МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДО
_______________ С.И. Качин

«____»_____________2013 г.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов, обучающихся по направлению
140100 «Теплоэнергетика и теплотехника»

Составитель ***А.А. Михальчук***

Семестр	**4**
Кредиты	3
Лекции, часов	6
Практические занятия, часов	4
Индивидуальные задания	№1
Самостоятельная работа, часов	62
Формы контроля	зачет

Издательство
Томского политехнического университета
2013

УДК 519.21

Теория вероятностей и математическая статистика: метод. указ. и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по направлению 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника» / сост. А.А. Михальчук; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 112с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики и математической физики «____» ____________ 2012 года, протокол № ____.

Зав. кафедрой ВММФ,
профессор, доктор физ.-мат. наук _________________ А.Ю. Трифонов

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» предназначены для студентов ИДО, обучающихся по направлению 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника». Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приведено теоретическое содержание основных тем дисциплины, указаны темы практических занятий, прилагаются таблицы важнейших дискретных и непрерывных распределений случайной величины, необходимые для выполнения индивидуальных домашних заданий. Приведены варианты индивидуальных домашних заданий и список рекомендуемой литературы. Даны методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий.

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

При решении современных научно-технических задач одну из ведущих ролей играют статистические методы исследования, моделирования и прогнозирования. Курс теории вероятностей является тем фундаментом, на котором базируются дисциплины, изучающие статистические методы исследования, и имеет решающее значение для успешного изучения и усвоения этих дисциплин.

Задачами дисциплины являются: формирование навыков, необходимых для использования статистического анализа при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности; овладение необходимым математическим аппаратом (методами статистического анализа), дающим возможность анализировать, моделировать и решать технические задачи, воспитание отношения к математике как к инструменту исследования и решения технических задач, необходимому в дальнейшей работе.

В результате лекционных, практических и самостоятельных занятий в рамках предложенной программы студент должен: иметь представление о вероятностном пространстве; об аксиоматике теории вероятностей, понятиях условной вероятности и независимости событий; о законе распределения системы величин и основных числовых характеристиках системы величин; о распределениях случайных величин (Стьюдента, Фишера, хи-квадрат), используемых в математической статистике. Уметь использовать классический, геометрический, статистический подходы вычисления вероятностей событий; использовать формулу Бернулли и приближенные формулы Пуассона и Муавра – Лапласа; находить закон распределения и числовые характеристики функции случайной величины; использовать закон больших чисел и центральную предельную теорему, а также основные следствия из них; вычислять точечные и интервальные оценки числовых характеристик случайной величины; проверять гипотезы о законе распределения и числовых характеристиках; строить модель линейной регрессии и оценивать ее адекватность. Знать понятие пространства элементарных событий, классификацию событий, алгебру событий; аксиоматику и основные теоремы теории вероятностей; формулы полной вероятности и Байеса; определения случайной величины и ее закона распределения, понятия и свойства случайных величин дискретного и непрерывного типа, функции распределения, плотности распределения; определения и свойства числовых характеристик случайных величин дискретного и непрерывного типа и уметь находить их; основные типы распределений случайных величин –

Бернулли, биномиальное, Пуассона, геометрическое, равномерное, показательное, нормальное; основные понятия выборочного метода и свойства точечных оценок числовых характеристик случайных величин; критерии проверки гипотез о законе распределения и числовых характеристиках; основные понятия корреляционно-регрессионного анализа.

Пререквизитом для данной дисциплины является «Математический анализ».

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема 1. Вероятность случайного события. Алгебра вероятностей.

Случайные события и операции над ними с использованием элементов комбинаторики. Понятие вероятности события. Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формулы Бернулли и Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа.

Рекомендуемая литература: [1, часть 1, гл. 1–5], [2, часть 1, гл. 1–3], [3, часть 1, §1.1–1.9, 1.14].

Методические указания

Необходимо освоить алгебру случайных событий и алгебру вероятностей случайных событий для выполнения задач 1–3 ИДЗ.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дать определение пространства элементарных событий и операций над событиями, сформулировать свойства операций.
2. В чем различие между статистическим, классическим, геометрическим и аксиоматическим определением вероятности?
3. Свойства вероятности (основные теоремы теории вероятностей).
4. Условная вероятность. Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей.
5. Доказать формулы полной вероятности и Байеса.
6. Что такое схема испытаний Бернулли, привести формулу Бернулли, интегральную и локальную формулы Лапласа, формулу Пуассона, как предельный случай формулы Бернулли.

Тема 2. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин

Случайные величины (дискретные и непрерывные). Определение и способы задания законов распределения для дискретных и непрерывных случайных величин. Основные числовые характеристики (параметры распределения) случайных величин (математическое ожидание, дисперсия и другие начальные и центральные моменты). Важные для практики законы распределения дискретных случайных величин (биномиальное, Пуассона, геометрическое, гипергеометрическое) и непрерывных случайных величин (равномерное, экспоненциальное, нормальное). Законы распределения и числовые характеристики системы случайных величин.

Рекомендуемая литература: [1, часть 2, гл. 6–14], [2, часть 2, гл. 4–8], [3, часть 1, §1.10–1.14].

Методические указания

Необходимо освоить понятие случайной величины, законов распределения и числовых характеристик (параметров распределения) случайных величин для выполнения задач 4–5 ИДЗ.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дать определение случайной величины и ее закона распределения. Дискретная случайная величина и ее ряд распределения. Функция распределения случайной величины и ее свойства.
2. В чем различие между дискретными и непрерывными случайными величинами. Плотность и функция распределения непрерывной случайной величины, их свойства.
3. Дать определение основных числовых характеристик случайной величины. Привести свойства математического ожидания и дисперсии.
4. Привести примеры законов распределения дискретных случайных величин: биномиальное, Пуассона, геометрическое, гипергеометрическое.
5. Привести примеры законов распределения непрерывных случайных величин: равномерное, экспоненциальное, нормальное.
6. Системы случайных величин, законы распределения и их свойства, числовые характеристики.

Раздел 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Тема 3. Выборочный метод и оценивание параметров распределения

Представление эмпирических данных. Понятие выборки, генеральной совокупности. Графическое представление эмпирических законов распределения: гистограмма, полигон, кумулятивная кривая. Требования к оценкам параметров (состоятельность, несмещенность, эффективность). Эмпирические моменты. Среднее, дисперсия, стандартное отклонение, эксцесс, асимметрия и их интерпретация. Способ моментов.

Интервальные оценки. Понятие доверительной вероятности, уровня значимости, доверительного интервала. Точечное и интервальное оценивание параметров нормального распределения.

Рекомендуемая литература: [1, часть 3, гл. 15–17], [2, часть 3, гл. 10–11], [3, часть 2, §2.1–2.3].

Методические указания

Необходимо освоить понятие выборки, точечное и интервальное оценивание параметров эмпирических законов распределения для выполнения задач 6–7 ИДЗ.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дать определение выборки, эмпирических законов распределения (гистограмма, полигон, кумулятивная кривая).
2. Что такое статистические оценки параметров распределения, их свойства. Методы нахождения точечных оценок (метод наибольшего правдоподобия, метод моментов).
3. Дать определение доверительного интервала, доверительной вероятности для оценки математического ожидания и дисперсии.
4. Привести примеры точечного и интервального оценивания параметров нормального распределения.

Тема 4. Элементы корреляционно - регрессионного анализа

Понятие стохастической связи между случайными величинами. Корреляционный момент (ковариация). Определение коррелированных величин. Корреляционная таблица. Выборочный парный коэффициент корреляции. Значимость и надежность коэффициента корреляции. Парная линейная регрессия. Уравнение регрессии. Оценивание коэффициентов регрессии. Адекватность (линейность) регрессии. Степень согласованности эмпирических данных.

Рекомендуемая основная литература: [1, часть 3, гл. 18], [2, часть 3, гл. 12], [3, часть 2, §2.4].

Методические указания

Необходимо освоить основные понятия корреляционно – регрессионного анализа связи между случайными величинами для выполнения задачи 8 ИДЗ.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дать определение коэффициента корреляции и привести его основные свойства.
2. Вывести уравнение линейной регрессии. Оценивание коэффициентов уравнения регрессии методом наименьших квадратов.
3. Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии. Проверка адекватности моделей.

Тема 5. Проверка статистических гипотез

Основные задачи проверки гипотез. Нулевая и альтернативная гипотезы. Односторонний и двусторонний критерий принятия решений. Критическая область. Ошибки первого и второго рода. Параметрические и непараметрические критерии проверки статистических гипотез. Проверка гипотез о равенстве дисперсий и средних значений нормально распределенных совокупностей. Критерий согласия Пирсона.

Рекомендуемая литература: [1, часть 3, гл. 19], [2, часть 3, гл. 13], [3, часть 2, §2.5].

Методические указания

Необходимо освоить основные понятия проверки статистических гипотез о законах распределений и числовых характеристик случайных величин для выполнения задач 9–10 ИДЗ.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дать определение нулевой и альтернативной гипотезы. Односторонний и двусторонний критерий принятия решений. Критическая область. Ошибки первого и второго рода.
2. Проверка гипотез о равенстве двух дисперсий. Проверка гипотез о равенстве двух средних (при разных предположениях относительно дисперсий).
3. Критерии Пирсона и Колмогорова проверки гипотез о законах распределения.

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тематика практических занятий

1. Пространство элементарных исходов, алгебра событий, классическая формула вероятности. Комбинаторный метод вычисления вероятностей, геометрическая вероятность (2 часа).
2. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула Бернулли, приближенные формулы Пуассона и Муавра – Лапласа (2 часа).
3. Дискретные и непрерывные случайные величины, законы распределения, числовые характеристики. Примеры (2 часа).
4. Выборочный метод, точечное и интервальное оценивание параметров распределения случайной величины (2 часа).
5. Линейная регрессия. Выборочный парный коэффициент корреляции. Значимость и надежность коэффициента корреляции. Парная линейная регрессия. Уравнение регрессии (2 часа).
6. Проверка гипотезы о законе распределения. Критерий согласия Пирсона. Проверка гипотез о параметрах нормально распределенной генеральной совокупности (2 часа).

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

4.1 Общие методические указания

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, ответы на вопросы для самоконтроля, выполнение индивидуального задания.

Для закрепления изученного материала студенту- заочнику предлагается выполнить индивидуальное домашнее задание (ИДЗ).

Номер варианта задания определяется по последним двум цифрам номера зачетной книжки. Если образуемое ими число больше 20, то из него следует вычесть число 20. Например, если номер зачетной книжки Д-11Г10/12, то номер варианта задания равен 12. Если номер зачетной книжки З-3Б10/56, то номер варианта задания равен 16.

Индивидуальные задания выполняются в соответствии с графиком изучения дисциплины и высылаются на проверку преподавателю.

При выполнении и оформлении ИДЗ необходимо **соблюдать следующие правила**:

1. На титульном листе ИДЗ должны быть обязательно указаны название дисциплины, ФИО студента, его полный шифр, ФИО проверяющего преподавателя, дата отправки в университет.
2. Решения задач оформляются в порядке номеров, указанных в задании. Перед решением следует записать текст условия задачи.
3. Все страницы работы должны иметь сквозную нумерацию.
4. Решения задач следует излагать подробно без сокращений, обосновывая каждый этап ссылками на теоретические положения курса, с указанием использованных формул и т.п.. Вычисления должны располагаться в строгом порядке. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями.
5. Если работа выполнена неудовлетворительно, то вместе с рецензией ее возвращают студенту, который должен в короткий срок сделать необходимые доработки в той же тетради и отправить ее на повторное рецензирование.
6. Обязательно прилагается список использованной литературы, в который включаются методические указания, в соответствии с которыми выполнены задания.
7. В случае не соответствия работы требованиям к оформлению студент получает отрицательную рецензию. В этом случае работа

должна быть исправлена и повторно отправлена на проверку преподавателю в минимально короткий срок.

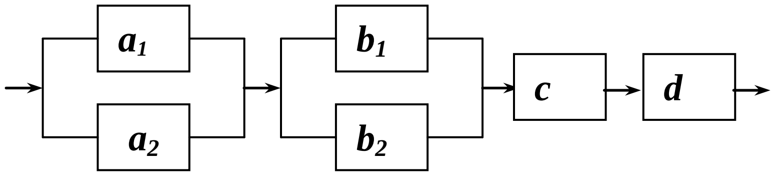
Студент, не получивший положительной аттестации по ИДЗ, не допускается к сдаче экзамена по данной дисциплине.

4.2 Варианты индивидуальных домашних заданий

Вариант № 1

1. Из 100 изделий, среди которых имеется 6 нестандартных, выбраны случайным образом 6 изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 6 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из четырех независимых подсистем S_a, S_b, S_c и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a и S_b состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k $(k = 1,2)$ (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.8$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c) = 0.99$, $P(d) = 0.95$.

3. Дана система из двух блоков a и b, соединенных последовательно в смысле надежности. Каждый из двух блоков может работать независимо от другого в трех разных режимах. Вероятность наступления первого режима 0.2, второго 0.5, третьего 0.3 . Надежность работы первого блока в 1 – м, 2 – м, 3 – м режимах равна соответственно 0.9; 0.8; 0.7. Надежность работы второго блока в 1 – м, 2 – м, 3 – м режимах равна соответственно 0.9; 0.9; 0.8. Найти надежность системы, если блоки независимы.

4. Передается 6 сообщений по каналу связи. Каждое сообщение с вероятностью $p = 0.2$ независимо от других искажается. Случайная величина X – число искаженных сообщений. Построить ее законы распределения, их графики, найти ее числовые характеристики. Найти вероятность того, что будет искажено не менее двух сообщений.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 2A\cos 2x, & |x| \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{4} \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до 0.5. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема $n = 100$ построен ряд распределения:

x_i	1	3	5	7	9	11	13
p_i	0.07	0.09	0.14	0.21	0.25	0.18	0.06

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Какова вероятность того, что среднеарифметическое из $n = 16$ измерений для выборки из нормального распределения отличается от истинного значения не более, чем на $\varepsilon = 2$, если 1) $\sigma = 4$, 2) $s = 4$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

	X					
	1	2	3	4	5	6
	0.02	0.025	0.03	0.02	0.0	0.0
	0.0	0.10	0.06	0.12	0.02	0.0
	0.0	0.0	0.05	0.09	0.13	0.03
	0.0	0.0	0.01	0.05	0.065	0.09
	0.0	0.0	0.0	0.02	0.04	0.03

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов $n_X = 12$ и $n_Y = 8$ нормальных распределений найдены выборочные значениями математических ожиданий $\overline{x} = 15.3$ и $\overline{y} = 16.5$ и исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 0.47$ и $s_y^2 = 0.54$. При уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X < m_Y$.

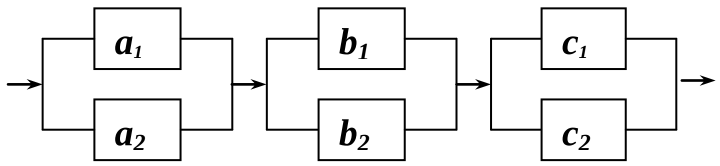
10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.025$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по показательному закону, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	$0 \div 2$	$2 \div 4$	$4 \div 6$	$6 \div 8$	$8 \div 10$	$10 \div 12$
n_k	60	25	7	5	2	1

Вариант № 2

1. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 7 конденсаторов. Для контроля выбирают 5 конденсаторов. Найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k (k = 1,2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k)$ = 0.8, $P(b_k)$ = 0.9, $P(c_k)$ = 0.7.

3. Испытывается прибор, состоящий из двух узлов a и b, соединенных последовательно в смысле надежности. Надежности (вероятности безотказной работы за время T) узлов a и b известны и равны $P(a)$ = 0.8, $P(b)$ = 0.9. Узлы отказывают независимо друг от друга. По истечении времени T выяснилось, что прибор неисправен. Найти с учетом этого вероятность того, что неисправен только узел a.

4. Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеется 20 дефектных, выбраны случайным образом 5 изделий для проверки их качества. Для случайного числа X дефектных изделий, содержащихся в выборке, построить ряд распределений, функцию распределения и их график, найти ее числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A(1-x^2), & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до 0.25. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	-1.75	-1.25	-0.75	-0.25	0.25	0.75	1.25	1.75
p_i	0.04	0.11	0.19	0.28	0.18	0.10	0.07	0.03

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Найти доверительный интервал с надежностью $\beta = 0.99$ неизвестного математического ожидания нормальной случайной величины X, зная $\overline{x} = 20.9$, $n = 26$, если 1) $\sigma = 2$, 2) $s = 2$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

Y \ X	1	2	3	4	5	6
0.5	0.01	0.04	0.02	0.0	0.0	0.0
1.0	0.0	0.10	0.12	0.07	0.03	0.0
1.5	0.0	0.0	0.05	0.10	0.14	0.01
2.0	0.0	0.0	0.01	0.05	0.09	0.08
2.5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.01	0.05

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов $n_X = 11$ и $n_Y = 16$ нормальных распределений найдены выборочные значениями математических ожиданий $\overline{x} = 30.5$ и $\overline{y} = 29.0$ и исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 0.8$ и $s_y^2 = 0.6$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X \neq m_Y$.

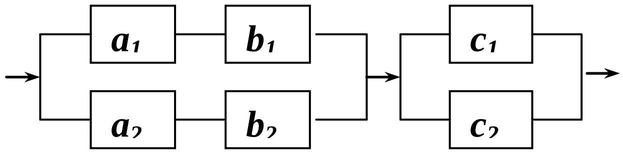
10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по нормальному закону, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	$2 \div 4$	$4 \div 6$	$6 \div 8$	$8 \div 10$	$10 \div 12$	$12 \div 14$	$14 \div 16$
n_k	6	10	14	20	30	15	5

Вариант № 3

1. Из 100 изделий, среди которых имеется 8 нестандартных, выбраны случайным образом 4 изделия для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 4 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из двух независимых подсистем S_{ab} и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков ab_k и c_k $(k = 1,2)$ (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах). Блок ab_k состоит из последовательно соединенных блоков a_k и b_k



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.7$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c_k) = 0.8$.

3. 30% приборов собирается из высококачественных деталей, остальные – из деталей обычного качества. В первом случае надежность прибора (вероятность безотказной работы за время T) равна 0,95, а если прибор собрали из обычных деталей, его надежность 0,75. Прибор в течение времени T работал безотказно. Чему равна вероятность того, что он собран из высококачественных деталей?

4. Производятся последовательные независимые испытания (n=5) приборов на надежность. Надежность каждого прибора равна p=0.7. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, когда предыдущий оказался надежным. Для случайного числа X испытанных в данном эксперименте приборов построить законы распределения, их график, найти числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти ее числовые характеристики, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до 0.5.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	-2.0	-1.5	- 1.0	- 0.5	0.0	0.5	1.0	1.5
p_i	0.06	0.11	0.19	0.22	0.16	0.12	0.08	0.06

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Найти доверительный интервал неизвестного математического ожидания нормальной случайной величины X, зная доверительную вероятность $\beta = 0.99$, объем выборки $n = 20$, выборочную среднюю $\bar{x}$ =200, если 1) $\sigma = 10$, 2) $s = 10$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

Y	X					
	1	2	3	4	5	6
-1	0.01	0.03	0.02	0.01	0.0	0.0
-2	0.02	0.08	0.06	0.13	0.03	0.0
-3	0.0	0.0	0.05	0.08	0.13	0.02
-4	0.0	0.0	0.02	0.06	0.07	0.08
-5	0.0	0.0	0.0	0.01	0.03	0.05

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ *и* $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум большим независимым выборкам объемов n_X =42 и n_Y = 58 нормальных распределений найдены выборочные значениями математических ожиданий $\bar{x}$ = 120 и $\bar{y}$ = 130. Дисперсии известны D_x = 24 и D_y = 20. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей 1) H_1: $m_X \neq m_Y$, 2) H_1: $m_X < m_Y$.

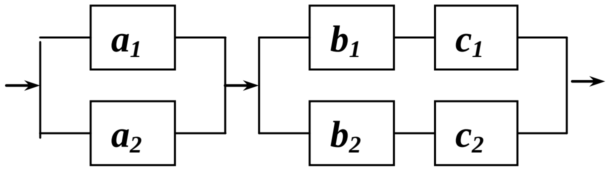
10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по нормальному закону, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	10 ÷ 15	15 ÷ 20	20 ÷ 25	25 ÷ 30	30 ÷ 35
n_k	15	20	35	18	12

Вариант № 4

1. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 9 конденсаторов. Для контроля выбирают 3 конденсатора. Найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из двух независимых подсистем S_a и S_{bc}. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков a_k и bc_k (k = 1,2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах). Блок bc_k состоит из последовательно соединенных блоков b_k и c_k



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.85$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c_k) = 0.95$.

3. Испытывается прибор, состоящий из двух узлов a и b, соединенных последовательно в смысле надежности. Надежности (вероятности безотказной работы за время T) узлов a и b известны и равны $P(a) = 0.85$, $P(b) = 0.95$. Узлы отказывают независимо друг от друга. По истечении времени T выяснилось, что прибор неисправен. Найти с учетом этого вероятность того, что неисправен только узел b.

4. Устройство состоит из четырех независимых элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна $p = 0.3$. Для случайной величины X отказавших элементов в одном опыте построить законы распределения, их графики, найти ее числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A\cos x, & |x| \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{4} \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до $\dfrac{\pi}{8}$. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема $n = 100$ построен ряд распределения:

x_i	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75
p_i	0.08	0.11	0.15	0.20	0.18	0.12	0.09	0.07

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью β = 0.9 точность оценки математического ожидания нормальной случайной величины была равна $\varepsilon = 0.5$, если $\sigma = 4$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

	X					
Y	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5
0.5	0.01	0.03	0.02	0.01	0.0	0.0
1.0	0.0	0.07	0.10	0.14	0.03	0.0
1.5	0.0	0.0	0.05	0.09	0.13	0.02
2.0	0.0	0.0	0.01	0.04	0.07	0.08
2.5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.03	0.05

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов n_X =14 и n_Y = 9 нормальных распределений найдены выборочные значениями математических ожиданий $\overline{x}$ = 23.8 и $\overline{y}$ = 21.2 и исправленные выборочные дисперсии s_x^2 = 0.44 и s_y^2 = 0.54. При уровне значимости α = 0.05 проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X > m_Y$.

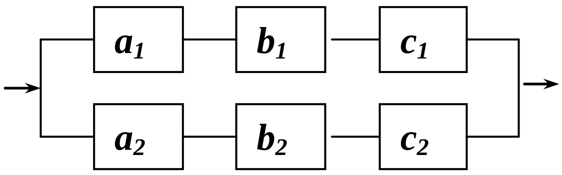
10. По критерию Пирсона при уровне значимости α = 0.05 проверить гипотезу о распределении случайной величины X по равномерному закону, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	1 ÷ 2	2 ÷ 3	3 ÷ 4	4 ÷ 5	5 ÷ 6
n_k	23	18	22	21	16

Вариант № 5

1. Из 100 изделий, среди которых имеется 5 нестандартных, выбраны случайным образом 7 изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 7 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из подсистемы S_{abc}, состоящей из двух независимых дублирующих блоков abc_k (k = 1,2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах). Блок abc_k состоит из трех последовательно соединенных блоков a_k, b_k и c_k



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.9$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c_k) = 0.8$.

3. Испытывается прибор, состоящий из двух узлов a и b, соединенных последовательно в смысле надежности. Надежности (вероятности безотказной работы за время T) узлов a и b известны и равны $P(a) = 0.8$, $P(b) = 0.7$. Узлы отказывают независимо друг от друга. По истечении времени T выяснилось, что прибор неисправен. Найти с учетом этого вероятность того, что неисправны оба узла.

4. Производится многократное испытание некоторого элемента на надежность до тех пор, пока элемент не откажет. Вероятность отказа элемента в каждом опыте равна $p = 0.1$. Для случайного числа X опытов, которые надо произвести, построить ряд распределений, многоугольник распределения, найти числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A(1 - x^4), & |x| \le 0.5 \\ 0, & |x| > 0.5 \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до $\frac{1}{4}$.

Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема $n = 100$ построен ряд распределения:

x_i	- 3.25	- 2.75	- 2.25	- 1.75	- 1.25	- 0.75	- 0.25
p_i	0.11	0.19	0.25	0.15	0.13	0.10	0.07

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью β = 0.95 точность оценки математического ожидания нормальной случайной величины была равна $\varepsilon = 1.5$, если $\sigma = 15$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

Y	X: -1	-2	-3	-4	-5	-6
-1	0.015	0.035	0.025	0.015	0.0	0.0
-2	0.015	0.065	0.1	0.125	0.025	0.0
-3	0.0	0.0	0.05	0.085	0.115	0.02
-4	0.0	0.0	0.015	0.045	0.085	0.08
-5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.035	0.03

Оценить данную матрицу распределения (X, Y**)** на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов n_X =10 и n_Y = 8 нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x}$ = 1.2 и $\overline{y}$ = 1.5 и исправленные выборочные дисперсии s_x^2 = 0.08 и s_y^2 = 0.07. При уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X < m_Y$.

