Зачеты и экзамены

На экзаменах или зачетах выясняется прежде всего отчетливое усвоение всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; задачи должны решаться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть выполнена аккуратно и четко. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1982.
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам. – М.: Эдиториал, 2000.

Дополнительный

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987.
2. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1987.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Тема1. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционная формула Ньютона. Сплайн-интерполяция. Применение интерполяции. Среднеквадратичная аппроксимация.

[1] Глава II, § 1.
[2] Глава II, § 3, 7.
[3] § 1.2.1-1.2.2.

[2] Глава II, задачи №№ 3.1,3.6,3.7,3.18 – 3.24, 3.28,3.31,3.32.
[3] Задачи №№ 1.1, 1.4, 1.11,1.14,1.16,7.1,7.3.

Знать. Интерполяционные формулы Ньютона и Лагранжа. Применение интерполяции. Постановка задач: интерполяции и среднеквадратичной аппроксимации.

Уметь. Построение интерполяционной формулы Ньютона с помощью разделенных разностей. Вычислять погрешность интерполяции полиномами Лагранжа.

Тема 2. Постановка задачи численного дифференцирования и ее некорректность (пример). Простейшие аналоги первой производной. Оценка погрешности. Построение формул численного дифференцирования методом неопределенных коэффицентов.

[1] Введение (задача численного дифференцирования).
[2] Глава II, § 5.

[2] Глава II, задачи №№ 5.1-5.3, 5.6-5.9,5.18.

Знать. Пример некорректности задачи численного дифференцирования. Простейшие формулы численного дифференцирования и оценка их погрешности.

Уметь. Построение формул численного дифференцирования.

Тема 3. Постановка задачи численного интегрирования. Квадратурные формулы: прямоугольника, трапеции, Симпсона, Гаусса. Построение квадратурных формул. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Формула для погрешности квадратурной формулы. Оценки погрешности формул: прямоугольника, трапеции, Симпсона.

[1] Глава II, § 2(пп.1 - 5, 7).
[2] Глава III, § 8, 10.
[3] Пп. 2.1,2.2.

[2] Глава III, задачи №№ 8.1, 8.2, 8.4, 10.8-10.11, 10.17-10.19,10.28-10.30.
[3] Задачи №№ 2.1, 2.3, 2.8, 2.11.

Знать. Постановка задачи численного интегрирования. Построение квадратурных формул. Основные квадратурные формулы. Формула для погрешности квадратурной формулы.

Уметь. Проводить оценку погрешности квадратурных формул.

Тема 4. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы: Гаусса(прогонка), квадратного корня.

Итерационные методы(простой итерации и Зейделя), их сходимость и сравнение по количеству операций. Обусловленность матрицы, оценка точности решения систем линейных уравнений.

[1] Глава I, § 3, глава III, § 1, 2(пп.1-2), 3(пп. 1-3,5,7).
[2] Глава IV, § 14-16, [3] 3.1,3.2,4.1,4.2.1,4.2.2.

[2] Глава IV, задачи №№ 14.1, 14.5, 14.16-14.18, 15.8, 15.20, 15.21, 15.28, 16.4, 16.8, 16.16.
[3] Задачи №№ 3.11-3.13, 3.15,4.2,4.5.

Знать. Численные методы (прямые, итерационные) решения систем линейных уравнений. Сравнение по количеству операций итерационных методов. Скорости сходимости методов: простой итерации и Зейделя.

Уметь. Устанавливать относительную точность решения систем линейных уравнений.

Тема 5. Приближенные методы решения нелинейных уравнений. Методы простой итерации и Ньютона. Сходимость итерационных методов. Оценки погрешности.

[1] Глава III, § 7 (пп.1-3), [2] Глава V, [3] 6.1, 6.2.

[2] Глава V, задачи №№ 18.1-18.3, 18.12-18.15, 19.8, 19.15, 19.19, 19.20.

[3] Задачи №№ 6.1,6.3,6.4.

Знать. Методы простой итерации и Ньютона.

Уметь. Определять скорость сходимости итерационных методов.

