Основные формулы дифференцирования
функции одной переменной

Если U(x) - дифференцируемая функция, то производная по независимой переменной от функций:

1. Степенная функция

$(U^n)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$ $\qquad (\sqrt{U})' = \frac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$ $\qquad \left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{1}{U^2} \cdot U'$

2. Показательная функция

$(a^U)' = a^U \cdot \ln a \cdot U'$ $\qquad (e^U)' = e^U \cdot U'$

3. Логарифмическая функция

$(\log_a U)' = \frac{1}{U \cdot \ln a} \cdot U'$ $\qquad (\ln U)' = \frac{1}{U} \cdot U'$

4. Тригонометрические функции

$(\sin U)' = \cos U \cdot U'$ $\qquad (\cos U)' = -\sin U \cdot U'$

$(tgU)' = \frac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$ $\qquad (ctgU)' = -\frac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$

5. Обратные **тригонометрические** функции

$(\arcsin U)' = \frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$ $\qquad (\arccos U)' = -\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$

$(arctgU)' = \frac{1}{1+U^2} \cdot U'$ $\qquad (arcctgU)' = -\frac{1}{1+U^2} \cdot U'$

6. Гиперболические функции

$(shU)' = chU \cdot U'$ $\qquad (chU)' = shU \cdot U'$

$(thU)' = \frac{1}{ch^2 U} \cdot U'$ $\qquad (cthU)' = -\frac{1}{sh^2 U} \cdot U'$

Таблица неопределённых интегралов
(для функции U=U(x))

1. $\int U^n dU = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C,$
$(n \neq -1)$

2. $\int dU = U + C,$

3. $\int \frac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C,$

4. $\int \frac{dU}{U^2} = -\frac{1}{U} + C,$

5. $\int \frac{dU}{U} = \ln|U| + C,$

6. $\int a^U dU = \frac{a^U}{\ln a} + C,$

7. $\int e^U dU = e^U + C,$

8. $\int \sin U \cdot dU = -\cos U + C,$

9. $\int \cos U \cdot dU = \sin U + C,$

10. $\int \frac{dU}{\cos^2 U} = tgU + C,$

11. $\int \frac{dU}{\sin^2 U} = -ctgU + C,$

12. $\int tgU \cdot dU = -\ln|\cos U| + C,$

13. $\int ctgU \cdot dU = \ln|\sin U| + C,$

14. $\int \frac{dU}{\sin U} = \ln\left|tg\frac{U}{2}\right| + C,$

15. $\int \frac{dU}{\cos U} = \ln\left|tg\left(\frac{U}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$

16. $\int \frac{dU}{a^2 + U^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{U}{a} + C,$

17. $\int \frac{dU}{U^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{U-a}{U+a}\right| + C,$

18. $\int \frac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \arcsin\frac{U}{a} + C,$

19. $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 + a}} = \ln\left|U + \sqrt{U^2 + a}\right| + C,$

20.
$$\int \sqrt{U^2 \pm a^2} \cdot dU = \frac{1}{2}\left(U\sqrt{U^2 \pm a^2} \pm \pm a^2 \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}\right|\right) + C,$$

21.
$$\int \sqrt{a^2 - U^2} \cdot dU = \frac{1}{2}\left(U\sqrt{a^2 - U^2} + a^2 \arcsin\frac{U}{a}\right) + C,$$

22. $\int e^{\alpha U} \sin(\beta U) \cdot dU = \frac{e^{\alpha U}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha \sin\beta U - \beta\cos\beta U) + C,$

23. $\int e^{\alpha U} \cos(\beta U) \cdot dU = \frac{e^{\alpha U}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha \cos\beta U + \beta\sin\beta U) + C.$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ
по теме «Кратные интегралы»

1. Определение двойного интеграла и его геометрический смысл. Основные свойства двойного интеграла.

2. Среднее значение функции в плоской области, её геометрический смысл.

3. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат. Сведение двойного интеграла к повторному, выбор порядка интегрирования.

4. Схема перехода в двойном интеграле от декартовых координат к полярным.

5. Схема составления интегральной суммы для функции трёх переменных в некоторой области трёхмерного пространства. Тройной интеграл и его свойства.

6. Среднее значение функции в пространственной области, её геометрический смысл.

7. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.

8. Замена переменных в тройном интеграле. Переход от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим.

9. Приложения кратных интегралов.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x^2+y^2=2, \quad x^2=y, \quad (y>0)$;
   2) $x+y=2, \quad y\le 1, \quad x=0, \quad y=0$.

2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} arctg\,\dfrac{y}{x}\cdot dxdy,$ где $D:\{x^2+y^2\le 1; \quad 0\le y\le x\}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $x=5-y^2; \quad x=4-y;$
   2) $y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=0$, $(0\le x\le \pi/2)$.
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{(3-x)\le y\le (3+x), \quad 0\le x\le 3\}$, $\delta(x;y)=\sqrt{2x+3y}$;
   2) $D:\{(2-x)\le y\le \sqrt{4-x^2}\}$, $\delta(x;y)=\ln(x^2+y^2)$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $x^2+y^2=16y$, $x+y=16$, $x\ge 0$, $z\ge 0$;
   2) $4x=y^2$, $2x+y=2$, $y=x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $x=0$, $y=2x$, $y=1$, $x+y+z=3$, $(z\ge 0)$;
   2) $x^2+y^2=z$, $z=h^2$.
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

$$V:\{x^2+y^2+z^2\le 4; \quad y\ge 0; \quad z\ge 0\}, \quad \gamma(x;y;z)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} .$$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

   1) $xy=1, \quad x^2=y, \quad y=2, \quad x=0, \quad (x>0)$;

   2) $x^2+y^2=4, \quad y^2=3x, \quad y=0, \quad (x>0, \quad y>0)$.

2. Перейти к полярным координатам и вычислить:

   $\iint\limits_{(D)} x\sqrt{(x^2+y^2)^3}\cdot dxdy,$ где $D:\{x^2+y^2\le 2\pi;$
   $0\le y\le x\}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

   1) $x=y; \quad x^2=2-y;$

   2) $x+y=1; \quad x+2y+2=0; \quad x=0$.

4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:

   1) $D:\{(0\le x\le y, \quad 0\le y\le 1\}, \qquad \delta(x;y)=x^2+2y^2$;

   2) $D:\{x^2+y^2\le 4, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0\}, \qquad \delta(x;y)=x^3$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

   1) $z=4-y^2, \quad z=2+y^2, \quad x=-1, \quad x=2$;

   2) $z=4-x^2-y^2, \quad z=3$.

6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

   1) $y=3x, \qquad x=1, \quad z=2(x^2+y^2), \quad z\ge 0, \quad y\ge 0$;

   2) $x^2+y^2+z^2=9, \quad x^2+y^2=4, \qquad y\ge 0$.

7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

   $V:\{1\le x^2+y^2+z^2\le 4; \quad y\ge 0\}, \qquad \gamma(x;y;z)=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x = y^2, \quad y^2 = 4 - x$;
   2) $x + y = 1, \qquad x + 2y + 2 = 0, \qquad x = 0$.
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} \sqrt{(x^2+y^2)^5}\cdot dxdy,$ где $D:\{x^2+y^2 \le 10x\ ;\ y \ge 0\}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $y = 2^x;\ y = 2x - x^2;\ x = 0;\ x = 2.$
   2) $y^2 = 2x;\ x - y = 4.$
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{(6-x) \le y \le 2x,\ x = 4\}, \qquad \delta(x;y) = x^2$;
   2) $D:\{x^2+y^2 \le 4,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\}, \quad \delta(x;y) = 2y$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $z = \sqrt{y},\ z = 0,\ x = 1,\ y = 4x.$
   2) $z^2 = 36(x^2+y^2),\ x^2+y^2 = 1,\ x = 0,\ z = 0,\ (x > 0,\ z > 0).$
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $y^2 + z^2 = 4x,\ x = 4$;
   2) $x^2+y^2+z^2 = 2R^2,\ x^2+y^2 = Rz,\ z > 0.$
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $V:\{25 \le x^2+y^2+z^2 \le 81,\ x \ge 0,\ z \ge 0,\ -x \le y \le x\},$
   $\gamma(x;y;z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $y = x^2,\quad x + y = 1,\quad x = 1,\quad x = 3;$
   2) $x^2 + y^2 = 1,\quad x + y = 1,\quad y = 0,\quad (y > 0);$
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $$\iint\limits_{(D)} \cos\sqrt{(x^2 + y^2)}\cdot dxdy,$$
   где $D:\{\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2;\ x \le y \le \sqrt{3x}\}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $3x - 2y + 4 = 0,\quad 3x - 2y + 1 = 0,\quad y = 2,\quad y = 5;$
   2) $x + y + 2 = 0,\quad y = x^3,\quad x = 0.$
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{0 \le y \le 1 - x;\quad 0 \le x \le 1\},\qquad \delta(x;y) = y^2;$
   2) $D:\{x \le x^2 + y^2 \le 2x\},\qquad \delta(x;y) = 1 + y + x$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $x + z = 2,\quad x^2 + y^2 = 2x,\quad z = 0,\quad (z > 0);$
   2) $y = 2,\quad y = 2x\quad x = 0,\quad z = 2\sqrt{x},\quad z \ge 0.$
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad z = \sqrt{x^2 + y^2},\quad x \ge 0;$
   2) $x^2 + y^2 + 1 = z,\quad x + y = 3,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0.$

7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

   $$V:\{x^2 + z^2 \le y \le 4,\quad x \ge 0,\quad z \ge 0\},\qquad \gamma(x;y;z) = \frac{x}{x^2 + z^2}\ .$$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

   1) $x^2 = y+2, \qquad x^2 + y = 0,$

   2) $y = x^{2/3} \qquad y = 1-\sqrt{4x-x^2-3}, \qquad y = 0$.

2. Перейти к полярным координатам и вычислить:

   $\iint\limits_{(D)} (x^2+y^2)\cdot dxdy,$ где $D:\{(x^2+y^2)^2 \le (x^2-y^2)\}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

   1) $y = \cos x; \qquad y = \sin x; \quad (x \ge 0);$

   2) $x^2 + y^2 = 1; \quad x + y = 1; \quad (x > 0; \quad y > 0)$.

4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:

   1) $D:\{y \ge -x, \quad y \ge x, \quad 0 \le y \le 1\}, \qquad \delta(x;y) = \sqrt{1-y}$;

   2) $D:\{(x^2+y^2) \le 9, \quad -x \le y \le x\}, \qquad \delta(x;y) = xy^2$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

   1) $x = 2, \quad y = 4x, \quad y = 3\sqrt{x}, \quad z = 4, \quad z \ge 0;$

   2) $z = 2(x^2+y^2), \quad z = 4-2(x^2+y^2)$

6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

   1) $z = 4 - x^2, \quad y = 5, \quad y = 0, \quad z = 0;$

   2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad y = x/\sqrt{3}, \quad y = x, \quad z = 0, \quad (x > 0, \quad y > 0)$.