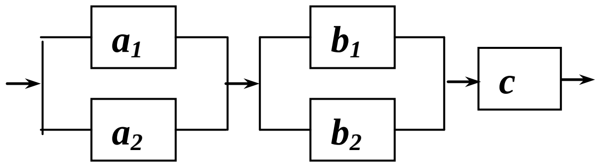
10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону, если $f(x) = 0.25x^3$ при $x \in (0, 2)$, задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	0.0 ÷ 0.5	0.5 ÷ 1.0	1.0 ÷ 1.5	1.5 ÷ 2.0
n_k	1	3	12	34

Вариант № 6

1. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 4 конденсатора. Для контроля выбирают 8 конденсаторов. Найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a и S_b состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k (k = 1,2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.8$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c) = 0.85$.

3. Дана система из двух блоков a и b, соединенных последовательно в смысле надежности. Каждый из двух блоков может работать независимо от другого в двух разных режимах. Вероятность наступления первого режима 0.3. Надежность работы первого блока в 1 – м, 2 – м режимах равна соответственно 0.9; 0.85. Надежность работы второго блока в 1 – м, 2 – м режимах равна соответственно 0.7; 0.9. Найти надежность системы, если блоки независимы.

4. Имеется 10 изделий, среди которых 3 нестандартных, на вид неотличимых от новых. Наугад выбраны 4 изделия для проверки их качества. Для случайного числа X стандартных изделий, содержащихся в выборке, построить законы распределений, их графики, найти числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A(1-|x|), & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до 0.5. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	-1.0	1.0	3.0	5.0	7.0	9.0	11.0
p_i	0.07	0.12	0.18	0.29	0.16	0.11	0.07

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Какова вероятность того, что среднеарифметическое из $n = 50$ измерений для выборки из нормального распределения отличается от истинного значения не более, чем на $\varepsilon = 4$, если 1) $\sigma = 10$, 2) $s = 10$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

	X					
Y	-0.5	-1.0	-1.5	-2.0	-2.5	-3.0
0.5	0.01	0.04	0.02	0.0	0.0	0.0
1.0	0.01	0.07	0.09	0.14	0.02	0.0
1.5	0.0	0.0	0.05	0.09	0.16	0.02
2.0	0.0	0.0	0.01	0.04	0.06	0.08
2.5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.04	0.03

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов $n_X = 12$ и $n_Y = 12$ нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x} = 3.2$ и $\overline{y} = 3.5$ и исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 0.14$ и $s_y^2 = 0.10$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X \neq m_Y$.

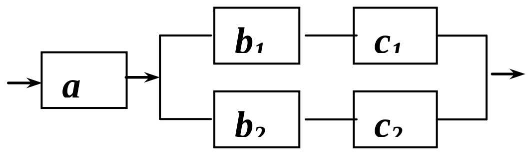
10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону $F(x) = 0.25x^2$ при $x \in (0, 2)$, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	0.0 ÷ 0.5	0.5 ÷ 1.0	1.0 ÷ 1.5	1.5 ÷ 2.0
n_k	6	10	16	18

Вариант № 7

1. Из 100 изделий, среди которых имеется 3 нестандартных, выбраны случайным образом 9 изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 9 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из двух независимых подсистем S_a и S_{bc}. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_{bc} состоит из двух независимых дублирующих блоков bc_k $(k = 1,2)$ (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах). Блок bc_k состоит из последовательно соединенных блоков b_k и c_k



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a) = 0.95$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c_k) = 0.8$.

3. Прибор состоит из двух узлов a и b, соединенных последовательно в смысле надежности, и стабилизатора напряжения S, работающего в двух режимах. При работе стабилизатора в первом режиме с вероятностью 0.7 надежность узлов $P(a) = 0.9$, $P(b) = 0.95$. При работе стабилизатора во втором режиме надежность узлов $P(a) = 0.8$, $P(b) = 0.9$. Найти надежность прибора, если узлы независимы.

4. Устройство состоит из пяти независимых элементов. Вероятность безотказной работы каждого элемента в одном опыте равна $p = 0.7$. Для случайной величины X элементов, безотказно работавших в одном опыте, построить законы распределения, их графики, найти ее числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A\sin x, & x \in (0,\pi) \\ 0, & x \notin (0,\pi) \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до $\pi/4$. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема $n = 100$ построен ряд распределения:

x_i	-1.5	-1.0	- 0.5	0.0	0.5	1.0	1.5
p_i	0.07	0.13	0.20	0.26	0.17	0.10	0.07

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. По данным выборки объема $n = 25$ нормальной случайной величины X найдена оценка $s = 10$. Найти доверительный интервал, покрывающий σ с надежностью $\beta = 0.95$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

Y	X					
	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
0.5	0.01	0.03	0.02	0.01	0.0	0.0
1.0	0.02	0.05	0.07	0.10	0.02	0.0
1.5	0.01	0.02	0.05	0.11	0.16	0.03
2.0	0.0	0.0	0.03	0.05	0.06	0.08
2.5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.03	0.02

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов $n_X = 50$ и $n_Y = 60$ нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x} = 15$ и $\overline{y} = 14$. Дисперсии известны и равны $D_x = 1.4$ и $D_y = 1.2$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей 1) H_1: $m_X \neq m_Y$, 2) H_1: $m_X > m_Y$.

10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону

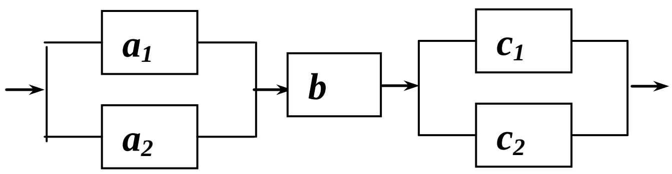
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	-3 ÷ -2	-2 ÷ -1	-1 ÷ 0	0 ÷ 1	1 ÷ 2	2 ÷ 3
n_k	6	14	30	23	16	11

Вариант № 8

1. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 5 конденсаторов. Для контроля выбирают 5 конденсаторов. Найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a и S_c состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k и c_k ($k = 1,2$) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.8$, $P(b) = 0.95$, $P(c) = 0.85$.

3. Прибор состоит из двух дублирующих друг друга узлов *a* и *b* (соединенных параллельно в смысле надежности) и стабилизатора напряжения *S*, работающего в двух режимах. При работе стабилизатора в первом режиме с вероятностью 0.8 надежность узлов $P(a) = 0.9$, $P(b) = 0.95$. При работе стабилизатора во втором режиме надежность узлов $P(a) = 0.8$, $P(b) = 0.9$. Найти надежность прибора, если узлы независимы.

4. Из 10 приборов, среди которых имеется 6 новых и 4 бывших в употреблении, выбраны случайным образом 4 прибора. Для случайного числа *X* новых приборов, содержащихся в выборке, построить законы распределений, их графики, найти числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения *f(x)* случайной величины *X:*

$$f(x) = \begin{cases} Ax, & x \in (0,10) \\ 0, & x \notin (0,10) \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент *A*, построить график плотности распределения *f(x),* найти функцию распределения *F(x)* и построить ее график, найти вероятность попадания величины *X* на участок от 0 до 5. Найти числовые характеристики случайной величины *X*.

6. По выборке объема $n = 100$ построен ряд распределения:

x_i	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.6	8.5
p_i	0.06	0.09	0.15	0.20	0.16	0.11	0.09	0.08	0.06

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Найти доверительный интервал с надежностью $\beta = 0.95$ неизвестного математического ожидания нормальной случайной величины *X*, зная $\bar{x} = 20$, $n = 36$, если 1) $\sigma = 10$, 2) $s = 10$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (*X*, *Y*):

	X					
Y	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1	0.02	0.04	0.01	0.	0.0	0.0
2	0.03	0.06	0.10	0.13	0.02	0.0
3	0.0	0.0	0.05	0.08	0.15	0.01
4	0.0	0.0	0.02	0.04	0.08	0.06
5	0.0	0.0	0.01	0.02	0.04	0.03

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов $n_X = 9$ и $n_Y = 8$ нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x} = 55.5$ и $\overline{y} = 49.1$ и исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 1.8$ и $s_y^2 = 2.4$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X > m_Y$.

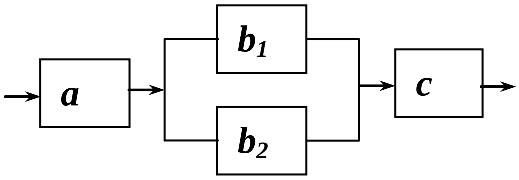
10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.025$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону $F(x) = 1-(x-1)^2$ при $x \in (0, 1)$, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	$0.0 \div 0.1$	$0.1 \div 0.2$	$0.2 \div 0.4$	$0.4 \div 0.6$	$0.6 \div 1.0$
n_k	50	20	15	10	5

Вариант № 9

1. Из 100 изделий, среди которых имеется 4 нестандартных, выбраны случайным образом 6 изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 6 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_b состоит из двух независимых дублирующих блоков b_k ($k = 1,2$) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a) = 0.95$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c) = 0.99$.

3. Дана система из двух блоков a и b, соединенных параллельно в смысле надежности. Каждый из двух блоков может работать независимо от другого в трех разных режимах. Вероятность наступления первого режима 0.1, второго 0.3 . Надежность работы первого блока в 1 – м, 2 – м, 3 – м режимах равна соответственно 0.9; 0.8; 085. Надежность работы

второго блока в 1 – м, 2 – м, 3 – м режимах равна соответственно 0.9; 0.95; 0.8. Найти надежность системы, если блоки независимы.

4. Передается 4 сообщения по каналу связи. Каждое сообщение с вероятностью p = 0.4 независимо от других искажается. Случайная величина X – число не искаженных сообщений. Построить ее законы распределения, их графики, найти ее числовые характеристики. Найти вероятность того, что будет искажено не менее двух сообщений.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A\sin^2 x, & x \in (0,\pi) \\ 0, & x \notin (0,\pi) \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до $\pi/4$. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	- 3.5	- 2.5	- 1.5	- 0.5	0.5	1.5	2.5
p_i	0.10	0.19	0.22	0.16	0.14	0.11	0.08

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью β = 0.95 точность оценки математического ожидания нормальной случайной величины была равна ε = 1.5, если σ = 15.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

Y	X					
	-0.5	-1.0	-1.5	-2.0	-2.5	-3.0
0.5	0.02	0.03	0.03	0.02	0.0	0.0
1.0	0.0	0.06	0.10	0.12	0.03	0.0
1.5	0.0	0.0	0.05	0.08	0.13	0.02
2.0	0.0	0.0	0.01	0.05	0.08	0.08
2.5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.03	0.04

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов n_X =15 и n_Y = 10 нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x}$ = 21.8 и $\overline{y}$ = 19.9 и исправленные выборочные дисперсии

$s_x^2 = 0.85$ и $s_y^2 = 0.95$. При уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X > m_Y$.

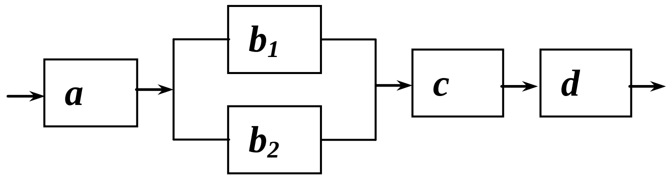
10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.025$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону $f(x) = 1 - |x|$ при $x \in (-1, 1)$, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	-1.0 ÷ - 0.5	- 0.5 ÷ 0.0	0.0 ÷ 0.5	0.5 ÷ 1.0
n_k	6	18	22	4

Вариант № 10

1. Из 50 конденсаторов за время T из строя выходят 3 конденсатора. Для контроля выбирают 7 конденсаторов. Найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из четырех независимых подсистем S_a, S_b , S_c и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_b состоят из двух независимых дублирующих блоков b_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a) = 0.95$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c) = 0.8$, $P(d) = 0.85$.

3. Дана система из двух блоков a и b, соединенных параллельно в смысле надежности. Каждый из двух блоков может работать независимо от другого в двух разных режимах. Вероятность наступления первого режима 0.2. Надежность работы первого блока в 1–м, 2–м режимах равна соответственно *0.8; 0.7*. Надежность работы второго блока в 1–м, 2–м режимах равна соответственно 0.9; 0.8. Найти надежность системы, если блоки независимы.

4. Устройство состоит из 1000 независимых элементов. Вероятность отказа работы каждого элемента в течении времени T равна $p = 0.001$. Для случайной величины X – числа отказавших элементов в течение времени T, построить законы распределения, их графики, найти ее числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A\cos^2 x, & |x| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до 1. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	0.0	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0
p_i	0.08	0.13	0.19	0.23	0.17	0.12	0.08

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Какова вероятность того, что среднеарифметическое из n = 50 измерений для выборки из нормального распределения отличается от истинного значения не более, чем на ε = 4, если 1) σ = 10, 2) s = 10.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

Y	X					
	-1	-2	-3	-4	-5	-6
-1	0.01	0.03	0.02	0.0	0.0	0.0
-2	0.01	0.06	0.09	0.14	0.03	0.0
-3	0.0	0.0	0.05	0.08	0.15	0.01
-4	0.0	0.0	0.02	0.05	0.08	0.07
-5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.03	0.05

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов n_X =4 и n_Y = 5 нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\bar{x}$ = 2.2 и $\bar{y}$ = 1.9 и исправленные выборочные дисперсии s_x^2 = 0.08 и s_y^2 = 0.12. При уровне значимости α = 0.05 проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X \neq m_Y$.

10. По критерию Пирсона при уровне значимости α = 0.05 проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону

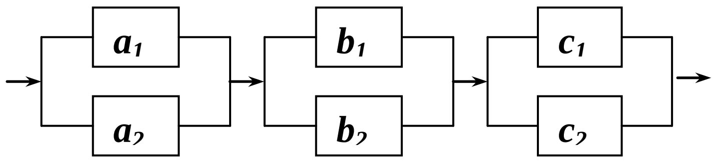
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}, \quad -\infty<x<\infty$, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	-2 ÷ -1	-1 ÷ 0	0 ÷ 1	1 ÷ 2	2 ÷ 3	3 ÷ 4
n_k	1	3	6	12	18	10

Вариант № 11

1. Из 100 изделий, среди которых имеется 6 нестандартных, выбраны случайным образом 6 изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 6 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k (k = 1,2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.8$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c_k) = 0.7$.

3. 25% приборов собирается из высококачественных деталей, остальные – из деталей обычного качества. В первом случае надежность прибора (вероятность безотказной работы за время T) равна 0.95, а если прибор собрали из обычных деталей, его надежность 0.75. Прибор в течение времени T работал безотказно. Чему равна вероятность того, что он собран из высококачественных деталей?

4. Устройство состоит из пяти независимых элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна $p = 0.2$. Для случайной величины X отказавших элементов в одном опыте построить законы распределения, их графики, найти ее числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} A(1-x^4), & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до 0.5. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	-1.0	1.0	3.0	5.0	7.0	9.0	11.0
p_i	0.07	0.12	0.18	0.29	0.16	0.11	0.07

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. По данным выборки объема n = 20 нормальной случайной величины X найдена оценка s = 10. Найти доверительный интервал, покрывающий σ с надежностью β = 0.95.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

	X					
Y	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1	0.02	0.04	0.01	0.	0.0	0.0
2	0.03	0.06	0.10	0.13	0.02	0.0
3	0.0	0.0	0.05	0.08	0.15	0.01
4	0.0	0.0	0.02	0.04	0.08	0.06
5	0.0	0.0	0.01	0.02	0.04	0.03

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов n_X =15 и n_Y = 10 нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x}$ = 21.8 и $\overline{y}$ = 19.9 и исправленные выборочные дисперсии s_x^2 = 0.85 и s_y^2 = 0.95. При уровне значимости α = 0.01 проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X > m_Y$.

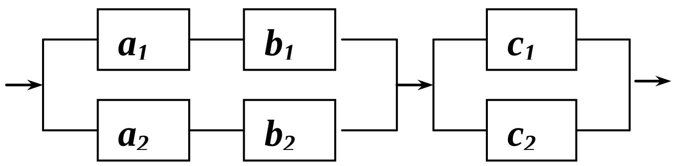
10. По критерию Пирсона при уровне значимости α = 0.025 проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону $f(x)=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$, $-\infty < x < \infty$, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	-2 ÷ -1	-1 ÷ 0	0 ÷ 1	1 ÷ 2	2 ÷ 3	3 ÷ 4
n_k	1	2	6	14	19	8

Вариант № 12

1. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 7 конденсаторов. Для контроля выбирают 5 конденсаторов. Найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из двух независимых подсистем S_{ab} и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков ab_k и c_k (k = 1,2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах). Блок ab_k состоит из последовательно соединенных блоков a_k и b_k



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.7$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c_k) = 0.8$.

3. Испытывается прибор, состоящий из двух узлов a и b, соединенных последовательно в смысле надежности. Надежности (вероятности безотказной работы за время T) узлов a и b известны и равны $P(a) = 0.85$, $P(b) = 0.95$. Узлы отказывают независимо друг от друга. По истечении времени T выяснилось, что прибор неисправен. Найти с учетом этого вероятность того, что неисправен только узел b.

4. Производится многократное испытание некоторого элемента на надежность до тех пор, пока элемент не откажет. Вероятность отказа элемента в каждом опыте равна $p = 0.3$. Для случайного числа X опытов, которые надо произвести, построить ряд распределений, многоугольник распределения, найти числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A(10 - |x|), & |x| \le 10 \\ 0, & |x| > 10 \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до 1. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
p_i	0.07	0.13	0.20	0.26	0.17	0.10	0.07

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Найти доверительный интервал с надежностью β = 0.95 неизвестного математического ожидания нормальной случайной величины X, зная $\overline{x}$ = 20, n = 36, если 1) σ = 10, 2) s = 10.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

Y	X					
	-1.5	-1.0	-0.5	0.5	1.0	1.5
0.5	0.02	0.03	0.03	0.02	0.0	0.0
1.0	0.0	0.06	0.10	0.12	0.03	0.0
1.5	0.0	0.0	0.05	0.08	0.13	0.02
2.0	0.0	0.0	0.01	0.05	0.08	0.08
2.5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.03	0.04

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов n_X =4 и n_Y = 5 нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x}$ = 2.2 и $\overline{y}$ = 1.9 и исправленные выборочные дисперсии s_x^2 = 0.08 и s_y^2 = 0.12. При уровне значимости α = 0.05 проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X \neq m_Y$.

10. По критерию Пирсона при уровне значимости α = 0.025 проверить гипотезу о распределении случайной величины X по показательному закону, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

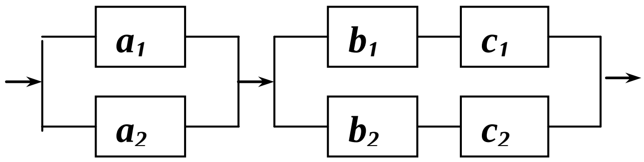
Ω_k	0 ÷ 2	2 ÷ 4	4 ÷ 6	6 ÷ 8	8 ÷ 10	10 ÷ 12
n_k	60	25	7	5	2	1

Вариант № 13

1. Из 100 изделий, среди которых имеется 8 нестандартных, выбраны случайным образом 4 изделия для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 4 изделий окажется ровно

1 нестандартное изделие, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из двух независимых подсистем S_a и S_{bc}. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков a_k и bc_k (k = 1,2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах). Блок bc_k состоит из последовательно соединенных блоков b_k и c_k



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.85$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c_k) = 0.95$.

3. Испытывается прибор, состоящий из двух узлов a и b, соединенных последовательно в смысле надежности. Надежности (вероятности безотказной работы за время T) узлов a и b известны и равны $P(a) = 0.8$, $P(b) = 0.7$. Узлы отказывают независимо друг от друга. По истечении времени T выяснилось, что прибор неисправен. Найти с учетом этого вероятность того, что неисправны оба узла.

4. Имеется 20 изделий, среди которых 5 нестандартных, на вид неотличимых от новых. Наугад выбраны 6 изделий для проверки их качества. Для случайного числа X стандартных изделий, содержащихся в выборке, построить законы распределений, их графики, найти числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A\sin x, & x \in (0, \pi/2) \\ 0, & x \notin (0, \pi/2) \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема $n = 100$ построен ряд распределения:

x_i	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.6	8.5
p_i	0.06	0.09	0.15	0.20	0.16	0.11	0.09	0.08	0.06

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью β = 0.95 точность оценки математического ожидания нормальной случайной величины была равна $\varepsilon = 1.5$, если $\sigma = 15$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

Y	X					
	-1	-2	-3	-4	-5	-6
-1	0.01	0.03	0.02	0.0	0.0	0.0
-2	0.01	0.06	0.09	0.14	0.03	0.0
-3	0.0	0.0	0.05	0.08	0.15	0.01
-4	0.0	0.0	0.02	0.05	0.08	0.07
-5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.03	0.05

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов $n_X = 12$ и $n_Y = 8$ нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x} = 15.3$ и $\overline{y} = 16.5$ и исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 0.47$ и $s_y^2 = 0.54$. При уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X < m_Y$.

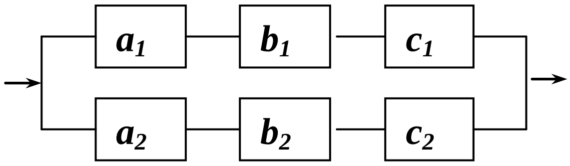
10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по нормальному закону, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	$2 \div 4$	$4 \div 6$	$6 \div 8$	$8 \div 10$	$10 \div 12$	$12 \div 14$	$14 \div 16$
n_k	6	10	14	20	30	15	5

Вариант № 14

1. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 9 конденсаторов. Для контроля выбирают 3 конденсатора. Найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из подсистемы S_{abc}, состоящей из двух независимых дублирующих блоков abc_k $(k = 1,2)$ (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах). Блок abc_k состоит из трех последовательно соединенных блоков a_k, b_k и c_k.



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.9$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c_k) = 0.8$.

3. Дана система из двух блоков *a* и *b*, соединенных последовательно в смысле надежности. Каждый из двух блоков может работать независимо от другого в двух разных режимах. Вероятность наступления первого режима 0.3. Надежность работы первого блока в 1–м, 2–м режимах равна соответственно 0.9; 0.85. Надежность работы второго блока в 1–м, 2–м режимах равна соответственно 0.7; 0.9. Найти надежность системы, если блоки независимы.

4. Устройство состоит из пяти независимых элементов. Вероятность безотказной работы каждого элемента в одном опыте равна p = 0.9. Для случайной величины X элементов, безотказно работавших в одном опыте, построить законы распределения, их графики, найти ее числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} Ax, & x \in (0,5) \\ 0, & x \notin (0,5) \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до 1. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема $n = 100$ построен ряд распределения:

x_i	- 3.5	- 2.5	- 1.5	- 0.5	0.5	1.5	2.5
p_i	0.10	0.19	0.22	0.16	0.14	0.11	0.08

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Какова вероятность того, что среднеарифметическое из n = 50 измерений для выборки из нормального распределения отличается от истинного значения не более, чем на $\varepsilon = 4$, если 1) $\sigma = 10$, 2) $s = 10$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

Y	X					
	1	2	3	4	5	6
-1	0.02	0.025	0.03	0.02	0.0	0.0
-2	0.0	0.10	0.06	0.12	0.02	0.0
-3	0.0	0.0	0.05	0.09	0.13	0.03
-4	0.0	0.0	0.01	0.05	0.065	0.09
-5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.04	0.03

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов $n_X = 11$ и $n_Y = 16$ нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x} = 30.5$ и $\overline{y} = 29.0$ и исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 0.8$ и $s_y^2 = 0.6$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X \neq m_Y$.

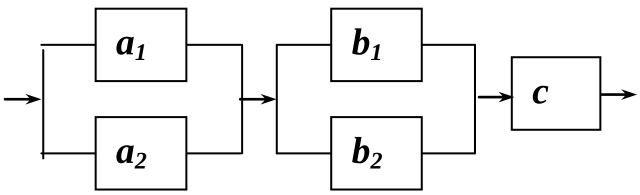
10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по нормальному закону, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	$10 \div 15$	$15 \div 20$	$20 \div 25$	$25 \div 30$	$30 \div 35$
n_k	15	20	35	18	12

Вариант № 15

1. Из 100 изделий, среди которых имеется 5 нестандартных, выбраны случайным образом 7 изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 7 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a и S_b состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k (k = 1,2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.8$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c) = 0.85$.

3. Прибор состоит из двух узлов *a* и *b*, соединенных последовательно в смысле надежности, и стабилизатора напряжения *S*, работающего в двух режимах. При работе стабилизатора в первом режиме с вероятностью 0.7 надежность узлов $P(a) = 0.9$, $P(b) = 0.95$. При работе стабилизатора во втором режиме надежность узлов $P(a) = 0.8$, $P(b) = 0.9$. Найти надежность прибора, если узлы независимы.