Тема 6. Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка задачи. Простейшие разностные операторы. Разностная схема, ее устойчивость, корректность, аппроксимация и сходимость. Разностные схемы Эйлера и Рунге – Кутта.

[1] Глава IV, § 1 (пп.1-3,6). Глава V, § 1.
[2] Глава VII, § 23 – 25.
[3] 9.1,9.2,10.2.1,10.2.2.
[2] Глава VII, задачи №№ 23.3,23.4., 24.1,24.3, 24.4,25.3.
[3] Задачи №№ 9.3,9.14,9.16,10.2,10.16.

Знать. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (Эйлера, Рунге-Кутта). Разностная схема, ее устойчивость, корректность, аппроксимация и сходимость.

Уметь. Определять устойчивость и порядок аппроксимации простейших разностных схем.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

В данном разделе приводятся задачи для проверки практических навыков, необходимых при сдаче зачета или экзамена, а также разобраны наиболее типичные из них.

Задача 1. Дана функция:
$(i = 0,1,2,3,4)$; $(x_i = -1,0,1,3,4)$; $(f_i = -1,0,1,27,64)$, являющаяся сеточным представлением функции $f(x) = x^3$.

Найти значение $f(x_*)$ при $x_* = 2$, используя методы линейной и параболической интерполяции.

Линейная интерполяция

1. На оси из отрезков: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_i, x_{i+1}], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, образующих сетку Ω_n, выбирают «отрезок» интерполяции $[x_i, x_{i+1}]$, где $x_i < x_* < x_{i+1}$, x_* – заданная точка на оси.

2. Для отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ вычисляют значения коэффициентов $P_{1i}(x_*) = \dfrac{x_* - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$ и $P_{1i+1}(x_*) = \dfrac{x_* - x_i}{x_{i+1} - x_i}$ многочлена Лагранжа:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} f_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1} = P_{1i}(x) \cdot f_i + P_{1i+1}(x) \cdot f_{i+1}. \qquad (1)$$

3. Значение $f(x_*)$ определяют согласно формуле

$$f(x_*) \approx L_1(x_*) = P_{1,i}(x_*) f_i + P_{1,i+1}(x_*) f_{i+1}.$$

1. «Отрезок» интерполяции: $[x_i, x_{i+1}] = [i=2, i+1=3] = [2, 3]$.

2. Вычисляют коэффициенты многочлена Лагранжа:

$$P_{12} = \frac{x_* - x_3}{x_2 - x_3} = 0{,}5; \quad P_{13} = \frac{x_* - x_2}{x_3 - x_2} = 0{,}5.$$

3. Определяют значение: $f(2) \approx L_1(2) = P_{12} f_2 + P_{13} f_3 = 14.$

Параболическая интерполяция

1. По заданной величине x_* выбирают «отрезки»

$$[x_{i-1}, x_{i+1}] \cap [x_i, x_{i+2}] \neq 0 \text{ на сетке } \Omega_n,$$

где $x_* \in [x_i, x_{i+1}]$.

2. Вычисляют значения коэффициентов многочлена Лагранжа

$$P^{(1)}_{2,i-1}(x_*),\ P^{(1)}_{2,i}(x_*),\ P^{(1)}_{2,i+1}(x_*) \text{ для } [x_{i-1}, x_{i+1}];$$
$$P^{(2)}_{2,i}(x_*),\ P^{(2)}_{2,i+1}(x_*),\ P^{(2)}_{2,i+2}(x_*) \text{ для } [x_i, x_{i+2}].$$

Коэффициенты вычисляют по формуле

$$P_{km}(x) = \frac{(x - x_i)\cdot(x - x_{i+1})\ldots(x - x_{m-1})\cdot(x - x_{m+1})\ldots(x - x_k)}{(x_m - x_i)\cdot(x_m - x_{i+1})\ldots(x_m - x_{m-1})\cdot(x_m - x_{m+1})\ldots(x_m - x_k)},$$