7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

   $V:\{2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2, \quad -y \le x \le y\}, \qquad \gamma(x;y;z) = y\sqrt{x^2+y^2}$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $y=2x$, $y=2x+3$, $x=1$, $x=2$;
   2) $x=27-y^2$, $x=-6y$.
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} \sqrt{(x^2+y^2)}\cdot dxdy,$ где $D:\{x^2+y^2\le Ry\}$;
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $y=\ln x$, $y=0$, $x=1$, $x=e$;
   2) $xy=1$, $x+y=5$.
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{2x\le y\le 2-x;\quad x=0\}$, $\delta(x;y)=2-x+y$;
   2) $\boldsymbol{D:\{x^2+y^2\le 1,}$ $y\ge 0\}$, $\delta(x;y)=x^2+3y$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $z=x^2$, $x+y=2$, $y\ge 0$, $z\ge 0$;
   2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$.
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $z=3x^2+3y^2+1$, $z=5-3x^2-3y^2$.
   2) $2x+3y=12$, $z=y^2/2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

   $V:\{\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0\}$,

   $\gamma(x;y;z)=(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5})^{-6}$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x^2+y^2=1,\quad x+y=1,\quad (x>0,\quad y>0)$;
   2) $x^2-y^2=9,\quad 5y=4x,\quad y=0,\ (x>0,\quad y>0)$.
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} (2+x-y)\cdot dxdy,$
   где $D:\{1\le x^2+y^2\le 16,\ \ \dfrac{x}{\sqrt{3}}\le y\le x\sqrt{3}\}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $2y=\sqrt{x},\quad 2xy=1,\quad x=16;$
   2) $x=y^2,\quad x=3,\quad y\le 0$.
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{x^2-1\le y\le 1-x\},\qquad \delta(x;y)=2x+5y+8$;
   2) $D:\{x^2+y^2\le 4x,\quad x^2+y^2\le 4y\},\qquad \delta(x;y)=xy$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $z=x^2+y^2,\quad 5x+y=5,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0;$
   2) $x^2+y^2=2y,\quad x^2+y^2=4y,\quad z=0,\quad z=2,\quad x\ge 0$.
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $z=\sqrt{9-x^2-y^2},\quad 9z=2x^2+2y^2,\quad z>0$.
   2) $y^2=2x,\quad z=2-x,\quad z=0$.
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $V:\{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{9-x^2-y^2},\quad x\ge 0\},\qquad \gamma(x;y;z)=x$.

Кратные интегралы Вариант 8

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x^2+y^2=9$, $y^2-x^2=1$, $x=0$, $y=0$, $(x>0,\quad y>0)$;
   2) $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$.
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot dxdy,$
   где $D:\{x^2+y^2\le R^2,\quad -x\le y\le x\}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $y=x^2$, $y=x$;
   2) $y=3/x$, $y=8e^x$, $y=3$, $y=8$.
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{-\sqrt{x}\le y\le x^2,\quad 0\le x\le 1\}$, $\delta(x;y)=4xy^2$;
   2) $D:\{x^2+y^2\le 3x,\quad y\ge 0\}$, $\delta(x;y)=(x^2+y^2)^3$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $z=16-x^2-y^2$, $y=2x$, $x\ge 0$, $z\ge 0$;
   2) $10x=z^2+y^2$, $x=10$.
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $z=\sqrt{1-y}$, $y=x^2$, $z=0$.
   2) $z=\sqrt{81-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x\ge 0$.
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $V:\{x^2+y^2\le 4y,\quad 0\le z\le 4-y\}$, $\gamma(x;y;z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x^2+y^2=1$, $x^2=1-2y$, $x=0$, $(x>0, \quad y>0)$;
   2) $x=4-y^2$, $x-y+2=0$.
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} y\cdot dxdy$, где $D:\{x^2+y^2\le ax, \quad y\ge 0\}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $xy=4$, $y+x=5$;
   2) $y=x$, $y=-x$, $y=1$.
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{x\le y\le 3x, \quad 0\le x\le 2\}$, $\delta(x;y)=2x^2+y^2$;
   2) $D:\{4y\le x^2+y^2\le 6y\}$, $\delta(x;y)=y/2$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $2y+z=2$, $y=x^2$, $y+z=1$;
   2) $z=4-x^2-y^2$, $x^2+y^2\le 1$, $z\ge 0$.
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $x^2+y^2+z^2=8$, $x^2=z^2+y^2$, $x\ge 0$;
   2) $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $z=x^2+y^2$, $z\ge 0$.
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $V:\{x+y+z\le 4, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0\}$, $\gamma(x;y;z)=x$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

   1) $y=11-x^2,\quad y=-10x.$

   2) $x^2+y^2=25,\ \ 3y=4x,\quad y=0,\ \ (x>0,\ \ y>0)$

2. Перейти к полярным координатам и вычислить:

   $\iint\limits_{(D)} \sqrt{(x^2+y^2)^3}\cdot dxdy,$ где $D:\{x^2+y^2\le 6y\}.$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

   1) $y+x-4=0;\quad y-x+4=0;\ \ x=0,\ \ x=1.$

   2) $xy=2;\ \ y=7e^x;\ \ y=2;\ \ y=7.$

4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:

   1) $D:\{x^2\le y\le\sqrt{x}\}\qquad \delta(x;y)=3x+2y+6$;

   2) $D:\{1\le x^2+y^2\le 36,\ \ \frac{-x}{\sqrt{3}}\le y\le x\},\qquad \delta(x;y)=6xy^2$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

   1) $3x+4y=12,\ \ z=6-x^2-y^2,\quad x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0;$

   2) $z^2+x^2+y^2=32,\quad z^2+x^2=y^2,\quad y\ge 0.$

6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

   1) $y^2+x^2+8=4z,\ \ x^2+y^2=4x,\quad z=0.;$

   2) $x=3,\quad y=2x,\quad z=4\sqrt{y},\quad z\ge 0.$

7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

$$V:\{3(x^2+y^2)\le z\le 3,\quad 0\le y\le\sqrt{3x}\},\qquad \gamma(x;y;z)=\frac{y^2z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\ .$$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $y=\sqrt{x},\quad y=\sqrt{2-x},\quad y=0;$
   2) $x^2+y^2=72,\quad 6y=-x^2,\quad (y<0)$,
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} \ln(x^2+y^2)\cdot dxdy,$ где $D:\{x^2+y^2\le 4,\quad x\le y\le 2x\}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $xy=1;\quad y=\sqrt{x};\quad x=81.$
   2) $x+y=4;\quad y=2;\quad y=0,\quad x=0,\quad (x>0,\quad y>0).$
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{0\le y\le 6-2x,\quad 0\le x\le 3\}\qquad \delta(x;y)=3-x+2y$;
   2) $D:\{x\le x^2+y^2\le 4x\},\qquad \delta(x;y)=y^2$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $x^2+y^2=1,\quad x+y+z=2,\quad z=0,\quad (z>0);$
   2) $x^2+y^2=12-z,\quad z^2=x^2+y^2,\quad (z>0).$

6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $y^2+z^2=8-x,\qquad x=-1,\qquad z\ge 0.$
   2) $y=\sqrt{x},\quad y=2\sqrt{x},\quad x+y=6,\quad z\ge 0.$

7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

   $V:\{0\le x\le a,\quad 0\le y\le b,\quad 0\le z\le c\}$, $\qquad \gamma(x;y;z)=x+y+z$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

   1) $(x^2/4)+y^2=1$, $y\ge 0$, $y\ge \frac{1}{2}x$;

   2) $y^2=2x$, $x-y=4$.

2. Перейти к полярным координатам и вычислить:

   $\iint\limits_{(D)}(2-x)\cdot dxdy,$ где $D:\{x\le x^2+y^2\le 4x\}$;

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

   1) $y=8/(x^2+4)$, $4y=x^2$;

   2) $y=4x+x^2$, $y=x+4$.

4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:

   1) $D:\{y^2\le x\le 1\}$, $\delta(x;y)=4-y-x$;

   2) $D:\{4\le x^2+y^2\le 9\}$, $\delta(x;y)=5y-3x$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

   1) $z=16-x^2-y^2$, $x+y=4$, $(x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0)$;

   2) $x^2+y^2-z^2=-1$, $x^2+y^2=1$.

6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

   1) $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$;

   2) $x^2=2(z^2+y^2)$, $x=4$, $y\ge 0$.

7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

   $V:\{1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ z\ge 0,\ \ -x\le y\le\sqrt{3}x\}$,

   $\gamma(x;y;z)=xz$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$, $x=1$;
   2) $x^2+y^2=4$ $x^2+y^2+4y=0$, $(y<0)$.
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\cdot dxdy,$ где $D:\{x^2+y^2\le 2ay\}$;
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $x=8-y^2$, $x=-2y$;
   2) $2x+y=2$, $4x+3y=0,$ $x=0$.
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{0\le y\le 1-x^2\}$, $\delta(x;y)=3-y-x$;
   2) $D:\{2x\le x^2+y^2\le 4x\},$ $\delta(x;y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $z=x^2+4y^2$, $y=x,$ $y=-2x$, $y=1$, $z\ge 0$;
   2) $y^2=z^2+x^2$, $x^2+z^2=1,$ $y\ge 0$.
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $z=y,$ $y=\sqrt{4-x},$ $y=(x-1)/2,$ $z=0$;
   2) $16-x^2-y^2=4x$, $x^2+y^2\le 4$, $z\ge 0$.
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $V:\{4\le x^2+y^2+z^2\le 9,$ $x\ge 0,$ $y\ge 0,$ $z\ge 0\}$, $\gamma(x;y;z)=xz$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $y=x,\;\; y=4x,\;\; xy=1,\;\; (x>0;\;\; y>0).$
   2) $y=e^{x},\;\; y=e^{-x},\;\; y=2.$
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)}(x+y-1)\cdot dxdy,$ где $D:\{1\le x^2+y^2\le 4,\;\; 0\le y\le x\}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $x+y-1=0;\;\; x-y-1=0;\;\; x-y+1=0;\;\; x+y+1=0.$
   2) $x=y^2;\;\; x=2+y^2/2$
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{1+x^2\le y\le 3-x,\;\; x\ge 0\}$ $\delta(x;y)=4x+5y+2$;
   2) $D:\{1-\sqrt{1-y^2}\le x\le y\},$ $\delta(x;y)=3xy$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $x^2+z^2=1-y,\;\; y=0,\;\; x\ge 0;$
   2) $z=x,\;\; y^2=x,\;\; x=3,\;\; z\ge 0.$
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $x=\sqrt{y/2},\;\; x+y=3,\;\; z=2,\;\; z=0.$
   2) $x^2+y^2+z^2=4,\;\; z=\sqrt{x^2+y^2},\;\; y\ge 0.$
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

$$V:\{x^2+y^2=2x,\;\; z=3,\;\; y\ge 0,\;\; z\ge 0\},\qquad \gamma(x;y;z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

   1) $xy=1, \quad y=\sqrt{x}, \quad x=3.$

   2) $y^2-x^2=1, \quad x^2+y^2=2y, \quad (y>1).$

2. Перейти к полярным координатам и вычислить:

   $\iint\limits_{(D)} y\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot dxdy,$ где $D:\{x^2+y^2\le 2x, \quad x\le y\}.$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

   1) $y=x; \quad x^2=2-y.$

   2) $y=e^{-x}; \quad y=x^2; \quad x=-1; \quad x=0; \quad (x<0).$

4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:

   1) $D:\{x^2\le y\le 2\};$ $\quad \delta(x;y)=2-y$;

   2) $D:\{x^2+y^2\le R^2, \quad -x\le y\le x\sqrt{3}\};$ $\quad \delta(x;y)=3x^2+2$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

   1) $z=x^2, \quad x+y=6, \quad y=2x, \quad x\ge 0; \quad z\ge 0.$

   2) $6y=x^2+z^2, \quad y=6.$

6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

   1) $49(x^2+y^2)=4z^2, \ 7(x^2+y^2)=2z, \ x=0, \ y=0, \ (x>0, \ y>0).$

   2) $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad 0\le y\le x$.