4. Из 50 приборов, среди которых имеется 40 новых и 10 бывших в употреблении, выбраны случайным образом 5 приборов. Для случайного числа *X* новых приборов, содержащихся в выборке, построить законы распределений, их график, найти ее числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения *f(x)* случайной величины *X*:

$$f(x) = \begin{cases} A\sin^2 x, & x \in (0, \pi/2) \\ 0, & x \notin (0, \pi/2) \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент *A*, построить график плотности распределения *f(x),* найти функцию распределения *F(x)* и построить ее график, найти вероятность попадания величины *X* на участок от 0 до $\pi/3$. Найти числовые характеристики случайной величины *X*.

6. По выборке объема $n = 100$ построен ряд распределения:

x_i	0.0	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0
p_i	0.08	0.13	0.19	0.23	0.17	0.12	0.08

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Какова вероятность того, что среднеарифметическое из $n = 16$ измерений для выборки из нормального распределения отличается от истинного значения не более, чем на $\varepsilon = 2$, если 1) $\sigma = 4$, 2) $s = 4$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (*X, Y*):

	X					
Y	1	2	3	4	5	6
-2	0.01	0.04	0.02	0.0	0.0	0.0
-1	0.0	0.10	0.12	0.07	0.03	0.0
0	0.0	0.0	0.05	0.10	0.14	0.01
1	0.0	0.0	0.01	0.05	0.09	0.08
2	0.0	0.0	0.0	0.02	0.01	0.05

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум большим независимым выборкам объемов $n_X = 42$ и $n_Y = 58$ нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x} = 120$ и $\overline{y} = 130$. Дисперсии известны $D_x = 24$ и $D_y = 20$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей 1) H_1: $m_X \neq m_Y$, 2) H_1: $m_X < m_Y$.

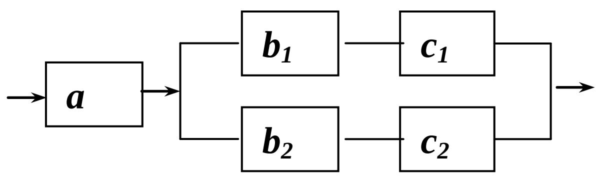
10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по равномерному закону, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	$1 \div 2$	$2 \div 3$	$3 \div 4$	$4 \div 5$	$5 \div 6$
n_k	23	18	22	21	16

Вариант № 16

1. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 4 конденсатора. Для контроля выбирают 8 конденсаторов. Найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из двух независимых подсистем S_a и S_{bc}. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_{bc} состоят из двух независимых дублирующих блоков bc_k ($k = 1,2$) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах). Блок bc_k состоит из последовательно соединенных блоков b_k и c_k



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a) = 0.95$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c_k) = 0.8$.

3. Прибор состоит из двух дублирующих друг друга узлов a и b (соединенных параллельно в смысле надежности) и стабилизатора напряжения S, работающего в двух режимах. При работе стабилизатора в первом режиме с вероятностью 0.8 надежность узлов $P(a) = 0.9$, $P(b) = 0.95$. При работе стабилизатора во втором режиме надежность узлов $P(a) = 0.8$, $P(b) = 0.9$. Найти надежность прибора, если узлы независимы.

4. Передается 7 сообщений по каналу связи. Каждое сообщение с вероятностью p = 0.25 независимо от других искажается. Случайная величина X – число не искаженных сообщений. Построить ее законы распределения, их графики, найти ее числовые характеристики. Найти вероятность того, что будет искажено не менее двух сообщений.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A\cos^2 x, & |x| \le \pi/4 \\ 0, & |x| > \pi/4 \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до 0.5. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	1	3	5	7	9	11	13
p_i	0.07	0.09	0.14	0.21	0.25	0.18	0.06

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Найти доверительный интервал с надежностью β = 0.99 неизвестного математического ожидания нормальной случайной величины X, зная $\overline{x}$ = 20.9, n = 26, если 1) σ = 2, 2) s = 2.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

	X					
Y	-3	-2	-1	1	2	3
-2	0.01	0.03	0.02	0.01	0.0	0.0
-1	0.02	0.08	0.06	0.13	0.03	0.0
0	0.0	0.0	0.05	0.08	0.13	0.02
1	0.0	0.0	0.02	0.06	0.07	0.08
2	0.0	0.0	0.0	0.01	0.03	0.05

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов n_X =14 и n_Y = 9 нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x}$ = 23.8 и $\overline{y}$ = 21.2 и исправленные выборочные дисперсии s_x^2 = 0.44 и s_y^2 = 0.54. При уровне значимости α = 0.05 проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X > m_Y$.

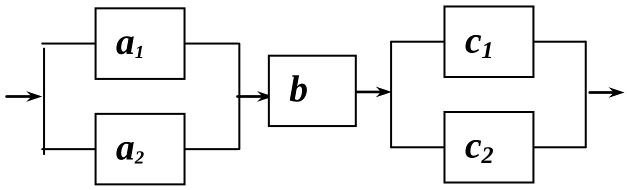
10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону, если $f(x) = 0.25x^3$ при $x \in (0, 2)$, задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	$0.0 \div 0.5$	$0.5 \div 1.0$	$1.0 \div 1.5$	$1.5 \div 2.0$
n_k	1	3	12	34

Вариант № 17

1. Из 100 изделий, среди которых имеется 3 нестандартных, выбраны случайным образом 9 изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 9 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a и S_c состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k и c_k (k = 1,2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.8$, $P(b) = 0.95$, $P(c) = 0.85$.

3. Дана система из двух блоков a и b, соединенных параллельно в смысле надежности. Каждый из двух блоков может работать независимо от другого в трех разных режимах. Вероятность наступления первого режима 0.1, второго 0.3 . Надежность работы первого блока в 1–м, 2–м, 3–м режимах равна соответственно 0.9; 0.8; 085. Надежность работы второго блока в 1–м, 2–м, 3–м режимах равна соответственно 0.9; 0.95; 0.8. Найти надежность системы, если блоки независимы.

4. Устройство состоит из 1000 независимых элементов. Вероятность отказа работы каждого элемента в течении времени T равна p = 0.002. Для случайной величины X – числа отказавших элементов в течение времени T, построить законы распределения, их графики, найти ее числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A\cos x, & |x| \le \pi/3 \\ 0, & |x| > \pi/3 \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до $\pi/6$. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	-1.75	-1.25	- 0.75	- 0.25	0.25	0.75	1.25	1.75
p_i	0.04	0.11	0.19	0.28	0.18	0.10	0.07	0.03

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Найти доверительный интервал неизвестного математического ожидания нормальной случайной величины X, зная доверительную вероятность β = 0.99, объем выборки n = 20, выборочную среднюю $\bar{x}$ =200, если 1) σ = 10, 2) s = 10.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

	X					
Y	-1.5	-1.0	-0.5	0.5	1.0	1.5
0.5	0.01	0.03	0.02	0.01	0.0	0.0
1.0	0.0	0.07	0.10	0.14	0.03	0.0
1.5	0.0	0.0	0.05	0.09	0.13	0.02
2.0	0.0	0.0	0.01	0.04	0.07	0.08
2.5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.03	0.05

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум малым независимым выборкам объемов n_X =10 и n_Y = 8 нормальных распределений найдены выборочные значениями математических ожиданий $\bar{x}$ = 1.2 и $\bar{y}$ = 1.5 и исправленные выборочные дисперсии s_x^2 = 0.08 и s_y^2 = 0.07. При уровне значимости α = 0.01 проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X < m_Y$.

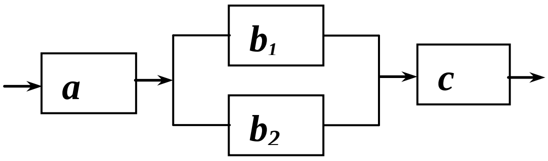
10. По критерию Пирсона при уровне значимости α = 0.05 проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону $F(x) = 0.25x^2$ при $x \in (0, 2)$, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	$0.0 \div 0.5$	$0.5 \div 1.0$	$1.0 \div 1.5$	$1.5 \div 2.0$
n_k	6	10	16	18

Вариант № 18

1. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 5 конденсаторов. Для контроля выбирают 5 конденсаторов. Найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_b состоят из двух независимых дублирующих блоков b_k (k = 1,2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a)$ = 0.95, $P(b_k)$ = 0.9, $P(c)$ = 0.99.

3. Дана система из двух блоков a и b, соединенных параллельно в смысле надежности. Каждый из двух блоков может работать независимо от другого в двух разных режимах. Вероятность наступления первого режима 0.2. Надежность работы первого блока в 1–м, 2–м режимах равна соответственно 0.8; 0.7. Надежность работы второго блока в 1–м, 2–м режимах равна соответственно 0.9; 0.8. Найти надежность системы, если блоки независимы.

4. Передается 7 сообщений по каналу связи. Каждое сообщение с вероятностью p = 0.1 независимо от других искажается. Случайная величина X – число искаженных сообщений. Построить ее законы распределения, их графики, найти ее числовые характеристики. Найти вероятность того, что будет искажено не менее двух сообщений.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A(4 - x^2), & |x| \le 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до 1. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	-2.0	-1.5	- 1.0	- 0.5	0.0	0.5	1.0	1.5
p_i	0.06	0.11	0.19	0.22	0.16	0.12	0.08	0.06

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью β = 0.9 точность оценки математического ожидания нормальной случайной величины была равна ε = 0.5, если σ = 4.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (*X, Y*):

Y	*X*					
	1	2	3	4	5	6
1	0.015	0.035	0.025	0.015	0.0	0.0
2	0.015	0.065	0.1	0.125	0.025	0.0
3	0.0	0.0	0.05	0.085	0.115	0.02
4	0.0	0.0	0.015	0.045	0.085	0.08
5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.035	0.03

Оценить данную матрицу распределения (*X, Y*) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов $n_X = 12$ и $n_Y = 12$ нормальных распределений найдены выборочные значениями математических ожиданий $\bar{x} = 3.2$ и $\bar{y} = 3.5$ и исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 0.14$ и $s_y^2 = 0.10$. При уровне значимости α = 0.05 проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X \neq m_Y$.

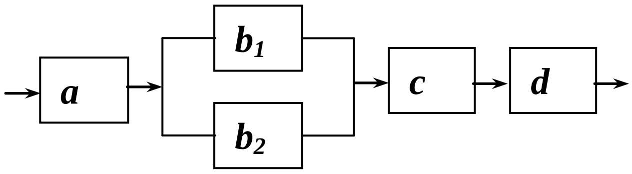
10. .По критерию Пирсона при уровне значимости α = *0.05* проверить гипотезу о распределении случайной величины *X* по закону $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины *X* в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	-3 ÷ -2	-2 ÷ -1	-1 ÷ 0	0 ÷ 1	1 ÷ 2	2 ÷ 3
n_k	6	14	30	29	16	5

Вариант № 19

1. Из 100 изделий, среди которых имеется 4 нестандартных, выбраны случайным образом 6 изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 6 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из четырех независимых подсистем S_a, S_b, S_c и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_b состоит из двух независимых дублирующих блоков b_k (k = 1, 2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a) = 0.95$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c) = 0.8$, $P(d) = 0.85$.

3. Дана система из двух блоков a и b, соединенных последовательно в смысле надежности. Каждый из двух блоков может работать независимо от другого в трех разных режимах. Вероятность наступления первого режима 0.2, второго 0.5, третьего 0.3 . Надежность работы первого блока в 1–м, 2–м, 3–м режимах равна соответственно 0.9; 0.8; 0.7. Надежность работы второго блока в 1–м, 2–м, 3–м режимах равна соответственно 0.9; 0.9; 0.8. Найти надежность системы, если блоки независимы.

4. Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеется 10 дефектных, выбраны случайным образом 4 изделия для проверки их качества. Для случайного числа X дефектных изделий, содержащихся в выборке, построить ряд распределений, функцию распределения и их график, найти ее числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & |x| \le 10 \\ 0, & |x| > 10 \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти ее числовые характеристики, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до 5.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75
p_i	0.08	0.11	0.15	0.20	0.18	0.12	0.09	0.07

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью β = 0.95 точность оценки математического ожидания нормальной случайной величины была равна ε = 1.5, если σ = 15.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

	X					
Y	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
-2	0.01	0.04	0.02	0.0	0.0	0.0
-1	0.01	0.07	0.09	0.14	0.02	0.0
0	0.0	0.0	0.05	0.09	0.16	0.02
1	0.0	0.0	0.01	0.04	0.06	0.08
2	0.0	0.0	0.0	0.02	0.04	0.03

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум независимым выборкам объемов n_X = 50 и n_Y = 60 нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x}$ = 15 и $\overline{y}$ = 14. Дисперсии известны и равны D_x = 1.4 и D_y = 1.2. При уровне значимости α = 0.05 проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей 1) H_1: $m_X \neq m_Y$, 2) H_1: $m_X > m_Y$.

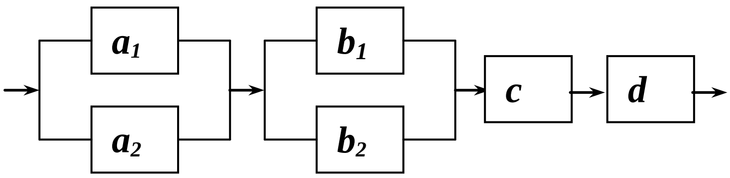
10. По критерию Пирсона при уровне значимости α = 0.025 проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону $F(x) = 1-(x-1)^2$ при $x \in (0, 1)$, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	0.0 ÷ 0.1	0.1 ÷ 0.2	0.2 ÷ 0.4	0.4 ÷ 0.6	0.6 ÷ 1.0
n_k	14	12	11	10	8

Вариант № 20

1. Из 50 конденсаторов за время T из строя выходят 3 конденсатора. Для контроля выбирают 7 конденсаторов. Найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

2. Система S состоит из четырех независимых подсистем S_a, S_b, S_c и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a и S_b состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k (k = 1,2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0.8$, $P(b_k) = 0.9$, $P(c) = 0.99$, $P(d) = 0.95$.

3. Испытывается прибор из двух узлов a и b, соединенных последовательно. Надежности (вероятности безотказной работы за время T) узлов a и b известны и равны $P(a) = 0.8$, $P(b) = 0.9$. Узлы отказывают независимо друг от друга. По истечении времени T выяснилось, что прибор неисправен. Найти с учетом этого вероятность того, что неисправен только узел a.

4. Производятся последовательные независимые испытания $n=10$ приборов на надежность. Надежность каждого прибора равна $p=0.9$. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, когда предыдущий оказался надежным. Для случайного числа X испытанных в данном эксперименте приборов построить законы распределения, их график, найти числовые характеристики.

5. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A|\sin x|, & |x| \le \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases},$$

Требуется найти коэффициент A, построить график плотности распределения $f(x)$, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до $\pi/4$. Найти числовые характеристики случайной величины X.

6. По выборке объема n = 100 построен ряд распределения:

x_i	- 3.25	- 2.75	- 2.25	- 1.75	- 1.25	- 0.75	- 0.25
p_i	0.11	0.19	0.25	0.15	0.13	0.10	0.07

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

7. Какова вероятность того, что среднеарифметическое из n = 50 измерений для выборки из нормального распределения отличается от истинного значения не более, чем на $\varepsilon = 4$, если 1) $\sigma = 10$, 2) $s = 10$.

8. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

Y \ X	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
0.5	0.01	0.03	0.02	0.01	0.0	0.0
1.0	0.02	0.05	0.07	0.10	0.02	0.0
1.5	0.01	0.02	0.05	0.11	0.16	0.03
2.0	0.0	0.0	0.03	0.05	0.06	0.08
2.5	0.0	0.0	0.0	0.02	0.03	0.02

Оценить данную матрицу распределения (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

9. По двум малым независимым выборкам объемов $n_X = 9$ и $n_Y = 8$ нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\bar{x} = 55.5$ и $\bar{y} = 49.1$ и исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 1.8$ и $s_y^2 = 2.4$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X > m_Y$.

10. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0.025$ проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону $f(x) = 0.75\,(1 - x^2)$ при $x \in (-1, 1)$, если задано n_k попаданий выборочных значений X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	-1.0 ÷ -0.5	-0.5 ÷ 0.0	0.0 ÷ 0.5	0.5 ÷ 1.0
n_k	6	19	21	4

Методические указания к решению и оформлению типового варианта ИДЗ

Задача №1. Из N изделий партии, среди которых имеется M нестандартных, выбраны случайным образом n изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных n изделий окажутся ровно m нестандартных изделий, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

Для выполнения данного типа задачи необходимо изучить соответствующий материал в объеме пп. 1, 2–4, 8–9, 12, 14 в [3] или гл. 1, 5–6 в [1] и гл. 1, 3–4 в [2]:

Во-первых, определим искомую вероятность по классическому определению с элементами комбинаторики – формула (1.12.7) в [3]:

$$P_n(m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где, согласно формуле (1.3.3) в [3],

$$C_K^k = \frac{K(K-1)...(K-k+1)}{k!}.$$

Здесь C_K^k – число сочетаний без повторений, определяющее число наборов по k элементов без учета порядка следования из выборки, содержащей K элементов.

В основе исходной формулы (1.12.7) лежит классическое определение вероятности события A – формула (1.4.4) в [3] для расчета $P(A)$ как отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех элементарных исходов. Общее число элементарных исходов опыта равно числу способов, которыми можно выбрать случайным образом n изделий контрольной выборки из N изделий партии, то есть C_N^n. Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию A = {среди выбранных n изделий контрольной выборки окажутся ровно m нестандартных изделий}: во-первых, m нестандартных изделий контрольной выборки из M нестандартных изделий партии можно выбрать C_M^m способами, во-вторых, остальные $n – m$ стандартные изделия контрольной выборки должны быть выбраны из $N – M$ стандартных изделий партии, что можно выбрать C_{N-M}^{n-m} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов, согласно основному правилу умножения комбинаторики, равно $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$. Наконец, отношение числа $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ благоприятствующих исходов событию A к общему числу C_N^n элементарных исходов определит искомую вероятность $P(A)$ по формуле классической вероятности.

Во-вторых, определим вероятность $P_n(m)$ того, что среди выбранных n изделий окажутся ровно m нестандартных по формуле Бернулли – формулы (1.8.1) или (1.12.1) в [3]:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $C_n^m = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}$, $q = 1 - p$, $p = P(A) \approx \dfrac{M}{N}$.

Здесь, согласно схеме испытаний Бернулли, p – вероятность случайного выбора нестандартного изделия, вычисленная приближенно, согласно формуле (1.4.3) в [3], как частота появления нестандартного изделия в исходной партии N изделий, среди которых имеется M нестандартных.

В-третьих, когда n велико, а p мало (обычно $p < 0{,}1$; $npq \le 9$) вместо сложной формулы Бернулли применяют приближенную формулу Пуассона – формулы (1.8.5) или (1.12.3) в [3]:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \quad a = np.$$

В-четвертых, согласно локальной теореме Лапласа вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 \le p \le 1$), событие наступит ровно m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) по формуле (1.9.1) в [3]:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \; x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\varphi(x)$ табулирована, и таблица приведена в данных методических указаниях (см. Приложение 2).

Пример 1.1. Из $N = 100$ изделий партии, среди которых имеется $M = 5$ нестандартных, выбраны случайным образом $n = 6$ изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 6 изделий окажется ровно $m = 1$ нестандартное изделие, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

Решение. 1. Подставляя в формулу (1.12.7) в [3] $P_n(m) = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ вероятности по классическому определению с элементами комбинаторики значения N=100, M=5, n=6, m=1, получим

$$P_6(1) = \frac{C_5^1 C_{95}^5}{C_{100}^6} = \frac{\dfrac{5}{1} \cdot \dfrac{95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}}{\dfrac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} \approx 0.243$$

2. Искомая вероятность по формуле Бернулли (1.8.1) или (1.12.1) в [3] $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ будет равна при N=100, M=5, n=6, m=1

$$P_6(1) = C_6^1 p^1 q^5 \approx \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^5 \approx 0.232 \cdot$$

Здесь учтено, что $q = 1 - p$, $p = P(A) \approx \dfrac{M}{N} = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$.

3. В случае приближенной формулы Пуассона (1.8.5) или (1.12.3) в [3] $P_n(m) \approx \dfrac{a^m e^{-a}}{m!}$ имеем $a = np = 6 \cdot 0.05 = 0.3$ и $P_6(1) \approx \dfrac{0.3^1 e^{-0.3}}{1} \approx 0.222$

4.Наконец, согласно локальной теореме Лапласа искомая вероятность $P_n(m)$ приближенно вычисляется по формуле (1.9.1) в [3]:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\ ; \ x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Найдем значение x: $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{1 - 6 \cdot 0.05}{\sqrt{6 \cdot 0.05 \cdot 0.95}} = \dfrac{0.7}{\sqrt{0.285}} \approx 1{,}3112.$

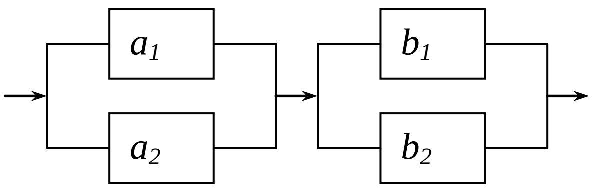
По таблицам $\varphi(x)$ (см. Приложение 2) находим φ (1.311) ≈ 0.169. Искомая вероятность

$$P_6(1) \approx \frac{1}{\sqrt{0.285}} \cdot 0.169 \approx 0.316.$$

<u>Задача №2.</u> Система состоит из нескольких независимых последовательно соединенных подсистем, каждая из которых состоит из нескольких независимых дублирующих (параллельно подсоединенных) блоков. Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков.

Для решения данного типа задачи необходимо изучить соответствующий материал в объеме пп. 1.5, 14 в [3] или гл. 2–4 в [1] и гл. 2 в [2].

Пример 2.1. Система s состоит из двух независимых подсистем a и b. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k (k = 1, 2) (схема параллельного подсоединения блоков в подсистемах).



Найти надежность системы – вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известны надежности блоков $P(A_k) = 0.8$, $P(B_k) = 0.9$. Здесь A_k – событие, состоящее в том, что блок a_k исправен; B_k – событие, состоящее в том, что блок b_k исправен.

Решение. Введем обозначения: S – событие, состоящее в том, что система s исправна; S_a – событие, состоящее в том, что подсистема a исправна; S_b – событие, состоящее в том, что подсистема b исправна. Разобьем систему на две подсистемы a и b. Подсистема a дублирующих блоков исправна в том случае, когда исправен хотя бы один из блоков a_k (k = 1, 2) исправен , то есть $S_a = A_1 + A_2$ – сумма двух совместных независимых событий. Следовательно, согласно формулам (1.5.1) и (1.5.5) в [3], $P(S_a) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0.8 + 0.8 – 0.64 = 0.96$.

Аналогично $S_b = B_1 + B_2$. Следовательно $P(S_b) = P(B_1) + P(B_2) – P(B_1) \cdot P(B_2) = 0.9 + 0.9 – 0.81 = 0.99$. Для исправности системы необходима исправность подсистем a и b, то есть $S = S_a \cdot S_b$. Таким образом, по формуле (1.5.5) в [3], $P(S) = P(S_a) \cdot P(S_b) = 0.9504$.

С другой стороны, надежность системы можно проконтролировать по формуле $P(S) = 1 – P(\bar{S})$, где $\bar{S}$ – событие, противоположное S, состоящее в том, что система неисправна. Для неисправности системы необходима неисправность хотя бы одной из подсистем (a или b), то есть $\bar{S} = \bar{S}_a + \bar{S}_b$. В свою очередь для неисправности подсистемы a дублирующих блоков необходима неисправность блоков a_1 и a_2, то есть $\bar{S}_a = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$. Аналогично $\bar{S}_b = \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2$.

Согласно алгебре вероятностей (формулы (1.5.1, 5, 9) в [3]), будем иметь

$$P(\bar{S}_a) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = \left(1 - P(A_1)\right) \cdot \left(1 - P(A_2)\right) = (1 - 0.8) \cdot (1 - 0.8) = 0.04,$$

$$P(\bar{S}_b) = P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2) = \left(1 - P(B_1)\right) \cdot \left(1 - P(B_2)\right) = (1 - 0.9) \cdot (1 - 0.9) = 0.01,$$

$$P(\bar{S}) = P(\bar{S}_a + \bar{S}_b) = P(\bar{S}_a) + P(\bar{S}_b) - P(\bar{S}_a) \cdot P(\bar{S}_b) =$$
$$= 0.04 + 0.01 - 0.04 \cdot 0.01 = 0.0496.$$

Таким образом, $P(S) = 1 – P(\bar{S}) = 1 - 0.0496 = 0.9504$.

<u>Задача №3</u>. На примере системы (прибора) из нескольких блоков, каждый из которых может работать независимо от другого в разных режимах, что позволяет ввести в рассмотрение полную группу событий, называемых гипотезами, применить для расчета вероятности заданного события формулу полной вероятности или формулу Байеса.

Для выполнения данного типа задачи необходимо изучить соответствующий материал в объеме пп. 1.6–7, 14 в [3] или гл. 4 в [1] и гл. 2 в [2].

