2 Получение передаточной функции из системы дифференциальных уравнений состояния

Рассмотрим способ получения передаточной функции из системы дифференциальных уравнений состояния. Для этого необходимо:

1. записать уравнения пространства состояния в операторной форме.
2. выразить все переменные *x* через *y* и *u*.
3. подставив значения *x* в последнее дифференциальное уравнение системы, записать передаточную функцию, как отношение *y* к *u*.

2.1 Примеры

Пример 2.1

Оперделить передаточную функцию *W(p)*, если известны дифференциальные уравнения состояния объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - x_2 - x_3 + 6u, \\ y = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Решение:

Запишем уравнения состояния в операторной форме:

$$\begin{cases} px_1 = x_2, \\ px_2 = x_3, \\ px_3 = -4x_1 - x_2 - x_3 + 6u, \\ y = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим x_3:

$$x_3 = \frac{-4x_1 - x_2 + 6u}{p+1}.$$

Из второго уравнения системы запишем $x_3 = px_2$, тогда

$$px_2 = \frac{-4x_1 - x_2 + 6u}{p+1}$$

Из второго уравнения системы запишем $x_2 = px_1$, тогда

$$p^2 x_1 = \frac{-4x_1 - px_1 + 6u}{p+1},$$

или

$$x_1 = \frac{6u}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

Поставив x_1 в первое уравнение системы, получим:

$$x_2 = \frac{6pu}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

Поставив x_2 во второе уравнение системы, получим:

$$x_3 = \frac{6p^2u}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

Из выражения $y = x_1 - 2x_2 - x_3$ найдем

$$y = x_1 - 2x_2 - x_3 = \frac{6u}{p^3 + p^2 + p + 4} - \frac{12pu}{p^3 + p^2 + p + 4} - \frac{6p^2u}{p^3 + p^2 + p + 4}.$$

Таким образом, искомая передаточная функция равна:

$$\mathrm{W(p)} = \frac{y}{u} = \frac{-6p^2 + 12p + 6}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

2.2 Задания на самостоятельную подготовку

Задача 2.1

Оперделить передаточную функцию *W(p)*, если известны дифференциальные уравнения состояния объекта:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 5x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 5u, \\ y = 0.1x_{1.} \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4u, \\ y = x_1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 + 2u, \\ y = x_1 + 2x_2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 7x_3 + u, \\ y = 2x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 0.5x_2 - 0.2x_3 + 3u, \\ y = x_1. \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2 - 3u, \\ y = x_1 + 2x_2. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 3x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + u, \\ y = 2x_1 + x_2. \end{cases}$