1. Нахождение общего решения линейного однородного уравнения 1-го порядка.

Общий вид линейного однородного уравнения 1-го порядка

$$\varphi_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad (1)$$

где $u=u(x,y)$, а $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ заданные функции переменных (x,y). Для нахождения функции $u(x,y)$ необходимо рассмотреть обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'=\frac{\varphi_2(x,y)}{\varphi_1(x,y)} \qquad (2)$$

Обозначив через $\varphi(x,y)=C$ общий интеграл уравнения (2), общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$u(x,y)=F(\varphi(x,y)), \qquad (3)$$

где F - произвольная дифференцируемая функция.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}+(\sin x+yctgx)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Напишем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'=\frac{\sin x+yctgx}{1}$$

Получим линейное дифференциальное уравнение, которое будем решать методом вариации постоянных

$$\frac{\partial y}{\partial x}=yctgx$$

$$\frac{\partial y}{y}=ctgxdx$$

$$\ln|y|=\ln|\sin x|+\ln C_1$$

$$y=C_1\sin x$$

$$т.е. y(x)=C_1(x)\sin x$$

$$C_1'\sin x+C_1\cos x=\sin x+C_1\cos x$$

$$C_1'=1, C_1(x)=x+C$$

$$y(x)=(x+C)\sin x, \frac{y}{\sin x}=x+C, C=\frac{y}{\sin x}-x$$

Ответ: $u(x,y)=F(\frac{y}{\sin x}-x)$.

2. Определение типа уравнения 2-го порядка и приведение его к каноническому виду.

Пусть $u = u(x, y)$ - неизвестная функция двух независимых переменных x и y. Тогда уравнением 2-го порядка называется уравнение вида

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \qquad (4)$$

Тип уравнения определяется в зависимости от величины $\Delta = b^2 - ac$

Если $\Delta > 0$, то уравнение гиперболического типа,

Если $\Delta = 0$, то уравнение параболического типа,

Если $\Delta < 0$, то уравнение эллиптического типа.

Для приведения (4) к каноническому виду следует написать уравнения характеристик

$$\begin{cases} ady - (b + \sqrt{b^2 - ac})dx = 0, \\ ady - (b - \sqrt{b^2 - ac})dx = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

и найти их общие решения.

Уравнения гиперболического типа при $b^2 - ac > 0$.

Обозначив общие интегралы системы уравнений (5) через $\varphi(x,y) = c_1; \psi(x,y) = c_2$, вводим новые независимые переменные ξ, η по формулам $\xi = \varphi(x,y); \eta = \psi(x,y)$. Тогда уравнение (4) примет вид $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\xi,\eta,u,\dfrac{\partial u}{\partial \xi},\dfrac{\partial u}{\partial \eta})$ - канонический вид уравнения гиперболического типа.

Уравнения параболического типа при $b^2 - ac = 0$.

Общие интегралы системы уравнений (5) совпадают $\varphi(x,y) = \tilde{c}$

Вводим новые независимые переменные ξ, η по формулам $\xi = \varphi(x,y); \eta = \eta(x,y)$, где $\eta(x,y)$ - функция, удовлетворяющая условию $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$, например, $\eta = x$.

Тогда уравнение (4) примет вид $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\cdot)$ - канонический вид уравнения параболического типа.

Уравнения эллиптического типа при $b^2 - ac < 0$.

Общие интегралы системы уравнений (5) $\varphi(x,y) \pm i\psi(x,y) = \tilde{c}$.

Вводим новые независимые переменные ξ, η по формулам $\xi = \varphi(x,y); \eta = \psi(x,y)$.

Тогда уравнение (4) примет вид $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F(\xi,\eta,u,\dfrac{\partial u}{\partial \xi},\dfrac{\partial u}{\partial \eta}) = 0$ - канонический вид уравнения эллиптического типа.