Формула полной вероятности. Пусть событие A может произойти с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий, называемых гипотезами. Предположим, что известны вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ и условные вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$. Требуется найти $P(A)$. В нашем случае H_1 +

$H_2 + \ldots + H_n = \Omega$ есть событие достоверное. Можем записать, что $A = A\Omega = A\,(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$. Так как события H_i несовместны, то несовместны и события AH_i. Поэтому по правилу сложения вероятностей несовместных событий и правилу умножения вероятностей из последнего соотношения получаем формулу (1.6.1) в [3] – формулу полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cdot H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i)\ .$$

Пример 3.1. Дана система из двух блоков *a* и *b*, соединенных последовательно в смысле надежности. Каждый из двух блоков может работать независимо от другого в трех разных режимах. Вероятность наступления первого режима 0.1, второго 0.5, третьего 0.4 . Надежность работы первого блока в 1–м, 2–м, 3–м режимах равна соответственно 0.9; 0.8; 0.7. Надежность работы второго блока в 1–м, 2–м, 3–м режимах равна соответственно 0.9; 0.9; 0.8. Найти надежность системы, если блоки независимы.

Решение. Введем обозначения: *A* – событие, состоящее в том, что первый блок *a* исправен; *B* – событие, состоящее в том, что второй блок *b* исправен; *S* – событие, состоящее в том, что система исправна. Тогда $S = A{\cdot}B$ и $P(S) = P(A)\ P(B)$. С учетом возможности трех гипотез (H_k – наступление *k*–го режима) найдем по формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) = 0.1\cdot 0.9 + 0.5\cdot 0.8 + 0.4\cdot0.7 = 0.77$. Аналогично находим $P(B) = P(H_1) \cdot P(B/H_1) + P(H_2) \cdot P(B/H_2) + P(H_3) \cdot P(B/H_3) = 0.1\cdot0.9 + 0.5\cdot0.9 + 0.4\cdot0.8 = 0.86$. Таким образом, $P(S) = P(A)\cdot P(B) = 0.77\cdot0.86 = 0.6622$.

Формула Байеса. Пусть имеет место равенство: $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$, где H_1 , H_2 ,…, H_n – полная группа несовместных событий. Предположим, что произведен эксперимент, в результате которого событие *A* наступило. Эта дополнительная информация позволяет произвести переоценку вероятностей гипотез H_i, вычислив $P(H_i /A)$. По теореме умножения вероятностей $P(A\ H_i) = P(A) \cdot P(H_i /A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$. Откуда

$$P\,(H_i /A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)}\ ,$$

или, вычислив $P(A)$ по формуле полной вероятности, получим формулу (1.7.1) в [3]:

$$P\,(H_i /A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A / H_k)}$$

Она дает выражение послеопытных вероятностей через доопытные вероятности. Так как H_1, H_2,..., H_n называют гипотезами, поэтому найденную формулу Байеса еще называют формулой переоценки гипотез.

Пример 3.2. 40% приборов собирается из высококачественных деталей, остальные – из деталей обычного качества. В первом случае надежность прибора (вероятность безотказной работы за время T) равна 0,90, а если прибор собрали из обычных деталей, его надежность 0,60. Прибор в течении времени T работал безотказно. Чему равна вероятность того, что он собран из высококачественных деталей?

Решение. Возможны две гипотезы: H_1 – прибор собран из высококачественных деталей; H_2 – прибор собран из обычных деталей. Вероятность того, что прибор собран из высоко качественных деталей равна $P(H_1)$ =0.4 и из обычных – $P(H_2)$ = 0.6.

Пусть A – событие, состоящее в том, что прибор безотказно работал в течение времени T. Тогда вероятность того, что прибор безотказно проработавший в течение времени T, был собран из высококачественных деталей равна $P(A/H_1)$ = 0.9 и из обычных – $P(A/H_2)$ = 0.6; По условию задачи прибор в течении времени T работал безотказно. Нас интересует вероятность $P(H_1/A)$, что этот прибор собран из высококачественных деталей. По формуле Байеса получаем

$$P(H_1/A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1)/\{P(H_1)\cdot P(A/H_1) + (H_2)\cdot P(A/H_2)\} =$$
$$= 0.4\cdot 0.9 /(0.4\cdot 0.9 + 0.6\cdot 0.6) = 0.5.$$

Задача №4. Для дискретной случайной величины, согласно условию задания, выбрать один из частных законов распределения и вычислить соответствующие числовые характеристики.

Для выполнения данного типа задачи необходимо изучить соответствующий материал в объеме пп. 1.10–12, 14 в [3] или гл. 6–8, 10 в [1] и гл. 4 в [2].

Дискретной случайной величиной X называется величина, которая в результате опыта может принять отдельные, изолированные значения x_i. Принятие некоторого значения случайной величиной X – есть случайное событие, состоящее в том, что случайная величина X принимает конкретное числовое значение x_i: $X = x_i$. Поэтому в данном случае говорят о случайной величине X, которая может принимать числовое значение x_i с определенной вероятностью $p_i = P(X = x_i)$. Дискретная случайная величина X может быть задана рядом распределения или функцией распределения (интегральным законом распределения). Рядом распределения называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $p_i = P(X = x_i)$, он может быть задан в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

При этом вероятности p_i удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Графическое изображение ряда распределения называется многоугольником распределения. Для его построения возможные значения случайной величины (x_i) откладываются по оси абсцисс, а вероятности p_i – по оси ординат; точки A_i с координатами (x_i, p_i) соединяются ломаными линиями. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности того, что случайная величина X будет меньше этого значения x, то есть $F(x) = P(X< x)$. Функция $F(x)$ для дискретной случайной величины вычисляется по формуле (1.10.1) в [3]: $F(x)=\sum_{x_i<x} p_i$, где суммирование ведется по всем i, для которых $x_i < x$.

Свойства случайной величины могут характеризоваться различными параметрами. Важнейшие из них – математическое ожидание случайной величины, которое обозначается через $M(X)$, и дисперсия $D(X) = \sigma^2(X)$, корень квадратный из которой $\sigma(X)$ называют среднеквадратическим отклонением или стандартом.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности: $M(X) =\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$ – формула (1.11.1) в [3]. Математическое ожидание $M(X)$ можно понимать как «теоретическое среднее значение случайной величины». Если математическое ожидание случайной величины дает нам «ее среднее значение» или точку на координатной прямой, «вокруг которой разбросаны» значения рассматриваемой случайной величины, то дисперсия характеризует «степень разброса» значений случайной величины около ее среднего. Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения значения случайной величины от ее математического ожидания, т.е. $D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}$. Дисперсию удобно вычислять по формуле (1.11.5) в [3]: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$. Для дискретной случайной величины X формула дает $D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i\right]^2$ – формула (1.11.6) в [3]. Положительный корень из дисперсии называется среднеквадратичным отклонением и обозначается $\sigma = +\sqrt{D(X)}$. Случайная величина называется центрированной, если $M(X) = 0$. Случайная величина называется стандартизированной, если $M(X) = 0$ и $\sigma = 1$. Наряду с общими формулами вычисления математического ожидания *M(X)* и дисперсии *D(X)* в случае частных законов распределения и существуют и соответствующие частные формулы вычисления числовых характеристик (см. приложение 1).

Выше были рассмотрены общие формы законов распределения и числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин. В связи с выполнением задания №4 рассмотрим некоторые важные для практики распределения случайных величин и соответствующие им числовые характеристики.

1) ***Биномиальное распределение.*** Дискретная случайная величина *X*, которая принимает значение *m* с вероятностью, вычисляемой по формуле (1.12.1) в [3],

$$P_n(X = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}\ ,\ m = 0,1,...,n.;\quad 0 \le p \le 1;\ q = 1 - p$$

называется распределенной по биномиальному закону. На практике биномиальное распределение возникает при следующих условиях. Пусть проводятся *n* независимых испытаний (опытов), в каждом из которых событие *A* («успех» опыта) может наступить с одной и той же вероятностью *p*, тогда число наступлений события *A* в *n* испытаниях и есть случайная величина *X*. Основные характеристики биномиального распределения вычисляются по формулам (1.12.2) в [3]:

$$M(X) = np,\quad D(X) = npq\ .$$

2)***Распределение Пуассона.*** Случайная величина *X* называется распределенной по закону Пуассона с параметром *a > 0,* если ее возможные значения равны *m* = 0,1,…, а соответствующие вероятности определяются формулой (1.12.3) в [3]

$$P(X = m) = P_m \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}\ .$$

Для распределения Пуассона $M(X) = D(X) = a$. Распределение Пуассона получается из биномиального распределения предельным переходом $n \to \infty,\ p \to 0$, при условии $np = a = const$ и в этом случае интерпретируется как закон редких событий. Этим распределением можно пользоваться приближенно, если производится большое число независимых опытов, в каждом из которых событие происходит с малой вероятностью.

3)***Геометрическое распределение.*** Дискретная случайная величина *X*, которая принимает значение *m* с вероятностью, вычисляемой по формуле (1.12.4) в [3],

$$P(X=m)=P_m=p\ q^m\ ,\ m=0,1,...,n.;\quad 0\le p\le 1;\ q=1-p$$

называется распределенной по геометрическому закону. Вероятности P_m для последовательных значений m образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q. На практике геометрическое распределение возникает при следующих условиях. Пусть проводятся ряд независимых испытаний (опытов) с целью получения какого-то результата («успеха») A; при каждой попытке «успех» достигается с одной и той же вероятностью p, тогда число «безуспешных» попыток (до первой попытки, в которой наступает результат A) и есть случайная величина X. Основные числовые характеристики геометрического распределения выражаются через параметр распределения по формуле (1.12.5) в [3]:

$$M(X)=\frac{1-p}{p},\quad D(X)=\frac{1-p}{p^2}.$$

На практике приходится рассматривать случайную величину $Y = X + 1$ – число попыток до первого «успеха», включая удавшуюся. Основные числовые характеристики распределения случайной величины Y будут иметь вид согласно формулам (1.12.6) в [3]:

$$M(Y)=\frac{1}{p},\quad D(Y)=\frac{1-p}{p^2}.$$

4)***Гипергеометрическое распределение.*** Случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами $N = 2, 3, \dots;$ $M = 1, 2, \dots < N;$ $n = 1, 2, \dots < N$, если она принимает конечное множество натуральных значений $X = m$, соответственно с вероятностями, вычисляемыми по формуле (1.12.7) в [3],

$$P\{X=m\}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\quad ,\text{где } m = 0, 1, 2, \dots, \min(M,n)$$

На языке «схемы урн» гипергеометрическое распределение возникает при следующих условиях. В урне находится N шаров, из которых ровно M белых. Пусть одновременно (или один за другим без возврата) извлечены n шаров. Вероятность того, что среди этих извлеченных шаров будет m белых шаров, определяется по выше указанной формуле. На практике гипергеометрическое распределение применяется при решении задач, связанных с контролем продукции. Основные числовые характеристики случайной величины, подчиняющейся гипергеометрическому распределению, вычисляются по формулам (1.12.8) в [3]:

$$M(X)=\frac{nM}{N}\ ;\quad D(X)=\frac{nM(N-M)(N-n)}{(N-1)N^2}$$

Пример 4.1. Передается n = 5 сообщений по каналу связи. Каждое сообщение с вероятностью p = 0.3 независимо от других искажается. Случайная величина X – число искаженных сообщений. Построить ее ряд распределения, многоугольник распределения, найти ее числовые характеристики. Найти вероятность того, что будет искажено не менее двух сообщений.

Решение. Случайная величина X – число искаженных сообщений – распределена по биномиальному закону (под «опытом» разумеется передача сообщения, а под «успехом» − его искажение). По формуле (1.12.1) находим

$$P_5(0)=C_5^0 0.3^0 0.7^{5-0} = 1\cdot 1\cdot 0.7^5 = 0.16807;$$

$$P_5(1)=C_5^1 0.3^1 0.7^{5-1} = 5\cdot 0.3\cdot 0.2401 = 0.36015;$$

$$P_5(2)=C_5^2 0.3^2 0.7^{5-2} = 10\cdot 0.09\cdot 0.343 = 0.30870;$$

$$P_5(3)=C_5^3 0.3^3 0.7^{5-3} = 0.13230;\quad P_5(4)=C_5^4 0.3^4 0.7^{5-4} = 0.02835;$$

Приближенно ряд распределения X будет иметь вид

$X=m$	0	1	2	3	4	5
$P_5(m)$	0.168	0.360	0.309	0.133	0.028	0.002

Функция $F(x)$ вычисляется по формуле (1.10.1) в [3]: $F(x)=\sum\limits_{x_i<x} p_i$,

где суммирование ведется по всем i, для которых $x_i < x$. Приближенно функция распределения X будет иметь вид

x	$x<0$	$0\le x<1$	$1\le x<2$	$2\le x<3$	$3\le x<4$	$4\le x<5$	$5\le x$
$F(x)$	0	0.168	0.528	0.837	0.970	0.998	1.000

Изобразим многоугольник распределения $P_5(m)$ (рис.4.1) и график функции распределения $F(x)$ (рис.4.2) случайной величины X:

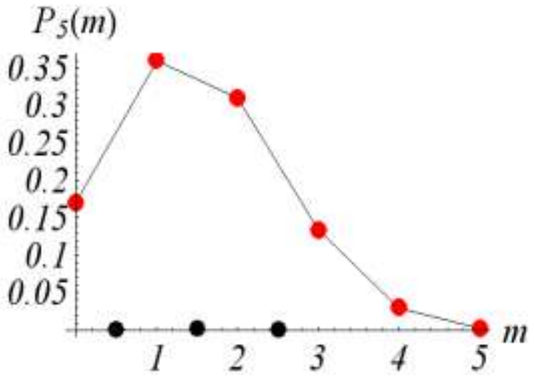


Рис.4.1.

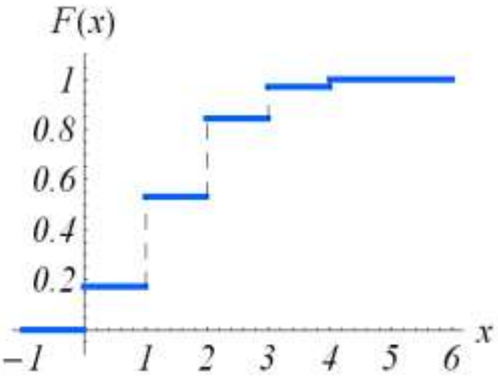


Рис.4.2.

Вычислим основные характеристики биномиального распределения по формулам (1.12.2):

$$M(X) \approx 1.5, \quad D(X) \approx 1.05, \quad \sigma = +\sqrt{D(X)} \approx 1.025,$$

и нанесем точками на горизонтальной оси многоугольника распределения значения $M(X)$ – «среднее значение случайной величины» и $M(X) \pm \sigma$ – среднеквадратичные отклонения случайной величины от ее среднего.

Наконец, найдем вероятность того, что будет искажено не менее двух сообщений с помощью противоположного события:

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X < 2\} = 1 - (P_5(0) + P_5(1)) \approx 0.472$$

Пример 4.2. Имеется 7 радиоламп, среди которых 3 неисправные, на вид неотличимые от новых. Наугад берутся 4 радиолампы и вставляются в 4 патрона. Найти ряд распределения и построить многоугольник распределения числа радиоламп X, которые будут работать. Найти ее числовые характеристики.

Решение. Величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами $N = 7$; $n = 4$; $M = 4$. По формуле (1.12.7) находим

$$P\{X=1\} = \frac{C_4^1 C_3^3}{C_7^4} = 4/35; \quad P\{X=2\} = \frac{C_4^2 C_3^2}{C_7^4} = 18/35;$$

$$P\{X=3\} = \frac{C_4^3 C_3^1}{C_7^4} = 12/35; \quad P\{X=4\} = \frac{C_4^4 C_3^0}{C_7^4} = 1/35;$$

Ряд распределения случайной величины X будет иметь приближенный вид

$X = m$	1	2	3	4
P_m	0.114	0.514	0.343	0.029

Функция $F(x)$ вычисляется по формуле (1.10.1) в [3]: $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$,

где суммирование ведется по всем i, для которых $x_i < x$. Приближенно функция распределения X будет иметь вид

x	$x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$3 \leq x < 4$	$4 \leq x$
$F(x)$	0	0.114	0.628	0.971	1.000

Изобразим многоугольник распределения P_m и (рис.4.3) и график функции распределения $F(x)$ (рис.4.4) случайной величины X:

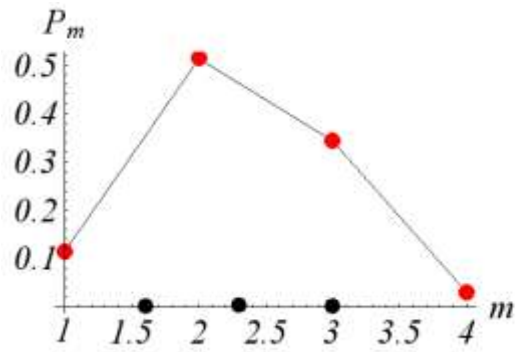


Рис.4.3.

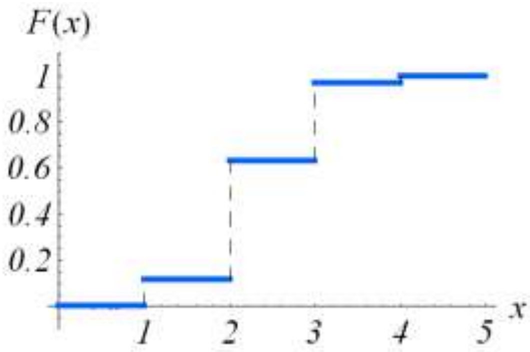


Рис.4.4.

Основные числовые характеристики случайной величины X вычислим по формулам (1.12.8): $M(X) \approx 2.286$; $D(X) \approx 0.490$; $\sigma = +\sqrt{D(X)} \approx 0{,}7$ и нанесем точками на горизонтальной оси многоугольника распределения значения $M(X)$ − «среднее значение случайной величины» и $M(X) \pm \sigma$ − среднеквадратичные отклонения случайной величины от ее среднего.

Пример 4.3. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p = 0.6. Для случайного числа X выстрелов по цели до первого попадания построить законы распределения, их графики, найти числовые характеристики.

Решение. В данном случае X – число выстрелов до первого попадания – распределена по геометрическому закону. Искомая вероятность вычисляется по формуле (1.12.4) в [3]:

$$P(X=0) = p\,q^0 = 0.6 \cdot 0.4^0 = 0.60000,$$

$$P(X=1) = p\,q^1 = 0.6 \cdot 0.4^1 = 0.24000\ ,$$

$$P(X=2) = p\,q^2 = 0.6 \cdot 0.4^2 = 0.09600\ ,$$

$$P(X=3) = p\,q^3 = 0.6 \cdot 0.4^3 = 0.03840\ ,$$

$$P(X=4) = p\,q^4 = 0.6 \cdot 0.4^4 = 0.01536\ ,$$

$$P(X=5) = p\,q^5 = 0.6 \cdot 0.4^5 = 0.00614\ ,$$

………………………………

Приближенно ряд распределения X будет иметь вид

$X=m$	0	1	2	3	4	5	6	…
P_m	0.600	0.240	0.096	0.038	0.015	0.006	0.002	…

Функция $F(x)$ вычисляется по формуле (1.10.1) в [3]: $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, где суммирование ведется по всем i, для которых $x_i < x$. Приближенно функция распределения X будет иметь вид

x	$x<0$	$0\le x<1$	$1\le x<2$	$2\le x<3$	$3\le x<4$	$4\le x<5$	$5\le x<6$	…
$F(x)$	0	0. 6	0.84	0.936	0.974	0.989	0.995	…

Изобразим многоугольник распределения P_m (рис.4.5) и график функции распределения $F(x)$ (рис.4.6) случайной величины X:

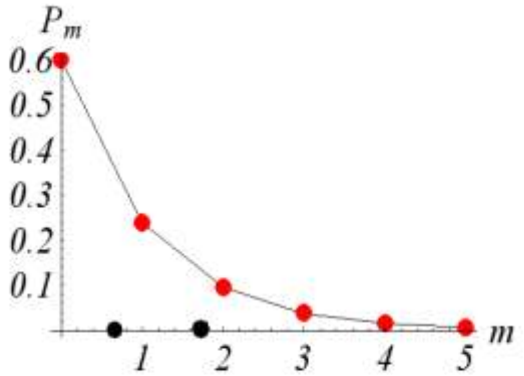


Рис.4.5.

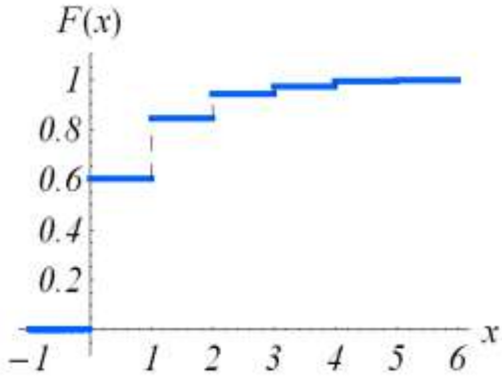


Рис.4.6.

Вычислим основные характеристики биномиального распределения по формулам (1.12.5):

$$M(X)=\frac{1-p}{p}=\frac{2}{3},\quad D(X)=\frac{1-p}{p^2}=\frac{10}{9},\ \sigma=+\sqrt{D(X)}\approx 1.054,$$

и нанесем точками на горизонтальной оси многоугольника распределения значения $M(X)$ − «среднее значение случайной величины» и $M(X)+\sigma$ − среднеквадратичное отклонение случайной величины от ее среднего вправо.

Пример 4.4. Устройство состоит из n = 1000 независимых элементов. Вероятность отказа работы каждого элемента в течении времени T равна p = 0.0015. Для случайной величины X – числа отказавших элементов в течение времени T построить законы распределения, их графики, найти ее числовые характеристики.

Решение. В данном случае X – числа отказавших элементов – распределена по закону Пуассона с параметром $a=n\cdot p$ =1000 0.0015 = 1.5. Искомая вероятность вычисляется по формуле (1.12.3) в [3]:

$$P(X=0)\approx\frac{1.5^0\cdot e^{-1.5}}{0!}\approx 0.223,\qquad P(X=1)\approx\frac{1.5^1\cdot e^{-1.5}}{1!}\approx 0.335,$$

$$P(X=2)\approx\frac{1.5^2\cdot e^{-1.5}}{2!}\approx 0.251,\qquad P(X=3)\approx\frac{1.5^3\cdot e^{-1.5}}{3!}\approx 0.126,$$

$$P(X=4)\approx\frac{1.5^4\cdot e^{-1.5}}{4!}\approx 0.047,\qquad P(X=5)\approx\frac{1.5^5\cdot e^{-1.5}}{5!}\approx 0.014,$$

$$P(X=6)\approx\frac{1.5^6\cdot e^{-1.5}}{6!}\approx 0.004,\ldots..$$

Приближенно ряд распределения *X* будет иметь вид

$X=m$	0	1	2	3	4	5	6	…
P_m	0.223	0.335	0.251	0.126	0.047	0.014	0.0035	…

Функция *F(x)* вычисляется по формуле (1.10.1) в [3]: $F(x)=\sum_{x_i<x} p_i$, где суммирование ведется по всем *i*, для которых $x_i < x$. Приближенно функция распределения *X* будет иметь вид

x	**x < 0**	$0\le x<1$	$1\le x<2$	$2\le x<3$	$3\le x<4$	$4\le x<5$	$5\le x<6$	…
F(x)	0	0.223	0.558	0.809	0.935	0.982	0.996	…

Изобразим многоугольник распределения P_m (рис.4.7) и график функции распределения *F(x)* (рис.4.8) случайной величины *X*:

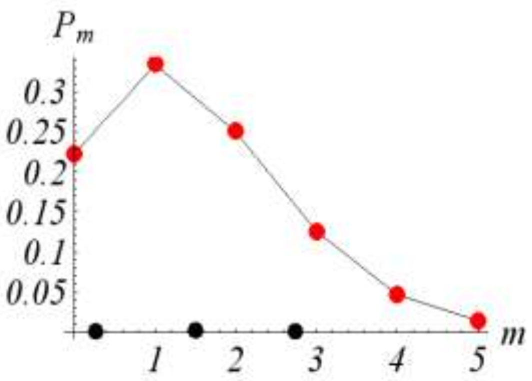


Рис.4.7.

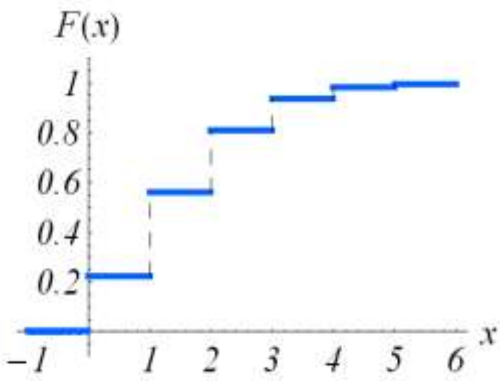


Рис.4.8.

Вычислим основные характеристики распределения Пуассона по формулам $M(X)=D(X)=a=1.5$, $\sigma=+\sqrt{D(X)}\approx 1.225$ и нанесем точками на горизонтальной оси многоугольника распределения значения *M(X)* – «среднее значение случайной величины» и $M(X)\pm\sigma$ – среднеквадратичные отклонения случайной величины от ее среднего.