7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

   $V:\{x/2+y/4+z/6\le 1, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0\}$,

   $\gamma(x;y;z)=(1+x/2+y/4+z/6)^{-4}.$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x^2+y^2=5$, $y=2x^2$, $(y>2x^2)$;
   2) Треугольник ABC : A(-2;-2), B(-1;2), C(-1;-3/2).
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $$\iint\limits_{(D)} \frac{x}{x^2+y^2}\cdot dxdy,$$
   где $D:\{4\le x^2+y^2\le 16,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\}$;
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$;
   2) $x^2=4y+1$, $x^2=-2y+4$.
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{xy=8,\quad x+y=9\}$, $\delta(x;y)=x+y$;
   2) $D:\{x^2+y^2\le 8y,\quad x\le y\le x\sqrt{3},\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\}$, $\delta(x;y)=xy$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $x=3\sqrt{z},\quad y=3x,\quad y=3,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0;$
   2) $x^2+y^2=2x,\quad x^2+y^2=4x,\quad y\le x,\quad z=4,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0.$
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $z=2x^2+3y^2,\quad y=x^2,\quad y=x;$
   2) $z=x,\quad x=\sqrt{9-y^2},\quad x=\sqrt{25-y^2},\quad y\ge 0,\quad z\ge 0.$
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $$V:\{0\le z\le\sqrt{16-x^2-y^2}\},\qquad \gamma(x;y;z)=\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\ .$$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $y^2=4x,\quad 2x-y+2=0,\quad y=-2,\quad y=2$;
   2) $y=-\sqrt{4-x^2},\quad y=4-x^2$.
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} y\sqrt{x^2+y^2}\cdot dxdy$, где $D:\{x^2+y^2\le 6x,\quad 0\le y\le x\}$;
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $x^2+y=2,\quad y^3=x^2$;
   2) $(x^2+y^2)^{3/2}=2x^2+y^2$.
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:

1) D: Квадрат – A(0;3), B(4;7), C(8;3), D(4;-2); $\delta(x;y)=2x+y$;

2) $D:\{x^2+y^2\le 4,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\}$, $\delta(x;y)=xy^2$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $y=1-x^2,\quad y=x,\quad y=-x,\quad x=2,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0$;
   2) $1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\quad y\le x,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0$.
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $2x+3y=6,\quad z=3+x^2+y^2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0$.
   2) $x=1+y^2+z^2,\quad x=3-\sqrt{y^2+z^2}$.

7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $V:\{0\le z\le x^2,\quad x\le y\le 2\}$, $\gamma(x;y;z)=xy$.

Кратные интегралы Вариант 18

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

   1) $y=-\dfrac{2}{3}x+6,\quad y=\dfrac{1}{2}x-1,\quad x-3=0.$

   2) $y=0,\quad y=\pi,\quad x=0,\quad x=\sin y.$

2. Перейти к полярным координатам и вычислить:

   $\iint\limits_{(D)} x(x^2+y^2)\cdot dxdy$, где $D:\{y\le x^2+y^2\le 2y,\quad x\le 0\}.$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

   1) $x^2+y^2=4$, $y^2=3x$;

   2) $(x^2+y^2)^5=16x^4y^2$.

4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:

1) D: Параллелограмм – A(-1;2), B(3;4), C(3;1/2), D(-1;-3/2);

$\delta(x;y)=3x+2y$;

2) $D:\{x^2+y^2\le 8x,\quad \sqrt{3}\le y\le \dfrac{x}{\sqrt{3}}\}$, $\delta(x;y)=\dfrac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

   1) $y=\sqrt{25-x^2}$, $y=z,\quad x=4,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0;$

   2) $z=18-x^2-y^2,\ y=x,\quad y=3,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0.$

6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

   1) $z=\sqrt{y},\quad y=2x,\quad y=3,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0.$

   2) $x^2+y^2+z^2=2$, $y=x^2+z^2,\quad y>0.$

7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

$V:\{4\le x^2+y^2+z^2\le 36,\quad y\ge x,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0\},$

$$\gamma(x;y;z)=\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\ .$$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x-2y+5=0, \quad 4x-y+6=0, \quad 2x+3y-18=0, \quad x-2y-2=0.$
   2) $y=\sqrt{4x-x^2}, \quad y=2\sqrt{x}, \quad x=0, \quad x=4.$
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot dxdy$, где $D:\{1\le x^2+y^2\le 9, \quad x\ge 0,$ $y\ge 0\}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $x^2+y^2=5, \quad y=2x^2, \quad (y>0)$;
   2) $(x^2+y^2)^{3/2}=y^2$.
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{y=e^x, \quad x=0, \quad y=2\}; \quad \delta(x;y)=e^{x+y}$;
   2) $D:\{2x\le x^2+y^2\le 6x\}; \quad \delta(x;y)=yx$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $x=5, \quad y=x/5, \quad z=x^2+5y^2, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0;$
   2) $4y=x^2+y^2, \quad x^2+y^2=y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}$.
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $y=\sqrt{9-x^2-z^2}, \quad y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad (y>0);$
   2) $x^2+y^2=4, \quad y+z=2, \quad z\ge 0.$
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $V:\{2(x^2+y^2)\le z\le 4, \quad 0\le y\le \frac{x}{\sqrt{3}}\}; \qquad \gamma(x;y;z)=\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x^2+y^2=4,\quad y^2=3x,\quad (y>0);$
   2) $x+y=4,\quad x-3y=0,\quad x+5y=16.$
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} (x^2+y^2)\cdot dxdy$, где $D:\{x^2+y^2\le 8,\quad y\le x,\quad x=\sqrt{2}\}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $xy=6$, $3x=2y$, $x-6y=0;$
   2) $(x^2+y^2)^2=7x^2+5y^2.$
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{y=x^2+1,\quad x-y+3=0\};\ \ \delta(x;y)=2x+y;$
   2) $D:\{x^2+y^2\le 4x,\quad y\le x\};\quad \delta(x;y)=x\sqrt{(x^2+y^2)^5}$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $y=x^2,\quad x=y^2,\quad 3x+2y+z=6$, $z=0;$
   2) $z=4-x^2-y^2,\quad y=x,\quad y=-x,\quad y=2,\quad z\ge 0.$
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $z^2=4-x,\quad x^2+y^2=4x,\quad (z\ge 0);$
   2) $x^2+y^2+z^2=2z$, $z=\sqrt{x^2+y^2}.$
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

   $V:\{1\le (x^2+y^2+z^2)\le 9,\quad z\ge 0,\quad 0\le y\le \dfrac{x}{\sqrt{3}}\};$

   $\gamma(x;y;z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x^2+y^2=4, \quad y=2x-x^2, \quad x=0, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0;$
   2) Параллелограмм: A(-2;1), B(2;4), C(3;1), D(-1;-2).
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} \ln(x^2+y^2)\cdot dxdy$, где $D:\{4\le x^2+y^2\le 25, \quad x\ge 0\}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $y^2-x^2=4x, \quad y=x\sqrt{3}, \quad y=-3x, \quad (y>0);$
   2) $(x^2+y^2)^3=x^4.$
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{xy=1, \quad x=y, \quad x=2\}; \qquad \delta(x;y)=x^4y;$
   2) $D:\{2y\le x^2+y^2\le 6y, \quad -x\le y\le x\}; \ \delta(x;y)=\sqrt{(x^2+y^2)}$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $x=4, \quad x=4y, \quad z=4y^2, \quad z\ge 0;$
   2) $z=1+3x^2+2y^2, \quad y=1-x^2, \quad y=1, \quad z\ge 0.$
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $y^2+z^2=2z, \quad x=4-x^2-z^2, \quad x\ge 0;$
   2) $z=3x, \quad y^2=2-x, \quad z\ge 0.$
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $V:\{4\le (x^2+y^2+z^2)\le 16, \quad z\ge 0, \quad y\ge 0, \quad y\le x\sqrt{3}\};$
   $$\gamma(x;y;z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ .$$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x^2 - y^2 = 2, \quad y^2 = -x;$
   2) Трапеция: A(-2;-2), B(-1;2), C(3;4), D(6;2).
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} \sqrt{(x^2+y^2)^5}\cdot dxdy$,
   где $D:\{x^2+y^2 \le 3x, \quad -x/\sqrt{3} \le y \le x/\sqrt{3}\};$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $y = \sqrt{4-x^2}, \quad x+y=2;$
   2) $(x^2+y^2)^{3/2} = x^2 - y^2.$
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{x/2 \le y \le \sqrt{x/2}\}; \qquad \delta(x;y) = x+2y;$
   2) $D:\{2x \le x^2+y^2 \le 8x, \quad y \le 0\}; \qquad \delta(x;y) = 3y$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $y = 2x, \quad x+y+z=2, \quad x \ge 0, \quad z \ge 0;$
   2) $x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x^2+y^2+z^2 = 36, \quad x^2+y^2 = z^2,$
   $-x \le y \le x, \quad z \ge 0.$
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $y = 2-\sqrt{x^2+z^2}, \quad y = x^2+z^2,$
   2) $x+y=3, \quad z+x^2=9, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $V:\{(x^2+z^2) \le 4z, \quad x+y \le 4 \quad y \ge 0\}; \qquad \gamma(x;y;z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}$

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x-2y=2, \quad x-2y+5=0, \quad x=-1, \quad x=3;$
   2) $y^2-x=0, \quad y=2, \quad x-2y=3, \quad (y>2).$
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} \sqrt{(x^2+y^2)}\cdot dxdy$, где $D:\{x^2+y^2+2y=0, \quad x\le 0\}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $x^2+y=20, \quad 8x+y=0;$
   2) $(x^2+y^2)^3=xy^3.$
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:

1) D: Треугольник – A(0;0), B($\sqrt{2};\sqrt{2}$), C($\sqrt{2};\sqrt{6}$); $\delta(x;y)=x^2+y^2;$

2) $D:\{4\le x^2+y^2\le 9, \quad x\ge 0, \quad y\le 0\};$ $\qquad \delta(x;y)=\dfrac{2x-3y}{x^2+y^2}$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $z=9-x^2-y^2, \quad x+y=3, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0;$
   2) $x=\sqrt{25-y^2}, \quad x=z, \quad y=4, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $x^2+y^2+z^2=R^2, \quad x^2+z^2=Ry, \quad y\ge 0;$
   2) $x^2+y^2+z^2=36, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad 0\le y\le -x.$
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