Пример 2. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x = 0,$$

$$a = 1, b = 1, c = 2$$

$\Delta = b^2 - ac = -1;$ Уравнение эллиптического типа. Уравнение характеристик

$$ady - (b \pm \sqrt{b^2 - ac})dx = 0,$$
$$dy - (1 \pm i)dx = 0.$$
$$y - x \pm ix = c, \xi = y - x, \eta = x.$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Подставляя полученные значения частотных производных в данное уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}.$

3. Краевая задача для однородного волнового уравнения.

Дано однородное волновое уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, с начальными условиями $u(0,x) = \varphi(x), \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x)$ и краевыми условиями $U(t,0) = U(t,l) = 0.$

Данная задача может быть решена методом Фурье, согласно которому решение записывается в виде $U(t,x) = X(x)T(t)$. После подстановки $U(t,x)$ в данное уравнение, получим уравнения для функций $X(x)$ и $T(t)$.

Решая уравнение $X'' = -\lambda^2 X$ относительно функции $X(x)$ с граничными условиями $X(0) = X(l) = 0$, получим

$$X(x) = X_n(x) = A_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \lambda = \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Решая уравнение $T'' = -\lambda^2 a^2 T$ относительно функции $T(t)$, получим

$$T(t) = T_n(t) = C_n \sin\frac{a\pi n}{l}t + D_n \cos\frac{a\pi n}{l}t,$$

где A_n, C_n, D_n - некоторые константы. В силу однородности уравнения, можно полагать, что $A_n = 1$. Следовательно, решение данного уравнения записывается в виде

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{a\pi n}{l}t+D_n\cos\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Для нахождения констант C_n, D_n воспользуемся начальными условиями $U(0,x)=\varphi(x), \frac{\partial U(0,x)}{\partial x}=\psi(x).$

Тогда получим уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{\pi n}{l}x=\varphi(x), \qquad D_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x=\psi(x), \qquad C_n=\frac{2}{a\pi n}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$$

Пример 3. Решить краевую задачу для однородного волнового уравнения

$$U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1{,}5$$

$$U(0,x)=x(l-x), \frac{\partial U(0,x)}{\partial t}=0, U(t,0)=U(t,l)=0.$$

Решение записывается в виде

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{a\pi n}{l}t+D_n\cos\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $C_n=0$, т.к. $\psi(x)=0$, а $D_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx$, т.к. $\varphi(x)=x(l-x)$, D_n вычислим, воспользовавшись дважды интегрированием по частям

$$D_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx=-\frac{2}{\pi n}\int_0^l x(l-x)d\cos\frac{\pi n}{l}x=-\frac{2}{\pi n}x(l-x)\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l+$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int_0^l\cos\frac{\pi n}{l}x(l-2x)dx=\frac{2l}{(\pi n)^2}\int_0^l(l-2x)d\sin\frac{\pi n}{l}x=\frac{2l}{(\pi n)^2}(l-2x)\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l+$$

$$+\frac{4l}{(\pi n)^2}\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}xdx=-\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l=-\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\cos\pi n+\frac{4l^2}{(\pi n)^3}=\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1-\cos\pi n\right]=$$

$$=\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right]$$

Ответ: $U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right]\cos\frac{1{,}5\pi n}{l}t\sin\frac{\pi n}{l}x.$

4. Краевая задача для неоднородного волнового уравнения.

Ограничимся рассмотрением краевой задачи для неоднородного волнового уравнения вида

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+f_1(x)f_2(t) \qquad (6)$$

с нулевыми начальными и граничными условиями, т.е.

$$U(0,x)=\frac{\partial U(0,x)}{\partial t}=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде разложения $U(t,x)$ в ряд Фурье по x:

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим задачу Коши для неизвестной функции

$$T_n(t):T_n''+\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2T_n=d_n f_2(t), T_n(0)=T_n'(0)=0, d_n=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$$

Обозначив решение этой задачи через $T_n(t)$ и подставляя в разложение (7), получим искомую функцию $U(t,x)$.

<u>Пример 4</u>. Решить краевую задачу для неоднородного волнового уравнения

$$U_{tt}=a^2U_{xx}=xt, a=1$$

$$U(0,x)=\frac{\partial U(0,x)}{\partial t}=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

Неизвестные функции $T_n(t)$ удовлетворяют задаче Коши

$$T_n''+\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n=d_nt,$$

$$d_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{\pi n}{l}xdx=-\frac{2}{\pi n}\int_0^l xd\cos\frac{\pi n}{l}x=-\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l+\frac{2}{\pi n}\int_0^l\cos\frac{\pi n}{l}xdx=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}l\cos\pi n+\frac{2l}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l=\frac{2l}{\pi n}(-1)^{n+1}$$

Следовательно, получили уравнение $T_n''+\frac{\pi^2n^2}{l^2}T_n=\frac{2l}{\pi n}(-1)^{n+1}t$ (8)

Его общее решение есть сумма общего решения однородного уравнения

$$T_n''+\frac{\pi^2n^2}{l^2}T_n=0 \qquad (9)$$

и частного решения уравнения (8). Характеристическое уравнение для (9) имеет вид

$$K^2+\frac{\pi^2n^2}{l^2}=0\text{, т.е. } K_{1,2}=\pm\frac{\pi n}{l}i.$$

Следовательно, общее решение уравнения (9) записывается в виде

$$T_n=d_1\cos\frac{\pi n}{l}t+d_2\sin\frac{\pi n}{l}t$$

Найдем частное решение уравнения (8). Его надо искать в виде $T_n=At+B$, подставляя его в уравнение (8), получим

$$\frac{\pi^2n^2}{l^2}(At+B)=\frac{2l}{\pi n}(-1)^{n+1}t, B=0, A=(-1)^{n+1}\frac{2l^3}{\pi^3n^3}.$$

Итак, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$T_n(t) = d_1 \cos\frac{\pi n}{l} t + d_2 \sin\frac{\pi n}{l} t + (-1)^{n+1} \frac{2l^3}{\pi^3 n^3} t.$$

Константы d_1, d_2 находим из начальных условий $T_n(0) = T_n'(0) = 0$, а потому $d_1 = 0, d_2 = (-1)^n \dfrac{2l^4}{\pi^4 n^4}$.

Ответ: $U(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \dfrac{2l^4}{\pi^4 n^4} \sin\dfrac{\pi n}{l} t + (-1)^{n+1} \dfrac{2l^3}{\pi^3 n^3} \right) \sin\dfrac{\pi n x}{l}.$

5. Краевая задача для однородного уравнения теплопроводности.

Дано уравнение $U_t = a^2 U_{xx}$ и условия $U(0,x) = \varphi(x), U(t,0) = U(t,l) = 0$. Согласно методу Фурье решение записывается в виде $U(t,x) = T(t)X(x)$. Подставляя его в данное уравнение, получим

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2.$$

Для функции $X(x)$ имеем краевую задачу $X'' = -\lambda^2 X, X(0) = X(l) = 0$, решение которой имеет вид $X(x) = X_n(x) = d_n \sin\dfrac{\pi n}{l} x, \lambda = \lambda_n = \dfrac{\pi n}{l}$.

Для функции $T(t)$ имеем уравнение $T' + a^2 \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2 T = 0$, решение которого имеет вид $T(t) = T_n(t) = A_n \exp\left(-\dfrac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t \right)$. Следовательно, решение уравнения теплопроводности имеет вид

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t \right) \sin\frac{\pi n}{l} x$$

коэффициенты b_n находим из начального условия $U(0,x) = \varphi(x)$, т.е. $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{\pi n}{l} x, b_n = \dfrac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\dfrac{\pi n}{l} x dx.$

Пример 5. Решить краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности

$$U_t = a^2 U_{xx},\ a = 1,\ U(0,x) = 2\sin^2\frac{\pi n}{2l} x,\ U(t,0) = U(t,l) = 0$$