<u>Задача №5.</u> Задана плотность распределения *f(x, A)* с параметром *A* непрерывной случайной величины *X*. Требуется найти параметр *A*, построить график плотности распределения *f(x),* найти функцию распределения *F(x)* и построить ее график, найти вероятность попадания величины *X* на участок от *a* до *b*. Найти числовые характеристики случайной величины *X*.

Для выполнения данного типа задачи необходимо изучить соответствующий материал в объеме пп. 1.10–12, 14 в [3] или гл. 11–12 в [1] и гл. 6 в [2]:

Непрерывной называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторые конечные или бесконечные промежутки. Непрерывная случайная величина задается либо функцией распределения *F(x)* (интегральным законом распределения), либо плотностью вероятности *f(x)* (дифференциальным законом распределения).

Функция распределения $F(x) = P\ (X < x)$, где *x* – произвольное действительное число, определяется как вероятность того, что случайная величина принимает значения, меньшие *x*. Функция распределения *F(x)* позволяет определять вероятность попадания случайной величины в заданный интервал по формуле (1.10.4) в [3]:

$$P(a \le X < в) = F(в) - F(a).$$

Плотность вероятности *f(x)* (дифференциальный закон распределения) определяется с помощью соотношения *(1.10.3)* в [3]:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = F'(x)$$

и, как следствие, обладает следующими основными свойствами:

1) $f(x) \ge 0$ – формула (1.10.8) в [3],

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ – формула (1.10.10) в [3],

3) $P(a \le X < в) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ – формула (1.10.11) в [3].

Функция распределения связана с плотностью следующими формулами (1.10.12–13) в [3]:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad и \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x).$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины *X* называется интеграл (1.11.4) в [3]:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

причем предполагается, что интеграл сходится абсолютно; здесь *f(x)* – плотность вероятности распределения случайной величины *X*.

Математическое ожидание *M(X)* можно понимать как «теоретическое среднее значение случайной величины».

Дисперсией *D(X)* случайной величины *X* называется математическое ожидание квадрата отклонения значения случайной величины от ее математического ожидания, т.е. интеграл (1.11.7) в [3]:

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{x - M(X)\}^2 f(x)dx.$$

Пример 5.1. Задана плотность распределения *f(x)* случайной величины *X*:

$$f(x)=\begin{cases} A\cos x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2} \end{cases},$$

Требуется найти параметр *A*, построить график плотности распределения *f(x),* найти функцию распределения *F(x)* и построить ее график, найти вероятность попадания величины *X* на участок от от 0 до $\dfrac{\pi}{4}$. Найти числовые характеристики случайной величины *X*.

Решение. Для определения коэффициента *A* воспользуемся свойством (1.10.10) плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} A\cos x dx = A\sin x\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2}=2A=1, \quad \text{откуда } A=\frac{1}{2}.$$

По формуле (1.10.12): $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ получаем выражение функции распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}(\sin x+1), & |x|\le\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Графики плотности распределения *f(x)* функции распределения *F(x)* изображены на рис. 5.1 и рис. 5.2 соответственно

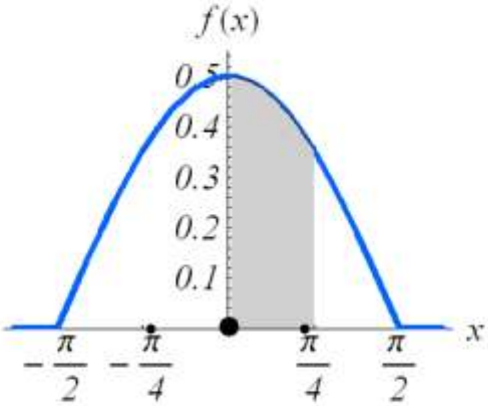


Рис.5.1.

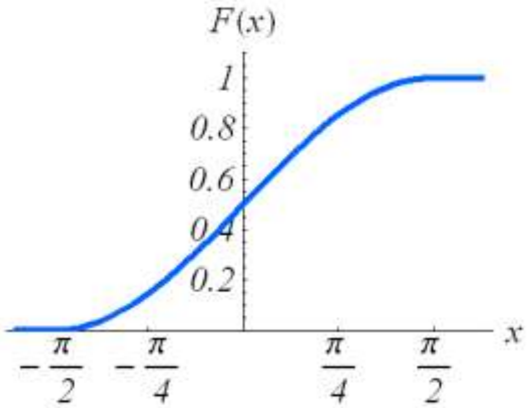


Рис.5.2.

По формуле (1.10.11) находим вероятность попадания величины X на участок от 0 до $\frac{\pi}{4}$:

$$P(0 \le X \le \frac{\pi}{4}) = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0) = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

либо по формуле (1.10.4)

$$P(0 \le X \le \frac{\pi}{4}) = F(\frac{\pi}{4}) - F(0) = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + 1) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Значение $P(0 \le X \le \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.35$ проиллюстрировано геометрически затемненной областью на фоне графика плотности распределения $f(x)$, ограничивающего сверху криволинейную трапецию единичной площадью (рис. 5.1).

Нахождение числовых характеристик случайной величины X начинаем с вычисления математического ожидания по формуле (1.11.4) в [3]:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x\frac{\cos x}{2}dx = 0$$

согласно свойству определенного интеграла от нечетной подинтегральной функции по симметричной области интегрирования.

Дисперсию $D(X)$ случайной величины X вычисляем по формуле (1.11.7) в [3], применяя метод интегрирования по частям дважды:

$$D(X) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [x-0]^2 \frac{\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x^2 \cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x^2 \Rightarrow du = u'dx = 2xdx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 \sin x \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 2x \sin x dx \right] = \frac{\pi^2}{4} - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x \sin x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x \Rightarrow du = u'dx = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-[-x\cos x\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2}-\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}-\cos xdx=\frac{\pi^2}{4}-[0+\sin x\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2}]=\frac{\pi^2}{4}-2$$

Как следствие $\sigma=+\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-2}\approx\sqrt{0.4674}\approx 0.684.$

Вычисленные числовые характеристики (значения *M(X)* − «среднее значение случайной величины» и $M(X)\pm\sigma$ − среднеквадратичные отклонения случайной величины от ее среднего) проиллюстрируем геометрически точками на горизонтальной оси графика плотности распределения *f(x)* (рис. 5.1).

Пример 5.2. Задана плотность распределения *f(x)* случайной величины *X*:

$$\boldsymbol{f(x)}=\begin{cases}A, & x\in[1,3]\\ 0, & x\notin[1,3]\end{cases},$$

Требуется найти параметр *A*, построить график плотности распределения *f(x),* найти функцию распределения *F(x)* и построить ее график, найти вероятность попадания величины *X* на участок от от 2 до $\frac{9}{4}$. Найти числовые характеристики случайной величины *X*.

Решение. Для определения коэффициента *A* воспользуемся свойством (1.10.10) плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{1}^{3} Adx=Ax\Big|_1^3=2A=1,\text{ откуда } A=\frac{1}{2}.$$

По формуле (1.10.12): $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ получаем выражение функции распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{2}(x-1), & x\in[1,3]\\ 1, & x>3\end{cases}.$$

Графики плотности распределения *f(x)* функции распределения *F(x)* изображены на рис. 5.3 и рис. 5.4 соответственно.

По формуле (1.10.11) находим вероятность попадания величины *X* на участок от 2 до $\frac{9}{4}$:

$$P(2 \le X \le \frac{9}{4}) = \int_2^{9/4} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x\Big|_2^{9/4} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} - 2\right) = \frac{1}{8},$$

либо по формуле (1.10.4)

$$P(2 \le X \le \frac{9}{4}) = F(\frac{9}{4}) - F(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} - 1\right) - \frac{1}{2}(2 - 1) = \frac{1}{8}.$$

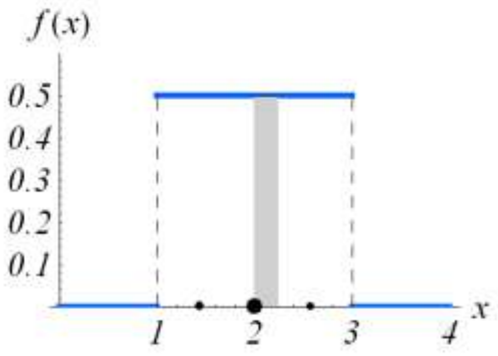


Рис.5.3.

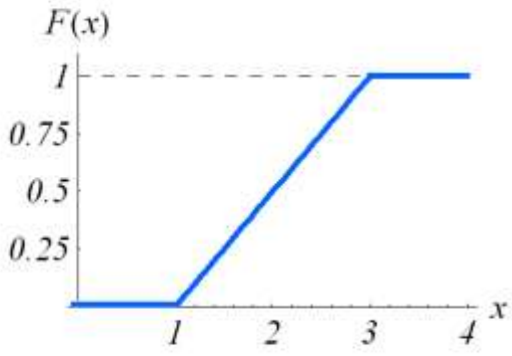


Рис.5.4.

Значение $P(2 \le X \le \frac{9}{4}) = \frac{1}{8}$ проиллюстрировано геометрически затемненной областью на фоне графика плотности распределения $f(x)$, ограничивающего сверху прямоугольник единичной площадью (рис. 5.3).

Нахождение числовых характеристик случайной величины X начинаем с вычисления математического ожидания по формуле (1.11.4) в [3]:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_1^3 x \frac{1}{2} dx = \frac{x^2}{4}\Big|_1^3 = \frac{9-1}{4} = 2.$$

Дисперсию $D(X)$ случайной величины X вычисляем по формуле (1.11.7) в [3]:

$D(X) =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx = \int_1^3 [x-2]^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 4\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3^3 - 1^3}{3} - 2\cdot\left(3^2 - 1^2\right) + 4\cdot(3-1)\right) = \frac{1}{3}.$$

Как следствие $\sigma = +\sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0.577.$

Вычисленные числовые характеристики (значения $M(X)$ – «среднее значение случайной величины» и $M(X) \pm \sigma$ – среднеквадратичные отклонения случайной величины от ее среднего) проиллюстрируем геометрически точками на горизонтальной оси графика плотности распределения *f(x)* (рис. 5.3).

Задача №6. По выборке объема *n* построен ряд распределения:

$\bar{\bar{x}}_j$	$\bar{\bar{x}}_1$	$\bar{\bar{x}}_2$	…	$\bar{\bar{x}}_k$
p_j	p_1	p_2	…	p_k

построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

Для выполнения данного типа задачи необходимо изучить соответствующий материал в объеме п. 2.2 в [3] или гл. 15–16 в [1] и гл. 9–10 в [2]:

Полный набор всех возможных *N* значений дискретной случайной величины *X* называют генеральной совокупностью. Однако в реальных условиях нельзя рассчитывать на такую подробную информацию. Часть генеральной совокупности из *n* элементов, отобранных случайным образом, называется выборкой, при этом число *n* называют объемом выборки. Различают выборки малого ($n < 30$) и большого ($n > 30$) объема.

Вначале на основе результатов эксперимента строят простой статистический ряд – таблицу, состоящую из двух строк, в первой – порядковый номер измерения, во второй – его результат. Для визуальной оценки распределения случайной величины производят группировку данных: x_i располагают в порядке возрастания, затем интервал наблюдаемых значений случайной величины разбивают на *m* последовательных непересекающихся частичных интервалов $\tilde{x}_0 \div \tilde{x}_1$, $\tilde{x}_1 \div \tilde{x}_2$ … $\tilde{x}_{j-1} \div \tilde{x}_j$, … , $\tilde{x}_{m-1} \div \tilde{x}_m$, далее подсчитывают числа n_j - количество x_i , попавших в *j*–тый интервал, затем подсчитывают частоты $p_j = \dfrac{n_j}{n}$ и полученный таким образом группированный статистический ряд отражают таблицами вида:

$\tilde{x}_{j-1} \div \tilde{x}_j$	$\tilde{x}_0 \div \tilde{x}_1$	$\tilde{x}_1 \div \tilde{x}_2$	…	$\tilde{x}_{m-1} \div \tilde{x}_m$
p_j	p_1	p_2	…	p_m

или, определяя середину ***j***-ого интервала $\bar{\bar{x}}_j = \tilde{x}_j + 0.5\Delta_j$, где $\Delta_j = \tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1}$ – длина ***j***– ого интервала, получают ряд распределения в виде

$\bar{\bar{x}}_j$	$\bar{\bar{x}}_1$	$\bar{\bar{x}}_2$	…	$\bar{\bar{x}}_m$
p_j	p_1	p_2	…	p_m

При этом частоты p_j удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$. Деля частоту p_j на длину соответствующего интервала Δ_j, получим таблицу плотностей частоты f_j. Откладывая по оси абсцисс интервалы $\tilde{x}_{j-1} \div \tilde{x}_j$, и надстраивая на каждом интервале, как на основании, прямоугольник высотой f_j ,то есть площадью p_j , получим ступенчатую столбцевую фигуру – гистограмму частот - статистический аналог кривой плотности распределения. Еще более точной оценкой кривой плотности распределения является полигон частот – ломаная, отрезки которой соединяют точки ($\bar{\bar{x}}_j$, f_j).

Другим способом графического представления эмпирического закона распределения является эмпирическая функция распределения – оценка функции распределения дискретной случайной величины X, вычисляемая по формуле $F(x) = \sum_{x_j<x} p_j$ и являющаяся разрывной ступенчатой, равной нулю левее наименьшего наблюдаемого значения, испытывающей скачок величиной p_j при переходе через левую границу j–ого интервала и в итоге достигающей единицы правее наибольшего наблюдаемого значения.

Характеристики случайной величины, построенные на основании выборочных данных, называются выборочными или точечными оценками. Свойства случайной величины могут характеризоваться начальными и центральными моментами порядка k, вычисляемыми в случае дискретной случайной величины по формулам:

$$\alpha_k = \sum_j \bar{\bar{x}}_j^{\,k} p_j \text{ – формула (2.2.2) в [3],}$$

$$\mu_k = \sum_j (\bar{\bar{x}}_j - \alpha_1)^k p_j \text{ – формула (2.2.3) в [3].}$$

Важнейшие из них – математическое ожидание $M(X) = m_X$ и дисперсия $D(X) = \sigma^2(X)$, где через σ обозначено среднеквадратическое отклонение – являются частными случаями моментов:

$$\bar{x} = \alpha_1,\ \bar{D} = \mu_2,\ \bar{\sigma} = \sqrt{\bar{D}} \text{ – формулы (2.2.4) в [3].}$$

Выделяют также несмещенную выборочную дисперсию

$S^2 = \dfrac{n}{n-1}\bar{D}$ – формула (2.2.5) в [3].

Если выборочное математическое ожидание случайной величины дает нам «ее среднее значение» или точку на координатной прямой, «вокруг которой разбросаны» значения рассматриваемой случайной величины, то выборочная дисперсия характеризует «степень разброса» значений. Используются также оценки коэффициента асимметрии

$A = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ – формула (2.2.6) в [3] и коэффициента эксцесса (островершинности) $E = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ – формула (2.2.7) в [3] как степени отклонения полигона частот от плотности нормального распределения непрерывной случайной величины, для которой они равны нулю.

Пример 6.1. По выборке объема ***n*** = 500 построен ряд распределения:

$\overline{\overline{x_j}}$	-2.25	-1.75	-1.25	- 0.75	- 0.25	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
p_j	0.02	0.04	0.11	0.18	0.27	0.16	0.10	0.07	0.03	0.02

Построить гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения. Найти и геометрически проинтерпретировать точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, асимметрии и эксцесса.

Решение: Построим гистограмму. Для этого построим массив $\{x_j, f_j\}$, деля частоту p_j на длину соответствующего интервала Δ_j, = 0.5; в результате получим таблицу плотностей частоты f_j.

x_j	-2.25	-1.75	-1.25	- 0.75	- 0.25	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
f_j	0.04	0.08	0.22	0.36	0.54	0.32	0.20	0.14	0.06	0.04

Откладывая на оси абсцисс интервалы с центрами в точках x_j и шириной Δ_j, = 0.5, и надстраивая на каждом интервале, как на основании, прямоугольник высотой f_j ,то есть площадью p_j , получим ступенчатую фигуру – гистограмму (рис.6.1) – статистический аналог кривой плотности распределения. Здесь точками выделен массив $\{x_j, f_j\}$. Построим полигон частот (рис.6.2) – еще более точную оценку кривой плотности распределения – ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_j, f_j).

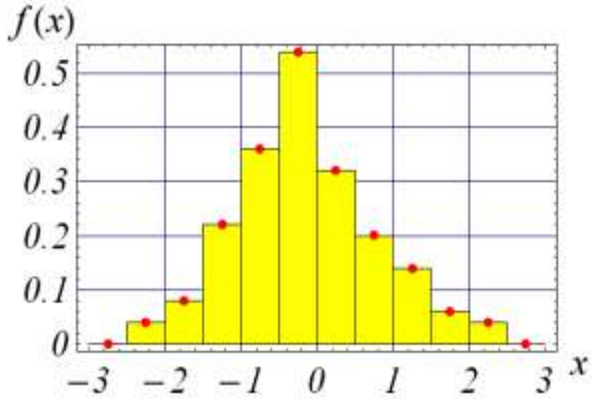


Рис. 6.1.

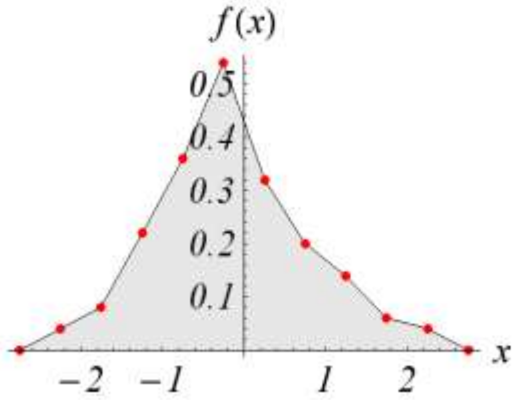


Рис.6.2.

Строим эмпирическую функцию распределения по формуле *F(x)* = $\sum_{x_j<x} p_j$:

x_i	-2.25	-1.75	-1.25	- 0.75	- 0.25	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
F(x)	0.02	0.06	0.17	0.35	0.62	0.78	0.88	0.95	0.98	1.00

Эмпирическая функция распределения является разрывной ступенчатой функцией, равной нулю левее левой границы x_0 = -2.5 интервала наименьшего наблюдаемого значения, испытывающей скачок величиной p_j при переходе через левую границу *j*–ого интервала и в итоге достигающей единицы на последнем интервале наибольшего наблюдаемого значения (рис.6.3).

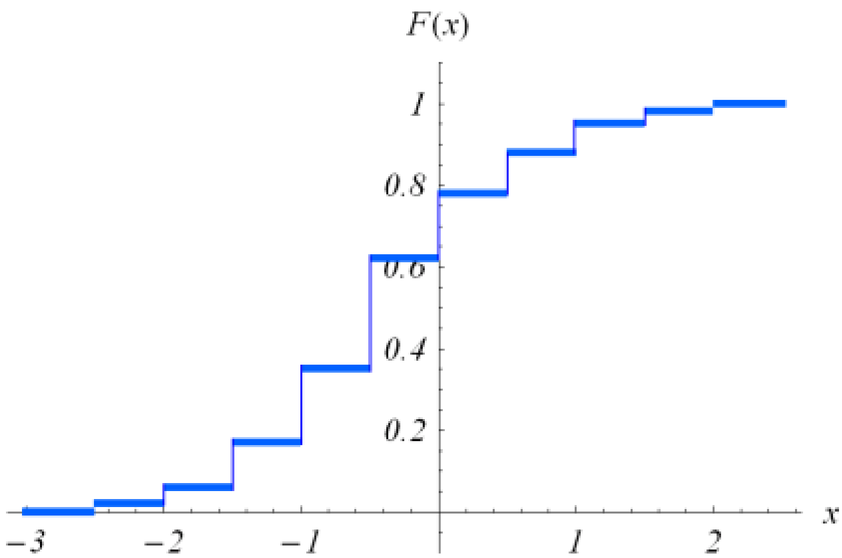


Рис.6.3.

По формуле (2.2.2) в [3] находим первый начальный момент:

$$\alpha_1 = \sum_j \bar{\bar{x}}_j p_j = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_{10} p_{10} =$$

$$= (-2.25) \cdot 0.02 + (-1.75)\, 0.04 + \ldots + 2.25 \cdot 0.02 = -\,0.155.$$

Аналогично по формуле (2.2.3) в [3] находим центральные моменты:

$$\mu_2 = \sum_{j=1}^{10} (\overline{\overline{x}}_j - \alpha_1)^2 p_j = 0.858475; \qquad \mu_3 = \sum_{j=1}^{10} (\overline{\overline{x}}_j - \alpha_1)^3 p_j = 0.235727;$$

$$\mu_4 = \sum_{j=1}^{10} (\overline{\overline{x}}_j - \alpha_1)^4 p_j = 2.23323.$$

Наконец, по формулам (2.2.4-7) в [3] находим окончательно точечные оценки числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии и среднеквадратичного отклонения (смещенные и несмещенные), асимметрии и эксцесса:

$$\overline{x} = \alpha_1 = -0.155; \quad \overline{D} = \mu_2 = 0.858475; \quad \overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = 0.92654;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\overline{D} = \frac{500}{499}\overline{D} = 0.860195; \; S = 0.927467;$$

$$A = \frac{\mu_3}{\overline{\sigma}^3} = 0.29636; \; E = \frac{\mu_4}{\overline{\sigma}^4} - 3 = 0.03025.$$

В связи с этим представляет интерес сопоставление полученного эмпирического распределения с теоретическим распределением по нормальному закону $N(\overline{x}, \overline{\sigma})$. На рис. сплошной линией изображена плавная кривая, проведенная через точки массива $\{x_j, f_j\}$. Аналогично можно построить график плотности распределения по нормальному закону (формула (1.12.15) в [3]) с помощью таблицы приложения 2 (см. также конечную часть примера 10.1) – пунктирная линия на рис.6.4.

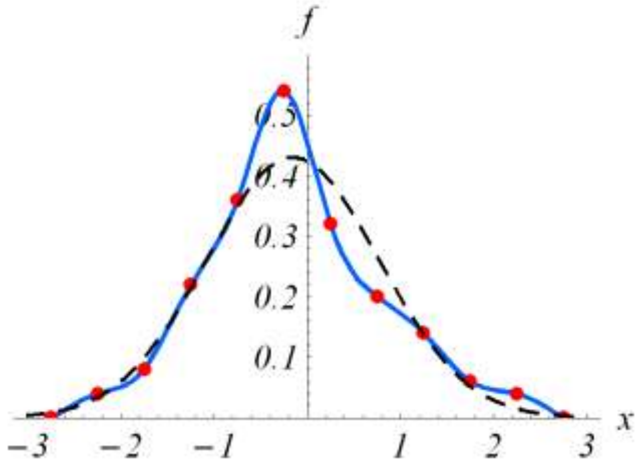


Рис.6.4.

Причем, на фоне кривой плотности нормального распределения, график эмпирической плотности распределения деформирован влево (выборочная асимметрия A = 0.29636 > 0), сужен (выборочная дисперсия D = 0.858475 < 1) и вытянут вверх (выборочный эксцесс E = 0.03025 > 0).

Задача №7. Найти интервальные оценки (доверительные интервалы) числовых характеристик (математического ожидания и дисперсии) нормально распределенной случайной величины, зная доверительную вероятность, объем выборки и точечные оценки числовых характеристик.

Для выполнения данного типа задачи необходимо изучить соответствующий материал в объеме п. 2.3 в [3] или гл. 16 в [1] и гл. 10 в [2]:

В **задаче №6** был рассмотрен вопрос о нахождении точечных оценок числовых характеристик, то есть выборочных числовых характеристик случайной величины − приближенных значений параметров распределения. Чтобы охарактеризовать погрешность этих значений, нужно указать граничные значения, за которые не выходит оцениваемый параметр. Поскольку все расчёты производятся на основании случайных результатов опыта, то и граничные значения также случайные величины. Таким образом, речь идёт о построении интервала со случайными границами, который с заданной вероятностью содержал бы неизвестное значение параметра распределения.

Для определения погрешности полученных значений используют интервальные оценки, применяя понятие «доверительного интервала» – интервала, внутри которого параметр, как ожидается, найдется с некоторой доверительной вероятностью (надежностью) β. Иногда вместо β используют величину α ,= 1 – β, называемую уровнем значимости.

Рассмотрим нахождение доверительного интервала для математического ожидания m_x нормально распределенной случайной величины. Ширина 2ε такого интервала ($\bar{x}$ – ε, $\bar{x}$ + ε), обладающего симметрией относительно $\bar{x}$ – выборочного значения m_x, находится из условия $P(|x-\bar{x}|<\varepsilon)=\beta$ – формула (2.3.1) в [3], причем сама вероятность $P(|x-\bar{x}|<\varepsilon)$ определяется законом нормального распределения, если известна дисперсия D, = σ^2, и законом распределения Стьюдента со степенью свободы $k = n – 1$, если дисперсия неизвестна, а лишь подсчитано ее несмещенное значение $\tilde{D}_X$ **,=** s^2**.** С увеличением степени свободы ***k***, то есть с увеличением объема выборки, распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению.

