарные исходы равновероятны.
10. $P\{A\} = P\{A|B\}$
11. $p_\xi(x_i) = P\{\xi = x_i\}$ — вероятность события "значение дискретной случайной величины ξ равно x_i".
12. $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$ — вероятность события "значение случайной величины ξ меньше x".
13. В пределе бесконечно малого dx произведение $f_\xi(x) \cdot dx$ равно вероятности события "значение непрерывной случайной величины ξ принадлежит интервалу $(x\,;\, x+dx]$".
14. $\sum\limits_{i} p_\xi(x_i) = 1$
15. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) \cdot dx = 1$

16. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$

17. $P\{a \leqslant \xi < b\} = \sum\limits_{a \leqslant x_i < b} p_\xi(x_i)$

18. $P\{a \leqslant \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$

19. $P\{a \leqslant \xi < b\} = \int_a^b f_\xi(x) \cdot dx$

20. $f_\xi(x) = \dfrac{dF_\xi(x)}{dx}$

21. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u) \cdot du$

22. $\mathbf{M}\xi = \sum\limits_i x_i \cdot p_\xi(x_i)$

23. $\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\xi(x) \cdot dx$

24. $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2$

25. $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2$

26. $\sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{D}\xi}$

27. $\nu_\xi^k = \mathbf{M}\xi^k$

28. $\mu_\xi^k = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^k$

29. $\mathbf{M}y(\xi) = \sum\limits_i y(x_i) \cdot p_\xi(x_i)$

30. $\mathbf{M}y(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x_i) \cdot f_\xi(x) \cdot dx$

31. $\mathbf{M}(\xi \pm \eta) = \mathbf{M}\xi \pm \mathbf{M}\eta$

32. $\mathbf{D}(\xi \pm \eta) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta$

33. $\sigma_{(\xi\pm\eta)} = \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}$

34. $\mathbf{D}(C \cdot \xi) = C^2 \cdot \mathbf{D}\xi$

35. $\mathbf{M}(C \cdot \xi) = C \cdot \mathbf{M}\xi$

36. $\mathbf{D}C = 0$

37. $\mathbf{M}C = C$

38. $\mathbf{M}(\xi \cdot \eta) = \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta$

39. Является оценкой среднего арифметического результатов достаточно длинной серии испытаний.

40. Характеризуют разброс значений случайной величины относительно математического ожидания.

41. $P\{A \leqslant a < \xi \leqslant b \leqslant B\} = \dfrac{b-a}{B-A}$

42. $P\{a < \xi \leqslant b\} = \Phi\left(\dfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

43. $P\{0 \leqslant a < \tau \leqslant b\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

44. $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$; количество различных вариантов выбора m объектов из множества n объектов.

45. Сумма независимых, нормально распределённых случайных величин подчиняется, в свою очередь, нормальному распределению.

46. Последовательность независимых испытаний, повторяемых при одинаковых условиях. Параметры: p — вероятность одного из возможных исходов единичного испытания; n — количество испытаний.

47. Случайная величина κ — количество "успехов" при выполнении последовательности испытаний по схеме Бернулли. Параметры: p — вероятностью "успеха" в единичном испытании; n — количество испытаний.

48. Случайная величина ν — количество событий пуассоновского потока, происходящих в течение определённого времени. Параметр γ — среднее количество событий, происходящих в течение этого времени.

49. Параметры: m — математическое ожидание и σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

50. $1/\lambda$ — математическое ожидание случайной величины τ.

51. $p_{\xi,\eta}(x_i, y_j) = p_\xi(x_i) \cdot p_\eta(y_j)$

52. $f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$

53. $p_\xi(x_i) = \sum\limits_j p_{\xi,\eta}(x_i, y_j)$

54. $f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) \cdot dy$

55. $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)$

56. $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}(\xi \cdot \eta) - \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta$

57. $\varrho_{\xi,\eta} = \dfrac{\mathbf{Cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \, \sigma_\eta}$

58. $-1 \leqslant \varrho_{\xi,\eta} \leqslant 1$

59. Случайные величины ξ и η связаны линейной зависимостью.

60. $\varrho_{\xi,\eta} = 0$ — необходимое (*но НЕ достаточное*) условие независимости случайных величин ξ и η. Во всяком случае, ξ и η не связаны линейной зависимостью.

9 Приложение 2. Функция Лапласа $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\,;$$