$V:\{(x^2+z^2)\le 16y, \quad 0\le z\le 16-y, \quad x\ge 0\}; \qquad \gamma(x;y;z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $y=\sqrt{12-x^2}, \quad y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}, \quad x=0, \quad (x\ge 0);$
   2) $y=|\ln x|, \quad y=5.$
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} x\cdot dxdy$, где $D:\{x^2+y^2\le bx, \quad x\ge 0\}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $y=2, \quad y=x^2+5, \quad x=1, \quad x=3;$
   2) $(x^2+y^2)^{5/2}=xy^2.$
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{y=4x+6, \quad x-1-2y=0, \quad x=-1\};$ $\delta(x;y)=x$;
   2) $D:\{y\le x^2+y^2\le 2y\},$ $\delta(x;y)=3y$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $z=x^2, \quad 2x=y, \quad x=4, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0;$
   2) $x^2+y^2=4, \quad y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad y\ge 0.$
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $x^2+y^2+z^2=1, \quad x^2+y^2+z^2=9, \quad y\le x, \quad z\ge 0, \quad y\ge 0;$
   2) $z=4-x^2-y^2, \quad x+y=2, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $V:\{x^2+y^2=2x, \ x+z=2, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0\};$
   $\gamma(x;y;z)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $x^2+y^2\le 4,\quad x^2+y^2\le 4x;$
   2) $x^2+y=0,\quad x-y-2=0.$
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} \sqrt{(x^2+y^2)^3}\cdot dxdy$, где $D:\{x^2+y^2\le y,\quad -x\le y\le x\sqrt{3}\}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $y=2,\quad y=x^2+5,\quad x=1,\quad x=3;$
   2) $(x^2+y^2)^{5/2}=xy^2.$
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) D: Треугольник – A(3;4), B(6;2), C(3;1/2); $\delta(x;y)=x+y$;
   2) $D:\{4\le x^2+y^2\le 16,\quad x\le y\le x/\sqrt{3},\quad x>0,\quad y>0\};$
   $\delta(x;y)=\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $x+y=4,\quad z=4\sqrt{y},\quad x\ge 0,\quad z\ge 0;$
   2) $x^2+y^2=4,\quad z=x^2+y^2,\quad z\ge 0.$
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $z=4(x^2+y^2),\quad y=3x,\quad x=2,\quad z\ge 0,\quad y\ge 0;$
   2) $2y=x^2+y^2,\quad 4y=x^2+y^2,\quad x=2,\quad x=4.$
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:
   $V:\{2\le x^2+y^2+z^2\le 8,\quad x^2+y^2=z^2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0\};$
   $\gamma(x;y;z)=xy$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

   1) $x^2+y^2=2, \quad x^2=y, \quad (y>0)$;

   2) $x+y=2, \quad y\le 1, \quad x=0, \quad y=0$

2. Перейти к полярным координатам и вычислить:

   $\iint\limits_{(D)} x\sqrt{(x^2+y^2)^3}\cdot dxdy,$ где $D:\{x^2+y^2\le 2\pi;$
   $0\le y\le x\}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

   1) $y=2^x, \quad y=2x-x^2, \quad x=0, \quad x=2;$

   2) $y^2=2x; \quad x-y=4$.

4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:

   1) $D:\{0\le y\le 1-x; \quad 0\le x\le 1\}, \quad \delta(x;y)=y^2$;

   2) $D:\{x\le x^2+y^2\le 2x\}, \quad \delta(x;y)=1+y+x$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

   1) $x=2, \quad y=4x, \quad y=3\sqrt{x}, \quad z=4, \quad z\ge 0$;

   2) $z=2(x^2+y^2), \quad z=4-2(x^2+y^2)$

6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

   1) $z=3x^2+3y^2+1, \quad z=5-3x^2-3y^2$.

   2) $2x+3y=12, \quad z=y^2/2, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$

7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

   $V:\{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{9-x^2-y^2}, \quad x\ge 0\}, \quad \gamma(x;y;z)=x$.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $y = x,\ \ y = 4x,\ \ xy = 1,\ \ (x > 0;\ \ y > 0).$
   2) $y = e^{x},\ \ y = e^{-x},\ \ y = 2.$
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:
   $\iint\limits_{(D)} (x + y - 1)\cdot dxdy,$ где $D:\{1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ \ 0 \le y \le x\}.$
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $x + y - 1 = 0;\ \ x - y - 1 = 0;\ \ x - y + 1 = 0;\ \ x + y + 1 = 0.$
   2) $x = y^2;\ \ x = 2 + y^2/2$
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) $D:\{1 + x^2 \le y \le 3 - x,\ \ \ x \ge 0\}$ $\delta(x;y) = 4x + 5y + 2$;
   2) $D:\{1 - \sqrt{1 - y^2} \le x \le y\},$ $\delta(x;y) = 3xy$.

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $x^2 + z^2 = 1 - y,\ \ y = 0,\ \ x \ge 0;$
   2) $z = x,\ \ y^2 = x,\ \ x = 3,\ \ z \ge 0.$
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $x = \sqrt{y/2},\ \ x + y = 3,\ \ z = 2,\ \ z = 0.$
   2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ \ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ y \ge 0.$

7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

   $V:\{x^2 + y^2 = 2x,\ \ z = 3,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0\}$, $\gamma(x;y;z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Кратные интегралы Вариант 28

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\cdot dxdy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:
   1) $xy=1, \quad y=\sqrt{x}, \quad x=3$;
   2) $y^2-x^2=1, \quad x^2+y^2=2y, \quad (y>1)$.
2. Перейти к полярным координатам и вычислить:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{x}{x^2+y^2}\cdot dxdy, \quad \text{где} \quad D:\{4\le x^2+y^2\le 16, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0\};$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
   1) $x^2+y=2, \quad y^3=x^2$;
   2) $(x^2+y^2)^{3/2}=2x^2+y^2$.
4. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$:
   1) D: Параллелограмм – A(-1;2), B(3;4), C(3;1/2), D(-1;-3/2);
   $\delta(x;y)=3x+2y$;
   2) $D:\{x^2+y^2\le 8x, \quad \sqrt{3}\le y\le \frac{x}{\sqrt{3}}\}, \quad \delta(x;y)=\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.
5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\cdot dxdydz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:
   1) $x=5, \quad y=x/5, \quad z=x^2+5y^2, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0$;
   2) $4y=x^2+y^2, \quad x^2+y^2=y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}$.
6. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:
   1) $z^2=4-x, \quad x^2+y^2=4x, \quad (z\ge 0)$;
   2) $x^2+y^2+z^2=2z, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}$.
7. Вычислить массу тела, занимающего область (V), если задана объёмная плотность тела $\gamma(x;y;z)$:

$$V:\{4\le (x^2+y^2+z^2)\le 16, \quad z\ge 0, \quad y\ge 0, \quad y\le x\sqrt{3}\};$$

$$\gamma(x;y;z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad .$$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ
по теме «Скалярные и векторные поля»

1. Определение скалярного поля, способы его изображения. Производная скалярного поля по направлению, её вычисление и физический смысл.
2. Вектор-градиент скалярного поля, его вычисление и физический смысл. Связь вектора-градиента с производной по направлению.
3. Криволинейный интеграл по длине дуги (1-го рода). Понятие, вычисление, геометрический смысл.
4. Понятие векторного поля. Криволинейный интеграл по координатам (2-го рода), его физический смысл, вычисление.
5. Криволинейный интеграл по координатам по замкнутому контуру, его свойства. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла по координатам от линии интегрирования.
6. Потенциальные поля и понятие потенциала. Свойства плоского потенциального поля (четыре равносильных утверждения по формуле Грина).
7. Интегрирование полных дифференциалов (нахождение потенциала заданного плоского потенциального поля).
8. Поверхностный интеграл 1-го рода. Его вычисление.
9. Поверхностный интеграл по координатам (2-го рода), его вычисление. Физический смысл поверхностных интегралов.
10. Формула Остроградского-Гаусса в векторной и координатной формах.
11. Поток векторного поля. Циркуляция векторного поля. Их вычисление в векторной и координатной формах, физический смысл.
12. Понятие и вычисление дивергенции векторного поля. Физический смысл дивергенции.
13. Понятие и вычисление ротора векторного поля. Физический смысл ротора поля.
14. Формула Стокса. Пространственное потенциальное поле, его свойства, физический смысл.
15. Соленоидальное векторное поле. Гармоническое векторное поле. Их свойства.
16. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа и гармоническая функция. Дифференциальные векторные операции высших порядков.

8. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:

$U(x;y;z)=4\ln(3+x^2)-8xyz;\quad M_0(1;\,1;\,1)$;

$S:\ x^2-2y^2+2z^2=1.$

9. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)$ в точках $M_1(1;\,1;\,1)$ и $M_2(0;\,-2;\,-1)$: $\qquad T(x;y;z)=(x^2+y^2+z^2)^{3/2};$

10. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)$ вдоль дуги плоской кривой L, заключённой между точками $M_1(-4;\,0)$ и $M_2(0;\,2)$:

$$\vec{F}(x;y)=(x^2+2y)\cdot\vec{i}+(y^2-2x)\cdot\vec{j}\ ;\qquad L:\quad y=2-\frac{x^2}{8}.$$

11. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

1) $\vec{A}=\{2x;\ y;\ -3z\},$
S: часть поверхности $x+y+z=1,$ вырезанной координатными плоскостями;

2) $\vec{A}=\{(3x^2+x);\ e^x;\ e^y\},$
S: полная поверхность конуса $x^2+y^2=z^2,\quad z=4;$

3) $\vec{A}=\{x^2;\ x;\ xz\},$
S: полная поверхность четверти параболоида
$x^2+y^2=z,\quad z=1,\quad x=0,\quad y=0;$

12. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:

1) $\vec{A}=\{y^2;\ (x+y)^2\},\ L:$ контур ΔABC - $A(2;\,0),\quad B(2;\,2),\quad C(0;\,2);$

2) $\vec{A}=yz\cdot\vec{i}+2xz\cdot\vec{j}+xy\cdot\vec{k},\qquad L:\ \begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ x^2+y^2=9,\qquad (z>0);\end{cases}$

13. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{2x+ze^x;\ 2y;\ e^z-2z\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

Скалярные и векторные поля Вариант 2

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:
$$U(x;y;z)=x\sqrt{y}+y\sqrt{z}; \quad M_0(2;\ 4;\ 4); \quad S:\ 2x^2-y^2+4x=0.$$
2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=x(\ln y-arctg\ z)$ в точках $M_1(-2;\ 1;\ -1)$ и $M_2(-e;\ e;\ 0)$.
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=x^2\cdot\vec{i}+xy\cdot\vec{j}$ вдоль отрезка прямой, соединяющей точки $M_1(0;\ 1)$ и $M_2(1;\ 2)$.

4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{x;\ 2y;\ z\}$,
   S: часть плоскости $x+2y+2z=2$,
   вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(\ln y+7x)\cdot\vec{i}+(\sin z-2y)\cdot\vec{j}+(e^y-2z)\cdot\vec{k}$,
   S: сфера $x^2+y^2+z^2=2x$;
   3) $\vec{A}=\{xz;\ z;\ y\}$,
   S: полная поверхность параболоида
   $x^2+y^2=1-z, \quad z=0$;

5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A}=\{(x-y);\ (3x-2)\}$, L: окружность $x^2+y^2=6y$;
   2) $\vec{A}=(x^2-y)\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+\vec{k}$, $\quad L:\ \begin{cases} x^2+y^2=25, \\ z=9. \end{cases}$

6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{12x^2yz;\ 4x^3z;\ 4x^3y-2e^{2z}\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

Скалярные и векторные поля Вариант 3

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:

$$U(x;y;z)=-2\ln(x^2-5)-4xyz;\quad M_0(1;1;1);$$
$$S:\ x^2+2y^2-2z^2=1.$$

2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=x^2y-\sqrt{xy+z^2}$ в точках $M_1(1;\,5;\,-2)$ и $M_2(4;\,-4;\,3)$.
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=x^2\cdot\vec{i}+(1/y^2)\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ xy=1$, соединяющей точки $M_1(1;1)$ и $M_2(4;\,1/4)$.
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{x;\ y;\ z\}$,
      S: часть плоскости $6x+3y+2z=6$,
      вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(\cos z+3x)\cdot\vec{i}+(x-2y)\cdot\vec{j}+(3z+y^2)\cdot\vec{k}$,
      S: полная поверхность параболоида
      $36(x^2+y^2)=z,\quad z=6$;
   3) $\vec{A}=\{x^2;\ \ y;\ \ z\}$,
      S: полная поверхность полушара $x^2+y^2+z^2=1,$
      $z=0,\ \ (z>0)$;
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A}=\{2y;\ (x+y)\}$, L: граница области $\mathrm{y}^2\le \mathrm{x}\le 4$.
   2) $\vec{A}=xz\cdot\vec{i}-\vec{j}+y\cdot\vec{k}$, $L:\ \begin{cases} z=5(x^2+y^2)-1,\\ z=4.\end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{y\sin 2xy-z\sin 2xz;\quad x\sin 2xy+1;\quad x\sin 2xz\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

Скалярные и векторные поля Вариант 4

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:

   $U(x;y;z)=(1/4)x^2y-\sqrt{x^2+5z^2}$; $M_0(-2;\ 1/2;\ 1)$;

   $S:\quad x^2+4y^2=z^2+4$.

2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=x+\ln(y^2+z^2)$ в точках $M_1(2;\ 1;\ 1)$ и $M_2(2;\ -3;\ 0)$.

3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=y\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}$ вдоль дуги астроиды $L:\quad x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,\quad 0\le t\le\pi/4$.

4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

   1) $\vec{A}=\{x;\ 0;\ (\pi z-1)\}$,
   S: часть плоскости $12x+3y+2z=6$,
   вырезанной координатными плоскостями;

   2) $\vec{A}=(4x-2y^2)\cdot\vec{i}+(\ln z-4y)\cdot\vec{j}+(x+3z/4)\cdot\vec{k}$,
   S: сфера $x^2+y^2+z^2=2x+3$;

   3) $\vec{A}=\{(zx+y);\ (xy-z);\ (x^2+yz)\}$,
   S: полная поверхность цилиндра
   $x^2+y^2=2,\quad z=1,\quad z=0$;

5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:

   1) $\vec{A}=\{(x+y);\ 2x\}$, L: вдоль окружности $x^2+y^2=2x$;

   2) $\vec{A}=2y\cdot\vec{i}+\vec{j}-2yz\cdot\vec{k}$,

   $$L:\quad \begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ z=2. \end{cases}$$

6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{1/(x-1);\ 1/y;\ 1/z\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

Скалярные и векторные поля Вариант 5

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:

$$U(x;y;z)=xz^2-\sqrt{x^3y}; \qquad M_0(2;\ 2;\ 4);$$

$$S:\quad x^2-y^2-3z+12=0.$$

2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=y\ln(1+x^2)-arctg\ z$ в точках $M_1(0;\ 1;\ 1)$ и $M_2(0;\ -5;\ -\sqrt{3})$.

3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=x^3\cdot\vec{i}+x^2\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ y=x^2$, заключённой между точками $M_1(1;\ 1)$ и $M_2(3;\ 9)$.

4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{0;\ 9\pi y;\ (7z+1)\}$,
   S: часть плоскости $x+y+z=1$,
   вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(e^{-z}-x)\cdot\vec{i}+(xz+3y)\cdot\vec{j}+(z+x^2)\cdot\vec{k}$,
   S: полная поверхность пирамиды
   $2x+y+z=2,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0;$
   3) $\vec{A}=\{x^2;\ xy;\ 3z\}$,
   S: полная поверхность конуса $x^2+y^2=z^2,\quad z=4;$

5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A}=\{x^3;\ -y^3\}$, L: вдоль окружности $x^2+y^2=9;$
   2) $\vec{A}=yz\cdot\vec{i}+2xz\cdot\vec{j}+xy\cdot\vec{k}, \qquad L:\ \begin{cases}2x^2+2y^2=1,\\ x+y+z=3.\end{cases}$

6. Проверить, будет ли векторное поле

$$\vec{A}=\{-\frac{y}{(x+3)^2}+\frac{1}{yz};\quad \frac{1}{x+3}-\frac{x}{zy^2};\quad \frac{1}{(z+2)^2}-\frac{x}{yz}\}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

Скалярные и векторные поля Вариант 6

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:
$$U(x;y;z) = x\sqrt{y} - yz^2; \qquad M_0(2;\ 1;\ -1); \qquad S: \quad x^2 + y^2 = 4x.$$

2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z) = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$ в точках $M_1(1;\ 3;\ 2)$ и $M_2(\sqrt{2};\ 2;\ 0)$.

3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y) = \cos^3 x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ y = \sin x$ между точками $M_1(0;\ 0)$ и $M_2(\pi/2;\ 1)$.

4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A} = \{x;\ 3y;\ 2z\}$,
   S: часть плоскости $x + y + z = 1$,
   вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A} = (6x - \cos y)\cdot\vec{i} + (e^x + z)\cdot\vec{j} + (2y + 3z)\cdot\vec{k}$,
   S: полная поверхность цилиндра
   $$x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 3;$$
   3) $\vec{A} = \{3x;\ 0;\ -z\}$,
   S: полная поверхность тела, ограниченного
   $z = 6 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad (z \ge 0)$;

5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:

1) $\vec{A} = \{x^2 y^2;\ \ (x^2 + x^3 y)\}$, L: контур $\Delta OAB - O(0;\ 0),\ A(1;\ 0),\ B(0;\ 1)$;

2) $\vec{A} = 2yz\cdot\vec{i} + xz\cdot\vec{j} + y^2\cdot\vec{k}, \qquad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = 4, \quad (z > 0). \end{cases}$

6. Проверить, будет ли векторное поле
$\vec{A} = \{x^3 y - \frac{1}{z};\ \ x^3;\ \ \frac{x}{z^2} + 4z\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:

   $U(x;y;z)=7\ln(1/13+x^2)-4xyz;\qquad M_0(1;\ 1;\ 1)$;

   $S:\quad 7x^2-4y^2+4z^2=7$.

2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$ в точках $M_1(\pi/2;\ 3\pi/2;\ 3)$ и $M_2(0;\ \pi/4;\ 1)$.

3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=\cos^2 x\cdot\vec{i}+(1/y^3)\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ y=tg\,x$ между точками $M_1(\pi/4;\ 1)$ и $M_2(\pi/3;\ \sqrt{3})$.

4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

   1) $\vec{A}=\{-2x;\ \ y;\ \ 4z\}$,
      S: часть плоскости $2x+6y+3z=6$,
      вырезанной координатными плоскостями;

   2) $\vec{A}=(\sqrt{z}-x)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}+(y^2-z)\cdot\vec{k}$,
      S: полная поверхность цилиндра
      $x^2+y^2=(z+1),\quad z=0;$

   3) $\vec{A}=\{4x;\ -2;\ -z\}$,
      S: полная поверхность тела, ограниченного
      $3x+2y=12,\quad 3x+y=6,\quad x+y+z=6,\quad y=0,\quad z=0;$

5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:

   1) $\vec{A}=\{(y-x^2);\quad (2x+y^2)\},\quad L:\ x^2+z^2=R^2,\quad y=x;$

   2) $\vec{A}=4x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-xy\cdot\vec{k},\quad L:\ \begin{cases} z-1=2(x^2+y^2), \\ x^2+y^2=4,\quad (z>0). \end{cases}$

6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{2x\sin y-y\sin x;\quad x^2\cos y-z+\cos x;\quad -y\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

Скалярные и векторные поля Вариант 8

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:
   $U(x;y;z) = arctg\ (y/x) + xz;\qquad M_0(2;\ 2;\ -1)$;
   $S:\quad x^2 + y^2 - 2z = 10$.
2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z) = x^2y^2z - \ln(z-1)$ в точках $M_1(1;\ 1;\ 2)$ и $M_2(1;\ -2;\ 3/2)$.
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y) = (x^2 + y^2)\cdot\vec{i} + xy\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ y = e^x$ между точками $M_1(0;\ 1)$ и $M_2(1;\ e)$.
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A} = \{x;\ 4y;\ 5z\}$,
      S: часть плоскости $2x + 4y + z = 2$,
      вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A} = (e^y + 2x)\cdot\vec{i} + (xz - y)\cdot\vec{j} + (1/4)(e^{xy} - z)\cdot\vec{k}$,
      S: сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3$;
   3) $\vec{A} = \{0;\ 2(z-y);\ (x-z)\}$,
      S: полная поверхность тела, ограниченного
      $x^2 + y^2 = z - 1,\quad x^2 + y^2 = 1,\quad z = 0.$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A} = \{y^2;\quad (3x + y)\},\qquad L:\ \begin{cases} y = x^2, \\ y = 4; \end{cases}$
   2) $\vec{A} = y\cdot\vec{i} - x\cdot\vec{j} + 2z\cdot\vec{k},\qquad L:\ \begin{cases} x^2 + y^2 - x^2/4 = 0, \\ z = 2. \end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A} = \{-y + e^z;\quad z^2e^y - x;\quad 2ze^y - xe^z\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:

   $U(x;y;z)=\ln(1+x^2)-xy\sqrt{z};\quad M_0(1;\ -2;\ 4)$;

   $S:\quad 4x^2-y^2+z^2=16$.
2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=x^2-arctg\ (2y+z)$ в точках $M_1(2;\ 1;\ 1)$ и $M_2(0;\ -1/2;\ 0)$.
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=xy^2\cdot\vec{i}+y^2\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\quad x=t^2,\quad y=t,\quad 0\le t\le 1.$
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

   1) $\vec{A}=\{9\pi x;\ \ (5y+1);\ \ 4\pi z\}$,
      S: часть плоскости $2x-y+2z=6$,
      вырезанной координатными плоскостями;

   2) $\vec{A}=(\sqrt{z}-x)\cdot\vec{i}+(e^x+3y)\cdot\vec{j}+\sqrt{x+y}\cdot\vec{k}$,
      S: полная поверхность усечённого конуса
      $y^2+z^2=x^2,\quad x=2,\quad x=5;$

   3) $\vec{A}=\{2x;\ \ 2y;\ \ z\}$,
      S: полная поверхность тела, ограниченного
      $y=x^2,\quad y=4x^2,\quad y=1,\quad y=z,\quad z=0,\quad (x\ge 0).$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:

   1) $\vec{A}=\{(y-x);\quad (2x-y)\},\quad L$: окружность $x^2+y^2=x;$

   2) $\vec{A}=y\cdot\vec{i}+3x\cdot\vec{j}+z^2\cdot\vec{k},\ \ L:\ \begin{cases} z=x^2+y^2-1, \\ z=3. \end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2};\quad -\frac{1}{x};\quad \frac{1}{z}\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:
$$U(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2}-z; \quad M_0(3;\ 4;\ 1); \qquad S:\ x^2+y^2=24z.$$

2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ в точках $M_1(0;\ -3;\ 4)$ и $M_2(1;\ -6;\ 8)$.

3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=(x+y)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ x=\cos t,\ \ y=\sin t,\ \ 0\le t\le\pi/2.$

4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{\pi x;\ \ 2;\ \ 2\pi z\},$
   S: часть плоскости $3x+2y+6z=6,$
   вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(y^2+z^2+6x)\cdot\vec{i}+(e^z-2y)\cdot\vec{j}+(y-z)\cdot\vec{k},$
   S: полная поверхность конуса
   $9(x^2+z^2)=y^2, \quad y=4;$
   3) $\vec{A}=\{x;\ \ 3y;\ \ 2z\},$
   S: полная поверхность тела, ограниченного
   $2(x^2+y^2)=z, \quad z=4-2(x^2+y^2).$

5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A}=\{y^{-1};\ \ -x^{-1}\},\ L$: контур $\Delta ABC-\ A(1;\ 1),\ B(2;\ 1),\ C(2;\ 2).$
   2) $\vec{A}=2yz\cdot\vec{i}+xz\cdot\vec{j}-x^2\cdot\vec{k}, \quad L:\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=1, \quad (z>0). \end{cases}$

6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{\sin y+2z\sin x;\ \ x\cos y;\ \ -2\cos x+(2\sqrt{z})^{-1}\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

14. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:
$U(x;y;z)=x\sqrt{y}-(z+y)\sqrt{x};\quad M_0(1;\ 1;\ -2);\ \ S:\ \ x^2-y^2+z^2=4$.

15. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля
$T(x;y;z)=\ln(x^2+y^2)+xyz)$
в точках $M_1(1;\ -1;\ 2)$ и $M_2(0;\ -3;\ 5)$.

16. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=(xy-x)\cdot\vec{i}+(x^2/2)\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ \ y=2\sqrt{x}$, заключённой между точками $(0;\ 0)\ u\ (1;\ 2)$.

17. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

1) $\vec{A}=\{2x;\ 3;\ z\}$,
S: часть плоскости $2x+3y-z=1$,
вырезанной координатными плоскостями;

2) $\vec{A}=(e^x+x/4)\cdot\vec{i}+(\ln x+y/4)\cdot\vec{j}+(z/4)\cdot\vec{k}$
S: полная поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=4x$;

3) $\vec{A}=\{x^2;\ \ xy;\ 3z\}$,
S: полная поверхность тела, ограниченного
$x^2+y^2=z^2,\ \ z=1,\ \ z=0$.

18. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль L:

1) $\vec{A}=\{x^2y^3;\ \ 1\}$, L: окружность $x^2+y^2=1$

2) $\vec{A}=-3z\cdot\vec{i}+y^2\cdot\vec{j}+2y\cdot\vec{k}$, $L:\ \begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x-3y-2z=1..\end{cases}$

19. Проверить, будет ли векторное поле
$\vec{A}=\{\sqrt{x}+\frac{1}{y};\ \frac{1-x}{y^2};\ 2-3z^2\}$ потенциальным.

В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S , образующего острый угол с положительным направлением оси OZ :
$$U(x;y;z)=\sqrt{xy}-4\sqrt{4-z^2};\quad M_0(1;\ 1;\ 0);\quad S:\ x^2-y^2=z.$$
2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=z^2+2arctg\ (x-y)$ в точках $M_1(1;\ 2;\ -1)$ и $M_2(2;\ -3;\ 0)$.
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}\cdot\vec{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ y=2\sqrt{x}$ между точками $M_1(1;\ 2)$ и $M_2(3;\ 6)$.
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{1;\ 5y;\ 11\pi z\}$,
   S : часть плоскости $x-3y+z=3$,
   вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(8yz-5x)\cdot\vec{i}+(x^2-1)\cdot\vec{j}+(xy-2z)\cdot\vec{k}$,
   S : полная поверхность цилиндра
   $x^2+y^2=9,\quad x=0,\quad x=1;$
   3) $\vec{A}=\{-2x;\quad z;\quad (x+z)\}$,
   S : поверхность тела, ограниченного
   $x^2+y^2=2y,\quad z=x^2+y^2,\quad z=0.$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :
   1) $\vec{A}=\{x^2y;\quad -xy^2\}$, $\quad L:$ окружность $x^2+y^2=9$;
   2) $\vec{A}=xz\cdot\vec{i}-\vec{j}+y\cdot\vec{k}$, $\quad L:\ \begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ z=1.\end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{\dfrac{1}{\cos^2 x}+2xz;\quad \dfrac{2y}{z};\quad x^2-\dfrac{y^2}{z^2}\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:
$U(x;y;z)=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}$; $M_0(0;\ -3;\ 4)$;
$S:\ 2x^2-y^2+z^2=1.$
2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=xy-x/z$
в точках $M_1(-4;\ 3;\ 1)$ и $M_2(1;\ -2;\ -3)$.
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=y\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}$ вдоль отрезка прямой $L:\ 5y+7x-35=0$ соединяющей точки $M_1(0;\ 7)$ и $M_2(5;\ 0)$.
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{8x;\ 11y;\ 17z\}$,
   S: часть плоскости $x+2y-3z=6$,
   вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(\sqrt{z}+x)\cdot\vec{i}+(2x+y)\cdot\vec{j}+(\sin x+z)\cdot\vec{k}$,
   S: полная поверхность усечённого конуса
   $x^2+y^2=z^2,\quad z=2,\quad z=7;$
   3) $\vec{A}=\{z;\ \ x;\ -z\}$,
   S: полная поверхность параболоида
   $x^2+y^2=4z,\quad z=4.$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A}=\{(x^2-y^2);\quad (x^2+y^2\}$, L: эллипс $(x^2/9)+(y^2/16)=1;$
   2) $\vec{A}=x\cdot\vec{i}+yz\cdot\vec{j}-x\cdot\vec{k}$, $L:\ \begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+y+z=1.\end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле
$\vec{A}=\{2xe^y;\quad (1-y^2)^{-1/2}+x^2e^y;\quad \sin 2z\}$ потенциальным.
В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S , образующего острый угол с положительным направлением оси OZ :

   $U(x;y;z)=\ln(x^2+y^2+1)-\sqrt{x^2+z^2}$; $M_0(3;\ 0;\ -4)$;

   $S:\ x^2-6x+9y^2+z^2=4z+4.$
2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=\dfrac{\sqrt{x}}{y}-\dfrac{y^z}{x+\sqrt{y}}$ в точках $M_1(4;\ 1;\ -2)$ и $M_2(1;\ 4;\ 0)$.
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=(x+y)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ x^2+(y^2/9)=1,\ (x>0,\ \ y>0),$ соединяющей точки $M_1(1;\ 0)$ и $M_2(0;\ 3).$
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

   1) $\vec{A}=\{x;\ \ 9y;\ \ 8z\},$

      S : часть плоскости $x+2y+3z=1,$

      вырезанной координатными плоскостями;

   2) $\vec{A}=(yz+7x)\cdot\vec{i}+(\sin 3x+6y)\cdot\vec{j}+(e^x-9z)\cdot\vec{k},$

      S : поверхность тела, ограниченного

      $x+2y-3z=6,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0;$

   3) $\vec{A}=\{x^3;\ \ y^3;\ \ z^3\},\qquad S$: сфера $x^2+y^2+z^2=4.$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :

   1) $\vec{A}=\{(x+y)^2;\quad -(x^2+y^2\},$

   L: контур $\Delta ABC-\ A(1;\ 1),\quad B(3;\ 2),\quad C(2;\ 5);$

   2) $\vec{A}=(x-y)\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+z^2\cdot\vec{k},\qquad L:\ \begin{cases} x^2+y^2-4z^2=0, \\ x^2+y^2=8z. \end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле

   $\vec{A}=\{z^2+1-\dfrac{2x}{z};\quad 0;\quad 2xz+\dfrac{x^2+1}{z^2}\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:
   $U(x;y;z) = x^2 - arctg\ (y+3z)$; $M_0(-1;\ 1;\ 1/3)$;
   $S:\ x^2 + z^2 = 4 - 6y.$
2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z) = \sqrt{xy} + \sqrt{9-z^2}$
   в точках $M_1(1;\ 1;\ 0)$ и $M_2(2;\ 2;\ -1)$.
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y) = -y\cdot\vec{i} + x\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ y = x^3,$ соединяющей точки $M_1(0;\ 0)$ и $M_2(2;\ 8).$
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A} = \{9\pi x;\ 2\pi y;\ 8\},$
      S: часть плоскости $6x + 24y + z = 3,$
      вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A} = (x+y^2)\cdot\vec{i} + (xz+7y)\cdot\vec{j} + (\sqrt{x^2+1} - 9z)\cdot\vec{k},$
      S: полная поверхность конуса
      $x^2 + z^2 = (y-3)^2,\quad y = 0;$
   3) $\vec{A} = \{(y+6x);\ 5(x+z);\ 4y\},$
      S: поверхность тела, ограниченного
      $x^2 + y^2 = z,\quad z = 0,\quad y = x,\quad y = 2x,\quad y = 2.$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A} = \{(xy + x + y);\quad (xy + x - y\},$
      L: окружность $x^2 + y^2 = 3y;$
   2) $\vec{A} = 3z\cdot\vec{i} - 2y\cdot\vec{j} + 2y\cdot\vec{k},\qquad L:\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле
   $\vec{A} = \{xy^2 + 3yz;\quad x^2y + 3xz;\quad z^{-2} + 3xy\}$ потенциальным.
   В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:
$$U(x;y;z)=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,; \quad M_0(1;\ 1;\ 1)\,; \quad \vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}.$$
2. Найти угол между $\overrightarrow{grad\,U}$ и $\overrightarrow{grad\,V}$ в точке $M(\sqrt{2}\,;\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}})$:
$$U(x;\ y;\ z)=(x^3/2)+6y^3+3\sqrt{6}\,z^3, \qquad V(x;y;z)=yz^2/x^2.$$
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=x^2y\cdot\vec{i}+xy^2\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ \ x=t,\quad y=t^3,\quad 0\le t\le 1.$
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{2x;\ \ 5y;\ \ 5z\},$
   S: часть плоскости $3x+2y+6z=6,$
   вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(3x-2z)\cdot\vec{i}+(z-2y)\cdot\vec{j}+(1+2z)\cdot\vec{k},$
   S: полная поверхность конуса
   $z^2=4(x^2+y^2), \qquad z=2;$
   3) $\vec{A}=\{(z+y+x);\ \ (2y-x);\ \ (3z+y)\},$
   S: поверхность тела, ограниченного
   $x^2+y^2=z,\quad z=0,\quad y=x,\quad y=2x,\quad x=1.$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A}=\{2xy;\quad -x^2\},$
   L: граница области $y=x^2/4, \qquad y=1;$
   2) $\vec{A}=4\cdot\vec{i}+3x\cdot\vec{j}+3xz\cdot\vec{k}, \qquad L:\ \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=3. \end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{2x^2+y;\quad x-y^2;\quad 5-z^2\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