Во-первых, рассмотрим нахождение доверительного интервала для математического ожидания, если известна дисперсия D, = σ^2. В этом случае вероятность β покрытия математического ожидания m_x доверительным интервалом ($\bar{x}$ – ε, $\bar{x}$ + ε), вычисляется, согласно закону нормального распределения, по формуле (2.3.2) в [3]: β = 2*Φ(t),*

где $\Phi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t exp(-\dfrac{x^2}{2})dx$ – функция Лапласа, $t = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$.

Таким образом, для отыскания границ доверительного интервала сначала по таблице для функции Лапласа (см. Приложение 3) находим то значение *t*, для которого *Φ(t)* = 0.5β, а затем из условия $t = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$ находим $\varepsilon = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. В результате определяется доверительный интервал ($\bar{x}$ - $\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x}$ + $\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$) такой, что с вероятностью β выполняется неравенство

$$\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Пример 7.1. Найти доверительный интервал с надежностью β = 0.90 неизвестного математического ожидания нормальной случайной величины X, если σ = 2, $\bar{x}$ = 20.9, *n* = 16.

Решение: В нашем случае Φ(*t*) = 0.5β = 0.45. По таблице для функции Лапласа находим соответствующее значение *t* =1.645. На рис.7.1 затемненной областью на фоне графика плотности нормального распределения выделена площадь, численно равная β.

$$\beta = 2\Phi(t) = 2\int_0^t f(x)dx = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t exp(-\frac{x^2}{2})dx.$$

На рис.7.2 на фоне графика функции Лапласа выделена точка (*t, Φ(t)*).

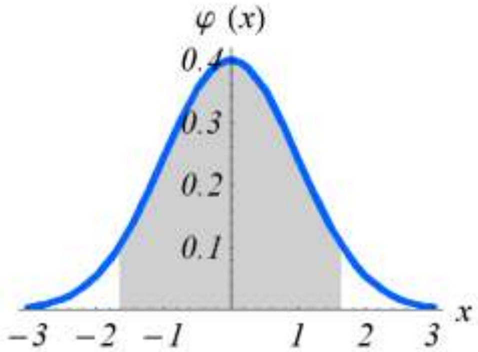


Рис. 7.1.

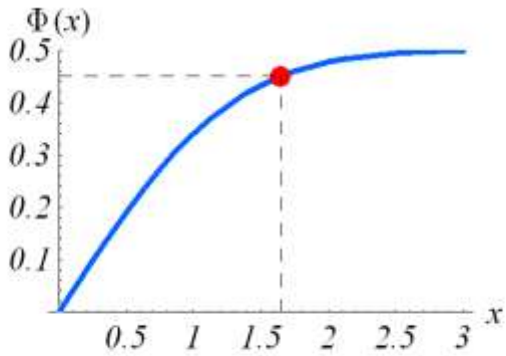


Рис. 7.2.

Следовательно, $\varepsilon = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1.645\cdot 2}{\sqrt{16}} = 0.8225.$

Таким образом, с вероятностью β = 0.90 интервал (20.0775, 21.7225) покрывает математического ожидания m_x.

Во–вторых, рассмотрим нахождение доверительного интервала для математического ожидания, если дисперсия неизвестна, а лишь подсчитано ее несмещенное значение $\tilde{D}_X$,= s^2. В этом случае вероятность β покрытия математического ожидания m_x доверительным интервалом ($\bar{x}$ – ε, $\bar{x}$ +ε) вычисляется согласно закону распределения Стьюдента со степенью свободы $k = n–1$ по аналогичной предыдущему случаю формуле. Имеются таблицы (см. Приложение 4), позволяющие по значениям k и α ,= 1 – β, найти соответствующее значение t_β, а из условия $t_\beta = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{s}$ найти $\varepsilon = \dfrac{t_\beta s}{\sqrt{n}}$. В результате строится доверительный интервал $\left(\bar{x} - \dfrac{t_\beta s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \dfrac{t_\beta s}{\sqrt{n}}\right)$, содержащий m_x с вероятностью β**.**

Пример 7.2. По данным выборки объема n = 50 найдены выборочные $\bar{x}$ = –0.155 и **s** = 0.936. Найти доверительный интервал с надежностью β = 0.95 неизвестного математического ожидания нормальной случайной величины X.

Решение: В данном случае при n = 50 и β = 0.95 по таблице распределения Стьюдента (см. Приложение 4) для k = 49 и α = 1 **–** β = 0.05 находим t_β = 2.009. На рис.7.3 затемненной областью на фоне графика плотности распределения Стьюдента выделена площадь, численно равная β согласно формуле $\beta = 2\Phi_{St}(t) = 2\int_0^t f_{St}(x)dx$.

На рис.7.4 на фоне графика функции $\Phi_{St}(t)$ для распределения Стьюдента выделена точка (t, $\Phi_{St}(t)$).

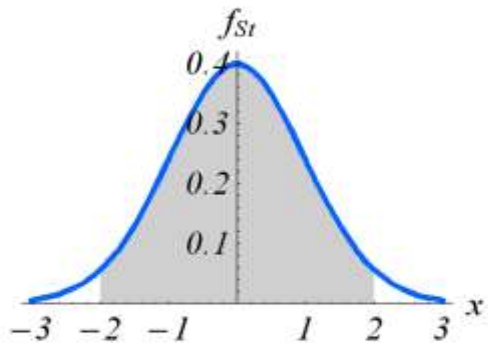


Рис. 7.3.

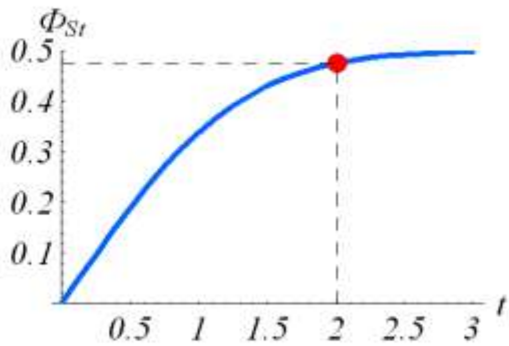


Рис. 7.4.

Вычисляем далее по формуле $\varepsilon = \dfrac{t_\beta s}{\sqrt{n}} = \dfrac{2.009 \cdot 0.936}{\sqrt{50}} \approx 0.266$ и записываем доверительный интервал (–0.155 –0.266; –0.155 + 0.266). Таким образом, с вероятностью $\beta = 0.95$ справедливо неравенство $-0.421 < m_x < 0.111$.

В-третьих, можно аналогичным образом вычислять доверительный интервал для дисперсии $D, = \sigma^2$**,** нормально распределенной случайной величины из условия

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{z_2^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{z_1^2}\right) = \beta\ , = 1 - \alpha$$

причем сама вероятность определяется законом χ^2 (хи – квадрат) – распределения со степенью свободы $k = n–1$ таким образом, что

$$P(\chi^2 > z_2^2) = \frac{\alpha}{2} = \alpha_2\ ,\ \ P(\chi^2 > z_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2} = \alpha_1\ .$$

С помощью таблиц χ^2-распределения (см. Приложение 5) по вычисленным k и α_2 находят z_2^2, а по паре k и α_1 находят z_1^2. Для $k > 30$ значение z^2 находят уже не из таблиц χ^2 – распределения, а вычисляют по формуле $z^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2k-1} + t)^2$. Здесь значение t, определяемое равенством $\Phi(t) = \frac{1}{2}(1 - 2\alpha)$, вычисляется по таблице функции Лапласа (см. Приложение 3). Таким образом, $\left(\dfrac{(n-1)s^2}{z_2^2}; \dfrac{(n-1)s^2}{z_1^2}\right)$ есть доверительный интервал для σ^2 с надежностью $1 - \alpha$.

Пример 7.3. По данным выборки объема $n = 20$ была найдена выборочная несмещенная дисперсия $s^2 = 0.876$; найти доверительный интервал, содержащий с надежностью $\beta = 0.90$ неизвестную дисперсию σ^2 нормальной случайной величины X.

Решение: В данном случае $n = 20$ и $\alpha = 1 - \beta = 1 - 0.90 = 0.10$, следовательно, $k = n–1 = 19$, $\alpha_2 = \alpha/2 = 0.05$ и $\alpha_1 = 1 - \alpha/2 = 0.95$; с помощью таблиц χ^2 – распределения (см. Приложение 5) по $k = 19$ и $\alpha_2 = 0.05$ находим $z_2^2 = 30.1$, а по $k = 19$ и $\alpha_1 = 0.95$ находим $z_1^2 = 10.1$. На рис.7.5 затемненной областью на фоне графика плотности χ^2 – распределения выделена площадь, численно равная β согласно формуле

$$\beta = F_{Ch}(z_2^2) - F_{Ch}(z_1^2) = \int_{z_1^2}^{z_2^2} f_{Ch}(x)dx\ .$$

На рис.7.6 на фоне графика функции χ^2 – распределения $F_{Ch}(\chi^2)$ выделены точки (z_1^2 ,$F_{Ch}(z_1^2)$) и (z_2^2 ,$F_{Ch}(z_2^2)$).

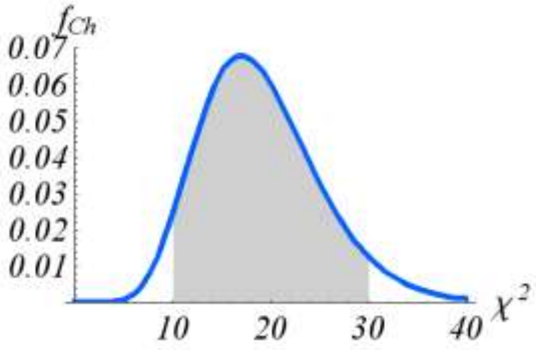


Рис. 7.5

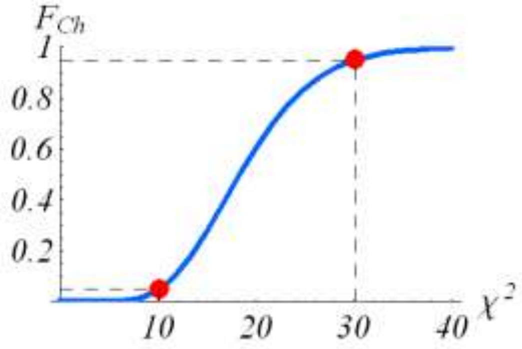


Рис. 7.6

Наконец, определяем границы доверительного интервала:

$$\frac{(n-1)s^2}{z_2^2} = \frac{19\cdot 0.876}{30.1} \approx 0.553;$$

$$\frac{(n-1)s^2}{z_1^2} = \frac{19\cdot 0.876}{10.1} \approx 1.648.$$

<u>Задача №8.</u> Оценить данную матрицу распределения системы дискретных случайных величин (X, Y) на регрессию видов $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ и $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

Для выполнения данного типа задачи необходимо изучить соответствующий материал в объеме пп. 1.13; 2.4 в [3] или гл. 14, 18 в [1] и гл. 8, 12 в [2]:

Для многих явлений в природе и технике типичны случайные зависимости. Случайные величины находятся в корреляционной зависимости, если каждому значению одной из них соответствует некоторое распределение другой, что математически отражается в уравнении регрессии одной случайной величины на другую.

По результатам эксперимента сначала оформляется таблица наблюдений системы дискретных случайных величин (X, Y) – матрица распределения – таблица, в которой записаны наблюдаемые значений для X: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, для Y: $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ и соответствующая каждой паре $\{x_i, y_k\}$ вероятность $p_{ik} = P\{X = x_i, Y = y_k\}$, удовлетворяющая условию $\sum_k \sum_i p_{ki} = 1$

Таблица № 8.1

Y	X			
	x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
y_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

К подобной матрице распределения можно прийти либо в случае повторяющихся наблюдаемых значений (X, Y), либо посредством построения группированных распределений; в последнем случае $\{x_i, y_k\}$ – центры соответствующих интервалов.

Одномерные законы распределения отдельных компонент выражаются формулами (2.4.2) в [3]:

$$p_i = P\{X = x_i\} = \sum_{k=1}^{m} p_{k\,i}\,,\; p_k = P\{Y = y_k\} = \sum_{i=1}^{n} p_{k\,i}\,.$$

После чего можно привести более полный вариант Таблицы № 1, расширенный одномерными законами распределения

Таблицы № 8.1*

Y	X				p_y
	x_1	x_2	…	x_n	
y_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}	$\sum_{i=1}^{n} p_{1i}$
y_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}	$\sum_{i=1}^{n} p_{2i}$
…	…	…	…	…	…
y_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}	$\sum_{i=1}^{n} p_{mi}$
p_x	$\sum_{k=1}^{m} p_{k1}$	$\sum_{k=1}^{m} p_{k2}$	…	$\sum_{k=1}^{m} p_{kn}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p_{ki} = 1$

Система двух случайных величин (X, Y) характеризуется набором следующих начальный и центральный моментов, вычисляемых по формулам (2.4.3-6) в [3]:

$$\alpha_{l,s} = \sum_k \sum_i x_i^l y_k^s p_{k\,i}\,, \qquad \mu_{l,s} = \sum_k \sum_i (x_i - m_X)^l (y_k - m_Y)^s p_{k\,i}$$

То есть $m_X = \sum_i \sum_k x_i \, p_{k\,i} = \sum_i x_i p_i$, $m_Y = \sum_k \sum_i y_k p_{k\,i} = \sum_k y_k p_k$,

$$D_X = \sum_i \sum_k (x_i - m_X)^2 p_{k\,i} = \sum_i (x_i - m_X)^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i - m_X^2 \ ,$$

$$D_Y = \sum_k \sum_i (y_k - m_Y)^2 p_{k\,i} = \sum_k (y_k - m_Y)^2 p_k = \sum_k y_k^2 p_k - m_Y^2 \ ,$$

$$K_{XY} = \sum_i \sum_k (x_i - m_X)(y_k - m_Y)\ p_{k\,i} = \sum_i \sum_k x_i y_k p_{ki} - m_X m_Y \ .$$

В общем случае Y и X связаны вероятностной зависимостью, справедливой лишь в среднем, так как при фиксированном значению $X = x$ зависимая переменная Y имеет случайный разброс (столбец значений) из-за ошибок измерения, влияние неучтенных факторов или других причин. Таким образом, фиксированному значению $X= x_i$ соответствует усредненное значение Y_{x_i} $=M[Y/X = x_i]$ – условное математическое ожидание, вычисляемое по формуле (2.4.7) в [3]:

$$Y_{x_i} = \tilde{y}_i = \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{m} y_k p_{k\,i} \, .$$

В итоге исходная таблица $\{x_i, y_k\}$ эквивалентна таблице $\{x_i, \tilde{y}_i\}$

Таблица № 8.2

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$\tilde{y}_i$	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$	…	$\tilde{y}_n$
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Условное математическое ожидание Y_x $=M[Y/X = x]$ называется регрессией Y на X, график зависимости $Y_x(x)$ называется линией регрессии. Аналогично определяется регрессия X на Y.

Рассмотрим простую линейную регрессию, которая считается выполненной $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$, если найдены оценки коэффициентов $\bar{\beta}_1$ и $\bar{\beta}_2$ из условия минимизации (2.4.8) в [3]:

$$\varepsilon = \sum_i [\, \tilde{y}_i - \beta_1 - \beta_2 x_i \,]^2 p_i \ ,$$

то есть как решения системы (2.4.9′) в [3]:

$$\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i p_i \ ;$$

$$\bar{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i \;+\; \bar{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i x_i\, p_i \;.$$

В этом случае $\bar{\beta}_1$ и $\bar{\beta}_2$ можно выразить через точечные оценки числовых характеристик системы дискретных случайных величин (X,Y) по формулам (2.4.11) в [3]:

$$f(x) = \bar{y} + \bar{r}_{xy}\frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x}(x - \bar{x})\;,$$

где

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ – оценка матем. ожидания по массиву $\{x_i\}$,

$\bar{y} = \sum_{k=1}^{m} y_k p_k$ – оценка матем. ожидания по массиву $\{y_k\}$,

$\bar{\sigma}_x^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 p_i$ – оценка дисперсии D_x по массиву $\{x_i\}$,

$\bar{\sigma}_y^2 = \sum_k (y_k - \bar{y})^2 p_k$ – оценка дисперсии D_y по массиву $\{y_k\}$,

$\bar{K}_{xy} = \sum_{i,k}(x_i - \bar{x})(y_k - \bar{y})p_{ki}$ – оценка ковариации по $\{x_i, y_k\}$,

$\bar{r}_{xy} = \dfrac{\bar{K}_{xy}}{\bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y}$ – коэффициент корреляции, значение которого по модулю равно единице в случае линейной зависимости Y и X**.** Таким образом, $|\bar{r}_{xy}|$ характеризует степень тесноты линейной зависимости между Y и X, проявляющейся в том, что при возрастании одной случайной величины другая проявляет тенденцию также возрастать (в этом случае $\bar{r}_{xy} > 0$) или убывать (в таком случае $\bar{r}_{xy} < 0$). В первом случае говорят, что Y и X связаны положительной корреляцией, а во втором корреляция отрицательна. При этом зависимость тем ближе к линейному закону, чем
$|\bar{r}_{xy}|$ ближе к единице слева. Если $\bar{r}_{xy} = 0$, то это означает только отсутствие линейной связи между Y и X, любой другой вид связи может при этом присутствовать.

Если коэффициент корреляции $\bar{r}_{xy}$, характеризующий степень тесноты линейной зависимости между Y и X, не очень близок к единице, то можно оценить матрицу распределения системы случайных величин на линейную полиномиальную регрессию вида $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$, которая лучше аппроксимирует массив $\{ x_i , \tilde{y}_i \}$ в смысле метода наименьших квадратов, то есть определяет коэффициенты β_j из условия

$$\varepsilon = \sum_i [\tilde{y}_i - f(x_i)]^2 p_i = min ,$$

что приводит к системе (2.4.9″) в [3]:

$$\bar{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} p_i + \bar{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \bar{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i p_i ;$$

$$\bar{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \bar{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \bar{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 p_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i x_i p_i ;$$

$$\bar{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \bar{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 p_i + \bar{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 p_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i x_i^2 p_i .$$

Качество аппроксимации результатов наблюдений линейной регрессивной моделью определяется остаточной дисперсией по формуле (2.4.10) в [3]:

$$s^2 = \frac{\varepsilon}{n - n_\beta}$$

Пример 8.1. По результатам эксперимента получена таблица наблюдений системы случайных величин (X, Y):

Таблица № 8.3

Y	X					
	10	20	30	40	50	60
5	0.01	0.035	0.025	0.015	0.0	0.0
10	0.0	0.10	0.065	0.125	0.025	0.0
15	0.0	0.0	0.05	0.085	0.135	0.015
20	0.0	0.0	0.015	0.045	0.065	0.08
25	0.0	0.0	0.0	0.025	0.035	0.05

Оценить данную матрицу распределения системы случайных величин (X,Y) на линейную регрессию.

Решение: Данная задача может быть решена следующим образом.

Найдем одномерный закон распределения для Y по формуле (2.4.2) в [3]:

$$p_k = P\{Y = y_k\} = \sum_{i=1}^{6} p_{ki} .$$

Таблица № 8.4

y_k	5	10	15	20	25
p_k	0.085	0.315	0.285	0.205	0.11

Найдем одномерный закон распределения для X по формуле (2.4.2) в [3]:

$$p_i = P\{X = x_i\} = \sum_{k=1}^{5} p_{k\,i}$$

Таблица № 8.5

x_i	10	20	30	40	50	60
p_i	0.01	0.135	0.155	0.295	0.26	0.145

После чего можно привести более полный вариант таблицы № 8.1, расширенный одномерными законами распределения

Таблица № 8.6

Y	X						p_Y
	10	20	30	40	50	60	
5	0.01	0.035	0.025	0.015	0.0	0.0	0.085
10	0.0	0.10	0.065	0.125	0.025	0.0	0.315
15	0.0	0.0	0.05	0.085	0.135	0.015	0.285
20	0.0	0.0	0.015	0.045	0.065	0.08	0.205
25	0.0	0.0	0.0	0.025	0.035	0.05	0.11
p_X	0.01	0.135	0.155	0.295	0.26	0.145	1.0

Построим условное математическое ожидание по формуле (2.4.7) в [3]:

$$Y_{x_i} = \tilde{y}_i = \frac{1}{p_i}\sum_{k=1}^{5} y_k\, p_{k\,i}\ ,$$

например, $\tilde{y}_4$ = (5·0.015+10·0.125+15·0.085+20·0.045+25·0.025)/0.295 ≈ 13.983. Тогда таблица № 8.6 для $\{x_i, y_k\}$ будет эквивалентна таблице $\{x_i,\ \tilde{y}_i\ \}$.

Таблица № 8.7

x_i	10	20	30	40	50	60
$\tilde{y}_i$	5	8.704	11.774	13.983	17.115	21.207
p_i	0.01	0.135	0.155	0.295	0.26	0.145

Вычислим оценки числовых характеристик системы (X, Y): математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, ковариации, корреляционной матрицы, коэффициента корреляции и нормированной корреляционной матрицы по формулам (2.4.11) в [3]:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 10{\cdot}0.01+20{\cdot}0.135+30{\cdot}0.155+40{\cdot}0.295+50{\cdot}0.26+60{\cdot}0.145 = $$
$$=40.95;$$
$$\overline{y} = \sum_{k=1}^{5} y_k p_k = 5{\cdot}0.085+10{\cdot}0.315+15{\cdot}0.285+20{\cdot}0.205+25{\cdot}0.11 = 14.7;$$

аналогично

$$\overline{\sigma}_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2 p_i} \approx 12.712;\ \overline{\sigma}_y = \sqrt{\sum_{k=1}^{5}(y_k-\overline{y})^2 p_k} \approx 5.693;$$
$$\overline{K}_{xy} = \sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_k-\overline{y})p_{ki} = 48.785;\ \overline{r}_{xy} = \frac{\overline{K}_{xy}}{\overline{\sigma}_x\overline{\sigma}_y} \approx 0.674.$$

Выполним простую линейную регрессию по формуле

$$f(x) = \overline{y} + \overline{r}_{xy}\frac{\overline{\sigma}_y}{\overline{\sigma}_x}(x-\overline{x}) \approx 14.7 + 0.674\frac{5.693}{12.712}(x-40.95) \approx$$
$$\approx 2.3375 + 0.302\,x.$$

Построим график полученной линейной зависимости на фоне графически отображенной выборки (рис.8.1):

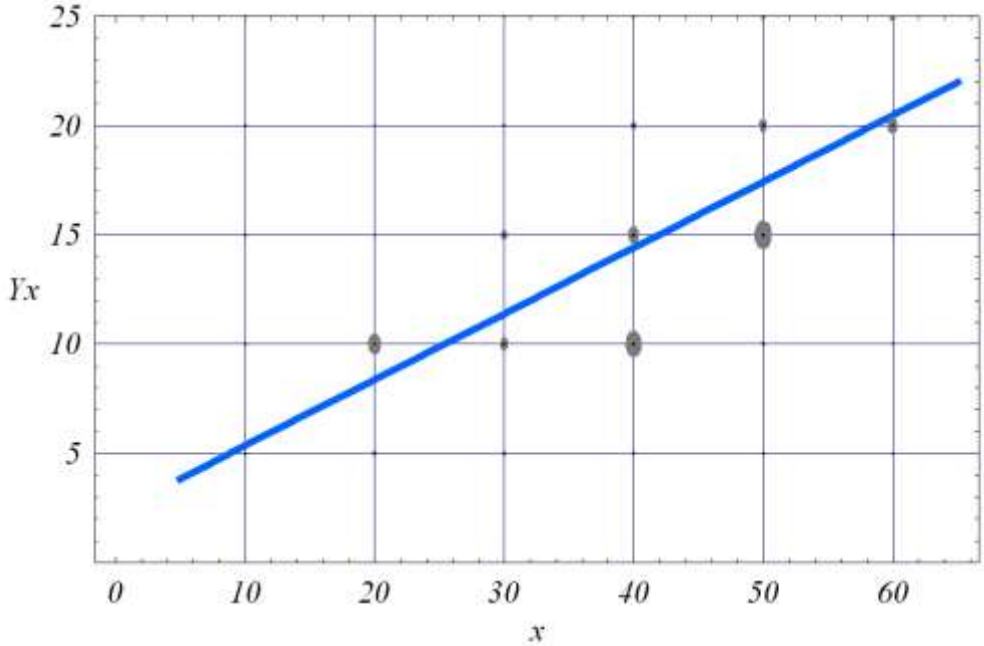


Рис.8.1.