где $k = 2;\ m = i - 1,\ i,\ i + 1,\ i + 2;\ i = 0,\ldots n;\ \ x = x_*$

3. Используя значения коэффициентов: $P^{(1)}_{2,i-1}(x_*)$, $P^{(1)}_{2,i}(x_*)$, $P^{(1)}_{2,i+1}(x_*)$, $P^{(2)}_{2,i}(x_*)$, $P^{(2)}_{2,i+1}(x_*)$, $P^{(2)}_{2,i+2}(x_*)$, вычисляют многочлены Лагранжа $L^{(1)}_2(x_*)$, $L^{(2)}_2(x_*)$ по формуле

$$L_2(x) = \frac{(x - x_{i+1})\cdot(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})\cdot(x_i - x_{i+2})} f_i + \frac{(x - x_i)\cdot(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)\cdot(x_{i+1} - x_{i+2})} f_{i+1} +$$

$$+ \frac{(x - x_i)\cdot(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)\cdot(x_{i+2} - x_{i+1})} f_{i+2} = P_{2i}(x)\cdot f_i + P_{2i+1}(x)\cdot f_{i+1} + P_{2i+2}(x)\cdot f_{i+2}, \quad (2)$$

Для достижения повышенной точности интерполяции результаты $L^{(1)}_2(x_*)$, $L^{(2)}_2(x_*)$ осредняются:

$$f(x_*) \approx [L^{(1)}_2(x_*) + L^{(2)}_2(x_*)]/2 = L_{2cp}(x_*).$$

1. Выбирают «отрезки» интерполяции: $[x_1, x_3] = [0, 3]$; $[x_1, x_3] = [1, 4]$.
2. Вычисляют коэффициенты многочлена Лагранжа:

$$P^{(1)}_{21} = -1/3,\ P^{(1)}_{22} = 1,\ P^{(1)}_{23} = 1/3 \text{ для } [x_1, x_3];$$
$$P^{(2)}_{22} = 1/3,\ P^{(2)}_{23} = 1,\ P^{(2)}_{24} = -1/3 \text{ для } [x_1, x_3].$$

3. Определяют $L^{(1)}_2(x_*)$ и $L^{(2)}_2(x_*)$ по формуле (2):

$$L^{(1)}_2(2) = -1/3 * 0 + 1 * 1 + 1/3 * 27 = 10,$$
$$L^{(2)}_2(2) = 1/3 * 1 + 1 * 27 - 1/3 * 64 = 6,$$
$$f(2) \approx [L^{(1)}_2(2) + L^{(2)}_2(2)]/2 = 8.$$

Найденное значение $f(2) = 8$ совпадает с точным, так как оператор осреднения повышает точность интерполяции.

Задача 2. Дана сеточная функция:

y_i = **(-0,070, 0,760, 1,000, 1,526, 1,449), (i = 0,1,2,3,4); (x_i = 1,2,3,4,5),** являющаяся функцией $y = \ln(x)$ на отрезке $[1, 5]$ с погрешностью $\varepsilon = 0,1$.

Найти аппроксимирующий многочлен $P_m(x,a)$ методом наименьших квадратов, используя последовательный выбор степени $m = 1, 2,\ldots$

Среднеквадратичная аппроксимация

1. Вычислить коэффициенты s_k, $k = 0,2m$; t_k, $k = 0,m$ по заданной сеточной функции y_i и записать систему

$$\begin{aligned}
s_0 a_0 + s_1 a_1 + \ldots + s_m a_m &= t_0,\\
s_1 a_0 + s_2 a_1 + \ldots + s_{m+1} a_m &= t_1,\\
&\ \,\cdot\\
&\ \,\cdot\\
&\ \,\cdot\\
s_m a_0 + s_{m+1} a_1 + \ldots + s_{2m} a_m &= t_m,
\end{aligned}$$

где $s_0 = n + 1,\ t_0 = f_0 + f_1 + \cdots + f_n;$

$s_k = x^k_0 + x^k_1 + \cdots + x^k_n,\ k = 1,..,2m;$

$t_k = x^k_0 f_0 + x^k_1 f_1 + \cdots + x^k_n f_n,\ k = 1,..,m.$

2. Решая полученную систему, определяем коэффициенты: $a_0, a_1, \ldots a_m$; для аппроксимирующей функции

$$P_m(x,a) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m.$$

Если для функции, заданной в точках: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, определять многочлен степени $m = n$ методом наименьших квадратов, то $P_m(x,a)$ совпадает с интерполяционным многочленом и метод становится эквивалентным методу интерполяции, где среднеквадратичная погрешность $\delta_m(a) = 0$.