Скалярные и векторные поля Вариант 17

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:

$$U(x;y;z)=z^2+2arctg\ (x-y);\quad M_0(1;\ 2;\ -2);$$
$$\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}.$$

2. Найти угол между $\overrightarrow{grad\,U}$ и $\overrightarrow{grad\,V}$ в точке $M(2;\ \frac{1}{3};\ \sqrt{\frac{3}{2}})$:

$$U(x;\ y;\ z)=\frac{4\sqrt{6}}{x}-\frac{\sqrt{6}}{y}+\frac{3}{z},\qquad V(x;y;z)=yz^3x^2.$$

3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=(e^x-xy)\cdot\vec{i}+(e^x-x)\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой L: $y=\sin x$ между точками (0; 0) и (π; 0).
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{\pi x;\ (\pi/2)y;\ (4-2z)\}$,
      S: часть плоскости $12x+4y+3z=12$,
      вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(\ln y+7x)\cdot\vec{i}+(\sin z-2y)\cdot\vec{j}+(e^y-2z)\cdot\vec{k}$,
      S: сфера $z^2+x^2+y^2=2x$;
   3) $\vec{A}=\{(y+2z);\ -y;\ 3x\}$,
      S: поверхность тела, ограниченного
      $3z=27-2(x^2+y^2),\quad z^2=x^2+y^2,\ (z\ge 0)$,
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A}=\{(x+2y);\ 4x\}$,
      L: контур треугольника $x+2y=4,\quad x=0,\quad y=0$;
   2) $\vec{A}=4x\cdot\vec{i}-yz\cdot\vec{j}+x\cdot\vec{k},\qquad L:\ \begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+y+z=1.\end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{yz;\ xz;\ xy\}$ потенциальным.
   В случае положительного ответа найти его потенциал.

Скалярные и векторные поля Вариант 18

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:

$$U(x;\ y;\ z)=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}\,;\quad M_0(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ 3);\quad \vec{l}=4\vec{i}+3\vec{j}.$$

2. Найти угол между $\overrightarrow{grad\,U}$ и $\overrightarrow{grad\,V}$ в точке $M(\sqrt{\frac{2}{3}};\ \sqrt{\frac{3}{2}};\ \frac{1}{2})$:

$$U(x;y;z)=\frac{2}{x}+\frac{3}{2y}-\frac{\sqrt{6}}{4z^3}\quad \text{и}\quad V(x;\ y;\ z)=\frac{y^3}{x^2}.$$

3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=(xy-y^2)\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой L: $y=2x^2$ между точками (0; 0) и (1; 2).

4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

   1) $\vec{A}=\{2x;\ \ y;\ \ z\}$,
   S: часть плоскости $6x+3y+2z=6$,
   вырезанной координатными плоскостями;

   2) $\vec{A}=(x+z)\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{k}$,
   S: полная поверхность тела, ограниченного поверхностями $z=8-x^2-y^2$, $z=x^2+y^2$;

   3) $\vec{A}=\{\frac{x+z}{2};\ \ \frac{xz+y}{4};\ \ (xy-2)\}$, S: полная поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=4x-2y+4z-8$.

5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:

   1) $\vec{A}=\{(x^2+y^2);\quad (x^2-y^2)\}$,
   L: граница области $x^2+y^2=1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$;

   2) $\vec{A}=y\cdot\vec{i}+(1-x)\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k},\quad L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ x^2+y^2=1,\quad (z>0).\end{cases}$

6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{\frac{y^2}{(x+y)^2}-\frac{1}{x};\ \ \frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{1}{y}\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:
   $U(x;\ y;\ z) = x^2y^2z - \ln(z-1)$; $M_0(1;\ 1;\ 2)$;
   $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\,\vec{k}.$
2. Найти угол между $\overrightarrow{grad\,U}$ и $\overrightarrow{grad\,V}$ в точке $M(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2})$:
   $$U(x;y;z) = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{z^3}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad V(x;\ y;\ z) = \frac{x^2}{y^2z^3}.$$
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y) = y^2 \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j}$ вдоль дуги эллипса L: $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ 0 \le t \le \pi/2.$
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A} = \{0;\ \pi y;\ (1-2z)\}$,
      S: часть плоскости $3x + 4y + 12z = 12$,
      вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A} = (\sin z + 2x)\cdot\vec{i} + (\sin z - 3y)\cdot\vec{j} + (\sin y + 2z)\cdot\vec{k}$,
      S: полная поверхность усечённого конуса
      $y^2 = x^2 + z^2,\quad y = 3,\quad y = 6;$
   3) $\vec{A} = \{(2y-3z);\ (3x+2z);\ (x+y+z)\}$,
      S: полная поверхность тела
      $x^2 + y^2 = 1,\quad z = 4 - x - y,\quad z = 0.$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A} = \{e^x(1-\cos y);\quad e^x(\sin y - y)\}$,
      L: вдоль замкнутой линии
      $y = \sin x,\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le \pi;$
   2) $\vec{A} = y\cdot\vec{i} - x\cdot\vec{j} + z^2\cdot\vec{k}$, L: $\begin{cases} z = 3(x^2+y^2)+1, \\ z = 4. \end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A} = \{e^{3x};\ yz^2;\ zy^2\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

Скалярные и векторные поля Вариант 20

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:
$$U(x;\ y;\ z)=2\sqrt{x+y}+y\ arctg\ z;\quad M_0(3;\ -2;\ 1);\quad \vec{l}=4\vec{i}-3\vec{k}.$$
2. Найти угол между $\overrightarrow{grad\,U}$ и $\overrightarrow{grad\,V}$ в точке $M(\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{3})$:
$$U(x;y;z)=x^2-y^2-3z^2 \text{ и } V(x;\ y;\ z)=\frac{x}{yz^2}.$$
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=y\cdot\vec{i}+(x/y)\cdot\vec{j}$ вдоль дуги кривой L: $y=e^{-x}$, между точками $(0;\ 1)$ и $(-1;\ e)$.
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{1;\ 3y;\ 8z\}$,
   S: часть плоскости $2x+4y+z=2$,
   вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(5x-6y)\cdot\vec{i}+(11x^2+2y)\cdot\vec{j}+(x^2-4z)\cdot\vec{k}$,
   S: полная поверхность пирамиды
   $x+y+2z=2,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0;$
   3) $\vec{A}=\{xy^2;\ \ yz^2;\ \ zx^2\}$,
   S: полная поверхность тела
   $x^2+y^2+z^2=1,\ z=0,\ (z\ge 0).$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A}=\{x^3;\ \ -y^3\}$,
   L: периметр прямоугольника
   $x=2,\quad x=5,\quad y=-3,\quad y=9;$
   2) $\vec{A}=-y\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+\vec{k}$, $\quad L:\ \begin{cases} z^2=x^2+y^2, \\ z=1. \end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле
$$\vec{A}=\{\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+2x;\quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+6y\}$$ потенциальным.
В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:
   $U(x;\ y;\ z)=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$; $M_0(1;\ -3;\ 4)$; $\vec{l}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.
2. Найти угол между $\overrightarrow{grad\,U}$ и $\overrightarrow{grad\,V}$ в точке $M(1;\ 2;\ 1/\sqrt{6})$, если
   $U(x;y;z)=3\sqrt{2}\,x^2-(y^2/\sqrt{2})-3\sqrt{2}\,z^2$ и $V(x;\ y;\ z)=\dfrac{xy^2}{z^2}$.
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=y^2\cdot\vec{i}+x^2\cdot\vec{j}$ вдоль первой арки циклоиды $L:\ x=2(t-\sin t),\ \ y=2(1-\cos t)$.
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{2\pi x;\ \ (7y+2);\ \ 7\pi z\}$,
      S: часть плоскости $6x+3y+2z=6$,
      вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(\sqrt{z}+y)\cdot\vec{i}+3x\cdot\vec{j}+(3z+5x^5)\cdot\vec{k}$,
      S: полная поверхность цилиндра
      $x^2+y^2=4,\ \ x=-1,\ \ x=4$;
   3) $\vec{A}=\{y;\ \ 2yz;\ \ 2z^2\}$,
      S: полная поверхность тела
      $x^2+y^2+z=1,\ \ z=0$.
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L:
   1) $\vec{A}=\{(3y-6xy^3);\ \ (2x-9x^2y^2)\}$,
      L: замкнутая линия $2x=y^2,\ \ x=8$;
   2) $\vec{A}=-y\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+3z^2\cdot\vec{k}$, $L:\ \begin{cases} z^2+x^2+y^2=9, \\ x^2+y^2=1, \quad (z>0). \end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле
   $\vec{A}=\{3x^4-y;\ \ y^2-x;\ \ 4+3z\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:

$$U(x;\ y;\ z)=\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{yz}{x+\sqrt{y}};\quad M_0(4;\ 1;\ -2);\quad \vec{l}=2\vec{i}+\vec{k}.$$

2. Найти угол между $\overrightarrow{grad\,U}$ и $\overrightarrow{grad\,V}$ в точке $M(2;\ 1/3;\ 1/\sqrt{6})$, если

$$U(x;y;z)=\frac{4\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}\,z}\quad \text{и}\quad V(x;\ y;\ z)=\frac{1}{y\,z\,x^2}.$$

3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=\sin y\cdot\vec{i}+\sin x\cdot\vec{j}$ вдоль отрезка прямой между точками $(0;\ \pi)$ и $(\pi;\ 0)$.

4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону
внешней нормали:

1) $\vec{A}=\{2x;\ y;\ -2z\}$,
S: часть плоскости $4x+y+2z=2$,
вырезанной координатными плоскостями;

2) $\vec{A}=(x+y^2)\cdot\vec{i}+(xz+y)\cdot\vec{j}+(\sqrt{x^2+1}+5z)\cdot\vec{k}$,
S: полная поверхность параболоида
$x^2+y^2=5-x,\quad x=1;$

3) $\vec{A}=\{xy;\ yz;\ xz\}$,
S: полная поверхность тела
$x^2+y^2+z^2=16,\quad x^2+y^2=z^2,\quad (z\ge 0).$

5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль L:

1) $\vec{A}=\{(x+y)^2;\ -(x^2+y^2)\}$, L: контур
параллелограмма $y=x,\ y=x+2,\ x=1,\ x=3.$

2) $\vec{A}=(x+y)\cdot\vec{i}-x\cdot\vec{j}+6\cdot\vec{k}$, $\quad L:\ \begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=2.\end{cases}$

6. Проверить, будет ли векторное поле
$\vec{A}=\{\frac{2}{y}-\frac{4z}{x^2};\ \frac{3}{z}-\frac{2x}{y^2};\ \frac{4}{x}-\frac{3y}{x^2}\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:

$$U(x;\ y;\ z)=xy-x/z\,;\quad M_0(-4;\ 3;\ 1)\,;\quad \vec{l}=5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}.$$

2. Найти угол между $\overrightarrow{grad\,U}$ и $\overrightarrow{grad\,V}$ в точке $M(1;\ 1/3;\ 1/\sqrt{6})$, если

$$U(x;y;z)=x^2+9y^2+6z^2 \quad \text{и} \quad V(x;\ y;\ z)=\frac{1}{yzx}.$$

3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=(2xy-y)\cdot\vec{i}+(x^2+x)\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ x^2+y^2=4,\ (y\ge 0)$ между точками $(2;\ 0)$ и $(-2;\ 0)$.

4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{(21\pi-1)x;\ \ 62\pi y;\ \ (1-2\pi z)\}$,
      S: часть плоскости $48x+3y+2z=6$, вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(ze^y+8x)\cdot\vec{i}+(x\sqrt{z}-5y)\cdot\vec{j}+(e^{xy}-11z)\cdot\vec{k}$,
      S: сфера $x^2+y^2+z^2=2y+4z$;
   3) $\vec{A}=\{(3x-y-z);\ \ 3y;\ \ 2z\}$,
      S: полная поверхность тела
      $x^2+y^2=z,\quad z=2y.$

5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль L:
   1) $\vec{A}=\{(x-y^2);\ \ (3x-2y)\}$,
      L: контур треугольника $y=x,\quad y=-x,\quad y=4.$
   2) $\vec{A}=(2-xy)\cdot\vec{i}-yz\cdot\vec{j}-xz\cdot\vec{k}$, $L:\ \begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x+y+z=4.\end{cases}$

6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\{zy\cos(xy);\ zx\cos(xy);\ \sin(xy)\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

Скалярные и векторные поля Вариант 24

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:
$$U(x;\ y;\ z)=x^3+\sqrt{y^2+z^2}\ ;\quad M_0(1;\ -3;\ 4);\quad \vec{l}=\vec{j}-\vec{k}.$$
2. Найти угол между $\overrightarrow{grad\,U}$ и $\overrightarrow{grad\,V}$ в точке $M(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{3}/2)$, если
$$U(x;y;z)=(x^3/\sqrt{2})-(y^3/\sqrt{2})-(8z^3/\sqrt{3}) \text{ и } V(x;\ y;\ z)=\frac{y^2z^3}{x^2}.$$
3. Найти работу поля $\vec{F}(x;y)=(x+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\vec{i}+(y-\sqrt{x^2+y^2})\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой
$L:\ x=4\cos t,\ \ y=4\sin t,\ \ (x\ge 0;\ \ y\ge 0)$
между точками $(4;\ 0)$ и $(0;\ 4)$.
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{0;\ \ y;\ \ 3z\}$,
   S: часть плоскости $x+2y+2z=2$,
   вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(\sqrt{2z-y}+7x)\cdot\vec{i}+(\cos z^2+y)\cdot\vec{j}+(\sqrt{\ln x+y}-5z)\cdot\vec{k}$,
   S: полная поверхность усечённого конуса
   $y^2+z^2=(x-5)^2,\quad x=1,\quad x=4;$
   3) $\vec{A}=\{3xz;\ \ -2x;\ \ y\}$,
   S: полная поверхность тела, ограниченного поверхностями
   $x+y+z=2,\quad x=1,\ \ x=0,\quad y=0,\quad z=0.$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль L:
1) $\vec{A}=\{(y-\ln(x+1));\ \ (2x-\cos y)\}$, L: замкнутая $y=x^2,\quad x=y^2$.
2) $\vec{A}=yz\cdot\vec{i}-xz\cdot\vec{j}+xy\cdot\vec{k}$, L: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ x^2+y^2=9.\end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A}=\dfrac{x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:
$$U(x;\ y;\ z) = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}\ ;\quad M_0(1;\ 5;\ -2);\quad \vec{l} = 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$
2. Найти угол между $\overrightarrow{grad\,U}$ и $\overrightarrow{grad\,V}$ в точке $M(2;\ 1/3;\ \sqrt{3/2})$, если
$$U(x;y;z) = (3/2)\,x^2 + 3y^2 - 2z^2 \quad \text{и} \quad V(x;\ y;\ z) = x^2 y z^3.$$
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y) = (y/x)\cdot\vec{i} + x^2\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ y = \ln x,\ \ 1 \le x \le e$.
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A} = \{(3\pi - 1)x;\ \ (9\pi\, y + 1);\ \ 6\pi\, z\}$,
   S: часть плоскости $18x + 6y + 2z = 18$,
   вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A} = (2yz^2 - x)\cdot\vec{i} + (xe^z - y)\cdot\vec{j} + (x^2 y - z)\cdot\vec{k}$,
   S: полная поверхность пирамиды
   $y - x + z = 1,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0;$
   3) $\vec{A} = \{z;\ \ (3y - x);\ \ -z\}$,
   S: полная поверхность тела, ограниченного поверхностями
   $x^2 + y^2 = z - 2,\quad x^2 + y^2 = 1,\quad z = 0.$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :
   1) $\vec{A} = \{y(1 - x^2);\ \ x(1 + y^2)\}$,
   L: замкнутый контур $y = 1 - x^2,\quad y = x^2.$
   2) $\vec{A} = x^2\cdot\vec{i} + yz\cdot\vec{j} + 2z\cdot\vec{k}$, L:
   $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 4. \end{cases}$$
6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A} = \{3x^2\, y\, z;\ \ x^3 z;\ \ x^3 y\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

Скалярные и векторные поля Вариант 26

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:
$U(x;y;z)=4\ln(3+x^2)-8xyz;\quad M_0(1;1;1);$
$S:\ x^2-2y^2+2z^2=1.$
2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=x(\ln y-arctg\ z)$ в точках $M_1(-2;1;-1)$ и $M_2(-e;\ e;0)$.
3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=x^2\cdot\vec{i}+(1/y^2)\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ xy=1$, соединяющей точки $M_1(1;1)$ и $M_2(4;\ 1/4)$.
4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:
   1) $\vec{A}=\{x;\ 0;\ (\pi z-1)\}$,
   S: часть плоскости $12x+3y+2z=6$, вырезанной координатными плоскостями;
   2) $\vec{A}=(e^y+2x)\cdot\vec{i}+(xz-y)\cdot\vec{j}+(1/4)(e^{xy}-z)\cdot\vec{k}$,
   S: сфера $x^2+y^2+z^2=2y+3;$
   3) $\vec{A}=\{2x;\ 2y;\ z\}$,
   S: полная поверхность тела, ограниченного
   $y=x^2,\quad y=4x^2,\quad y=1,\quad y=z,\quad z=0,\quad (x\ge 0).$
5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль L:
   1) $\vec{A}=\{x^3;\ -y^3\}$,
   L: вдоль окружности $x^2+y^2=9;$
   2) $\vec{A}=4x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-xy\cdot\vec{k},\quad L:\ \begin{cases} z-1=2(x^2+y^2), \\ x^2+y^2=4, \quad (z>0). \end{cases}$
6. Проверить, будет ли векторное поле потенциальным:
$\vec{A}=\{x^3y-\frac{1}{z};\quad x^3;\quad \frac{x}{z^2}+4z\}$.

В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора нормали к поверхности S, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ:

   $U(x;y;z)=\ln(x^2+y^2+1)-\sqrt{x^2+z^2}$; $M_0(3;\ 0;\ -4)$;

   $S:\ x^2-6x+9y^2+z^2=4z+4.$

2. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;y;z)=\dfrac{\sqrt{x}}{y}-\dfrac{y^z}{x+\sqrt{y}}$ в точках $M_1(4;\ 1;\ -2)$ и $M_2(1;\ 4;\ 0)$.

3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y)=(x+y)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ x^2+(y^2/9)=1,\ (x>0,\ \ y>0)$, соединяющей точки $M_1(1;\ 0)$ и $M_2(0;\ 3)$.

4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

   1) $\vec{A}=\{x;\ 9y;\ 8z\}$,
   S: часть плоскости $x+2y+3z=1$,
   вырезанной координатными плоскостями;

   2) $\vec{A}=(yz+7x)\cdot\vec{i}+(\sin 3x+6y)\cdot\vec{j}+(e^x-9z)\cdot\vec{k}$,
   S: поверхность тела, ограниченного
   $x+2y-3z=6,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0;$

   3) $\vec{A}=\{x^3;\ y^3;\ z^3\}$, S: сфера $x^2+y^2+z^2=4.$

5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль L:

   1) $\vec{A}=\{(x+y)^2;\ \ -(x^2+y^2\}$,
   L: контур $\Delta ABC-$ $A(1;\ 1),\ \ B(3;\ 2),\ \ C(2;\ 5);$

   2) $\vec{A}=(x-y)\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+z^2\cdot\vec{k}$, $L:\ \begin{cases} x^2+y^2-4z^2=0,\\ x^2+y^2=8z.\end{cases}$

6. Проверить, будет ли векторное поле

$\vec{A}=\{z^2+1-\dfrac{2x}{z};\quad 0;\quad 2xz+\dfrac{x^2+1}{z^2}\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

1. Найти производную скалярного поля $U(x;y;z)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:

   $U(x;\ y;\ z) = x^2y^2z - \ln(z-1)$; $M_0(1;\ 1;\ 2)$;

   $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\,\vec{k}.$

2. Найти угол между $\overrightarrow{grad\,U}$ и $\overrightarrow{grad\,V}$ в точке $M(\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{3})$:

   $U(x;y;z) = x^2 - y^2 - 3z^2$ и $V(x;\ y;\ z) = \dfrac{x}{yz^2}$.

3. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;y) = y^2 \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j}$ вдоль первой арки циклоиды L: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$.

4. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

   1) $\vec{A} = \{2x;\ \ y;\ \ -2z\}$,
      S: часть плоскости $4x + y + 2z = 2$,
      вырезанной координатными плоскостями;

   2) $\vec{A} = (y^2 + z^2 + 6x)\cdot\vec{i} + (e^z - 2y)\cdot\vec{j} + (y - z)\cdot\vec{k}$,
      S: полная поверхность конуса
      $9(x^2 + z^2) = y^2$, $y = 4$;

   3) $\vec{A} = \{x^2;\ \ xy;\ \ 23z\}$,
      S: поверхность тела, ограниченного
      $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$, $z = 0$.

5. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль L:

   1) $\vec{A} = \{(x+y)^2;\ \ -(x^2 + y^2)\}$,
      L: контур $\Delta ABC -$ $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 2)$, $C(2;\ 5)$;

   2) $\vec{A} = 3z\cdot\vec{i} - 2y\cdot\vec{j} + 2y\cdot\vec{k}$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$

6. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A} = \{2x^2 + y;\ \ x - y^2;\ \ 5 - z^2\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.