$$\Phi(-x) = -\Phi(x)\,;$$

$$\Phi(x \gtrsim 3.5) \simeq 0.5\,;$$

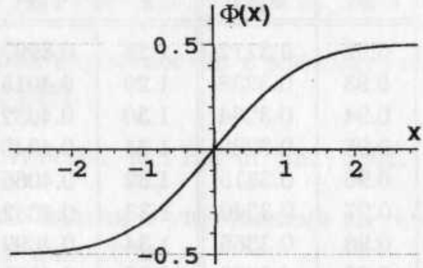


Таблица значений функции Лапласа

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.23	0.0910	0.46	0.1772	0.69	0.2549
0.01	0.0040	0.24	0.0948	0.47	0.1808	0.70	0.2580
0.02	0.0080	0.25	0.0987	0.48	0.1844	0.71	0.2611
0.03	0.0120	0.26	0.1026	0.49	0.1879	0.72	0.2642
0.04	0.0160	0.27	0.1064	0.50	0.1915	0.73	0.2673
0.05	0.0199	0.28	0.1103	0.51	0.1950	0.74	0.2704
0.06	0.0239	0.29	0.1141	0.52	0.1985	0.75	0.2734
0.07	0.0279	0.30	0.1179	0.53	0.2019	0.76	0.2764
0.08	0.0319	0.31	0.1217	0.54	0.2054	0.77	0.2794
0.09	0.0359	0.32	0.1255	0.55	0.2088	0.78	0.2823
0.10	0.0398	0.33	0.1293	0.56	0.2123	0.79	0.2852
0.11	0.0438	0.34	0.1331	0.57	0.2157	0.80	0.2881
0.12	0.0478	0.35	0.1368	0.58	0.2190	0.81	0.2910
0.13	0.0517	0.36	0.1406	0.59	0.2224	0.82	0.2939
0.14	0.0557	0.37	0.1443	0.60	0.2257	0.83	0.2967
0.15	0.0596	0.38	0.1480	0.61	0.2291	0.84	0.2995
0.16	0.0636	0.39	0.1517	0.62	0.2324	0.85	0.3023
0.17	0.0675	0.40	0.1554	0.63	0.2357	0.86	0.3051
0.18	0.0714	0.41	0.1591	0.64	0.2389	0.87	0.3078
0.19	0.0753	0.42	0.1628	0.65	0.2422	0.88	0.3106
0.20	0.0793	0.43	0.1664	0.66	0.2454	0.89	0.3133
0.21	0.0832	0.44	0.1700	0.67	0.2486	0.90	0.3159
0.22	0.0871	0.45	0.1736	0.68	0.2517	0.91	0.3186

(продолжение таблицы значений функции Лапласа)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.92	0.3212	1.28	0.3997	1.64	0.4495	2.00	0.4772
0.93	0.3238	1.29	0.4015	1.65	0.4505	2.02	0.4783
0.94	0.3264	1.30	0.4032	1.66	0.4515	2.04	0.4793
0.95	0.3289	1.31	0.4049	1.67	0.4525	2.06	0.4803
0.96	0.3315	1.32	0.4066	1.68	0.4535	2.08	0.4812
0.97	0.3340	1.33	0.4082	1.69	0.4545	2.10	0.4821
0.98	0.3365	1.34	0.4099	1.70	0.4554	2.12	0.4830
0.99	0.3389	1.35	0.4115	1.71	0.4564	2.14	0.4838
1.00	0.3413	1.36	0.4131	1.72	0.4573	2.16	0.4846
1.01	0.3438	1.37	0.4147	1.73	0.4582	2.18	0.4854
1.02	0.3461	1.38	0.4162	1.74	0.4591	2.20	0.4861
1.03	0.3485	1.39	0.4177	1.75	0.4599	2.22	0.4868
1.04	0.3508	1.40	0.4192	1.76	0.4608	2.24	0.4875
1.05	0.3531	1.41	0.4207	1.77	0.4616	2.26	0.4881
1.06	0.3554	1.42	0.4222	1.78	0.4625	2.28	0.4887
1.07	0.3577	1.43	0.4236	1.79	0.4633	2.30	0.4893
1.08	0.3599	1.44	0.4251	1.80	0.4641	2.32	0.4898
1.09	0.3621	1.45	0.4265	1.81	0.4649	2.34	0.4904
1.10	0.3643	1.46	0.4279	1.82	0.4656	2.36	0.4909
1.11	0.3665	1.47	0.4292	1.83	0.4664	2.38	0.4913
1.12	0.3686	1.48	0.4306	1.84	0.4671	2.40	0.4918
1.13	0.3708	1.49	0.4319	1.85	0.4678	2.42	0.4922
1.14	0.3729	1.50	0.4332	1.86	0.4686	2.44	0.4927
1.15	0.3749	1.51	0.4345	1.87	0.4693	2.46	0.4931
1.16	0.3770	1.52	0.4357	1.88	0.4699	2.48	0.4934
1.17	0.3790	1.53	0.4370	1.89	0.4706	2.50	0.4938
1.18	0.3810	1.54	0.4382	1.90	0.4713	2.60	0.4953
1.19	0.3830	1.55	0.4394	1.91	0.4719	2.70	0.4965
1.20	0.3849	1.56	0.4406	1.92	0.4726	2.80	0.4974
1.21	0.3869	1.57	0.4418	1.93	0.4732	2.90	0.4981
1.22	0.3888	1.58	0.4429	1.94	0.4738	3.00	0.4987
1.23	0.3907	1.59	0.4441	1.95	0.4744	3.20	0.4993
1.24	0.3925	1.60	0.4452	1.96	0.4750	3.40	0.4997
1.25	0.3944	1.61	0.4463	1.97	0.4756	3.60	0.4998
1.26	0.3962	1.62	0.4474	1.98	0.4761	3.80	0.4999
1.27	0.3980	1.63	0.4484	1.99	0.4767	∞	0.5000

Рекомендуемая литература

1. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Лань, 2003.
2. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Высш. шк., 2001.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М.: Высш. шк., 2002.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк., 1998.
6. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2ч. Ч.2. М., 2003.

Содержание