так как $U(x) = 2\sin^2\dfrac{\pi n}{l} x$, то

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l 2\sin^2\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l (1-\cos\frac{\pi n}{l}x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}xdx -$$

$$-\frac{1}{l}\int_0^l \sin\frac{2\pi n}{l}xdx = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l + \frac{1}{2\pi n}\cos\frac{2\pi n}{l}x\Big|_0^l = -\frac{2}{\pi n}\cos\pi n + \frac{2}{\pi n} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n}, \textit{если } n - \textit{нечетное}, \\ 0, \textit{если } n - \textit{четное}. \end{cases}$$

Ответ: $U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\exp\left(-\frac{4\pi^2(2k-1)^2}{l^2}t\right)\sin\frac{2\pi(2k-1)}{l}x.$

ВАРИАНТЫ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ.

Все варианты составлены из задач со следующей постановкой:
Задача 1. Найти общее решение линейного однородного уравнения 1-го порядка.
Задача 2. Определить тип уравнения 2-го порядка и привести его к каноническому виду.
Задача 3. Решение краевой задачи для однородного волнового уравнения.
Задача 4. Решение краевой задачи для неоднородного волнового уравнения.
Задача 5. Численные методы решения неоднородного уравнения теплопроводности.

1.

1)$ctgx\frac{\partial U}{\partial x}+(y+2\cos^2 xctgx)\frac{\partial u}{\partial x}=0$

2)$U_{xx}-9U_{yy}=0$

3)$U_{tt}=a^2U_{xx},a=2,U(0,x)=(l-x)\sin\frac{\pi x}{l},\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0$

$U(t,0)=U(t,l)=0.$

4)$U_{tt}=a^2U_{xx}+t\sin\frac{\pi x}{2},a=5,U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,$

$U(t,0)=U(t,l)=0$

5)$U_t=U_{xx}+\cos\frac{\pi x}{2},U(x,0)=x^2\sin\pi x,U(0,t)=0,$

$U(l,t)=0,x\in[0,1],t\in[0;0.4]$

2.

1)$x\frac{\partial U}{\partial x}+y\ln\frac{y}{x}\frac{\partial U}{\partial y}=0$

2)$U_{xx}-6U_{xy}+2U_y=0$

$3) U_{tt} = a^2 U_{xx,} a = 3, U(0,x) = x\sin(l-x), \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0,$

$U(t,0) = U(t,l) = 0$

$4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t+5)x, a = 3, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$

$U(t,0) = U(t,l) = 0$

$5) U_t = U_{xx} + \sin\frac{\pi x}{2}, U(x,0) = 1{,}2x^2 \sin \pi x, U(0,t) = 0,$

$U(l,t) = e^{-0{,}1} \sin\frac{\pi t}{4}, x \in [o,2], t \in [0;0{,}1].$

3.

$1) x\frac{\partial U}{\partial x} + (2y - x^2)\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

$2) U_{xx} + 8U_{xy} + 3U_x = 0$

$3) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 4, U(0,x) = 2(l-x)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

$4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t^2 - 1)x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0$

$5) U_t = U_{xx} + \sin\frac{\pi x}{2}, U(0,x) = 4x\sin \pi x, U(0,t) = 1,$

$U(l,t) = 2. x \in [0,1], t \in [0,1].$

4.

$1) (x^2 - 1)\frac{\partial U}{\partial x} + (xy + x^4 - 1)\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

$2) U_{xx} - 4U_{yy} + 10U_x = 0.$

$3) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 10, U(0,x) = 10x, U(t,0) = U(t,l) = 0, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0.$

$4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + 10(t-1)\cos 2x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$5) U_t = U_{xx} + 2x + t, U(x,0) = 0{,}5x^4 + 1, U(0,t) = t, U(l,t) = \sin 2t,$

$x \in [0,1], t \in [0,2].$

5.

$$1)(2x-y)\frac{\partial U}{\partial x}+(x+y)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)2U_{xx}-6U_{xy}+4U_{yy}=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1{,}5, U(0,x)=2(x+3), \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\sin x,$$

$$U(t,0)=U(t,l)=1.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+tx^2, a=2, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)U_t=U_{xx}+t\sin x, U(x,0)=x(1-x), U(0,t)=\sqrt{t}, U(l,t)=t$$

$$x\in[0;0{,}5], t\in[0,1]$$

6.

$$1)x^2\frac{\partial U}{\partial x}+(2xy+3)\frac{\partial U}{\partial x}=0.$$

$$2)4U_{xy}-U_{yy}+U_x-2U_y=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=\cos 2x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=x,$$

$$U(t,0)=U(t,l)=t.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2x, a=3, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)U_t=U_{xx}+e^{-0{,}3x}\sin x, U(x,0)=x^2, U(0,t)=1, U(l,t)=5t$$

$$x\in[0;1], t\in[0,3]$$

7.

$$1)(2x+y+1)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)2U_{xx}+2U_{xy}+5U_{yy}=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=x^2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\frac{1}{x},$$

$$U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}-50(l-x)\sin 4t, a=1{,}5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)U_t=U_{xx}+\sin\frac{\pi x}{12}, U(x,0)=x\sin\pi x, U(0,t)=0{,}5, U(l,t)=e^{-t},$$

$$x\in[0;1], t\in[0,2].$$

8.

$1)(x-y+2)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(2x+3y-1)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-9U_{yy}+3U_{y}=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1, U(0,x)=\dfrac{x}{2}, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0,$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2x^2, a=3{,}5,\ U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_{t}=U_{xx}+t\sin 2x, U(x,0)=3x(2-x), U(0,t)=t^2,\ U(l,t)=\cos t,$

$x\in[0;1], t\in[0,2].$

9.

$1)(x+2y+1)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(x-2y)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-2U_{xy}-8U_{yy}+U_{x}-U_{y}=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2,\ U(0,x)=2\cos 2{,}5x,\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t, a=1{,}5, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_{t}=U_{xx}+\sin\dfrac{\pi x}{6}, U(x,0)=4x^2, U(0,t)=t+1,\ U(l,t)=\sin t,$

$x\in[0;1], t\in[0,2].$

10.

$1)(x+y+2)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(2x+3y+1)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)2U_{xx}-10U_{xy}+12U_{yy}+U_{y}=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1.5, U(0,x)=x\sin\dfrac{\pi x}{l}, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+(t^2+1)\sin 2x, a=1, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_{t}=U_{xx}+e^{-x}, U(x,0)=\sqrt{x}, U(0,t)=2t-1, U(l,t)=2\sin t,$

$x\in[0;1], t\in[0,1].$

11.

$$1)\, 2y\frac{\partial U}{\partial x}+(\sin x-y^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)\, U_{xx}-10U_{yy}+5U_x-U_y=0.$$

$$3)\, U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=2(l-x)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$4)\, U_{tt}=a^2U_{xx}+2x\cos t, a=1{,}5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)\, U_t=U_{xx}+t\sin 3x, U(x,0)=2x, U(0,t)=-1, U(l,t)=t+1,$$
$$x\in[0;1], t\in[0,1].$$

12.

$$1)\, 2y\frac{\partial U}{\partial x}+(y^2 tgx+\sin 2x)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)\, U_{xx}+6U_{xy}+8U_{yy}=0.$$

$$3)\, U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2.5,\ U(0,x)=x\cos\frac{\pi x}{2l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,$$
$$U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$4)\, U_{tt}=a^2U_{xx}+(x+2)\sin t, a=2, l=\pi,$$
$$U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)\, U_t=U_{xx}+(t+1)\sin x, U(x,0)=x(1-x), U(0,t)=t, U(l,t)=\cos\sqrt{t},$$
$$x\in[0;1], t\in[0,1].$$

13.

$$1)\, (x^2+y^2)\frac{\partial U}{\partial x}+xy\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)\, U_{xx}+10U_{xy}+25U_{yy}=0.$$

$$3)\, U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=x+2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$4)\, U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2x, a=2, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)\, U_t=U_{xx}+t\sin 3x, U(x,0)=x^4, U(0,t)=0{,}1t, U(l,t)=e^{-0.3t},$$
$$x\in[0;2], t\in[0,1].$$

14.

$1)(x^2+y^2)\frac{\partial U}{\partial x}+(x^2-3y^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xy}-2U_{yy}+3U_y=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=e^x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+\sin t, a=1{,}5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

$5)U_t=U_{xx}+t+x, U(x,0)=\sqrt{x}, U(0,t)=t, U(l,t)=4,$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

15.

$1)(x+y+3)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-y+1)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-9U_{yy}+2U_x=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=e^{x+1}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=1, U(t,0)=U(t,l)=0.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+(x+4)\cos 3t, a=1, l=\frac{\pi}{2}, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_t=U_{xx}+xt, U(x,0)=x^2, U(0,t)=t, U(l,t)=1,$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

16.

$1)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-y\,tgx)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-U_{xy}+U_{yy}+2U_y=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=x^2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_t=U_{xx}+tx, U(x,0)=3x, U(0,t)=t-1, U(l,t)=\sin 2t,$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

17.

$1) x\frac{\partial U}{\partial x}+(xy+xe^{x})\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2) U_{xx}+2U_{xy}+10U_{yy}=0.$

$3) U_{tt}=a^2U_{xx}, a=4, U(0,x)=x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\frac{\pi}{2}.$

$4) U_{tt}=a^2U_{xx}+x\sin 2t, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=1.$

$5) U_{t}=U_{xx}+2x(t+1), U(x,0)=x, U(0,t)=t, U(l,t)=\sin t,$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

18.

$1) x\frac{\partial U}{\partial x}+(x^2\sqrt{y}-yx)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2) U_{xy}-U_{yy}+2U_{x}-U_{y}=0.$

$3) U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=2x+1, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

$4) U_{tt}=a^2U_{xx}+te^{x}, a=1, l=2U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5) U_{t}=U_{xx}+t\sqrt{x}, U(x,0)=x^2, U(0,t)=t+1, U(l,t)=e^{-t},$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

19.

$1) (x^2-y^2)\frac{\partial U}{\partial x}+2xy\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2) U_{xx}-4U_{xy}-1=0.$

$3) U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=2.$

$4) U_{tt}=a^2U_{xx}+e^{x}\sin t, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5) U_{t}=U_{xx}+t^2x, U(x,0)=x, U(0,t)=t-1, U(l,t)=\sqrt{t},$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

20.

1) $(x^2-1)\frac{\partial U}{\partial x}+(-x+yx)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

2) $3U_{xx}+U_{xy}+U_y=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}+e^x\cos 2t, a=4, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

5) $U_t=U_{xx}-x^3t, U(x,0)=t, U(0,t)=1, U(l,t)=2x,$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

21.

1) $x\frac{\partial U}{\partial x}+(2y-x^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

2) $U_{xx}-8U_{xy}+U_y-U_x=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=\sin 2x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\frac{\pi}{2}.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}+2x\cos t, a=1{,}5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

5) $U_t=U_{xx}+t\sin x, U(x,0)=x^4, U(0,t)=t, U(l,t)=t^2,$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

22.

1) $2y\frac{\partial U}{\partial x}+(y^2 tgx+\sin 2x)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

2) $U_{xx}-4U_{yy}+U_x=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=x\cos\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}+x\cos 2t, a=2, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

5) $U_t=U_{xx}+t^2\sin x, U(x,0)=2x, U(0,t)=t, U(l,t)=\sqrt{t},$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

23.

$$1)(x-y)\frac{\partial U}{\partial x}+(x+2y)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+U_{y}=0.$$

$$3)U_{tt}=a^{2}U_{xx}, a=2, U(0,x)=x(l-x), \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=1.$$

$$4)U_{tt}=a^{2}U_{xx}+e^{x}\sin t, a=4, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=1.$$

$$5)U_{t}=U_{xx}+tx, U(x,0)=x, U(0,t)=2t, U(l,t)=t,$$
$$x\in[0;1], t\in[0,1].$$