Уравнение простой линейной регрессии можно было бы выполнить также по формуле $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x$, если оценки $\overline{\beta}_1$ и $\overline{\beta}_2$ найти как решения системы (2.4.9′) в [3]. Для этого подсчитаем предварительно суммы вида:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i\, p_i = \bar{x} = 40.95;\ \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = 1838.5;$$

$$\sum_{i=1}^{6} \tilde{y}_i p_i =,\ \bar{y}\,,= 14.7;\ \sum_{i=1}^{6} \tilde{y}_i x_i\, p_i = 650.75;$$

Подставляя вычисленные суммы коэффициентами в систему (2.4.9′) в [3] для $\bar{\beta}_j$, получим:

$$\bar{\beta}_1 + 40.95\,\bar{\beta}_2 = 14.7;$$

$$40.95\,\bar{\beta}_1 + 1838.5\,\bar{\beta}_2 = 650.75.$$

Решая построенную систему линейных уравнений, например, методом Гаусса (исключая $\bar{\beta}_1$ во втором уравнении с помощью первого), найдем $\bar{\beta}_2 \approx 0.302$; $\bar{\beta}_1 \approx 2.3375$ и, как следствие, $f(x) \approx 2.3375 + 0.302 \cdot x$.

Качество аппроксимации результатов наблюдений простой линейной регрессивной моделью определяется остаточной дисперсией по формуле (2.4.10) в [3]:

$$s^2 = \frac{\varepsilon}{n - n_\beta} \approx \frac{0.2017}{6-2} \approx 0.0504.$$

В связи с тем, что коэффициент корреляции, характеризующий степень тесноты линейной зависимости между Y и X, $\bar{r}_{xy} \approx 0.674$ не очень близок к единице, оценим матрицу распределения системы случайных величин на линейную полиномиальную регрессию вида $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$.

Подсчитаем предварительно суммы вида:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i\, p_i = \bar{x} = 40.95;\ \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = 1838.5;$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^3 p_i = 87975;\ \sum_{i=1}^{6} x_i^4 p_i = 4406650;$$

$$\sum_{i=1}^{6} \tilde{y}_i p_i =,\ \bar{y}\,,= 14.7;\ \sum_{i=1}^{6} \tilde{y}_i x_i\, p_i = 650.75;$$

$$\sum_{i=1}^{6} \tilde{y}_i x_i^2 p_i = 30912.3.$$

Подставляя вычисленные суммы коэффициентами в систему (2.4.9″) в [3] для $\bar{\beta}_j$ и разрешая последнюю относительно $\bar{\beta}_j$, получим

$$f(x) = 4.884 + 0.1567x + 0.00185x^2\ .$$

Построим графики $f(x) = 4.884 + 0.1567x + 0.00185x^2$ и $f(x) = 2.3375 + 0.3019x$ на фоне графически отображенной выборки $\{x_i\,,\ \tilde{y}_i\}$, которая изображена кружками с центром в точке $\{ x_i \ , \ \tilde{y}_i \ \}$ и радиусами, пропорциональными соответствующей вероятности p_i (рис.8.2):

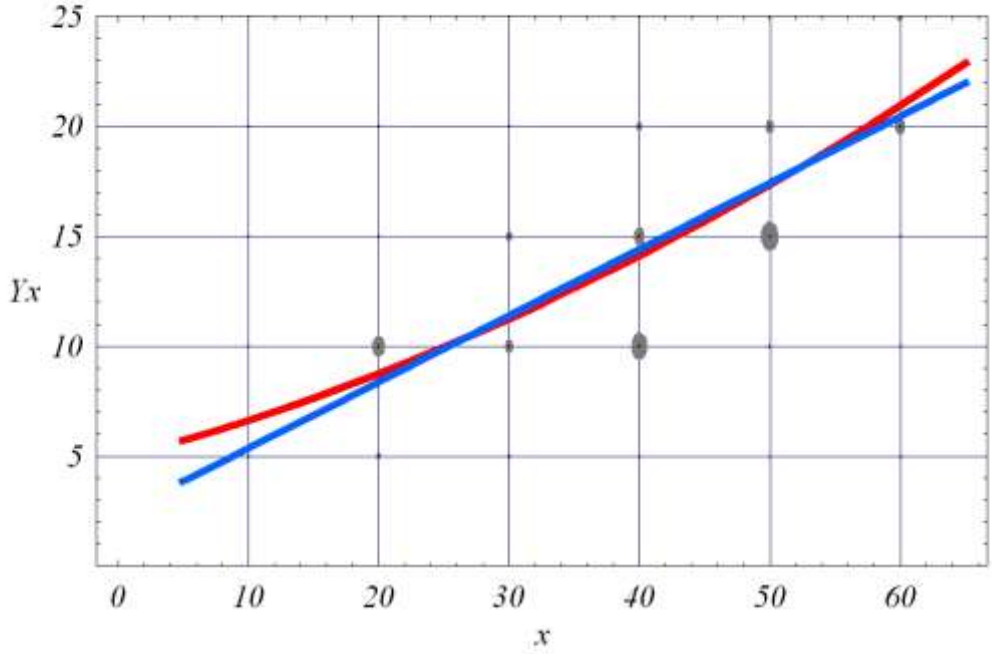


Рис.8.2.

Качество аппроксимации результатов наблюдений трехпараметрической линейной регрессивной моделью определяется остаточной дисперсией по формуле

$$s^2 = \frac{\varepsilon}{n - n_\beta} \approx \frac{0.09812}{6-3} \approx 0.0327$$

Из сравнения остаточных дисперсий рассмотренных двух регрессивных моделей следует, что последняя модель более адекватна результатам наблюдений.

<u>Задача №9.</u> По двум независимым выборкам объемов n_X и n_Y нормальных распределений найдены выборочные значения математических ожиданий $\overline{x}$ и $\overline{y}$ и исправленные выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2. При уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X > m_Y$.

Для выполнения данного типа задачи необходимо изучить соответствующий материал в объеме п. 2.5 в [3] или гл. 19 в [1] и гл. 13 в [2].

Во многих случаях результаты наблюдений используются для проверки гипотез относительно тех или иных свойств распределения случайной величины. В частности, такого рода задачи возникают при сравнении различных технологических процессов или методов обработки по определенным измеряемым признакам, например, по точности, производительности и т.д.

К основным задачам математической статистики относится статистическая проверка гипотез о параметрах распределения и о законах распределения случайной величины. При исследовании различных случайных величин на определённом его этапе появляется возможность выдвинуть ту или иную гипотезу о свойствах изучаемой величины, например, сделать предположение о законе распределения её, или, если закон распределения известен, но неизвестны его параметры, то сделать предположение о их величине. Наиболее правдоподобную по каким-то соображениям гипотезу называют нулевой (основной) и обозначают H_0. Наряду с основной гипотезой рассматривают другую (альтернативную) гипотезу H_1 , противоречащую основной. Выдвинутая нулевая гипотеза нуждается в дальнейшей проверке. При этом могут быть допущены ошибки двух типов:

- ошибка первого рода − отвергнута правильная гипотеза;
- ошибка второго рода − принята неправильная гипотеза,

Вероятность совершить ошибку первого рода (вероятность отвергнуть правильную гипотезу) обычно обозначают α и называют уровнем значимости. Случайную величину Z, служащую для проверки гипотезы, называют критерием. Совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают, называют критической областью. Граничные точки критической области z_{kp} называют критическими точками. Различают три вида критической области:

- правосторонняя, определяемая неравенством $Z > z_{kp} > 0$;
- левосторонняя, определяемая неравенством $Z < z_{kp} < 0$;
- двусторонняя, определяемая неравенством $Z < z_1 < z_2 < Z$. В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, то двусторонняя критическая область определяется неравенством $|Z| > z_{kp} > 0$.

При отыскании критической области задаются уровнем значимости α и ищут критические точки, исходя из требования, чтобы вероятность того, что критерий Z примет значения, лежащие в критической области, была равна принятому уровню значимости. В результате получаем:

- для правосторонней критической области $P\,(Z > z_{kp}) = \alpha$;
- для левосторонней критической области $P\,(Z < z_{kp}) = \alpha$;
- для двусторонней симметричной области $P\,(Z > z_{kp}) = \alpha/2$.

Основной принцип статистической проверки гипотез заключается в следующем: если наблюдаемое значение критерия $Z_{набл}$, вычисленное поданным выборки, принадлежит критической области, то гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение не принадлежит критической области, то нет оснований отвергать гипотезу. Для многих критериев Z составлены таблицы, позволяющие по α найти критические точки z_{kp} (см. п. 3. Приложения).

Рассмотрим гипотезы о параметрах нормального распределения. Пусть имеются две серии опытов, регистрирующие значения некоторой случайной величины и определяющие две выборки объемов n_X и n_Y.

Во-первых, рассмотрим гипотезы H_0 о равенстве дисперсий $D_X = D_Y$ при неизвестных математических ожиданиях. Пусть даны две случайные величины X и Y, распределенные по нормальному закону. По данным выборок объёмом n_X и n_Y соответственно подсчитаны исправленные выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2 . Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что $D_X = D_Y$. Такая задача возникает при сравнении точности двух приборов, при сравнении различных методов измерений. Обычно выборочные дисперсии оказываются различными. Возникает вопрос: существенно ли они различаются? Если различие незначимо, то имеет место нулевая гипотеза, следовательно, приборы имеют одинаковую точность, а различие эмпирических дисперсий объясняется случайными причинами, в частности, случайным отбором объектов выборки.

По данным выборок объёмом n_X и n_Y вычисляют $F_{набл}$, как отношение большей дисперсии к меньшей.

$$F_{набл} = \frac{s_Б^2}{s_M^2}$$

Критическая область строится в зависимости от конкурирующей гипотезы следующим образом: по таблице распределения Фишера по заданному уровню значимости α и вычисленным степеням свободы k_1 и k_2 (см. Приложение 6) находят $F_{kp}(\alpha, k_1, k_2)$ для H_1: $D_X > D_Y$ или $F_{kp}(\alpha/2, k_1, k_2)$ для H_1: $D_X \neq D_Y$. Если $F_{набл} > F_{kp}$, то H_0 отвергают, а при $F_{набл} < F_{kp}$ нет оснований отвергать H_0.

Величина F удовлетворяет распределению Фишера со степенями свободы k_1, определенной разностью объема выборки с большей дисперсией и единицы, и k_2, определенной разностью объема выборки с меньшей дисперсией и единицы. Поэтому тестирование основано на распределении Фишера (см. Приложение 6).

Пример 9.1. По двум малым независимым выборкам объемов $n_X = 11$ и $n_Y = 14$ нормальных распределений найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 0.76$ и $s_y^2 = 0.38$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $D_X = D_Y$ о равенстве дисперсий при конкурирующей H_1: $D_X > D_Y$.

Решение: Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей

$$F_{набл} = \frac{s_Б^2}{s_М^2} = 0.76/0.38 = 2.$$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $D_X > D_Y$, поэтому критическая область – правосторонняя. По таблице критических точек распределения Фишера, по уровню значимости $\alpha = 0.05$ и числам степеней свободы $k_1 = n_X - 1 = 11 - 1 = 10$ и $k_2 = n_Y - 1 = 14 - 1 = 13$ находим (см. Приложение 6) критическую точку $F_{kp}(\alpha, k_1, k_2) = F_{kp}(0.05, 10, 13) = 2.67$.

Так как $F_{набл} = 2. < F_{kp} = 2.67$, то нет оснований отвергать H_0 о равенстве дисперсий. Другими словами, исправленные выборочные дисперсии различаются незначимо.

Во-вторых, для проверки подобия выборок (соответствия их распределению одной и той же случайной величины) рассмотрим вопрос о значимости расхождения между выборочными значениями математических ожиданий $\bar{x}$ и $\bar{y}$: выдвинем в качестве H_0 равенство математических ожиданий $m_X = m_Y$. Тестирование такой гипотезы основано на нормальном распределении в случае большого объема выборок (n > 30), когда дисперсии считаются известными, и на распределении Стьюдента в случае малого объема выборок ($n < 30$), когда дисперсии считаются неизвестными. Рассмотрим первый случай. Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ о равенстве математических ожиданий двух больших нормальных выборок с известными дисперсиями D_X и D_Y**,** надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D_X/n_X + D_Y/n_Y}}.$$

Далее построить критическую область в зависимости от конкурирующей гипотезы следующим образом:

1) При конкурирующей гипотезе H_1: $m_X \neq m_Y$ по таблице функции Лапласа (см. Приложение 3) найти критическую точку $\boldsymbol{z_{kp}}$ из равенства $\Phi(\boldsymbol{z_{kp}}) = (1 - \alpha)/2$.
Если $|Z_{набл}| < z_{kp}$, то нет оснований отвергать H_0.
Если $|Z_{набл}| > z_{kp}$, то нулевую гипотезу отвергают.

2) При конкурирующей гипотезе H_1: $m_X > m_Y$ по таблице функции Лапласа (см. Приложение 3) найти критическую точку $\boldsymbol{z_{kp}}$ из равенства $\Phi(z_{kp}) = (1 - 2\alpha)/2$.
Если $Z_{набл} < z_{kp}$, то нет оснований отвергать H_0.

Если $Z_{набл} > z_{kp}$, то нулевую гипотезу отвергают.

3) При конкурирующей гипотезе H_1: $m_X < m_Y$ по таблице функции Лапласа найти «вспомогательную критическую точку» z_{kp} из равенства $\Phi(z_{kp}) = (1- 2\alpha)/2$.

Если $Z_{набл} > - z_{kp}$, то нет оснований отвергать H_0.

Если $Z_{набл} < - z_{kp}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Пример 9.2. По двум большим независимым выборкам объемов $n_X = 40$ и $n_Y = 50$ нормальных распределений найдены выборочные значениями математических ожиданий $\bar{x} = 130$ и $\bar{y} = 140$. Дисперсии известны $D_X = 80$ и $D_Y = 100$. При уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ о равенстве математических ожиданий при конкурирующей гипотезе H_1: $m_X \neq m_Y$.

Решение: Найдем наблюдаемое значение критерия

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D_X/n_X + D_Y/n_Y}} = \frac{130-140}{\sqrt{80/40+100/50}} = -5.$$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $m_X \neq m_Y$, поэтому критическая область – двусторонняя. Найдем критическую точку z_{kp} из равенства

$\Phi(z_{kp}) = (1- \alpha)/2 = (1 – 0.01)/2 = 0.495$.

По таблице функции Лапласа (см. Приложение 3) находим $z_{kp} = 2.58$.Так как $|Z_{набл}| = |-5| = 5 > 2.58 = z_{kp}$, то нулевую гипотезу отвергают. Другими словами, выборочными значениями математических ожиданий различаются значимо.

В-третьих, рассмотрим второй случай. Пусть имеются две выборки объемов n_X и n_Y, на основании которых подсчитаны выборочными значениями математических ожиданий $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и исправленные выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2. Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ о равенстве математических ожиданий двух малых нормальных выборок с неизвестными дисперсиями D_X и D_Y, надо предварительно проверить гипотезу о равенстве дисперсий по подсчитанным исправленным выборочным дисперсиям s_x^2 и s_y^2. Если нет оснований отвергать гипотезу о равенстве дисперсий, то есть дисперсии хотя и неизвестны, но предполагаются одинаковыми, то далее надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$T_{набл} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(n_X-1)s_X^2+(n_Y-1)s_Y^2}}\sqrt{\frac{n_X n_Y(n_X+n_Y-2)}{n_X+n_Y}}.$$

Затем построить критическую область в зависимости от конкурирующей гипотезы следующим образом:

1) При конкурирующей гипотезе H_1: $m_X \neq m_Y$ по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. Приложение 4), по заданному уровню значимости α, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k = n_X + n_Y - 2$ найти критическую точку t_{kp} двусторонней критической области.
   Если $\left|T_{набл}\right| < t_{kp}$, то нет оснований отвергать H_0.
   Если $\left|T_{набл}\right| > t_{kp}$, то нулевую гипотезу отвергают.
2) При конкурирующей гипотезе H_1: $m_X > m_Y$ по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. Приложение 4), по заданному уровню значимости α**,** помещенному в нижней строке таблицы, и числу степеней свободы $k = n_X + n_Y - 2$ найти критическую точку t_{kp} односторонней критической области.
   Если $T_{набл} < t_{kp}$, то нет оснований отвергать H_0.
   Если $T_{набл} > t_{kp}$, то нулевую гипотезу отвергают.
3) При конкурирующей гипотезе H_1: $m_X < m_Y$ по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. Приложение 4), по заданному уровню значимости α**,** помещенному в нижней строке таблицы, и числу степеней свободы $k = n_X + n_Y - 2$ найти « вспомогательную критическую точку» t_{kp} односторонней критической области.
   Если $T_{набл} > - t_{kp}$, то нет оснований отвергать H_0.
   Если $T_{набл} < - t_{kp}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Пример 9.3. По двум малым независимым выборкам объемов $n_X = 12$ и $n_Y = 18$ нормальных распределений найдены выборочные значениями математических ожиданий $\overline{x} = 31.2$ и $\overline{y} = 29.2$ и исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 0.84$ и $s_y^2 = 0.40$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей гипотезе H_1: $m_X \neq m_Y$.

Решение: Исправленные выборочные дисперсии различны, поэтому проверим предварительно гипотезу о равенстве дисперсий, используя критерий Фишера.

Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей

$$F_{набл} = \frac{s_Б^2}{s_M^2} = 0.84/0.4 = 2.1$$

Дисперсия s_x^2 значительно больше дисперсии s_y^2, поэтому в качестве конкурирующей гипотезы примем гипотезу H_1: $D_X > D_Y$. В этом случае критическая область – правосторонняя. По таблице критических точек распределения Фишера, по уровню значимости α = 0.05 и числам степеней свободы $k_1 = n_X - 1 = 12 - 1 = 11$ и $k_2 = n_Y - 1 = 18 - 1 = 17$ находим (см. Приложение 6) критическую точку

$$F_{kp}(\alpha, k_1, k_2) = F_{kp}(0.05, 11, 17) = 2.41.$$

Так как $F_{набл} = 2.1 < 2.41 = F_{kp}$, то нет оснований отвергать H_0 о равенстве дисперсий. Предположение о равенстве дисперсий не отвергается, поэтому долее проверим гипотезу о равенстве математических ожиданий. Вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента

$$T_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{n_X n_Y (n_X + n_Y - 2)}{n_X + n_Y}} .$$

Подставляя числовые значения входящих в эту формулу величин, получим $T_{набл} = 7.1$.

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $m_X \neq m_Y$, поэтому критическая область – двусторонняя. По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости α = 0.05, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k = n_X + n_Y - 2 = 12 + 18 - 2 = 28$ находим (см. Приложение 4) критическую точку $t_{kp}(\alpha, k) = t_{kp}(0.05, 28) = 2.05$.

Так как $|T_{набл}| = 7.1 > 2.05 = t_{kp}$, то нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий отвергаем. Другими словами, математические ожидания различаются значимо.

В-четвертых, вернемся ко второму случаю и рассмотрим далее второй вариант, когда гипотеза о равенстве дисперсий отвергается. Пусть имеются две выборки объемов n_X и n_Y, на основании которых подсчитаны выборочными значениями математических ожиданий $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и исправленные выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2. Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ о равенстве математических ожиданий двух малых нормальных выборок с неизвестными дисперсиями D_X и D_Y, надо предварительно проверить гипотезу о равенстве дисперсий (см. п. 2.5.1) по подсчитанным исправленным выборочным дисперсиям s_x^2 и s_y^2. Пусть гипотеза о равенстве дисперсий отвергается, то есть дисперсии хотя и неизвестны, но предполагаются разными. Тестирование такой гипотезы H_0: $m_X = m_Y$ основано на распределении Стьюдента с числом степеней свободы k:

$$k = \frac{(s_x^2/n_x + s_y^2/n_y)^2}{\dfrac{(s_x^2/n_x)^2}{n_x - 1} + \dfrac{(s_y^2/n_y)^2}{n_y - 1}}$$

Далее вычисляют наблюдаемое значение критерия по формуле

$$T_{набл} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{s_x^2 / n_X + s_y^2 / n_Y}}$$

Затем строят критическую область в зависимости от конкурирующей гипотезы следующим образом:

1) При конкурирующей гипотезе H_1: $m_X \neq m_Y$ по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. Приложение 4), по заданному уровню значимости α, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы k найти критическую точку t_{kp} двусторонней критической области.
Если $|T_{набл}| < t_{kp}$, то нет оснований отвергать H_0.
Если $|T_{набл}| > t_{kp}$, то нулевую гипотезу отвергают.
2) При конкурирующей гипотезе H_1: $m_X > m_Y$ по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. Приложение 4), по заданному уровню значимости α, помещенному в нижней строке таблицы, и числу степеней свободы k найти критическую точку t_{kp} односторонней критической области.
Если $T_{набл} < t_{kp}$, то нет оснований отвергать H_0.
Если $T_{набл} > t_{kp}$, то нулевую гипотезу отвергают.
3) При конкурирующей гипотезе H_1: $m_X < m_Y$ по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. Приложение 4), по заданному уровню значимости α, помещенному в нижней строке таблицы, и числу степеней свободы k найти « вспомогательную критическую точку» t_{kp} односторонней критической области.
Если $T_{набл} > - t_{kp}$, то нет оснований отвергать H_0.
Если $T_{набл} < - t_{kp}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Пример 9.4. По двум малым независимым выборкам объемов $n_X = 5$ и $n_Y = 5$ нормальных распределений найдены выборочные значениями математических ожиданий $\overline{x} = 13.32$ и $\overline{y} = 13.80$ и исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 3.37$ и $s_y^2 = 0.46$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей гипотезе H_1: $m_X \neq m_Y$.

Решение: Исправленные выборочные дисперсии различны, поэтому проверим предварительно гипотезу о равенстве дисперсий, используя критерий Фишера.

Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей

$$F_{набл} = \frac{s_Б^2}{s_М^2} = 3.37/0.46 \approx 7.33$$

Дисперсия s_x^2 значительно больше дисперсии s_y^2, поэтому в качестве конкурирующей гипотезы примем гипотезу H_1: $D_X > D_Y$. В этом случае критическая область – правосторонняя. По таблице критических точек распределения Фишера, по уровню значимости $\alpha = 0.05$ и числам степеней свободы $k_1 = n_X - 1 = 5 - 1 = 4$ и $k_2 = n_Y - 1 = 5 - 1 = 4$ находим (см. Приложение 6) критическую точку $F_{kp}(\alpha, k_1, k_2) = F_{kp}(0.05, 4, 4) = 6.39$.
Так как $F_{набл} = 7.33 > 6.39 = F_{kp}$, то гипотеза о равенстве дисперсий отклоняется.

Вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента

$$T_{набл} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{s_x^2/n_X + s_y^2/n_Y}} \approx -0.55.$$

Число степеней свободы

$$k = \frac{(s_x^2/n_x + s_y^2/n_y)^2}{\frac{(s_x^2/n_x)^2}{n_x - 1} + \frac{(s_y^2/n_y)^2}{n_y - 1}} = \frac{(3.37/5 + 0.46/5)^2}{\frac{(3.37/5)^2}{5-1} + \frac{(0.46/5)^2}{5-1}} \approx 5.$$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $m_X \neq m_Y$, поэтому критическая область – двусторонняя. По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости $\alpha = 0.05$, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k = n_X + n_Y - 2 = 5 + 5 - 2 = 8$ находим (см. Приложение 4) критическую точку $t_{kp}(\alpha, k) = t_{kp}(0.05, 8) = 2.31$.
Так как $|T_{набл}| = 0.55 < 2.31 = t_{kp}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий. Другими словами, математические ожидания различаются незначимо.

Задача №10. По критерию Пирсона при уровне значимости α проверить гипотезу о распределении случайной величины X по заданному закону, если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k, b_k)$:

Ω_k	$a_1 \div b_1$	$a_2 \div b_2$	. . .	$a_r \div b_r$
n_k	n_1	n_2	. . .	n_r

Для выполнения данного типа задачи необходимо изучить соответствующий материал в объеме п. 2.5 в [3] или гл. 19 в [1] и гл. 13 в [2]:

Пусть дана выборка наблюдений случайной величины X:{x_1, x_2, … , x_n}. Проверяется гипотеза H_0 , утверждающая, что X имеет функцию распределения $F(x)$ или плотность распределения $f(x)$. По выборке наблюдений находят оценки неизвестных параметров (если таковые есть) предполагаемого закона распределения случайной величины X. Далее, интервал Ω возможных значений случайной величины X разбивается на r непересекающихся подинтервалов $\Omega_k = (a_k , b_k)$, k =1,2,…,r < n. Пусть n_k – число элементов выборки, принадлежащих подинтервалу Ω_k. Очевидно, что $\sum_{k=1}^{r} n_k = n$. Используя предполагаемый закон распределения случайной величины X, находят вероятности p_k того, что значение X принадлежит подинтервалу Ω_k:

$$p_k = P(X \in \Omega_k) = \int_{\Omega_k} f(x)dx = F(b_k) - F(a_k) \ , \ \sum_{k=1}^{r} p_k = 1 \ .$$

Далее вычисляют статистическое значение критерия по формуле

$$Z = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \ .$$

По теореме Пирсона величина Z должна быть распределена по закону χ^2 с $r - l - 1$ степенями свободы, где l – число неизвестных параметров распределения, оцениваемых по выборке. При заданном уровне значимости α гипотеза о распределении X по закону $F(x)$ отвергается, если Z > z_{kp} и не отвергается, если Z < z_{kp} , где z_{kp} определяется по таблице критических точек распределения χ^2 с $r - l - 1$ степенями свободы так, чтобы $P(\chi^2 > z_{kp}) = \alpha$ (см. Приложение 5).