При $m = 1$:

1. Искомая функция $P_1(x,a) = a_0 + a_1 x$ определяется из системы:

$$\left.\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{4}1\right)a_0+\left(\sum_{i=0}^{4}x_i\right)a_1&=\sum_{i=0}^{4}f_i,\\ \left(\sum_{i=0}^{4}x_i\right)a_0+\left(\sum_{i=0}^{4}x_i^2\right)a_1&=\sum_{i=0}^{4}x_if_i\end{aligned}\right\}\leftrightarrow$$

$$5a_0+15a_1=4,665,$$

$$15a_0+55a_1=17,779,$$

2. Решая эту систему, получаем $a_0 = -2,2082,\ a_1 = 0,3804$.
3. Аппроксимирующий многочлен имеет вид:

$$P_1(x,a) = -2,2082 + 0,3804\,x,$$

где среднеквадратичная погрешность определяется по формуле

$$\delta_m(a) = \sqrt{1/(n+1)\sum[Pm(E,a) - fi]^2},\ \delta_1 = 0,205 > \varepsilon = 0,1.$$

Если $m = 2$, то

$$P_2(x,a) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Решая систему

$$\begin{aligned}5a_0 + 15a_1 + 55a_2 &= 4,665,\\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 &= 17,779,\\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 &= 72,611,\end{aligned}$$

найдем $a_0,\ a_1,\ a_2$,

$$P_2(x,a) = -0,9726 + 1,0356x - 0,1092x^2,$$

$$\delta_2 = 0,094 \le \varepsilon = 0,1.$$

Задача 3. Вычислить на основе квадратурных формул: трапеции и Симпсона интеграл $I_1^2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ с точностью $\varepsilon = 0,01$. Оценить погрешности вычисленного значения.

1. Для формулы трапеции вычислим $M_2 = \max\limits_{[1,2]}[f^{(2)}(x)]$.

Определяем $f''(x) = 2/x^3$, функция убывающая, $\max[f^{(2)}(x)] = f^{(2)}(1)$, тогда $M_2 = 2$.
2. Найдем шаг интегрирования, для обеспечения заданной точности, из условия

$$\frac{M_2}{12}(b-a)h^2 \le \varepsilon\ \text{, где } h = 0,2,$$

......

тогда $$h \le \sqrt{\frac{12\ \varepsilon}{(b-a)M_2}} = \sqrt{\frac{12\cdot 0,1}{1\cdot 2}} = 0,245$$

3. Вычислим $n = (b-a)/h = 1/0,2 = 5$, тогда сеточное представление функции будет иметь вид

$$f_0 = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1} = 1,\quad f_1 = \frac{1}{x_0+h} = \frac{1}{1,2} = 0,83(3),\quad f_2 = \frac{1}{x_0+2h} = \frac{1}{1,4} = 0,7142,$$

$$f_3 = \frac{1}{x_0+3h} = \frac{1}{1,6} = 0,6250,\quad f_4 = \frac{1}{x_0+4h} = \frac{1}{1,8} = 0,5555,\quad f_5 = \frac{1}{x_0+5h} = \frac{1}{2} = 0,5000.$$

4. Вычисляя интеграл по формуле трапеции при $n = 5$, будем иметь:
$I^2_{1тр} = [f_0 + 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + f_5]\,h/2 = [1 + 2\ (0,83 + 0,7142 + 0,625 + 0,5) + 0,5]\ 0.1 = 0,695;$
$I_1^2 = \ln 2 = 0,693147.$

Погрешность: $\delta_{тр} = |0,695 - 0,693| = 0,002 < 0,01 = \varepsilon$.

5. Для формулы Симпсона аналогично определим шаг интегрирования для достижения заданной точности, тогда
$M4 = \max\limits_{[1,2]}|f^{(4)}(x)| = \max\limits_{[1,2]}|24/x^5| = 24,\ h \le \sqrt[4]{180\,\varepsilon\,/}\ [(b-a)\,M4 = 0,52.$

6. При $h = 0,5$ вычислим $n = (b-a)/h = 1/0,5 = 2 = 2k$.
Если $k = 1$ сеточное представление функции, то будем иметь:

$$f_0 = f(1) = 1,\quad f_1 = f(1,5) = \frac{2}{3},\quad f_2 = f(2) = \frac{1}{2}.$$

Вычислим интеграл по формуле Симпсона:

$$I^2{}_{1сим} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\sum_{i=1}^{k}f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{k-1}f_{2i} + f_{2k}\right].$$

$$I^2_{1сим} = [f_0 + 4f_1 + f_2]\,h/3 = 0,694,$$

$$\delta_{сим} = |0,694 - 0,693| = 0,001 < 0,01 = \varepsilon.$$

Формулы Симпсона имеют более высокий порядок аппроксимации, чем формулы трапеции, поэтому $\delta_{сим} < \delta_{тр}$.

Задача 4. Решить систему

$$x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -2,$$
$$2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 2,$$
$$8x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 11,$$
$$x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -7$$

методами простых итераций и Зейделя. Оценить их сходимость.

Условие сходимости имеет вид

$$|a_{ii}| \ge |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{in}|, \quad i = 1,\ldots,n, \qquad (1)$$

где a_{ii} – диагональные элементы матрицы системы уравнений.

1. Приведем систему, чтобы удовлетворялось условие (1):

$$8x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 11,$$
$$x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -7,$$
$$2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 2,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -2.$$

2. Преобразуем систему к виду для выполнения метода простых итераций:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} - \frac{1}{4}x_4^{(k)} + \frac{11}{8}\\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{6}x_1^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} + \frac{1}{3}x_4^{(k)} - \frac{7}{6}\\
x_3^{(k+1)} &= \frac{2}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{5}x_2^{(k)} + \frac{1}{5}x_4^{(k)} - \frac{2}{5}\\
x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{1}{4}x_3^{(k)} + \frac{1}{2}
\end{aligned} \qquad (2)$$

и метода Зейделя

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} - \frac{1}{4}x_4^{(k)} + \frac{11}{8}\\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{6}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} + \frac{1}{3}x_4^{(k)} - \frac{7}{6}\\
x_3^{(k+1)} &= \frac{2}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{5}x_2^{(k+1)} + \frac{1}{5}x_4^{(k)} - \frac{2}{5}\\
x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{4}x_2^{(k+1)} + \frac{1}{4}x_3^{(k+1)} + \frac{1}{2}
\end{aligned} \qquad (3)$$

с начальным приближением: $x^{(0)} = (0, 0, 1, 3)$. Вычисления по формулам (2), (3) будем проводить до достижения заданной точности:

$$\delta = | x^{(k)} - x^{(k-1)} | < \varepsilon = 0,001.$$

Методом простых итераций: $x^{(10)} = (1,0001, -1,0000, 0,00009, 0,99979)$.

Методом Зейделя: $x^{(7)} = (1,0002, -0,9999, 0,00003, 0,99999)$.

Точное решение: $x = (1, -1, 0, 1)$.

Метод Зейделя сходится за меньшее число итераций.

Задача 5. Определить корень x_* уравнения $x^2 - e^{-x} = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,001$, где $x \in [0,5;1,0] \equiv G$ приближенными методами (простой итерации и Ньютона) и сравнить их сходимость.

Решение методом простой итерации.

1. Преобразуем уравнение к виду $x = e^{-x/2} = \varphi(x)$. Условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$ выполняется при $x \in G$.
2. Вычисления будем проводить по формуле
$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) = e^{-x^{(k)}/2},$$
где $x^{(0)} = (0,5 + 1,0)/2 = 0,75$ – начальное приближение.
3. Вычисления оканчиваются при достижении требуемой точности:
$$| x^{(5)} - x^{(4)} | < \varepsilon = 0,001, \quad x_* = x^{(5)} = 0,703.$$

Проверка: $(x^{(5)})^2 - e^{-x^{(5)}/2} = 0,0008 < \varepsilon = 0,001.$

Решение методом Ньютона:

Начальное приближение $x^{(0)}$ удовлетворяет неравенству $f(x^{(0)})\ f''(x^{(0)}) > 0$, вычисления проводятся по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) / f'(x^{(k)})$$

до достижения требуемой точности: $\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| \le \varepsilon.$

4. Для $f(x) = x^2 - e^{-x}$ выполняется условие $f''(x) = 2 - e^{-x} > 0$ на G, $f(a) = f(0,5) < 0$, $f(b)=f(1) > 0$, то из условия $f(1)\,f''(1) > 0$ следует начальное приближение $x^{(0)} = 1$. Вычисления проведем по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [(x^{(k)})^2 - e^{-x(\kappa)} e] \ / [2(x^{(k)}) - e^{-x(\kappa)}].$$

5. Достижение заданной точности, проверяется по условию

$$\left| x^{(3)} - x^{(2)} \right| \le \varepsilon = 0,001,\ x_* = x^{(3)} = 0,703.$$

6. Скорость сходимости метода Ньютона выше скорости сходимости метода простой итерации.

Задача 6. Для задачи Коши $y' = x + y$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 0,2]$ выполнить два шага методом Рунге – Кутта II порядка:

$$y_{i+1} = y_i + h_{i+1} \cdot K_{2,i},\ K_{1,i} = f(x_i, y_i),$$
$$K_{2,i} = f(x_i + h_{i+1}/2,\ y_i + h_{i+1} \cdot K_{1,i}\ 2) \qquad (1)$$

и один методом Рунге-Кутта IV порядка:

$$y_{i+1} = y_i + h_{i+1} \cdot (K_{1,i} + 2\,K_{2,i} + 2\,K_{3,i} + K_{4,i}) / 6,$$
$$K_{1,i} = f_i = f(x_i, y_i),\ K_{2,i} = f(x_i + h_{i+1}/2,\ y_i + h_{i+1} \cdot K_{1,i}/2), \qquad (2)$$
$$K_{3,i} = f(x_i + h_{i+1}/2,\ y_i + h_{i+1} \cdot K_{2,i}/2),$$
$$K_{4,i} = f(x_i + h_{i+1},\ y_i + h_{i+1} \cdot K_{3,i}),$$

где $h_i = 0,1 = const.$

Сравнить численные решения с точным: $y(x) = 2e^x - x - 1.$

Схема II порядка:

1. Вычисления проведем по формулам (1):

$i = 0,\ K_{1,0} = f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 0 + 1 = 1,\ h_1 = 0,1$

$K_{2,0} = f(x_0 + h_1/2,\ y_0 + h_1 K_{1,0}/2) = 0,05 + 1,05 = 1,1,$

$y_1 = y_0 + h_1\, K_{2,0} = 1 + 0,1*1,1 = 1,11;$

$i = 1,\ K_{1,1} = f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 0,1 + 1,11 = 1,12,\ h_2 = 0,1;$

$K_{2,1} = f(x_1 + h_2/2,\ y_1 + h_2\, K_{1,1}/2) = 0,1 + 0,1/2 + 1,11 + 0,05*1,12 = 1,316;$

$y_2 = y_1 + h_2 * K_{2,1} = 1,11 + 0,1*1,316 = 1,246;$

$y(x_2) = 1,2428055,\ \delta_{II} = \left| y_2 - y(x_2) \right| = 0,00319.$

Схема IV порядка:

2. Вычисления проведем по формулам (2):

$i = 0,\ y_1 = y_0 + h_1\,(K_{1,0} + 2\,K_{2,0} + 2\,K_{3,0} + K_{4,0}) / 6;$

$K_{1,0} = f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 0 + 1 = 1;$

$K_{2,0} = (x_0 + h_1/2) + (y_0 + h_1 * K_{1,0}/2) = 0,05 + (1 + 0,05*1) = 1,1;$

$K_{3,0} = (x_0 + h_1/2) + (y_0 + h_1 * K_{2,0}/2) = 0,05 + (1 + 0,05*1,1) = 1,105;$

$K_{4,0} = (x_0 + h_1) + (y_0 + h_1 * K_{3,0}) = 0,1 + (1 + 0,1*1,105) = 1,2105;$

$y_1 = 1 + 0,1*(1 + 2*1,1 + 2*1,105 + 1.2105) = 1,1103416;$

$y(x_1) = y(0,1) = 1,1103418;$

$\delta_{II} = \left| y_1 - y(x_1) \right| = 0,0003418,\ \delta_{IV} = \left| y_1 - y(x_1) \right| = 0,0000002.$

Для схем II и IV порядка результат y_1 совпадает с решением $y(x_1)$ соответственно в 3 и 7 значащих цифрах.

Контрольные задачи

1. Для сеточной функции: $f_i(-3, 4, 5)$, $x_i(-1, 2, 3)$; $x_0 = -1$; найти значение $y(1)$ с помощью линейной и параболической интерполяций.

2. Для сеточных функций:

$$f^{(1)}_i(5,2,3,1),\ x^{(1)}_i(2,4,6,8);\ f^{(2)}_i(4,2,5,8,2),\ x^{(2)}_i(1,2,3,4,5);$$

1) решить задачу интерполяции построением многочлена Лагранжа;

2) решить задачу аппроксимации методом наименьших квадратов при $m = 1,2$;

3) на одном графике построить исходную сеточную функцию, решения задач интерполяции и аппроксимации.

3. Вычислить значения интеграла $I_1^{\ 2} = \int_1^2 f(x)dx$ по формулам трапеции и Симпсона при $h = 1$, сравнить полученные результаты с точным значением: *а)* $f(x)=1+x$; *б)* $f(x)=1+x^2$; *в)* $f(x) = 1 + x^3$; *г)* $f(x)=1+x^4$.

4. Сравнить количество итераций, требующихся для получения решения системы $Ax = b$, где $b = (6,10,-8,16)$,

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

методом простых итераций и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0,001$.

5. Методами простой итерации и Ньютона найти корни уравнений с точностью $\varepsilon = 0,001$:

5.1. $x^4 - 2x - 6=0$ (положительный корень);
5.2. $4-lgx-x=0$;
5.3. $tg(2x) - 3x = 0$;
5.4. $sin(2,5x) - x = 0$;
5.5. $ln(9x) = 10x - 3$;
5.6. $0,5e^{-0.6x} - x =0$;
5.7. $5sin(4,5x) - 4,5x = 0$;
5.8. $x^4 - 4x -2 = 0$;
5.9. $tg2x = 2x$ (наименьший положительный корень);
5.10. $x^4 - 3x^2 + 25x -5000 = 0$ (отрицательный корень).

6. Найти приближенное решение задачи Коши
$y' = - 0,01y,\ y(0) = 200,\ [a, b] = [0, 200]$
и вычислить $y(200)$, используя методы Рунге - Кутта:
а) II порядка при $h = 20$;
б) IV порядка при $h = 100$.

7. Найти приближенное решение задачи Коши $y' = 4 - 2x,\ y(0) = 2,\ [a, b] = [0, 1]$, используя метод Рунге - Кутта II порядка.

Сравнить его с точным решением $y(x) = - x^2 + 4x + 2$. Исследовать поведение приближенного решения при изменении величины шага.

8. Найти приближенное решение задачи Коши, используя метод Рунге – Кутта:

$$y' = -x / y,\ y(0) = 10,\ [a, b] = [0, 12]$$

а) II порядка при при $h =2$;
б) IV порядка при $h = 4$.

Номер задания соответствует последней цифре шифра, в скобках указаны номера контрольных задач: №1(1,5.1) , №2(2,5.2), №3(3,5.3), №4(4,5.4), №5(6,5.5), №6(7,5.6), №7(5.7,8), №8(5.8,7), №9(5.9,6), №10(3,5.10).

Лелявин Сергей Никитович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Рабочая программа, методические указания, контрольные задания и разбор типовых задач

Отв. редактор В.Д. Кулиев
Редактор Л.Н. Пронина
Компьютерная верстка А.В. Картошкин