Пример 10.1. По критерию Пирсона при уровне значимости α = 0.05 проверить гипотезу о распределении случайной величины X по нормальному закону (l = 2), если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k = (a_k , b_k)$:

Ω_k	12÷14	14÷16	16÷18	18÷20	20÷22	22÷24
n_k	5	10	25	35	15	10

Решение: Определим объем выборки $\sum_{k=1}^{r} n_k = n$ = 100. Найдем по выборке оценки математического ожидания и дисперсии (таким образом l = 2) предполагаемого нормального распределения случайной величины X, принимая за x_k середины подинтервалов:

x_k	13	15	17	19	21	23
n_k	5	10	25	35	15	10

$$\bar{x} = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{6} x_k n_k = 18.5;$$

$$s^2 = \frac{1}{99}\sum_{k=1}^{6}(x_k - \bar{x})^2 n_k \approx 6.41414; \quad s \approx 2.5326 .$$

Подсчитаем вероятности p_k для предполагаемого нормального распределения случайной величины X по формуле

$$p_k = P(X \in \Omega_k) = \Phi\left(\frac{b_k - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_k - \bar{x}}{s}\right),\ k = 1,2,3,4,5,6 ,$$

где a_k и b_k – соответственно нижняя и верхняя границы Ω_k , причем крайние границы расширены до бесконечности ($a_1 = -\infty$, $b_6 = \infty$), а значения функции Лапласа $\Phi(x)$ вычисляются по таблице значений функции Лапласа (см. Приложение 3). Добавим также строку плотностей частоты f_k^* , деля n_k на объем выборки и на длину подинтервала: $f_k^* = \dfrac{n_k}{2n}$. Таким образом, расширенную таблицу выборочного распределения можно представить в виде:

Ω_k	$-\infty \div 14$	$14 \div 16$	$16 \div 18$	$18 \div 20$	$20 \div 22$	$22 \div \infty$
n_k	5	10	25	35	15	10
p_k	0.038	0.124	0.260	0.301	0.193	0.084
f_k^*	0.025	0.05	0.125	0.175	0.075	0.05
Z_k	0.394	0.464	0.038	0.783	0.972	0.326

Далее вычисляем статистическое значение критерия по формуле

$$Z = \sum_{k=1}^{6} Z_k = \sum_{k=1}^{6}\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \approx 2.977 .$$

Промежуточные значения Z_k добавлены пятой строкой в расширенную таблицу выборочного распределения.

Затем, при уровне значимости $\alpha = 0.05$, определяем $z_{кр}$ по таблице критических точек распределения χ^2 с $r - l - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$ степенями свободы (см. Приложение 5): $z_{kp}(\alpha, r - l - 1) = z_{kp}(0.05, 3) = 7.8$. Наконец, так как $Z = 2.977 < 7.8 = z_{kp}$, то делаем вывод о том, что гипотеза о распределении случайной величины X по нормальному закону не отвергается. В рамках графического контроля изобразим на фоне точек массива $\{x_k, f_k^*\}$ график кривой плотности нормального распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

беря в качестве математического ожидания a и стандартного отклонения σ их подсчитанные точечные оценки: $\bar{x}=18.5$; s ≈ 2.5326 и используя таблицу (см. Приложение 2) значений функции $\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ (рис.10.1).

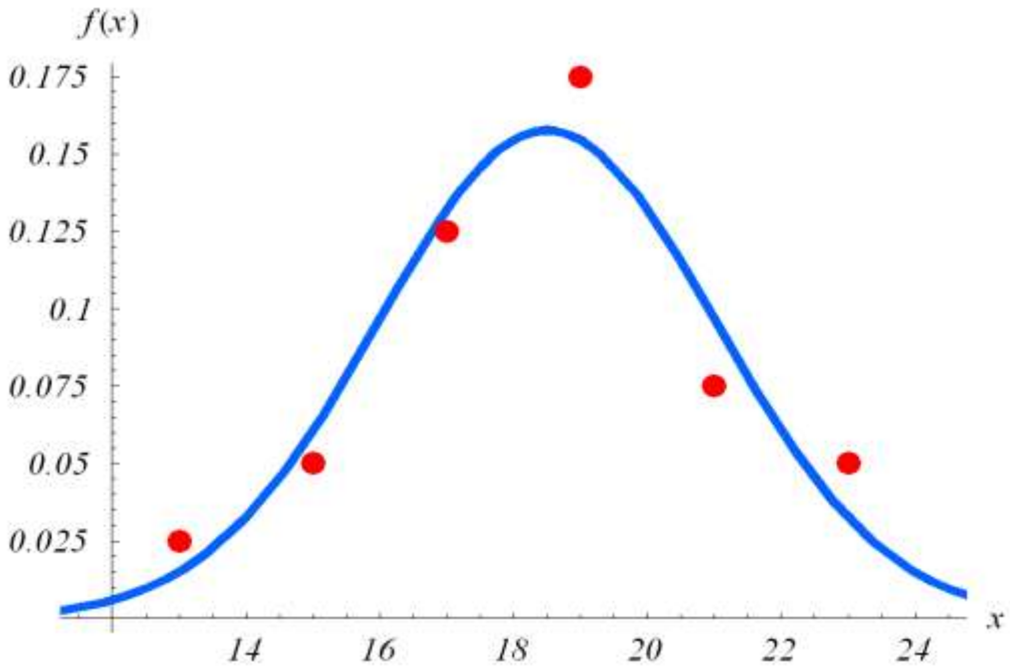


Рис. 10.1.

Взаимное расположение точек массива $\{x_k, f_k^*\}$ и графика кривой плотности нормального распределения подтверждают статистический вывод о том, что данные наблюдений согласуются с гипотезой о их распределении по нормального закону.

Пример 10.2. По критерию Пирсона при уровне значимости α = 0.05 проверить гипотезу о распределении случайной величины X по закону $f(x)=\begin{cases}3x^2, x\in[0,1]\\ 0, x\notin[0,1]\end{cases}$ (l = 0), если задано n_k попаданий выборочных значений случайной величины X в подинтервал $\Omega_k=(a_k, b_k)$:

Ω_k	0÷0.25	0.25÷0.5	0.5÷0.75	0.75÷1
n_k	1	2	5	12

Решение: По формуле (1.10.12): $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ получаем выражение функции распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases} .$$

Подсчитаем вероятности p_k для предполагаемого нормального распределения случайной величины X по формуле

$$p_k = P(X \in \Omega_k) = F(b_k) - F(a_k),\ k = 1,2,3,4,$$

где a_k и b_k–соответственно нижняя и верхняя границы подинтервалов Ω_k.

Добавим также строку плотностей частоты f_k^*, деля n_k на объем выборки $\sum_{k=1}^{4} n_k = n$ = 20 и на длину подинтервала $\Delta\Omega_k$ =0.25:

$$f_k^* = \frac{n_k}{n \cdot \Delta\Omega_k} = \frac{n_k}{20 \cdot 0.25} = \frac{n_k}{5}.$$

Таким образом, расширенную таблицу выборочного распределения можно представить в виде:

Ω_k	0÷0.25	0.25÷0.5	0.5÷0.75	0.75÷1
n_k	1	2	5	12
p_k	0.0156	0.1094	0.2969	0.5781
f_k^*	0.2	0.4	1	2.4
Z_k	1.5125	0.0161	0.1480	0.01655

Далее вычисляем статистическое значение критерия по формуле

$$Z = \sum_{k=1}^{6} Z_k = \sum_{k=1}^{6} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \approx 1.693 .$$

Промежуточные значения Z_k добавлены пятой строкой в расширенную таблицу выборочного распределения.

Затем, при уровне значимости α = 0.05, учитывая, что число неизвестных параметров заданного распределения l = 0, определяем z_{kp} по таблице критических точек распределения χ^2 с $r - l - 1 = 4 - 0 - 1 = 3$ степенями свободы (см. Приложение 5): $z_{kp}(\alpha, r - l - 1) = z_{kp}(0.05, 3) = 7.8$. Наконец, так как $Z = 1.693 < 7.8 = z_{kp}$, то делаем вывод о том, что гипотеза о распределении случайной величины X по заданному закону не отвергается. В рамках графического контроля изобразим на фоне точек массива $\{x_k\ ,\ f_k^*\}$ график кривой плотности заданного распределения (рис.10.2).

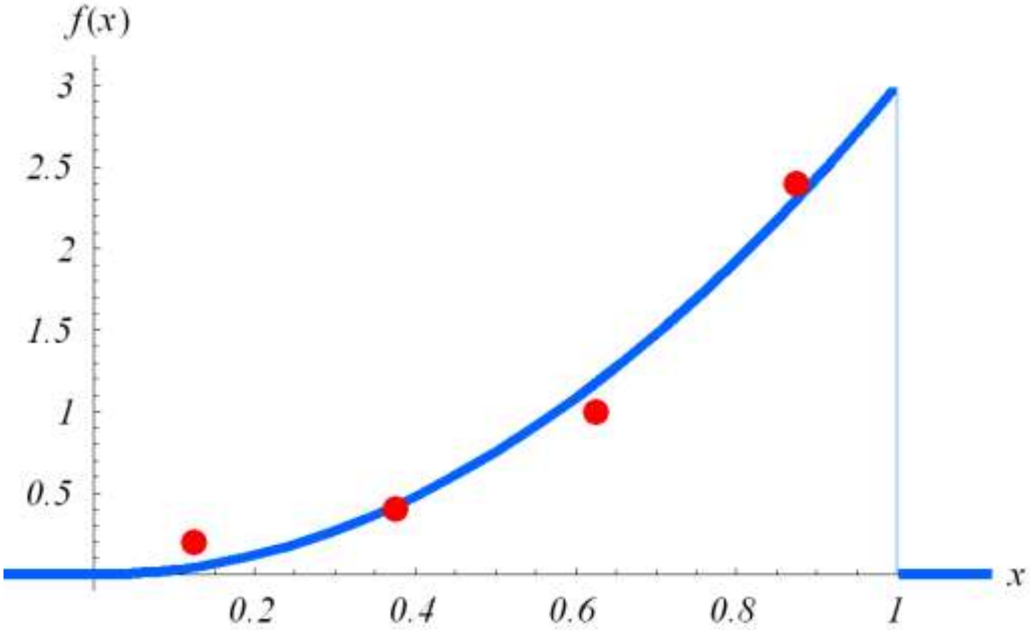


Рис. 10.2.

Взаимное расположение точек массива $\{x_k\ ,\ f_k^*\}$ и графика кривой плотности заданного распределения подтверждают статистический вывод о том, что данные наблюдений согласуются с гипотезой о их распределении по заданному закону.

Приложение 1

Таблица

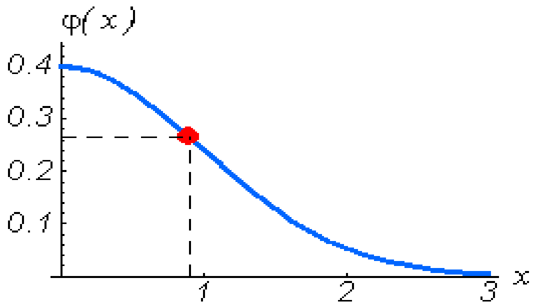
важнейших дискретных и непрерывных распределений
случайной величины ***X***

Распределение		Параметры	$M(X)$	$D(X)$
Биноминальное	$P\{X=m\} = C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ $m = 0, 1, \dots, n$	$n=1, 2, \dots$ $0\le p\le 1$	np	npq
Пуассона	$P\{X = m\} = \frac{a^m e^{-a}}{m!}$, $m = 0, 1, 2, \dots$	$a>0$	a	a
Геометрическое	$P\{X=m\}=p(1-p)^m$ $m = 0, 1, \dots$	$0\le p\le 1$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Гипергеометрическое	$P\{X=m\}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ $m = 0,1,\dots,\min(M,n)$	$N = 2, 3, \dots$ $M=1,2,\dots<N$ $n=1,2,\dots<N$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{(N-1)N^2}$
Равномерное	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}$	(a, b)- любой интервал на оси Ox	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Показательное	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\end{cases}$	$\lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Нормальное (Гаусса)	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$-\infty < a < \infty$ $\sigma>0$	a	σ^2

Приложение 2

Таблица значений функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

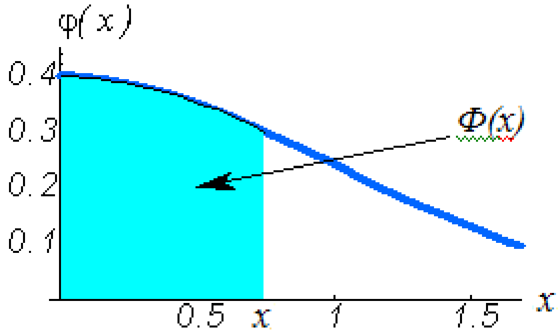


x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,398	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,242	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,054	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,004	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

Приложение 3

Таблица значений функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$$



x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,30	0,1179	0,60	0,2257	0,90	0,3159
0,01	0,0040	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186
0,02	0,0080	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212
0,03	0,0120	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238
0,04	0,0160	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264
0,05	0,0199	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289
0,06	0,0239	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315
0,07	0,0279	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340
0,08	0,0319	0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365
0,09	0,0359	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389
0,10	0,0398	0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438
0,12	0,0478	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461
0,13	0,0517	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485
0,14	0,0557	0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508
0,15	0,0596	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531
0,16	0,0636	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554
0,17	0,0675	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577
0,18	0,0714	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599
0,19	0,0753	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621
0,20	0,0793	0,50	0,1915	0,80	0,2881	1,10	0,3643
0,21	0,0832	0,51	0,1950	0,81	0,2910	1,11	0,3665
0,22	0,0871	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686
0,23	0,0910	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708
0,24	0,0948	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729
0,25	0,0987	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749
0,26	0,1026	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770
0,27	0,1064	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790
0,28	0,1103	0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810
0,29	0,1141	0,59	0,2224	0,89	0,3133	1,19	0,3830

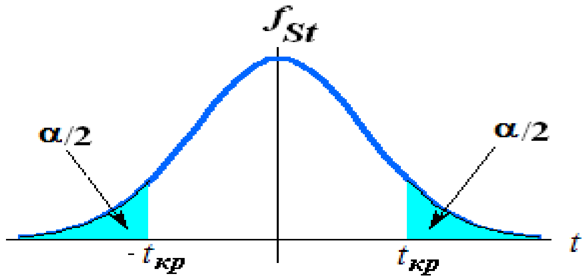
Продолжение таблицы значений функции *Φ(x)*

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
1,20	0,3849	1,60	0,4452
1,21	0,3869	1,61	0,4463
1,22	0,3883	1,62	0,4474
1,23	0,3907	1,63	0,4484
1,24	0,3925	1,64	0,4495
1,25	0,3944	1,65	0,4505
1,26	0,3962	1,66	0,4515
1,27	0,3980	1,67	0,4525
1,28	0,3997	1,68	0,4535
1,29	0,4015	1,69	0,4545
1,30	0,4032	1,70	0,4554
1,31	0,4049	1,71	0,4564
1,32	0,4066	1,72	0,4573
1,33	0,4082	1,73	0,4582
1,34	0,4099	1,74	0,4591
1,35	0,4115	1,75	0,4599
1,36	0,4131	1,76	0,4608
1,37	0,4147	1,77	0,4616
1,38	0,4162	1,78	0,4625
1,39	0,4177	1,79	0,4633
1,40	0,4192	1,80	0,4641
1,41	0,4207	1,81	0,4649
1,42	0,4222	1,82	0,4656
1,43	0,4236	1,83	0,4664
1,44	0,4251	1,84	0,4671
1,45	0,4265	1,85	0,4678
1,46	0,4279	1,86	0,4686
1,47	0,4292	1,87	0,4693
1,48	0,4306	1,88	0,4699
1,49	0,4319	1,89	0,4706
1,50	0,4332	1,90	0,4713
1,51	0,4345	1,91	0,4719
1,52	0,4357	1,92	0,4726
1,53	0,4370	1,93	0,4732
1,54	0,4382	1,94	0,4738
1,55	0,4394	1,95	0,4744
1,56	0,4406	1,96	0,4750
1,57	0,4418	1,97	0,4756
1,58	0,4429	1,98	0,4761
1,59	0,4441	1,99	0,4767

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
2,00	0,4772	2,58	0,4951
2,02	0,4783	2,60	0,4953
2,04	0,4793	2,62	0,4956
2,06	0,4803	2,64	0,4959
2,08	0,4812	2,66	0,4961
2,10	0,4821	2,68	0,4963
2,12	0,4830	2,70	0,4965
2,14	0,4838	2,72	0,4967
2,16	0,4846	2,74	0,4969
2,18	0,4854	2,76	0,4971
2,20	0,4861	2,78	0,4973
2,22	0,4868	2,80	0,4974
2,24	0,4875	2,82	0,4976
2,26	0,4881	2,84	0,4977
2,28	0,4887	2,86	0,4979
2,30	0,4893	2,88	0,4980
2,32	0,4898	2,90	0,4981
2,34	0,4904	2,92	0,4982
2,36	0,4909	2,94	0,4984
2,38	0,4913	2,96	0,4985
2,40	0,4918	2,98	0,4986
2,42	0,4922	3,00	0,49865
2,44	0,4927	3,20	0,49931
2,46	0,4931	3,40	0,49966
2,48	0,4934	3,60	0,49984
2,50	0,4938	3,80	0,49992
2,52	0,4941	4,00	0,49996
2,54	0,4945	4,50	0,49999
2,56	0,4948	5,00	0,49999

Приложение 4

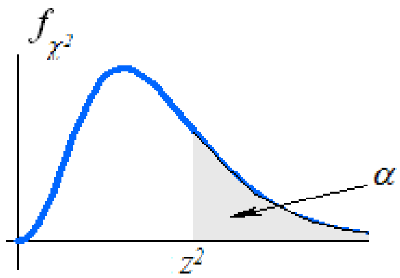
Критические точки *t*
распределения Стьюдента



Число степеней свободы ***k***	Уровень значимости α (***двусторонняя*** крит. область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,70	31,82	63,70	318,30	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31 ,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (***односторонняя*** крит. область)					

Приложение 5

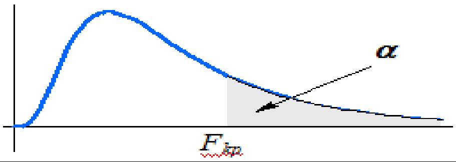
Критические точки z^2 распределения χ^2



Число степеней свободы ***k***	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,001	0,0002
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21 ,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31 ,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 6

Критические точки F_{kp} распределения Фишера



Уровень значимости α = 0,01											
	k₁ **-** число степеней свободы большей дисперсии										
k_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4
3	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	27,1
4	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,5	14,4
5	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,96	9,89
6	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67

Уровень значимости α = 0,05											
	k₁ **-** число степеней свободы большей дисперсии										
k_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48

5. ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

5.1. Требования для сдачи экзамена

К экзамену допускаются только те студенты, у которых зачтены все индивидуальные домашние задания.

Студенты, обучающиеся по КЗФ, сдают экзамен во время зимней экзаменационной сессии по билетам (в устной или письменной форме).

Каждый билет содержит пять задач. Экзамен считается сданным, если решены 3 задачи и более. Преподаватель может задать вопросы по теории изучаемого материала.

Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, сдают экзамен в тестовой форме (on-line режим).

5.2. Вопросы для подготовки к экзамену

1. Пространство элементарных событий. Операции над событиями, свойства операций.
2. Статистическое, классическое, геометрическое и аксиоматическое определения вероятности.
3. Свойства вероятности (основные теоремы теории вероятностей).
4. Условная вероятность. Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей.
5. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
6. Схема испытаний Бернулли, формула Бернулли. Интегральная и локальная формулы Лапласа, формула Пуассона, как предельный случай формулы Бернулли.
7. Понятие случайной величины и ее закона распределения. Дискретная случайная величина и ее ряд распределения. Функция распределения случайной величины и ее свойства.
8. Непрерывные случайные величины, плотность распределения непрерывной случайной величины, свойства плотности и функции распределения непрерывной величины.
9. Математическое ожидание случайной величины, свойства математического ожидания. Медиана и мода случайной величины.
10. Дисперсия и среднеквадратичное отклонение случайной величины. Свойства дисперсии.
11. Начальные и центральные моменты случайной величины. Коэффициент асимметрии и эксцесс распределения, квантили и критические точки распределения.
12. Распределение Бернулли и биномиальное распределения. Основные числовые характеристики.

13. Геометрическое распределение и его основные числовые характеристики.
14. Распределение Пуассона и основные числовые характеристики. Простейший (пуассоновский поток) событий.
15. Равномерное распределение, плотность и функция распределения, основные числовые характеристики.
16. Показательное распределение, плотность и функция распределения, основные числовые характеристики.
17. Нормальный закон распределения, основные числовые характеристики. Стандартная нормальная величина.
18. Функция случайной величины, плотность распределения функции непрерывной величины.
19. Системы случайных величин. Функция распределения системы случайных величин, ее свойства (для двухмерного случайного вектора). Свойства плотности совместного распределения непрерывного случайного вектора.
20. Независимость случайных величин, условный закон распределения.
21. Числовые характеристики системы случайных величин, их свойства. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин, их свойства.
22. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел Чебышева, теорема Бернулли.
23. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра-Лапласа, локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа.
24. Статистические оценки параметров распределения, их свойства. Методы нахождения точечных оценок (метод наибольшего правдоподобия, метод моментов).
25. Доверительный интервал, доверительная вероятность для оценки математического ожидания и дисперсии.
26. Проверка гипотез о равенстве двух дисперсий. Проверка гипотез о равенстве двух средних (при разных предположениях относительно дисперсий).
27. Критерии Пирсона и Колмогорова проверки гипотез о законах распределения.
28. Коэффициент корреляции и его основные свойства.
29. Уравнение линейной регрессии. Оценивание коэффициентов уравнения регрессии методом наименьших квадратов.
30. Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии. Проверка адекватности моделей. Сравнение по точности двух уравнений регрессии

5.3. Образцы билетов к экзамену для КЗФ

Экзаменационный билет № _0_

1. Доказать формулу полной вероятности.
2. Из 100 изделий, среди которых имеется 5 нестандартных, выбраны случайным образом 7 изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие, используя формулу Бернулли и локальную теорему Лапласа.
3. Задана плотность распределения *f(x)* случайной величины *X:*

$$f(x) = \begin{cases} A\sin x, & x \in (0,\pi) \\ 0, & x \notin (0,\pi) \end{cases}.$$

   Требуется найти *A*, построить график *f(x),* найти функцию распределения *F(x)* и построить ее график, найти вероятность попадания величины *X* на участок от *0* до $\frac{\pi}{2}$. Вычислить *M[X]*.
4. Дан ряд распределения:

x_i	-1.	1.	3.	5.
n_i	5	20	40	35

   Построить гистограмму, полигон; найти точечные оценки математического ожидания и дисперсии; найти интервальную оценку дисперсии с надежностью $\beta = 0.95$; при уровне значимости $\alpha = 0.01$ проверить гипотезу о распределении данной выборки по нормальному закону.
5. По двум независимым выборкам объемов $n_X = 4$ и $n_Y = 5$ нормальных распределений найдены $\bar{x} = 2.2$ и $\bar{y} = 1.5$ и $s_x^2 = 0.08$ и $s_y^2 = 0.12$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $m_X = m_Y$ при конкурирующей H_1: $m_X > m_Y$.

5.4. Образцы билетов к экзамену для ДОТ

Экзамен проводится в тестовой форме (on-line)

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов.– М. Высшая школа, 2005.– 479с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. Учебное пособие для вузов.– М. Высшая школа, 2004.– 404с.
3. Лазарева Л.И., Михальчук А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. - Томск, ТПУ, 2010.– 144с.

Дополнительная литература

4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.–М. Физматгиз, 2001.– 575с.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.–М. Наука, 1988.– 448с.
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения.–М. Высшая школа, 2000.– 480с.
7. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика. Под ред. Ефимова А.В. – М. Наука, 1990.– 428с.
8. Фикс И.И., Терехина Л.И. Вероятность и элементы статистики. Учебное пособие. – Томск, ТПУ, 2008.– 124с.
9. Константинова Л.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. – Томск, ТПУ, 2005.– 140с.

Internet-ресурсы

Сайт ТПУ. – http://www.tpu.ru, электронная версия [3] и данных методических указаний.

Учебное издание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и индивидуальные задания

Составитель
Михальчук Александр Александрович

Рецензент
кандидат физ.-мат.наук,
доцент кафедры ВММФ ЕНМФ
М.Л. Шинкеев

Компьютерная верстка *М.В. Ветрова*

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать Xerox. Усл.печ.л. 5,29. Уч.-изд.л. 4,79.
Заказ . Тираж экз.

nqa. ISO 9001 Registered

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

UKAS

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru