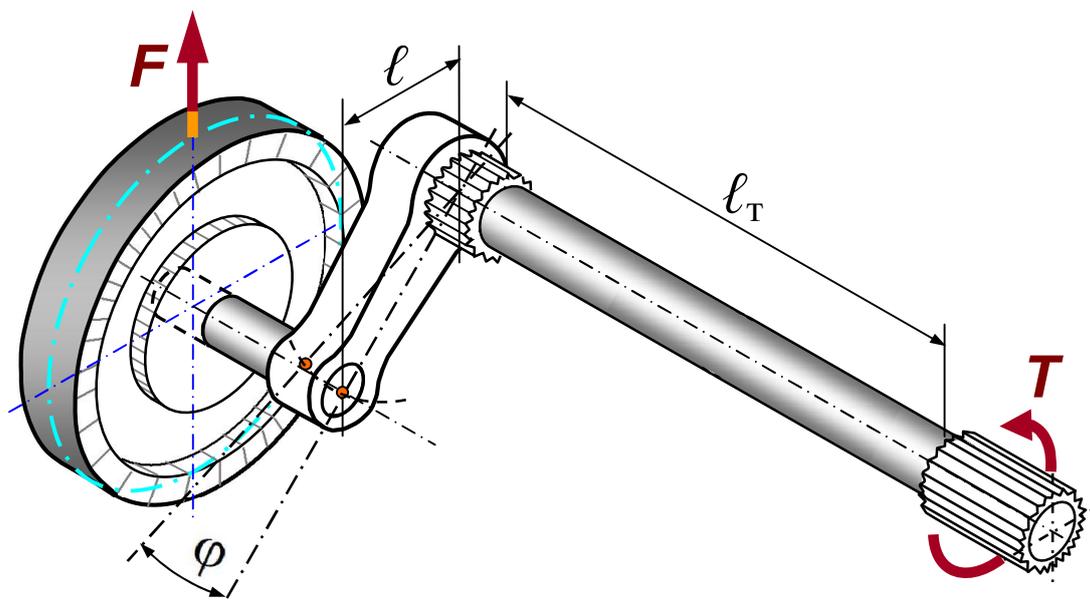


# ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ



Внутреннее  
усилие  
 $T = F \cdot \ell$

Условие прочности

$$\tau = \frac{T}{W_p} \leq [\tau]$$

Условие жесткости

$$\varphi = \frac{T \cdot \ell_T}{G \cdot I_p} \leq [\varphi]$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. Н. САВКИН, В. И. ВОДОПЬЯНОВ, О. В. КОНДРАТЬЕВ

# **ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ**

Учебное пособие

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по  
университетскому политехническому образованию в качестве  
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальности 190109  
«Наземные транспортно-технологические средства»



Волгоград 2014

Рецензенты:

кафедра «Строительная механика»  
Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета,  
проф. кафедры д-р техн. наук *Н. Г. Бандурин*;

профессор кафедры «Информационные системы в экономике»  
Волгоградского государственного аграрного университета  
д-р техн. наук *Е. П. Богданов*

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Волгоградского государственного технического университета

**Савкин, А. Н.**

Основы расчетов на прочность и жесткость  
типовых элементов транспортных средств: учеб. пособие  
/ А. Н. Савкин, В. И. Водопьянов, О. В. Кондратьев ; ВолгГТУ. –  
Волгоград, 2014. – 212 с.

ISBN 978-5-9948-1434-5

Содержит основной теоретический материал применительно к типовым  
расчетным схемам и примеры практической реализации теоретических поло-  
жений. Составлены контрольные задания, позволяющие студентам приобрести  
навыки первых самостоятельных расчетов на прочность и жесткость.

Пособие изложено в соответствии с существующими стандартами и ре-  
комендациями по направлениям «Наземные транспортные системы» и «Экс-  
плуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Предназначено для студентов дневной, очно-заочной, заочной и дистан-  
ционной форм обучения.

Ил. 188. Табл. 22. Библиогр.: 5 назв.

ISBN 978-5-9948-1434-5

© Волгоградский государственный  
технический университет, 2014

© А. Н. Савкин, В. И. Водопьянов,  
О. В. Кондратьев, 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	6
1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КУРСА . . . . .	7
1.1. Общие определения . . . . .	7
1.2. Гипотезы и допущения, принятые в сопротивлении материалов . . . . .	8
1.3. Типы схематизаций, используемые в сопротивлении материалов . . . . .	10
1.4. Внутренние усилия. Метод сечений . . . . .	15
1.5. Понятие о напряжениях. . . . .	17
1.6. Виды деформаций и деформирования . . . . .	18
2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ . . . . .	19
2.1. Внутренние усилия, напряжения, деформации . . . . .	19
2.2. Связь напряжений и деформаций . . . . .	20
2.3. Механические характеристики конструкционных материалов . . . . .	20
2.4. Расчеты на прочность при растяжении . . . . .	23
2.5. Расчеты на жесткость при растяжении . . . . .	26
3. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ . . . . .	33
3.1. Понятие о напряженном состоянии . . . . .	33
3.2. Линейное напряженное состояние . . . . .	35
3.3. Плоское напряженное состояние . . . . .	37
3.4. Свойства нормальных и касательных напряжений . . . . .	37
3.5. Графическое определение напряжений на наклонных площадках. Круг Мора . . . . .	38
3.6. Графическое определение главных напряжений . . . . .	39
3.7. Объемное напряженное состояние . . . . .	44
3.8. Деформированное состояние . . . . .	43
3.9. Обобщенный закон Гука для изотропного тела . . . . .	44
3.10. Изменение объема тела . . . . .	45
3.11. Примеры различных видов напряженного состояния . . . . .	46
3.12. Понятия о теориях прочности . . . . .	48
4. СДВИГ, СМЯТИЕ . . . . .	55
5. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ . . . . .	61
5.1. Внутренние усилия при кручении . . . . .	61
5.2. Напряжения при кручении . . . . .	62
5.3. Расчет на прочность при кручении . . . . .	64
5.4. Деформация вала при кручении . . . . .	64
5.5. Расчет валов на жесткость . . . . .	65

5.6.	Понятие о кручении валов некруглого поперечного сечения . . . . .	69
6.	ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ . . . . .	72
6.1.	Статический момент площади сечения . . . . .	72
6.2.	Момент инерции сечения . . . . .	74
6.3.	Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей . . . . .	76
6.4.	Изменение моментов инерции при повороте осей . . . . .	78
6.5.	Главные оси инерции и главные моменты инерции . . . . .	79
6.6.	Радиус инерции . . . . .	81
6.7.	Момент сопротивления . . . . .	81
6.8.	Понятие об экономичности сечения . . . . .	82
7.	ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ . . . . .	86
7.1.	Внутренние усилия при изгибе . . . . .	88
7.2.	Дифференциальные зависимости при изгибе . . . . .	90
7.3.	Правила проверки построения эпюр $Q$ и $M$ . . . . .	91
7.4.	Нормальные напряжения при изгибе . . . . .	92
7.5.	Расчеты на прочность при изгибе по нормальным напряжениям . . . . .	95
7.6.	Поперечный изгиб. Касательные напряжения при изгибе . . . . .	96
8.	СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ . . . . .	102
8.1.	Косой изгиб . . . . .	102
8.2.	Изгиб с растяжением . . . . .	109
8.3.	Изгиб с кручением . . . . .	116
9.	ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА УПРУГИХ СИСТЕМ . . . . .	120
9.1.	Работа внешних сил. Потенциальная энергия деформации . . . . .	120
9.2.	Обобщенные силы и обобщенные перемещения . . . . .	121
9.3.	Метод Максвелла-Мора . . . . .	123
9.4.	Понятие об определении перемещений в брус с криволинейной геометрической осью . . . . .	129
9.5.	Статически неопределимые системы . . . . .	129
9.6.	Замечание об использовании симметрии конструкции . . . . .	137

10.	ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ СИЛ . . . . .	143
10.1.	Равноускоренное движение тела. Динамический коэффициент . . . . .	143
10.2.	Ударное действие нагрузки . . . . .	144
10.3.	Прочность при переменных нагрузках . . . . .	146
11.	ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ . . . . .	153
11.1.	Формула Эйлера . . . . .	153
11.2.	Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы . . . . .	155
11.3.	Критические напряжения при продольном изгибе . . . . .	155
11.4.	Область применимости формулы Эйлера . . . . .	156
11.5.	Практический расчет сжатых стержней . . . . .	157
12.	ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ . . . . .	164
12.1.	Рекомендации к выполнению контрольных работ . . . . .	164
12.2.	Условия задач к контрольным работам . . . . .	166
	Контрольная работа № 1 . . . . .	166
	Контрольная работа № 2 . . . . .	173
	ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Примеры решения задач . . . . .	178
	ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Справочные данные . . . . .	207

## ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – практически первая учебная дисциплина общеинженерной подготовки, с которой сталкивается студент. Это наука о прочности и жесткости элементов и деталей конструкций, которая ставит задачу разработать простые, удобные для практического применения методы расчетов типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций.

Сопротивление материалов относится к фундаментальным дисциплинам общеинженерной подготовки специалистов с высшим техническим образованием. Без фундаментального знания *сопротивления материалов* немисливо создание различного рода машин и механизмов, гражданских и промышленных сооружений, мостов, линий электропередач и антенн, ангаров, кораблей, самолетов и вертолетов, турбомашин и электрических машин, агрегатов атомной энергетики, ракетной и реактивной техники и др.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на изучение общетехнических дисциплин, и в то же время необходимости формирования у будущих инженеров базового объема знаний о прочности и надежности создаваемых и находящихся в эксплуатации изделий, важно иметь обеспечение студентов пособиями, небольшими по объему, но охватывающими основные разделы знаний в соответствии с задачами формирования у студентов необходимой подготовки по прочности и надежности конструкций.

Настоящее пособие предназначено преимущественно для студентов, обучающихся по безотрывной форме обучения для немеханических специальностей, включающей в себя курс сопротивления материалов по сокращенной программе или входящей в состав курса «Прикладная механика». Пособие содержит основной материал по изучаемой дисциплине.

В основные разделы курса включены примеры, позволяющие от задач простейших переходить к более сложным параллельно с изучением теоретического материала. Приложением к изучаемому материалу предлагаются контрольные работы с методическими указаниями по их выполнению. В зависимости от специальности преподаватель может варьировать объем контрольных заданий.

**Примечание.** В рамку заключены формулы, которые важно помнить.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КУРСА

## 1.1. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Сопротивление материалов** – раздел более общей науки – механики деформируемого твердого тела, в котором излагаются основы и методы инженерных расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость, устойчивость и выносливость при одновременном удовлетворении требований надежности, экономичности и долговечности. Кроме сопротивления материалов в механику деформируемого твердого тела входят: теория упругости, теория пластичности и ползучести, теория сооружений, строительная механика, механика разрушения и др.

**Прочность** – способность материала (образца, детали, элемента конструкции...) не разрушаясь сопротивляться действию внешних сил. Часто под **прочностью** понимают способность сопротивляться развитию пластических деформаций под действием внешних сил. Целью расчета на прочность является определение размеров деталей или величины внешних нагрузок, при которых исключается возможность разрушения элемента конструкции.

**Жесткость** – способность конструктивных элементов деформироваться без существенного изменения геометрических размеров. Целью расчета на жесткость является определение нагрузок и размеров деталей, при которых исключается возможность появления недопустимых с точки зрения нормальной работы конструкции деформаций.

**Устойчивость** – способность конструктивного элемента сохранять под нагрузкой первоначальную форму равновесия. При потере устойчивости возникает **продольный изгиб** – изгиб первоначально прямолинейного стержня под действием центрально приложенных продольных сжимающих сил.

**Выносливость** или **циклическая прочность** – способность материала противостоять усталости.

**Усталость** – процесс постепенного накопления повреждений под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению.

**Надежность** – свойство объекта сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или некоторой наработки.

**Долговечность** – свойство элемента или системы длительно сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при определенных условиях эксплуатации.

В теоретической части сопротивление материалов базируется на математике и теоретической механике, в экспериментальной части – на

физике и материаловедении и применяется при проектировании машин, приборов и конструкций. Обе части, относящиеся к этой науке, имеют одинаково большое значение. Практически все специальные дисциплины подготовки инженеров по разным специальностям содержат разделы курса сопротивления материалов, так как создание работоспособной новой техники невозможно без анализа и оценки ее прочности, жесткости и надежности.

Задачей сопротивления материалов, как одного из разделов механики сплошной среды, является определение деформаций и напряжений в твердом упругом теле, которое подвергается силовому или тепловому воздействию. Сопротивление материалов базируется на ряде гипотез геометрического или физического характера. Такой метод позволяет получить, хотя и не во всех случаях, вполне точные, но достаточно простые формулы для вычисления напряжений.

## 1.2. ГИПОТЕЗЫ И ДОПУЩЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

**1. Гипотеза сплошности и однородности** — материал представляет собой однородную сплошную среду; свойства материала во всех точках тела одинаковы и не зависят от размеров тела. Атомистическая теория дискретного строения вещества во внимание не принимается. Гипотеза позволяет не учитывать особенности кристаллической структуры металла, разный химический состав и прочностные свойства связующего и наполнителей в пластмассах, бетонах (щебень, песок, цемент), наличие сучков в древесине.

**2. Гипотеза об изотропности материала** – физико-механические свойства материала одинаковы по всем направлениям. В некоторых случаях предположение об изотропии неприемлемо, материал является анизотропным. Так, анизотропными являются древесина, свойства которой вдоль и поперек волокон различны, а также армированные (композиционные) материалы.

**3. Гипотеза об идеальной упругости материала** – тело способно восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших его деформацию.

**4. Гипотеза о совершенной упругости материала** – перемещения точек конструкции в упругой стадии работы материала прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения (справедлив закон Гука). В действительности реальные тела можно считать упругими только до определенных величин нагрузок, и это необходимо учитывать, применяя формулы сопротивления материалов.

**5. Гипотеза Бернулли о плоских сечениях** – поперечные сечения, плоские и нормальные к оси стержня до приложения к нему

нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси в деформированном состоянии; при изгибе сечения поворачиваются не искривляясь.

**6. Принцип Сен-Венана** – в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, деформация тела не зависит от конкретного способа нагружения и определяется только статическим эквивалентом нагрузки. Резко выраженная неравномерность распределения напряжений по сечению 2-2, показанная на рис. 1.1, постепенно выравнивается (сечение 3-3) и на удалении, равном ширине сечения (сечения 4-4 и 5-5), исчезает.

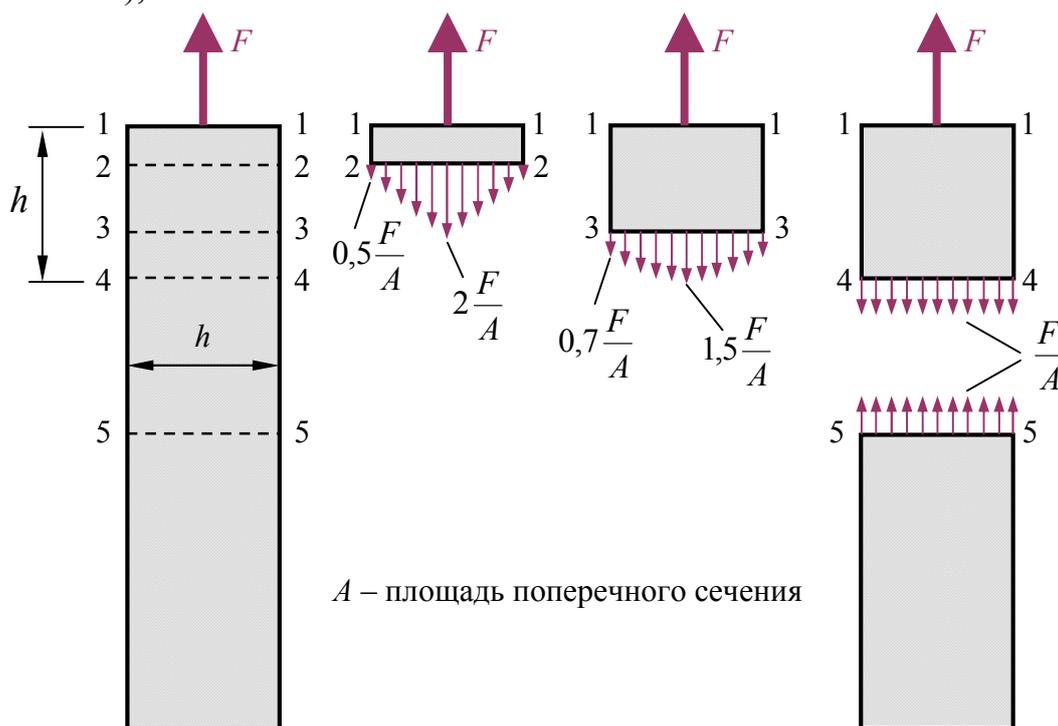


Рис. 1.1

**7. Принцип Д’Аламбера** – если к активным силам, действующим на точки механической системы, и реакциям наложенных связей присоединить силы инерции, то получится уравновешенная система сил. Принцип используется в расчетах на прочность при динамическом действии сил.

**8. Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции)** – результат воздействия нескольких внешних факторов равен сумме результатов воздействия каждого из них, прикладываемого в отдельности, и не зависит от последовательности их приложения. Это же справедливо и в отношении деформаций.

**9. Принцип начальных размеров (гипотеза о малости деформаций)** – деформации в точках тела настолько малы по сравнению с размерами деформируемого тела, что не оказывают существенного влияния на взаимное расположение нагрузок, приложенных к телу. Допущение применяют при составлении условий статики, считая тело абсолютно твердым.

**10. Допущение об отсутствии начальных внутренних усилий в теле до приложения нагрузки.** Почти во всех реальных деталях и элементах конструкций указанное допущение полностью не выполняется. Внутренние напряжения возникают в деревянных конструкциях вследствие неравномерного высыхания; в стальных и чугунных отливках – вследствие неравномерного охлаждения; в стальных деталях – вследствие термической (закалка...) и механической (шлифование...) обработок. Формирование колесных пар для железнодорожных вагонов осуществляют путем запрессовки колес на ось. За счет натяга создаются напряжения в ступице колеса и подступичной части оси.

**Замечание о точности расчетов и округлении результатов.**

С учетом изложенных гипотез и допущений, а также разбросов результатов экспериментов по определению механических свойств, точность инженерных расчетов не превышает 3–5 %. В некоторых случаях погрешность 10–15 % считают приемлемой. На практике, если нет специальных указаний, результат округляют до трех значащих цифр. Например, результат **568 234** следует округлить до **568 000**, а результат **0,00237648** – до **0,00238** или  $2,38 \cdot 10^{-3}$ .

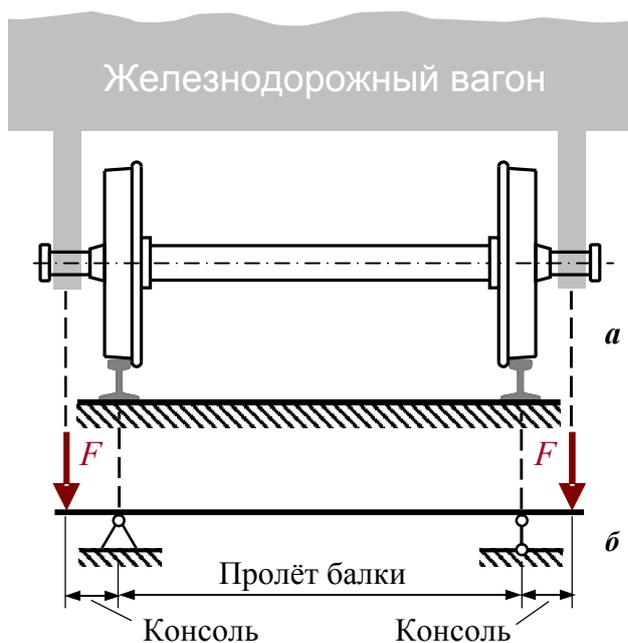


Рис. 1.2

**1.3. ТИПЫ СХЕМАТИЗАЦИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ**

*Реальный объект – исследуемый элемент конструкции, взятый с учетом всех своих особенностей: геометрических, физических, механических и других.*

Расчет реального объекта является или теоретически невозможным, или практически неприемлемым по своей сложности. Поэтому в сопротивлении материалов используют расчетные схемы, в которых применяют упрощения, облегчающие расчет.

**Расчетная схема** – идеализированная схема, отражающая наиболее существенные особенности реального объекта, определяющие его поведение под нагрузкой. Для реальной конструкции – колесной пары (рис. 1.2, а) один из вариантов расчетной схемы приведен на рис. 1.2, б. В зависимости от постановки задачи и требуемой точности ее решения для одной и той же

конструкции может быть предложено несколько расчетных схем. Так же и одна расчетная схема может соответствовать различным конструкциям.

Основная цель сопротивления материалов – создать практически приемлемые простые приемы (методики) расчета типовых наиболее часто встречающихся элементов конструкций. Необходимость перехода от реального объекта к расчетной схеме (с целью упрощения расчетов) заставляет вводить схематизацию понятий. Выделяют следующие типы схематизации:

*физическая схематизация;*

*геометрическая схематизация;*

*силовая схематизация.*

### **Физическая схематизация (модель материала)**

Все изучаемые тела считают выполненными (изготовленными) из материалов, наделенными идеализированными свойствами. Материал элементов конструкций считают *сплошным, однородным, изотропным и линейно упругим* (см. выше гипотезы 1, 2, 3, 4).

### **Геометрическая схематизация (модель формы)**

Виды конструктивных элементов, встречающихся в сооружениях и машинах, при всем их разнообразии, можно свести к четырем основным категориям.

**Массивное тело** – тело, у которого все три размера величины одного порядка (рис. 1.3). Это – фундаменты сооружений, подпорные стенки, станины станков и т. п.

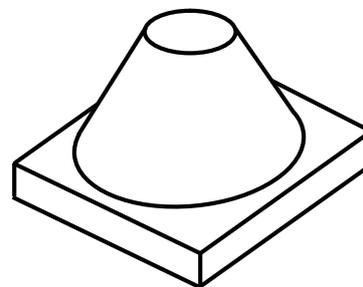


Рис. 1.3

**Брус** – тело, одно из измерений которого, значительно больше двух других.

Примеры брусьев различной формы приведены на рис. 1.4. Брусья с прямолинейной осью постоянного сечения (*а*), переменного сечения (*б*), ступенчатый (*в*), тонкостенный (толщина стенок значительно меньше габаритных размеров сечения) стержень (*г*), с криволинейными осями (*д*), (*е*), (*ж*).

**Оболочка** – тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии одна от другой (рис. 1.5).

Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих поверхностей оболочки, называют *срединной поверхностью*. По форме срединной поверхности различают оболочки цилиндрические, конические, сферические и др. К оболочкам относятся тонкостенные резервуары, котлы, купола зданий, обшивки фюзеляжей, крыльев (и других частей летательных аппаратов), корпуса судов и т. п.

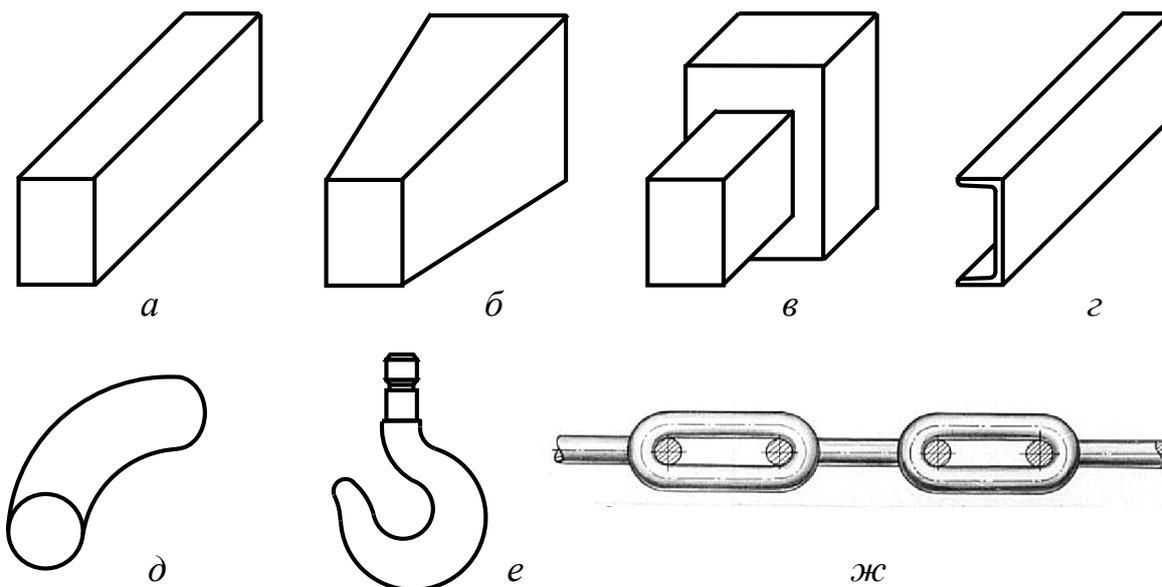


Рис. 1.4

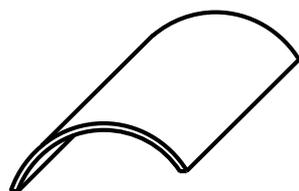


Рис. 1.5

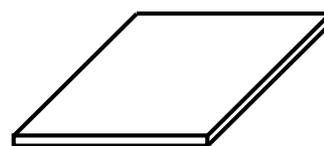


Рис. 1.6

**Пластина** – тело, ограниченное двумя параллельными поверхностями (рис. 1.6). Пластины могут быть круглыми, прямоугольными и иметь другие очертания. Толщина пластин, как и оболочек, может быть постоянной или переменной. Пластинами являются плоские днища и крышки резервуаров, перекрытия инженерных сооружений, диски турбомашин и т. п.

Тела, имеющие эти основные формы, и являются объектами расчета на прочность, жесткость и устойчивость. В настоящем учебном пособии рассматриваются разделы, связанные с расчетом брусьев с прямолинейной геометрической осью.

### Схематизация опор

Схемы реальных опорных устройств можно свести к трем типам.

**Шарнирно-подвижная опора** балки (рис. 1.7, а) препятствует только вертикальному перемещению конца балки, но ни горизонтальному перемещению, ни повороту. Такая опора при любой нагрузке дает одну реакцию.

**Шарнирно-неподвижная опора** (рис. 1.7, б) препятствует вертикальному и горизонтальному перемещениям конца балки, но не препятствует повороту сечения. Дает две реакции: вертикальную и горизонтальную.

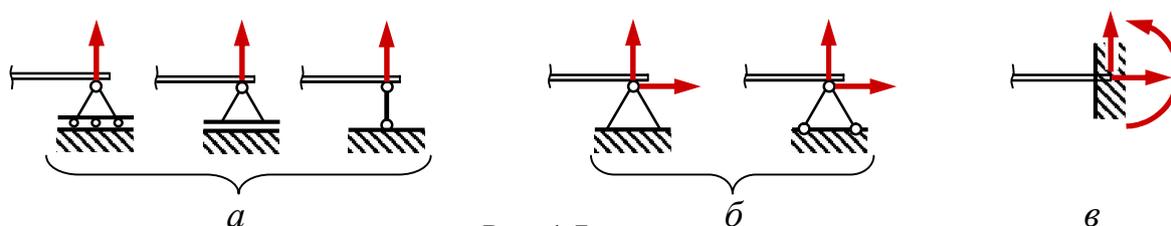


Рис. 1.7

**Заделка (защемление)** (рис. 1.7, в). Опора препятствует вертикальному и горизонтальному перемещениям конца балки, а также повороту сечения. Дает три реакции: вертикальную и горизонтальную силы и пару сил.

### Силовая схематизация (модель нагружения)

В нагруженном теле, находящемся в равновесии, **внешние нагрузки** стремятся вызвать деформацию тела, а **внутренние усилия** стремятся сохранить тело как единое целое.

**Внешние нагрузки** – силы взаимодействия между рассматриваемым элементом конструкции и другими телами, связанными с ним.

Классификация внешних нагрузок производится по трем признакам: способу приложения, продолжительности действия, характеру изменения.

**По способу приложения:** сосредоточенные, распределенные.

**Сосредоточенными** (рис. 1.8, а) называют силы, приложенные к площадкам, размеры которых малы по сравнению с размерами объекта, например, давление обода колеса на рельс. Размерность Н, кгс (ньютон, килограмм силы).

**Распределенными по площади (поверхностными)** (рис. 1.8, б) называют силы, приложенные к площадкам контакта, например, давление жидкости или газа на стенки сосуда, снеговая нагрузка на кровлю здания. Давление выражается в единицах силы, отнесенных к единице площади,  $\text{Н/м}^2$ ,  $\text{кгс/см}^2$ . Производная единица Паскаль:  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ .

**Распределенные по длине** (рис. 1.9, а) равномерно или по заданному закону (треугольному, параболическому...). Размерность  $\text{Н/м}$ ,  $\text{кгс/м}$ .

**Объемные силы** (рис. 1.9, б) непрерывно распределены по объему, занимаемому элементом, например, сила тяжести, сила инерции. Характеризуются интенсивностью, то есть отношением единицы силы к единице объема,  $\text{Н/м}^3$ ,  $\text{гс/см}^3$ .

**По продолжительности действия:** постоянные и временные.

**Постоянные** действуют в течение всего времени существования конструкции, например, нагрузка на фундамент здания.

**Временные** действуют на протяжении отдельных периодов эксплуатации объекта, например, давление газа в баллоне.

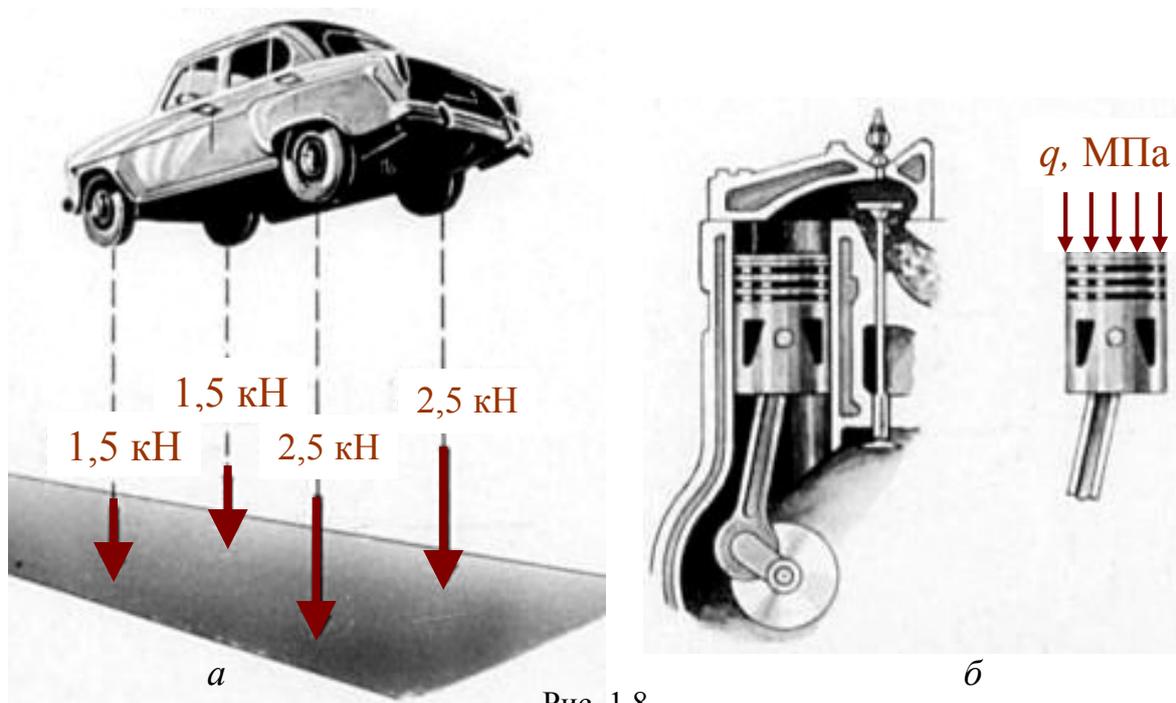


Рис. 1.8

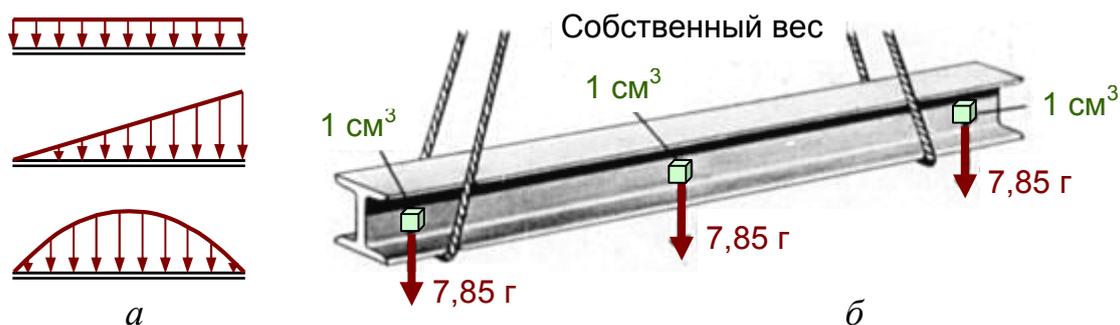


Рис. 1.9

### По характеру изменения в процессе приложения

**Статические** – *постоянные* (нагрузка от собственного веса), *или медленно изменяющиеся так, что силами инерции вследствие ускорения можно пренебречь* (изменение давления от снеговой нагрузки).

**Динамические** – *вызывающие в конструкции или отдельных ее элементах большие ускорения, которыми пренебречь нельзя*. Величина этой нагрузки значительно изменяется за малые промежутки времени, например, ударная.

**Повторно-переменные** – *изменяющиеся по некоторому закону*. Примеры: изменение натяжения ветви ремня (или цепи) в зависимости от ее положения в текущий момент времени – сбегающая или набегающая ветвь на ведущий шкив (звездочку). Изменение натяжения спицы велосипедного колеса в зависимости от ее положения (верхнее или нижнее в данный момент вращения колеса).

## 1.4. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Величиной внутренних усилий определяется степень деформации элемента конструкции и возможность разрушения в том или ином опасном сечении элемента конструкции.

**Внутренние усилия** – силы взаимодействия между частицами тела (кристаллами, молекулами, атомами), возникающие внутри элемента конструкции, как противодействие внешним нагрузкам.

Для выявления внутренних усилий пользуются **методом сечений**.

1. **Рассечь** нагруженное тело плоскостью **P** на две части (рис. 1.10, а).

2. **Отбросить** одну из частей (рис. 1.10, б). Реальное тело представляет собой конгломерат различных ориентированных зерен, от граней которых в разных направлениях действуют элементарные внутренние усилия.

3. **Заменить** действие отброшенной части внутренними усилиями. При этом используется аппарат теоретической механики: определение равнодействующей системы сходящихся сил, параллельных сил, перенос сил в заданную точку – центр тяжести сечения 0 (рис. 1.10, в). Полученные в результате приведения главный вектор  $\bar{R}$  и главный момент  $\bar{M}$  спроецировать на главные оси инерции  $z, y$  и геометрическую ось  $x$ .

4. **Уравнения равновесия** позволяют определить внутренние усилия. Всего их шесть: **три силы** – проекции главного вектора  $R$  (рис. 1.10, г):

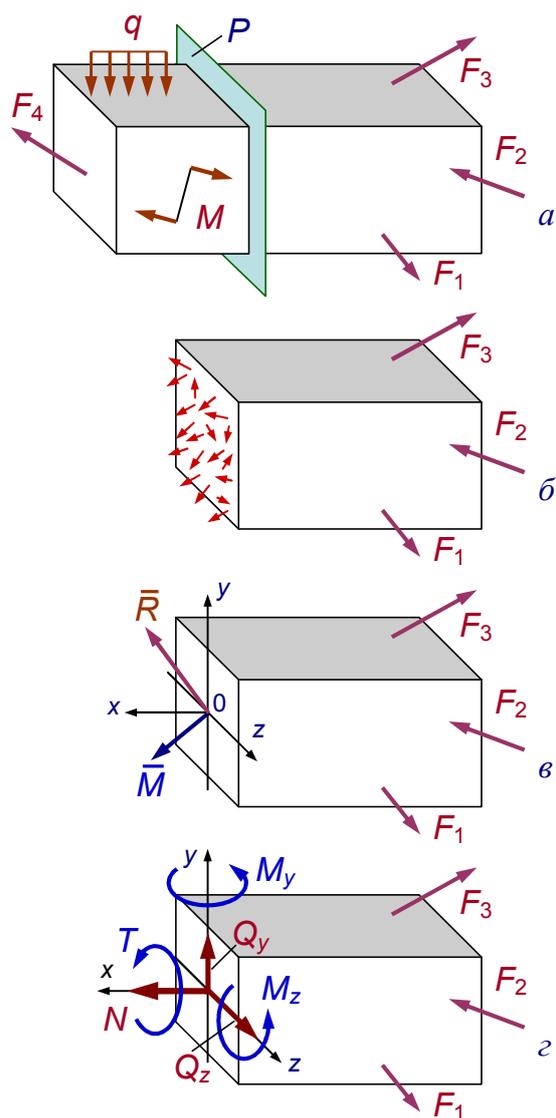


Рис. 1.10

$\Sigma X = 0; \quad N = \dots$  Продольное усилие от англ. *normal*

$\Sigma Y = 0; \quad Q_y = \dots$  Поперечное усилие

$\Sigma Z = 0; \quad Q_z = \dots$  Поперечное усилие

от нем. *querlaufend*

и **три момента** – проекции главного момента  $M$ :

$\Sigma M_x = 0$ ;  $T = \dots$  Крутящий момент от англ. *torsional, torque*

$\Sigma M_y = 0$ ;  $M_y = \dots$  Изгибающий момент от англ. *moment*

$\Sigma M_z = 0$ ;  $M_z = \dots$  Изгибающий момент

Таким образом, можно сформулировать **правило определения внутренних силовых факторов**: *внутренние силы  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  численно равны алгебраической сумме проекций всех внешних сил (в том числе и реакций), приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения. Аналогично: внутренние моменты  $T$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  численно равны алгебраической сумме моментов от внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения. Какую именно сторону, правую или левую, верхнюю или нижнюю следует рассматривать, зависит от схемы нагружения. Предпочтение следует отдавать более простому варианту.*

Принимая во внимание важность описанных выше процедур, запишем кратко последовательность основных этапов метода сечения:

**Р** – *рассечь тело на две части плоскостью;*

**О** – *отбросить одну из частей тела;*

**З** – *заменить действие отброшенной части внутренними усилиями;*

**У** – *уравнения равновесия составить.*

Единица измерения усилий – **ньютон** (обозначение: Н). Это производная единица. Исходя из второго закона Ньютона ( $F = m \cdot a$ ) она определяется как сила, изменяющая за 1 с скорость тела массой 1 кг на 1 м/с в направлении действия силы. Таким образом,  $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ . Измерять силу в ньютонах стали спустя два века после смерти великого ученого, когда была принята система СИ.  $1 \text{ Н} = 0,10197162 \text{ кгс}$ ;  $1 \text{ кгс} = 9,80665 \text{ Н}$ .

Каждая компонента внутренних усилий характеризует сопротивление тела какому-либо одному виду деформации – простому сопротивлению. Например, при  $N \neq 0$ , будет растяжение или сжатие. При  $Q \neq 0$  имеет место сдвиг, при  $T \neq 0$  – кручение, а при  $M \neq 0$  – изгиб. При наличии двух и более компонентов будет сложное сопротивление тела.

## 1.5. ПОНЯТИЕ О НАПРЯЖЕНИЯХ

**Напряжение в точке по сечению** – внутренняя сила взаимодействия, приходящаяся на единицу площади у этой точки.

**Напряжение** – величина, характеризующая интенсивность внутренних усилий в точке.

Рассмотренные ранее усилия  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $T$  являются интегральным эквивалентом внутренних сил, распределенных по площади сечения. Эти силы характеризуются их интенсивностью (рис. 1.11)

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}; \quad \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}; \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

**Напряжение нормальное  $\sigma$**  – перпендикулярное к сечению, характеризует интенсивность сил отрыва или сжатия частиц элементов конструкции.

**Напряжение касательное  $\tau$**  – действующее в плоскости сечения, характеризует интенсивность сил, сдвигающих эти части в плоскости сечения.

$$\text{Напряжение полное } p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Суммируя элементарные усилия  $\sigma \cdot dA$ ,  $\tau_y \cdot dA$ ,  $\tau_z \cdot dA$  (рис. 1.12), распределенные по сечению, и их моменты относительно координатных осей, получим:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma \cdot dA; & T &= \int_A (\tau_y z - \tau_z y) dA; \\ Q_y &= \int_A \tau_y \cdot dA; & M_y &= \int_A \sigma \cdot z \cdot dA; \\ Q_z &= \int_A \tau_z \cdot dA; & M_z &= \int_A \sigma \cdot y \cdot dA. \end{aligned}$$

Единица измерения давления и механического напряжения **паскаль** (обозначение Па). Паскаль – давление, вызываемое силой 1 Н, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 м<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned} 1 \text{ Па} &= 1 \text{ Н/м}^2; & 1 \text{ МПа} &= 0,102 \text{ кгс/мм}^2; & 1 \text{ МПа} &= 10,2 \text{ кгс/см}^2; \\ 1 \text{ МПа} &= 1 \text{ Н/мм}^2; & 1 \text{ кгс/мм}^2 &= 9,81 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

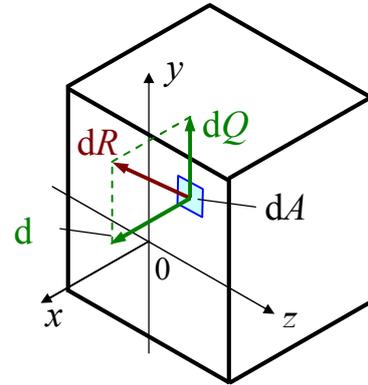


Рис. 1.11

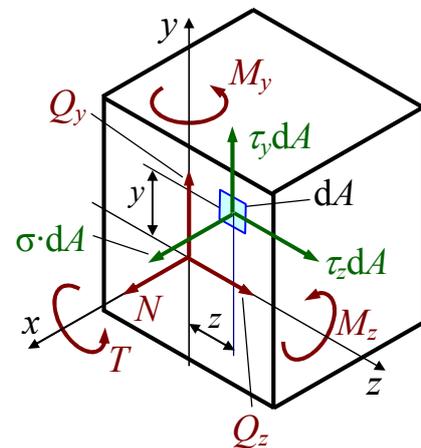


Рис. 1.12

## 1.6. ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ И ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Реальные тела не являются абсолютно твердыми и под действием приложенных сил могут изменять свое положение в пространстве.

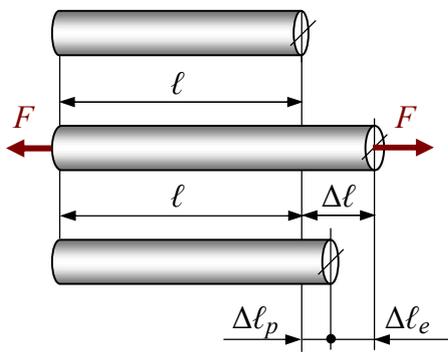


Рис. 1.13

**Перемещение** – изменение положения в пространстве точки или поперечного сечения.

**Деформация** – изменение формы и размеров тела под действием приложенных сил (рис. 1.13).

**Деформация упругая  $\Delta l_e$**  – исчезающая после снятия нагрузки (от англ. *elastic*).

**Деформация пластическая  $\Delta l_p$**  – остающаяся после снятия нагрузки (от англ. *plastic*).

**Деформация абсолютная** (полная) –  $\Delta l = \Delta l_e + \Delta l_p$ .

**Деформация относительная  $\varepsilon = \Delta l / l$ .**

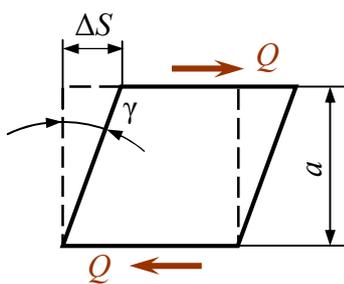


Рис.1.14

$\Delta S$  – абсолютный сдвиг (рис. 1.14).

$\gamma$  – относительный сдвиг, угловая деформация, угол сдвига  $\gamma \approx \text{tg } \gamma = \frac{\Delta S}{a}$ .

**Растяжение (сжатие)** – вид сопротивления (деформирования), при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно – продольное усилие  $N$ . **Стержень** – брус, работающий на растяжение или сжатие.

**Сдвиг** – вид сопротивления (деформирования), характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями. Внутреннее усилие одно – поперечная сила  $Q$ .

**Кручение** – вид сопротивления (деформирования), при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно – крутящий момент  $T$ . Кручение возникает при действии на брус внешних сил, образующих момент относительно его продольной оси. **Вал** – брус, работающий на кручение. **Вал** – вращающаяся (обычно в подшипниках) деталь машины, передающая крутящий момент.

**Изгиб** – вид сопротивления (деформирования), при котором происходит искривление оси прямого бруса, или изменение кривизны кривого бруса.

## 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

### 2.1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ, НАПРЯЖЕНИЯ, ДЕФОРМАЦИИ

**Растяжение (сжатие)** – вид деформации, при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно – продольное усилие  $N$ . Растяжение возникает, если противоположно направленные силы приложены вдоль оси стержня. Растягивающие продольные силы принято считать **положительными**, а сжимающие – **отрицательными**.

**Стержень** – брус, работающий на растяжение или сжатие. Для определения опасного участка строят эпюры внутренних усилий и напряжений.

**Эпюра** – график, изображающий закон изменения внутренних усилий или напряжений по длине бруса, а также напряжений по поперечному сечению бруса.

**Деформация** – изменение формы и размеров тела под действием приложенных сил.

**Деформация упругая**  $\Delta l_e$  – исчезающая после снятия нагрузки (от англ. *elastic*).

**Деформация пластическая**  $\Delta l_p$  – остающаяся после снятия нагрузки (от англ. *plastic*).

**Деформация абсолютная (полная)**  $\Delta l = \Delta l_e + \Delta l_p$  (рис. 2.1).

**Деформация относительная**  $\varepsilon = \Delta l / l$ .

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l};$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a} = \frac{a_1 - a}{a} \quad (< 0);$$

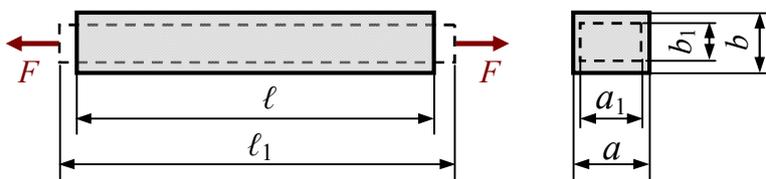
$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b_1 - b}{b} \quad (< 0).$$


Рис. 2.1

При растяжении стержня происходит увеличение его длины и уменьшение поперечных размеров (рис. 2.1).

**Коэффициент поперечной деформации** (коэффициент Пуассона) – абсолютная величина отношения поперечной относительной деформации к продольной (упругая постоянная материала)

$$\mu = \frac{|\varepsilon_1|}{\varepsilon} = \frac{|\varepsilon_2|}{\varepsilon}. \quad (2.1)$$

$\mu \approx 0$  – кора пробкового дерева, **min**;

$\mu \approx 0,28$  – стали;

$\mu \approx 0,5$  – каучук, парафин, **max**.

## 2.2. СВЯЗЬ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

На основании гипотезы Бернулли (плоских сечений) и принципа Сен-Венана (о равномерном распределении напряжений по сечению) (см. подразд. 1.2) внутренние усилия:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA; \quad N = \sigma \int_A dA; \quad N = \sigma \cdot A,$$

откуда

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.2)$$

**Закон Гука** – нормальное напряжение  $\sigma$  прямо пропорционально относительной линейной деформации  $\varepsilon$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (2.3)$$

Подставив  $\sigma = N/A$  и  $\varepsilon = \Delta l/l$ , получим иную форму записи закона Гука:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (2.4)$$

Здесь  $E$  – модуль нормальной упругости, модуль упругости первого рода, модуль Юнга – константа материала.

$E = 200$  ГПа – стали;

$E = 110$  ГПа – титановые сплавы;

$E = 100$  ГПа – медные сплавы;

$E = 70$  ГПа – алюминиевые сплавы.

**Произведение  $E \cdot A$**  – жесткость сечения при растяжении.

**Упругость** – свойство тела восстанавливать свою форму и размеры после снятия внешних нагрузок.

Модуль упругости характеризует сопротивление материала деформированию растяжением (сжатием) в упругой области.

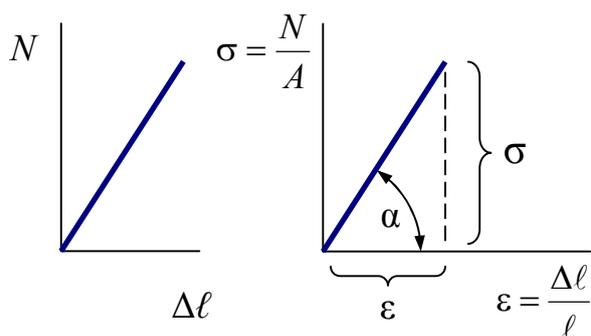


Рис. 2.2

**Геометрический смысл модуля упругости** – тангенс угла наклона начального участка диаграммы растяжения

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \sim \operatorname{tg} \alpha.$$

**Физический смысл модуля упругости** – напряжение, требующееся для удлинения

стержня вдвое:  $E = \sigma$  при  $\varepsilon = 1$ , то есть при  $\Delta l = l$ . Реально достижимые напряжения в упругой области деформирования примерно в тысячу раз меньше.

## 2.3. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Основные прочностные и деформационные характеристики материалов, используемых в элементах конструкций, определяют эксперименталь-

но. Проводят испытания лабораторных образцов на растяжение, сжатие, срез, кручение, изгиб при статическом и циклическом нагружении, на воздухе и в агрессивных средах, при комнатной, высоких и низких температурах. Наиболее распространенным является испытание на растяжение статической нагрузкой, позволяющей определить большинство механических характеристик материала.

*Машинная диаграмма – диаграмма растяжения стандартного образца в координатах  $F - \Delta l$ , автоматически записываемая диаграммным аппаратом испытательной машины.*

Стандартами предусмотрены образцы плоские и цилиндрические различной длины, размеров поперечного сечения и конструктивного исполнения. Судить лишь о **механических свойствах материала**, исключая особенности формы и размеров образца, позволяет диаграмма растяжения, представляемая в координатах  $\sigma - \varepsilon$ .

$$\sigma = \frac{F}{A_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.5)$$

Здесь  $\sigma$  – условное напряжение;  $\varepsilon$  – относительное удлинение,  $A_0$  – начальная площадь поперечного сечения образца;  $l_0$  – начальная расчетная длина образца.

Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали (рис. 2.3, а) имеет несколько характерных участков: 1 – участок упругих деформаций; 2 – площадка текучести; 3 – участок упрочнения; 4 – участок образования шейки и разрушения. Участок 3 характерен тем, что в его пределах все сечения образца деформируются (уменьшаются) одинаково, поэтому ему присвоено и другое название – участок равномерной деформации. После достижения максимальной нагрузки (и напряжения) в образце начинает появляться местное сужение – шейка. Это и есть начало участка 4. Четкой границы между участками 3 и 4 не наблюдается, тем не менее, разработаны методики для определения этой границы и вычисления относительного равномерного удлинения (2.8). Диаграммы растяжения большинства конструкционных металлов: легированных и углеродистых сталей в закаленном и нормализованном состоянии, цветных сплавов, полимеров и других материалов площадки текучести не имеют (рис. 2.3, б), участок упрочнения следует за участком упругой деформации.

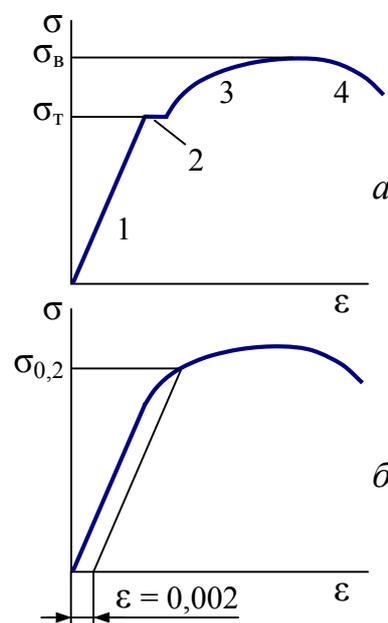


Рис. 2.3

По результатам испытаний определяют характеристики прочности и пластичности. Приведем некоторые из характеристик прочности.

**Предел текучести физический  $\sigma_T$**  – напряжение, при котором образец деформируется при практически постоянной нагрузке (рис. 2.3, а).

**Предел текучести условный  $\sigma_{0,2}$**  – напряжение, при котором остаточное удлинение достигает 0,2 % расчетной длины образца (рис. 2.3, б).

**Временное сопротивление (предел прочности)  $\sigma_B$**  – напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрыву образца

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}, \quad \sigma_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{A_0}, \quad \sigma_B = \frac{F_B}{A_0}. \quad (2.6)$$

Если в процессе растяжения измерять текущие размеры поперечного сечения образца и вычислять площадь, можно найти истинные напряжения  $S_i = F_i/A_i$  в текущий момент испытания и построить соответствующую диаграмму. Чаще находят единственное значение истинного напряжения в момент разрушения.

**Истинное сопротивление разрыву  $S_K$**  – напряжение, вычисляемое путем деления разрушающего усилия  $F_K$  на действительную площадь  $A_K$  сечения в шейке

$$S_K = \frac{F_K}{A_K}. \quad (2.7)$$

**Пластичность** – способность материала получать большие пластические деформации без разрушения. Мерами пластичности являются относительное равномерное удлинение, относительное остаточное удлинение и относительное сужение.

**Относительное равномерное удлинение  $\delta_p$**  – отношение приращения расчетной длины образца ( $l_p - l_0$ ) до образования шейки к начальной расчетной длине  $l_0$ , выраженное в процентах.

**Относительное удлинение после разрыва  $\delta_K$**  – отношение приращения расчетной длины образца ( $l_K - l_0$ ) после разрушения к начальной расчетной длине  $l_0$ , выраженное в процентах

$$\delta_p = \frac{l_p - l_0}{l_0} \cdot 100, \quad \delta_K = \frac{l_K - l_0}{l_0} \cdot 100. \quad (2.8)$$

**Относительное сужение после разрыва  $\psi$**  – отношение разности  $A_0$  и минимальной  $A_K$  площади поперечного сечения после разрушения к начальной площади поперечного сечения образца  $A_0$ , выраженное в процентах

$$\psi = \frac{A_0 - A_K}{A_0} \cdot 100. \quad (2.9)$$

**Хрупкость** – способность материала (обратная пластичности) разрушаться без заметных остаточных деформаций.

Чем пластичнее материал, тем больше относительное удлинение и относительное сужение после разрыва. Материалы условно подразделяют на пластичные ( $\delta_k > 5\%$ ) и хрупкие ( $\delta_k < 5\%$ ).

**Пример 2.1.** Цилиндрический образец из малоуглеродистой стали диаметром  $d_0 = 10$  мм и длиной  $\ell_0 = 50$  мм испытан на растяжение. Машинная диаграмма приведена на рис. 2.4. Диаметр шейки разрушенного образца  $d_k = 7,75$  мм. Определить основные характеристики прочности и пластичности.

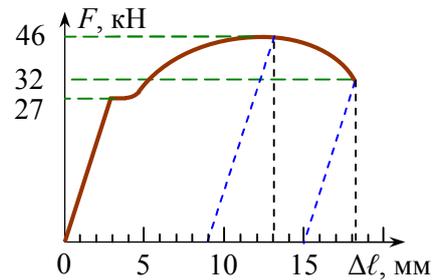


Рис. 2.4

**Решение.** Площади поперечных сечений образца до и после испытания

$$A_0 = \frac{\pi}{4} d_0^2 = \frac{\pi}{4} 10^2 = 78,5 \text{ мм}^2; \quad A_k = \frac{\pi}{4} d_k^2 = \frac{\pi}{4} 7,75^2 = 47,2 \text{ мм}^2.$$

Предел текучести  $\sigma_T = \frac{F_T}{A_0} = \frac{27000}{78,5} = 343 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 343 \text{ МПа}.$

Временное сопротивление  $\sigma_B = \frac{F_B}{A_0} = \frac{46000}{78,5} = 586 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 586 \text{ МПа}.$

Истинное сопротивление разрыву  $S_k = \frac{F_k}{A_k} = \frac{32000}{47,2} = 678 \text{ МПа}.$

Относительное равномерное удлинение ( $\Delta\ell_p = 9$  мм по диаграмме)

$$\delta_p = \frac{\ell_p - \ell_0}{\ell_0} \cdot 100 = \frac{9}{50} 100 = 18\%.$$

Относительное удлинение после разрыва ( $\Delta\ell_k = 15$  мм по диаграмме)

$$\delta_k = \frac{\ell_k - \ell_0}{\ell_0} \cdot 100 = \frac{15}{50} 100 = 30\%.$$

Относительное сужение после разрыва

$$\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} \cdot 100 = \frac{78,5 - 47,2}{78,5} 100 = 39,9\%.$$

## 2.4. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Основной задачей расчета конструкции на растяжение является обеспечение ее прочности в условиях эксплуатации.

**Условие прочности** – оценка прочности элемента конструкции, сводящаяся к сравнению расчетных напряжений с допускаемыми:

$$\sigma_p \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c \leq [\sigma_c] \quad (2.10)$$

где  $\sigma_p$  и  $\sigma_c$  – наибольшие расчетные растягивающие и сжимающие напряжения;

$[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$  – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии.

**Допускаемое напряжение** – наибольшее напряжение, которое можно допустить в элементе конструкции при условии его безопасной, долговечной и надежной работы:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}. \quad (2.11)$$

Здесь  $\sigma_{\text{пред}}$  – предельное напряжение (состояние), при котором конструкция перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям; им могут быть предел текучести, предел прочности, предел выносливости, предел ползучести и др.

Для конструкций из пластичных материалов при определении допускаемых напряжений используют **предел текучести**  $\sigma_T$  (рис. 2.5, а). Это связано с тем, что в случае его превышения деформации резко возрастают при незначительном увеличении нагрузки и конструкция перестает удовлетворять условиям эксплуатации. Допускаемое напряжение в этом случае определяют как

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]}. \quad (2.12)$$

Для хрупких материалов (чугун, бетон, керамика)

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{[n_B]}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{[n_B]}, \quad (2.13)$$

где  $\sigma_{\text{вр}}$  и  $\sigma_{\text{вс}}$  – пределы прочности при растяжении и сжатии (рис. 2.5, б).

Здесь  $[n]$  – нормативный коэффициент запаса прочности. В зависимости от той предельной характеристики, с которой сравнивают расчетное напряжение  $\sigma$ , различают  $[n_T]$  – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести  $\sigma_T$  и  $[n_B]$  – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности  $\sigma_B$ .

**Запас прочности** – отношение предельно допустимой теоретической нагрузки к той нагрузке, при которой возможна безопасная работа конструкции с учетом случайных перегрузок, непредвиденных дефектов и недостоверности исходных данных для теоретических расчетов.

Нормативные коэффициенты запаса прочности зависят:

- от класса конструкции (капитальная, временная),
- намечаемого срока эксплуатации,
- условий эксплуатации (радиация, коррозия, загнивание, ...),

- вида нагружения (статическое, циклическое, ударные нагрузки),
- неточности задания величины внешних нагрузок,
- неточности расчетных схем и приближенности методов расчета
- и других факторов.

Нормативный коэффициент запаса прочности не может быть единым на все случаи жизни. В каждой отрасли машиностроения сложились свои подходы, методы проектирования и приемы технологии. В изделиях общего машиностроения принимают  $[n_T] = 1,3 - 2,2$ ;  $[n_B] = 3 - 5$ . При выборе допускаемых напряжений также пользуются рекомендациями, изложенными в справочной литературе (см. Приложение 2).

Вероятность выхода из строя приблизительно можно оценить с помощью коэффициента запаса в условии прочности:

- $n = 1$  соответствует вероятности невыхода из строя 50 %;
- $n = 1,2$  соответствует вероятности невыхода из строя 90 %;
- $n = 1,5$  соответствует вероятности невыхода из строя 99 %;
- $n = 2$  соответствует вероятности невыхода из строя 99,9 %.

Для неответственных деталей  $n = 2$  много. Для ответственных – мало. Так для каната подъемного лифта это означает на 1000 подъемов одно падение.

При расчете конструкций на прочность встречаются три вида задач, которые вытекают из условия прочности при растяжении

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]; \quad (2.14)$$

**а) поверочный расчет** (проверка прочности). Известны усилие  $N$  и площадь  $A$ . Вычисляют  $\sigma = N/A$  и, сравнивая его с предельным  $\sigma_T$  или  $\sigma_B$  (для пластичного и хрупкого материалов соответственно), находят фактический коэффициент запаса прочности

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma}, \quad n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma},$$

который затем сопоставляют с нормативным  $[n]$ ;

**б) проектный расчет** (подбор сечения). Известны внутреннее усилие  $N$  и допускаемое напряжение  $[\sigma]$ . Определяют требуемую площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq [A] = \frac{N}{[\sigma]}; \quad (2.15)$$

в) **определение грузоподъемности** (несущей способности). Известны площадь  $A$  и допускаемое напряжение  $[\sigma]$ . Вычисляют внутреннее усилие

$$N \leq [N] = A \cdot [\sigma], \quad (2.16)$$

а затем в соответствии со схемой нагружения – величину внешней нагрузки  $F \leq [F]$ .

## 2.5. РАСЧЕТЫ НА ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Иногда наряду с условиями прочности добавляют ограничения на перемещение некоторых элементов конструкции, то есть вводят условие жесткости  $\delta_{\max} \leq [\delta]$ , где  $[\delta]$  – величина допускаемого перемещения (изменение положения в пространстве) некоторого контролируемого сечения. Деформацию растягиваемого или сжимаемого элемента вычисляют по формуле (2.4) закона Гука.

**Пример 2.2.** Выполнить проверочный и проектный расчеты ступенчатого бруса, к которому приложены силы  $F_1 = 45$  кН,  $F_2 = 80$  кН и  $F_3 = 30$  кН.

Площади поперечных сечений участков:  $A_1 = 5,4$  см<sup>2</sup>,  $A_2 = 2,7$  см<sup>2</sup> и  $A_3 = 3,1$  см<sup>2</sup>, а их длины соответственно равны  $a = 0,3$  м,  $b = 0,2$  м и  $c = 0,4$  м. Материал бруса – сталь с пределом текучести  $\sigma_T = 250$  МПа и модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. По результатам проектного расчета построить эпюру перемещений сечений.

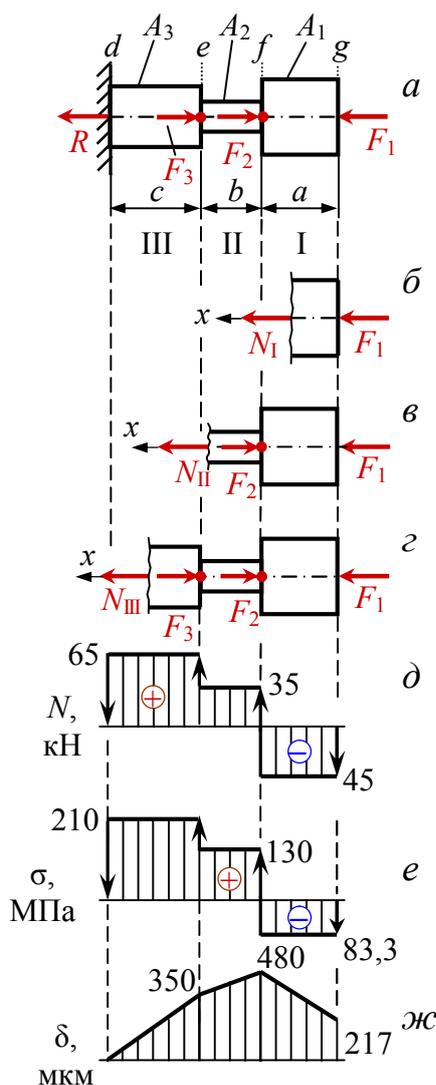


Рис. 2.6

**Решение.** Разбиваем брус на участки.

Границей участка считают: а) точку приложения силового фактора; б) изменение размеров или формы поперечного сечения; в) изменение материала бруса. Брус одним концом зашпелен, и в опоре возникает реакция  $R$  (рис. 2.6, а). Для нахождения внутренних усилий при подходе слева направо, придется определять опорную реакцию  $R$ . Указанную процедуру можно избежать при подходе справа налево, то есть со свободного конца.

## 1. Поверочный расчет

**А. Определение внутренних усилий.** Применяем методом сечений.

**Р**ассечь брус на две части в произвольном сечении участка I.

**О**тбросить одну из частей (левую, вместе с заделкой).

**З**аменить действие отброшенной части внутренним усилием  $N_I$ . Внутреннее усилие **всегда** принимаем **положительным, растягивающим**; его вектор направлен от сечения (рис. 2.6, б).

**У**равнение равновесия составляем, проецируя все силы на продольную ось  $x$  бруса,

$$\sum X = 0; N_I + F_1 = 0; \Rightarrow N_I = -F_1 = -45 \text{ кН}.$$

Знак минус указывает на то, что усилие является сжимающим.

Аналогично находим внутренние усилия на втором и третьем участках (рис. 2.6, в и г):

$$\sum X = 0; N_{II} + F_1 - F_2 = 0; \Rightarrow N_{II} = -F_1 + F_2 = -45 + 80 = 35 \text{ кН}.$$

$$\sum X = 0; N_{III} + F_1 - F_2 - F_3 = 0; \Rightarrow N_{III} = -F_1 + F_2 + F_3 = -45 + 80 + 30 = 65 \text{ кН}.$$

Строим **эпюру внутренних усилий** – *график, изображающий закон изменения внутренних усилий по длине бруса*. Параллельно оси бруса проводим базисную линию (абсциссу графика) и по нормали к ней откладываем найденные выше значения внутренних усилий (ординаты графика) в выбранном масштабе с учетом знака. Положительные значения откладываем выше базисной линии, отрицательные – ниже (рис. 2.6, д). Поскольку в пределах каждого из участков внутренние усилия неизменны, высоты ординат графика – постоянны и огибающие линии (жирные) – горизонтальны. На эпюре стрелками показаны скачки внутренних усилий в сечениях  $d, e, f, g$ .

**Б. Определение напряжений** на каждом из участков:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_1} = \frac{-45 \cdot 10^3}{5,4 \cdot 10^{-4}} = -8,33 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -83,3 \text{ МПа};$$
$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_2} = \frac{35 \cdot 10^3}{2,7 \cdot 10^{-4}} = 1,30 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 130 \text{ МПа};$$
$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_3} = \frac{65 \cdot 10^3}{3,1 \cdot 10^{-4}} = 2,10 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 210 \text{ МПа}.$$

Строим **эпюру напряжений** (рис. 2.6, е), на которой также отмечаем скачки напряжений в соответствующих сечениях.

**В. Коэффициенты запаса прочности** по отношению к пределу текучести:

$$\text{I участок: } n_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\text{I}}} = \frac{250}{|-83,3|} = 3,0; \quad \text{прочность избыточна;}$$

$$\text{II участок: } n_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\text{II}}} = \frac{250}{130} = 1,92; \quad \text{прочность обеспечена;}$$

$$\text{III участок: } n_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\text{III}}} = \frac{250}{210} = 1,19; \quad \text{прочность недостаточна.}$$

**Вывод:** недогружен участок I, перегружен участок III. Для этих участков выполняем проектный расчет.

## 2. Проектный расчет

Из условия прочности при растяжении  $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$  выполняем подбор размеров поперечных сечений I и III участков, предварительно назначив допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\tau}}{[n_{\tau}]} = \frac{350}{2} = 175 \text{ МПа.}$$

Нормативный коэффициент запаса прочности выбран из рекомендуемого диапазона значений  $[n_{\tau}] = 1,3-2,2$ .

$$A_{\text{I}} \geq \frac{N_{\text{I}}}{[\sigma]} = \frac{|-45 \cdot 10^3|}{175 \cdot 10^6} = 2,57 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$A_{\text{III}} \geq \frac{N_{\text{III}}}{[\sigma]} = \frac{65 \cdot 10^3}{175 \cdot 10^6} = 3,71 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

## 3. Определение перемещений сечений

### А. Удлинения каждого из участков

$$\Delta \ell_{\text{I}} = \frac{N_{\text{I}} \cdot a}{E \cdot A_{\text{I}}} = \frac{-45 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,57 \cdot 10^{-4}} = -263 \text{ мкм.}$$

$$\Delta \ell_{\text{II}} = \frac{N_{\text{II}} \cdot b}{E \cdot A_{\text{II}}} = \frac{35 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,7 \cdot 10^{-4}} = 130 \text{ мкм.}$$

$$\Delta \ell_{\text{III}} = \frac{N_{\text{III}} \cdot c}{E \cdot A_{\text{III}}} = \frac{65 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,71 \cdot 10^{-4}} = 350 \text{ мкм.}$$

**Б. Перемещения сечений.** За начало отсчета принимаем сечение  $d$ . Оно защемлено, его перемещение равно нулю, то есть  $\delta_d = 0$ .

$$\delta_e = \Delta l_{III} = 350 \text{ мкм};$$

$$\delta_f = \Delta l_{III} + \Delta l_{II} = 350 + 130 = 480 \text{ мкм};$$

$$\delta_g = \Delta l_{III} + \Delta l_{II} + \Delta l_I = 350 + 130 - 263 = 217 \text{ мкм}.$$

Строим **эпюру перемещений** (рис. 2.6, ж),

### Выводы

1. Выполнен поверочный расчет ступенчатого бруса. Прочность одного из элементов обеспечена; другого – избыточна; третьего – недостаточна.

2. Из условия прочности при растяжении подобраны площади поперечных сечений двух элементов конструкции.

3. По результатам проектного расчета вычислены деформации каждого элемента конструкции. Крайнее сечение переместится относительно заземления на 217 мкм в сторону от заземления.

**Пример 2.3.** К стальному брусу постоянного сечения (рис. 2.7) вдоль его оси приложены две силы  $F_1 = 40 \text{ кН}$  и  $F_2 = 60 \text{ кН}$ . По условиям эксплуатации введено ограничение на величину перемещения концевого сечения С:  $[\delta] = 1 \text{ мм}$ . Из условий прочности и жесткости подобрать размер поперечного сечения, если допустимое напряжение при растяжении и сжатии  $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$ . Длины участков  $a = 0,5 \text{ м}$ .

**Решение.** Покажем возникающую в опоре реакцию  $R$ . Чтобы не вычислять опорную реакцию (в дальнейшем она не понадобится), определение внутренних усилий методом сечений начнем вести со свободного конца.

### 1. Определение внутренних усилий

Покажем возникающую в опоре реакцию  $R$ ; определение внутренних усилий методом сечений начнем вести со свободного конца (более подробно см. пример 2.2). Ось  $x$  – продольная ось бруса (на рис. 2.7 не показана).

$$\text{I участок: } \sum X = 0; -N_I - F_1 = 0; \Rightarrow N_I = -F_1 = -40 \text{ кН}.$$

II участок:

$$\sum X = 0; -N_{II} - F_1 + F_2 = 0; \Rightarrow N_{II} = -F_1 + F_2 = -40 + 60 = 20 \text{ кН}.$$

Строим эпюру внутренних усилий. Опасным является участок I, на котором действует  $N_{\max} = -40 \text{ кН}$  (пластичные материалы одинаково сопротивляются деформации растяжения и сжатия).

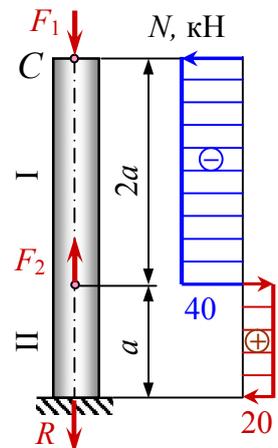


Рис. 2.7

## 2. Проектный расчет из условия прочности

Из условия прочности при растяжении (2.14)

$$\sigma = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$$

находим требуемую площадь поперечного сечения стержня (2.15)

$$A \geq \frac{N_I}{[\sigma]} = \frac{|-40 \cdot 10^3|}{180 \cdot 10^6} = 2,22 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

## 3. Проектный расчет из условия жесткости

Перемещение сечения C является суммой двух слагаемых:

$$\delta_C = \Delta l_I + \Delta l_{II} = \frac{N_I \cdot 2a}{E \cdot A} + \frac{N_{II} \cdot a}{E \cdot A} = \frac{a}{E \cdot A} (N_I \cdot 2 + N_{II}) \leq [\delta],$$

откуда требуемая площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{a}{E \cdot [\delta]} (N_I \cdot 2 + N_{II}) = \frac{0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,001} (-40 \cdot 10^3 \cdot 2 + 20 \cdot 10^3) = |-1,5 \cdot 10^{-4}| \text{ м}^2.$$

Сравнивая результаты проектных расчетов из условия прочности и жесткости, назначаем **большее** из двух значений площади поперечного сечения: 2,22 и 1,5 см<sup>2</sup>, удовлетворяющее **обоим** условиям:  $A \geq 2,22 \text{ см}^2$ .

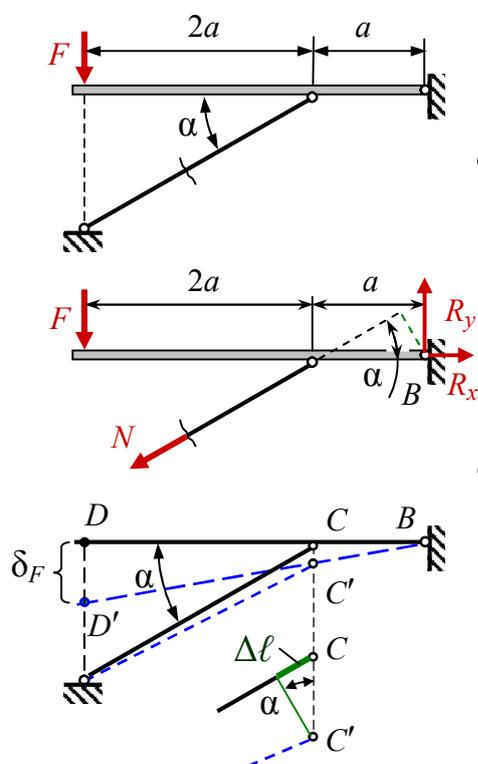


Рис. 2.8

**Пример 2.4.** Жесткая балка (ее деформацией пренебречь) нагружена силой  $F = 80 \text{ кН}$  и подперта стальным стержнем (подкосом) (рис. 2.8, а), площадь поперечного сечения которого  $A = 15 \text{ см}^2$ . Подкос расположен под углом  $\alpha = 30^\circ$  к оси балки. Предел текучести материала подкоса  $\sigma_T = 340 \text{ МПа}$ .

Проверить прочность стержня.  
 б) Определить допускаемую нагрузку  $F$  для заданного размера поперечного сечения стержня. Выполнить проектный расчет из условия прочности и жесткости, если допускаемая величина перемещения балки в точке приложения силы  $[\delta_F] = 10 \text{ мм}$ .

## Решение

### 1. Поверочный расчет

#### А. Определение внутреннего усилия в стержне

Рассекаем стержень на две части (рис. 2.8, а). Отбрасываем одну из частей и показываем внешнюю нагрузку  $F$ , внутреннее усилие  $N$  и две составляющих опорной реакции  $R$  (рис. 2.8, б). Составляем такое уравнение равновесия, в которое не вошли бы опорные реакции  $R_y$  и  $R_x$ :

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; \quad F \cdot 3a + N \cdot a \cdot \sin \alpha &= 0; \\ N &= -\frac{F \cdot 3a}{a \cdot \sin \alpha} = -\frac{80 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 0,5} = -480 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Усилие в стержне сжимающее.

#### Б. Определение напряжения

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-480 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-4}} = -320 \text{ МПа}.$$

#### В. Коэффициент запаса прочности

Фактический коэффициент запаса  $n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma} = \frac{340}{|-320|} = 1,06$  не входит в рекомендуемый (нормативный) диапазон значений  $[n_T] = 1,3 - 2,3$  (см. подразд. 2.4). **Вывод:** прочность недостаточна.

### 2. Определение допустимой нагрузки на конструкцию для заданного размера поперечного сечения стержня

Из условия прочности при растяжении  $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$  находим допустимую нагрузку на стержень  $[N] \leq A \cdot [\sigma] = 15 \cdot 10^{-4} \cdot 170 \cdot 10^6 = 255 \text{ кН}$ .

Здесь допустимое напряжение  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]} = \frac{340}{2} = 170 \text{ МПа}$ . Нормативный коэффициент запаса по текучести назначили из рекомендуемого (подразд. 2.4) диапазона значений  $[n_T] = 1,3 - 2,2$ .

Из условия равновесия (см. этап 1) находим связь между допустимой внешней нагрузкой  $[F]$  на конструкцию и внутренним усилием  $[N]$  в стержне:

$$[F] = \frac{-[N] \cdot a \cdot \sin \alpha}{3a} = \frac{|-255| \cdot 0,5}{3} = 42,5 \text{ кН}.$$

**Вывод:** допустимая нагрузка почти вдвое меньше заданной.

### 3. Проектный расчет из условия прочности

Требуемое значение площади поперечного сечения из условия прочности при растяжении:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{|-480 \cdot 10^3|}{170 \cdot 10^6} = 2,82 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 28,2 \text{ см}^2.$$

### 4. Проектный расчет из условия жесткости

Под действием внешней нагрузки стержень деформируется; сечения балки изменяют свое положение в пространстве. Установим связь между внутренним усилием, деформацией стержня и перемещением заданного сечения конструкции. Покажем схему в исходном и деформированном (пунктирные линии) состояниях (рис. 2.8, в). Контролируемое перемещение сечения балки в точке  $D$  приложения силы  $\delta_F$  связано с перемещением узла  $C$  точки прикрепления стержня к балке соотношением:

$$\frac{DD'}{CC'} = \frac{3a}{a} = 3, \quad \text{что следует из подобия треугольников } BDD' \text{ и } BCC'.$$

Вследствие перемещения узла  $C$  стержень укорачивается на  $\Delta \ell = CC' \cdot \sin \alpha$ .

Деформацию стержня определяем по закону Гука:  $\Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A} = \frac{N \cdot 2a}{E \cdot A \cdot \cos \alpha}$ .

Здесь  $\ell = 2a / \cos \alpha$  – длина стержня, определяется из схемы нагружения (рис. 2.8, а). Тогда из условия жесткости конструкции: находим допускаемое значение площади поперечного сечения стержня

$$[A] \geq \frac{3 \cdot N \cdot 2a}{[\delta_F] \cdot E \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{6 \cdot |-480000| \cdot 1}{0,01 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,5 \cdot 0,866} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 33,3 \text{ см}^2.$$

Сравнивая результаты проектных расчетов из условия прочности и жесткости, назначаем **большее** из двух значений: 28,2 и 33,3 см<sup>2</sup>, удовлетворяющее **обоим** условиям, то есть  $A \geq 33,3 \text{ см}^2$ .

### Выводы

1. Выполнен поверочный расчет стержня. Прочность элемента конструкции недостаточна.

2. Для заданного размера поперечного сечения нагрузка  $F$ , приложенная к конструкции, не должна превышать 42,5 кН.

3. Из условий прочности и жесткости при растяжении найдено значение площади поперечного сечения элемента конструкции, удовлетворяющее обоим условиям: 33,3 см<sup>2</sup>.

### 3. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Если твердое тело нагружено системой сил, то через любую его точку можно провести бесчисленное множество различно ориентированных площадок, по которым действуют нормальные и касательные напряжения, вызывающие линейные и угловые деформации.

#### 3.1. ПОНЯТИЕ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

**Напряженное состояние** – совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку.

**Напряжение** – величина, характеризующая интенсивность внутренних усилий, возникающих в деформируемом теле под влиянием внешних воздействий, то есть внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в окрестности рассматриваемой точки.

**Напряжение полное  $p$**  – уравнивающая внешнюю нагрузку. Напряжение  $p$  – величина векторная, раскладывается на составляющие: по нормали к сечению  $\sigma$  и в плоскости сечения  $\tau$ , причем  $p^2 = \sigma^2 + \tau^2$ .

**Напряжение нормальное  $\sigma$**  – перпендикулярное к сечению.

**Напряжение касательное  $\tau$**  – действующее в плоскости к сечению.

Обозначение индексов при напряжениях (рис. 3.1): первый соответствует площадке, нормаль к которой совпадает с направлением оси (адрес площадки); второй указывает направление напряжений. Нормальные напряжения имеют только первый индекс.

#### Правила знаков

Нормальные напряжения вызывают удлинение или укорочение граней параллелепипеда. **Растягивающие** напряжения считают **положительными** (рис. 3.1).

Касательные напряжения вызывают смещение граней, их сдвиг, изменение углов прямых на тупые и острые. **Касательное напряжение положительно**, если изображающий его вектор стремится вращать грань **по ходу часовой стрелки**.

Напряженное состояние характеризуют тензором напряжений. **Тензор** (от лат. *tensus* напряженный, натянутый) – величина особого рода, задаваемая числами и законами их преобразования; является развитием и обобщением векторного исчисления и теории матриц.

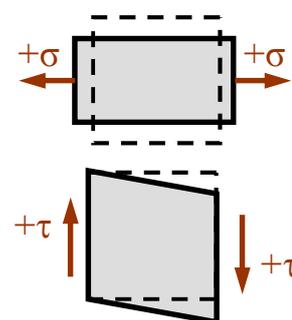


Рис. 3.1

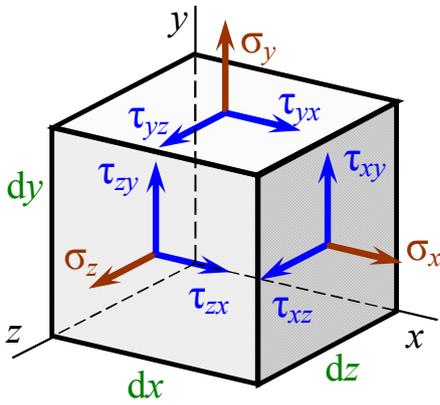


Рис. 3.2

В первой строке тензора ставят напряжения на первой площадке ( $x$ ); во второй – на площадке  $y$ ; в последней строке – на площадке  $z$ . Тензор содержит **девять** компонентов (рис. 3.2).

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Параллелепипед, выделенный в окрестности рассматриваемой точки, должен находиться в равновесии при действии сил, приложенных к его граням. Нормальные силы, приложенные к граням параллелепипеда, взаимно уравновешены и, следовательно, три уравнения равновесия тождественно удовлетворяются. Составив уравнения суммы моментов всех сил относительно координатных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , можно получить следующие три равенства:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (3.1)$$

Эти равенства называют **законом парности касательных напряжений**: *если по какой-либо площадке действует некоторое касательное напряжение, то по перпендикулярной к ней площадке будет действовать касательное напряжение, равное по величине и противоположное по знаку.*

Вследствие закона парности касательных напряжений тензор становится симметричным относительно главной диагонали. Вместо девяти компонентов независимыми оказываются только **шесть**.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

С изменением ориентации параллелепипеда в пространстве выделенного объема напряженного тела *соотношение между нормальными и касательными напряжениями будет изменяться*. Следовательно, и запись тензора для **одного и того же** напряженного состояния будет *различной*.

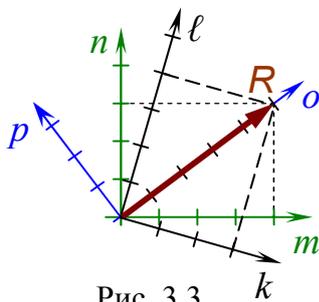


Рис. 3.3

Примером сказанного могут служить разные варианты описания *одного и того же* вектора  $R$  на плоскости в зависимости от выбранной системы координат (рис. 3.3). Так, в системе  $k, \ell$  вектор  $R$  описывается координатами (3, 4), в системе  $m, n$  координаты того же вектора  $R$  (4, 3); а в системе  $o, p$ :  $R$  (5, 0). Очевидно, последний вариант описания более удобен, поскольку одна из проекций вектора равна его длине, а другая – равна нулю.

Поэтому необходимо найти такое положение элементарного объема, чтобы количество действующих по его граням напряжений было минимальным.

Можно найти такую ориентацию параллелепипеда, при которой по его граням действуют только нормальные напряжения (рис. 3.4). Количество независимых компонент тензора в этом случае уменьшается до трех.

**Главные площадки** – площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют (рис. 3.4).

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

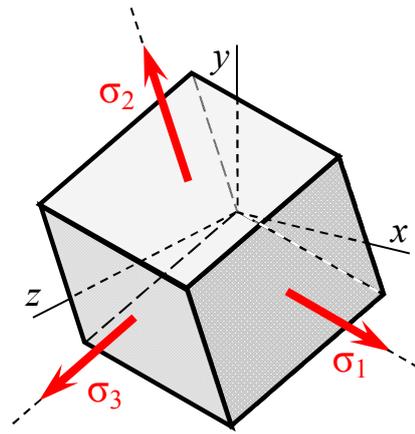


Рис. 3.4

**Главные напряжения** – нормальные напряжения, действующие по главным площадкам.

**Главные напряжения** – нормальные напряжения, принимающие экстремальные значения.

Главные напряжения нумеруют в порядке убывания  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Различают три вида напряженного состояния: линейное, или одноосное (рис. 3.5, а), плоское, или двухосное (рис. 3.5, б) и объемное, или трехосное (рис. 3.5, в).

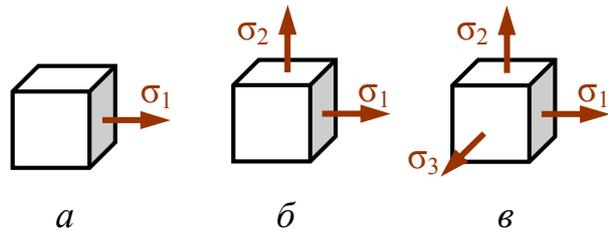


Рис. 3.5

### 3.2. ЛИНЕЙНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Рассмотрим простейший случай нагружения – растяжение (рис. 3.6, а). Площадь  $A_{\alpha}$  наклонного сечения (рис. 3.6, в) больше площади  $A$  поперечного сечения (рис. 3.6, б):

$$A_{\alpha} = \frac{A}{\cos \alpha}.$$

Полное напряжение  $p_{\alpha}$  в наклонном сечении (рис. 3.6, в) меньше нормального напряжения  $\sigma$  в поперечном сечении (рис. 3.6, б):

$$p_{\alpha} = \frac{N}{A_{\alpha}}; \quad \sigma = \frac{N}{A}.$$

Полное напряжение  $p_{\alpha}$  раскладывают на проекции (которые всегда меньше)  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$  (рис. 3.6, з)

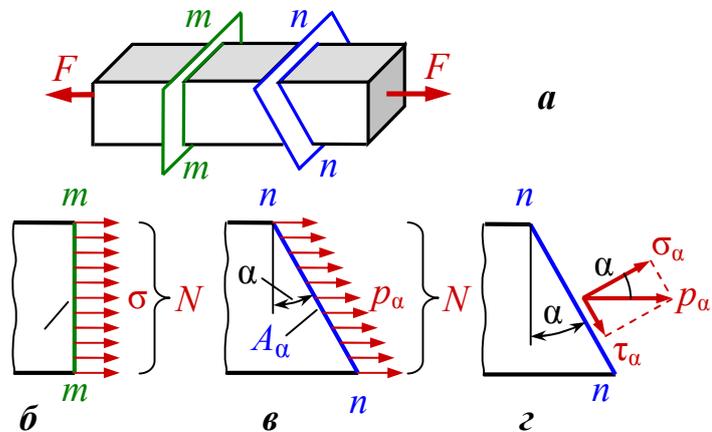


Рис. 3.6

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{N}{A_{\alpha}} \cos \alpha = \frac{N}{A} \cos^2 \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_{\alpha} = p_{\alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{N}{A_{\alpha}} \sin \alpha = \frac{N}{A} \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

Таким образом, 
$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.2)$$

**Выводы:**

а) любое из значений напряжений на наклонных площадках  $p_{\alpha}$ ,  $\sigma_{\alpha}$ ,  $\tau_{\alpha}$  меньше напряжения  $\sigma$  в поперечном сечении, следовательно, не столь опасны;

б) напряжения на наклонных площадках  $p_{\alpha}$ ,  $\sigma_{\alpha}$ ,  $\tau_{\alpha}$  зависят от угла  $\alpha$  наклона площадки, а таких площадок в нагруженном теле можно выделить бесчисленное множество, значит, и вариантов описания *одного и того же* напряженного состояния множество.

Для практики интересны площадки, на которых возникают *экстремальные* значения напряжений. Для их отыскания приравнивают нулю первую производную нормального напряжения по углу  $\alpha$ .

*Экстремальные нормальные напряжения*

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\sigma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = -\sigma \cdot \sin 2\alpha;$$

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \text{ при } \sin 2\alpha = 0; \sin \alpha = 0; \alpha = 0.$$

На этой площадке  $\tau_{\alpha=0} = 0$ ;  $\sigma_{\max} = \sigma$ . Следовательно, эта площадка является *главной*.

*Экстремальные касательные напряжения*

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \text{ при } \cos 2\alpha = 0; 2\alpha = 90^{\circ}; \alpha = 45^{\circ}.$$

На площадке под углом  $\alpha = 45^{\circ}$   $\tau_{\max} = \sigma/2$ . Полученным соотношением объясняется связь между допускаемыми напряжениями:  $[\tau] = 0,5[\sigma]$ , которую используют в расчетах при кручении и сдвиге.

Изображения одноосного растяжения (слева), сжатия (справа), а также соответствующие им тензоры напряжений и круги Мора представлены на рис. 3.7.

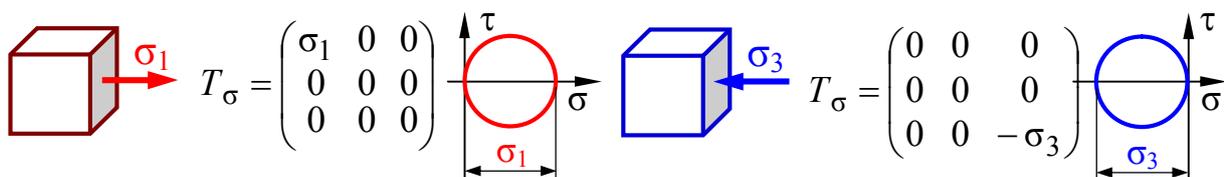


Рис. 3.7

### 3.3. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Если к выделенному элементу (рис. 3.8) приложено только  $\sigma_1$ , то напряжение на наклонной площадке

$$\sigma'_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha.$$

Если действует только  $\sigma_2$ , то

$$\sigma''_\alpha = \sigma_2 \cdot \cos^2(\alpha + 90^\circ) = \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha.$$

В случае, когда действуют оба главных напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , то, пользуясь принципом суперпозиций, получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha. \quad (3.3)$$

Для касательных напряжений только от  $\sigma_1$  или только от  $\sigma_2$ ,

$$\tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha; \quad \tau''_\alpha = \frac{\sigma_2}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ)$$

В случае действия обоих главных напряжений

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.4)$$

Экстремальные значения нормальных и касательных напряжений находят, приравнявая к нулю первые производные напряжений по углу

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0.$$

Получают  $\sigma_{\max} = \sigma_1$  при  $\alpha = 0$ ,  $\tau = 0$ . Это – главная площадка.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{при} \quad \alpha = 45^\circ.$$

*Площадки, по которым касательные напряжения имеют экстремальные значения, называют площадками сдвига.*

### 3.4. СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

*Свойство суммы нормальных напряжений*

Для площадки (рис. 3.9), ориентированной под углом

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha + 90^\circ, \\ \sigma_\beta &= \sigma_1 \cdot \cos^2 \beta + \sigma_2 \cdot \sin^2 \beta; \\ \sigma_\beta &= \sigma_1 \cdot \cos^2(\alpha + 90^\circ) + \sigma_2 \cdot \sin^2(\alpha + 90^\circ); \\ \sigma_\beta &= \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (3.5)$$

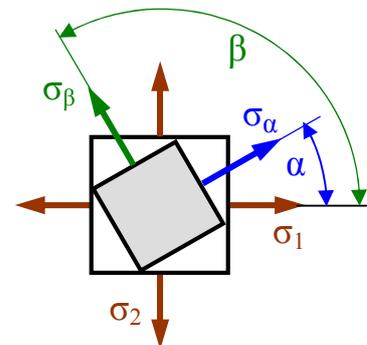


Рис. 3.9

Сложив  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\beta$

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha$$

и преобразовав, получим:  $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}$ . (3.6)

*Сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, инвариантна по отношению к наклону этих площадок и равна сумме главных напряжений.*

Свойство второе: закон парности касательных напряжений

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta; \quad \tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ); \quad \tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = -\tau_\alpha.$$

Получен закон парности касательных напряжений (см. подразд. 3.1)

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \quad (3.7)$$

### 3.5. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА НАКЛОННЫХ ПЛОЩАДКАХ. КРУГ МОРА

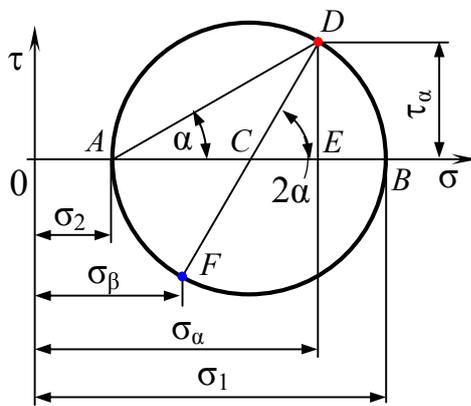


Рис. 3.10

Известны значения главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , требуется найти напряжения на наклонных площадках. В системе координат  $\sigma - \tau$  построен круг диаметром  $AB$ , равным разности главных напряжений  $AB = 0B - 0A = \sigma_1 - \sigma_2$  (рис. 3.10). Из левой точки ( $A$ ) пересечения круга с осью абсцисс проведен луч под **углом**  $\alpha$ . Абсциссой точки  $D$  пересечения луча с кругом определяется нормальное напряжение  $\sigma_\alpha$  на наклонной площадке,

ординатой точки  $D$  – касательное  $\tau_\alpha$ .

Напряженное состояние перпендикулярной площадки определяется координатами точки  $F(\sigma_\beta; -\tau_\alpha)$ . Радиус круга равен полуразности главных напряжений

$$CD = CB = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Абсцисса центра круга – среднее арифметическое главных напряжений

$$0C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Нормальное напряжение  $\sigma_\alpha$  на наклонной площадке равно сумме отрезков

$$\sigma_\alpha = 0E = 0C + CE = 0C + CD \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad \sigma_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \underbrace{(1 + \cos 2\alpha)}_{2 \cos^2 \alpha} + \frac{\sigma_2}{2} \underbrace{(1 - \cos 2\alpha)}_{2 \sin^2 \alpha}.$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha. \quad (3.8)$$

Касательное напряжение на наклонной площадке  $\tau_{\alpha} = DE = CD \cdot \sin 2\alpha$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.9)$$

Методика графического решения задачи получила название от имени немецкого инженера и ученого в области теоретической механики и сопротивления материалов *Christian Otto Mohr* (1835–1918). Формулы, полученные графическим решением, совпадают с формулами аналитического решения (см. подразд. 3.3). На практике нахождение напряжений на наклонных площадках иногда называют прямой задачей.

**Пример 3.1.** К элементарному параллелепипеду (рис. 3.11) приложены два главных напряжения (в МПа). Требуется найти нормальные и касательные напряжения, действующие на площадке, наклоненной под углом  $\alpha = -30^\circ$ .

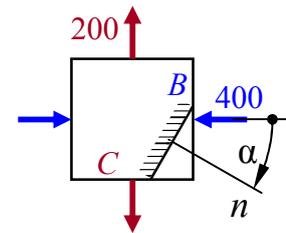


Рис. 3.11

**Решение аналитическое.** Руководствуясь

соот-ношением  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , присваиваем индексы главным напряжениям:  $\sigma_1 = 200$  МПа,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -400$  МПа.

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha = 200 \cdot \cos^2(-30^\circ) + (-400) \cdot \sin^2(-30^\circ) = 50 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{200 - (-400)}{2} \sin 2(-30^\circ) = -260 \text{ МПа}.$$

**Решение графическое.** В координатных осях  $\sigma - \tau$  (рис. 3.12) откладываем напряженное состояние площадок *B* и *C*, выраженное парой координат  $(\sigma, \tau)$ : *B*(-400; 0); *C*(200; 0). Эти точки принадлежат диаметру круга. Из левой точки пересечения круга с осью абсцисс проводим луч под углом  $\alpha = -30^\circ$  (по ходу часовой стрелки). Координаты точки пересечения луча с кругом – искомые напряжения  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$ .

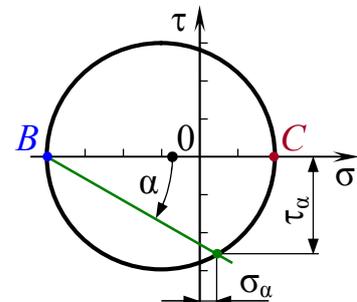


Рис. 3.12

**Вывод.** Аналитическим и графическим способами найдены нормальные и касательные напряжения, действующие на наклонной площадке. Результаты решений совпали.

### 3.6. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

По сравнению с материалом, изложенным в подразд. 3.5, такую задачу иногда называют обратной, поскольку на практике чаще встречается ситуация, при которой напряжения на наклонных площадках известны (например, по результатам тензометрических испытаний), а

главные напряжения требуется найти. Напряженное состояние грани  $D$  (рис. 3.13,  $a$ ) характеризуется парой координат в системе  $\sigma - \tau$  (рис. 3.13,  $b$ ):  $D(\sigma_x, \tau_{xy})$ . Аналогично для грани  $F(\sigma_y, \tau_{yx})$ .

Прямая  $DF$  – диаметр круга с центром в точке  $C$ . Круг отсекает на оси абсцисс максимальное  $\sigma_1$  и минимальное  $\sigma_2$  напряжения:

$$\sigma_1 = OC + CB; \quad \sigma_2 = OC - AC.$$

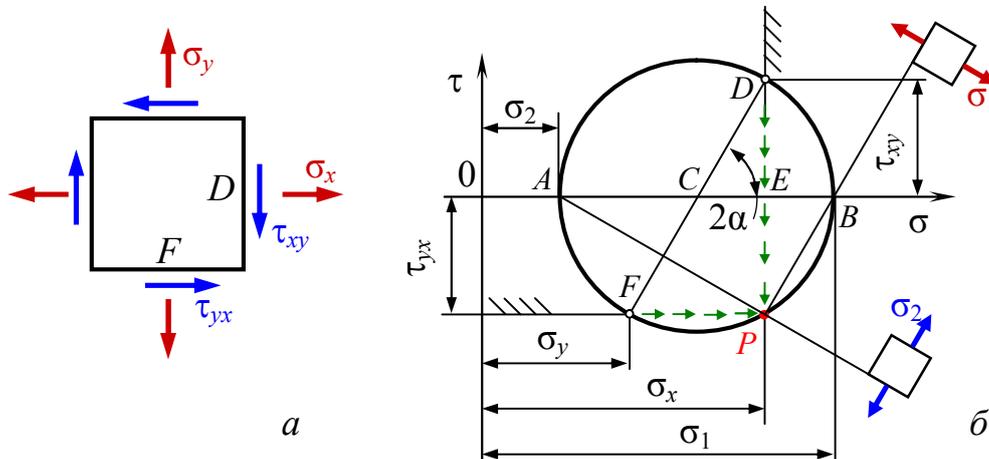


Рис. 3.13

Расстояние до центра круга  $OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ .

Радиус круга  $CA = CB = CD = \sqrt{CE^2 + DE^2}$ .

Катеты треугольника  $CDE$ :  $CE = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ ;  $DE = \tau_{xy}$ .

Радиус круга – гипотенуза треугольника  $CDE$

$$CA = CB = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Таким образом, величина главных напряжений

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (3.10)$$

**Положение главных площадок** находим с использованием полюса  $P$ . Через точку  $D$  на круге проводим вертикальную линию (штриховка), соответствующую вертикальному положению грани  $D$  (рис. 3.13,  $a$ ). Для грани  $F$ , ориентированной горизонтально, проводим горизонтальную линию до пересечения с кругом. Точка пересечения этих линий является полюсом  $P$ . Соединив полюс  $P$  с точкой  $B$ , найдем положение главной площадки  $\sigma_1$ , а с точкой  $A$  – главной площадки  $\sigma_2$ .

**Направление главного напряжения** определяют тангенсом угла  $2\alpha$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{DE}{CE} = \frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)}.$$

Для рассматриваемого случая главное напряжение  $\sigma_1$  повернуто по ходу часовой стрелки относительно большего алгебраически напряжения  $\sigma_x$ . Следовательно, в формуле должен быть знак минус:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (3.11)$$

**Примечание.** Согласно приведенной формуле значение аргумента  $2\alpha$  функции тангенса не может превышать  $90^\circ$ , следовательно, значение угла  $\alpha$  не может превышать  $45^\circ$ . Из этого следуют правила:

направление *большого* из главных напряжений откладывают от *большого* из заданных напряжений  $\sigma_x$ , или  $\sigma_y$ ;

положительное значение угла  $\alpha$  откладывают против хода часовой стрелки;

направление  $\sigma_{\max}$  всегда проходит через те две четверти осей координат, к которым сходятся стрелки  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$ ;

если одно из главных напряжений окажется отрицательным, то полученные напряжения обозначают  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ ; если отрицательны оба, то  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

**Пример 3.2.** На двух парах граней выделенного элементарного объема материала (рис. 3.14) действуют нормальные и касательные напряжения. Требуется определить положение главных площадок и величину главных напряжений.

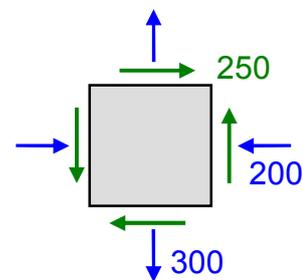


Рис. 3.14

**Решение аналитическое.** Присваиваем заданным напряжениям индексы и знаки и подставляем в формулу (3.10)

$$\sigma_x = -200 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = 300 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = -250 \text{ МПа}; \quad \tau_{yx} = 250 \text{ МПа}.$$

*Величины главных напряжений*

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-200 + 300}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-200 - 300}{2}\right)^2 + (-250)^2};$$

$$\sigma_{\max} = 50 + 354 = 404 \text{ МПа} = \sigma_1; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_{\min} = 50 - 354 = -304 \text{ МПа} = \sigma_3.$$

Индексы главным напряжениям присваиваем лишь после их вычисления исходя из соотношения между ними  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , а также учитывая, что одно из трех напряжений на площадке, обращенной к зрителю, равно нулю.

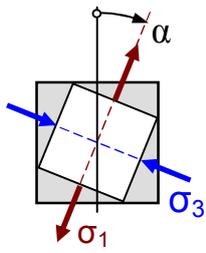


Рис. 3.15

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2(-250)}{-200 - 300} = -1,0; \quad 2\alpha = -45,0^\circ; \quad \alpha = -22,5^\circ.$$

### Положение главных площадок

Изображаем площадки под действием главных напряжений (рис. 3.15). Знак угла  $\alpha$  отрицательный, поэтому угол откладываем по ходу часовой стрелки от вертикали, то есть от направления большего алгебраически из заданных напряжений ( $\sigma_y > \sigma_x$  и направлено вертикально). Линия действия максимальных главных напряжений  $\sigma_1$  проходит через I и III квадранты, где расположены ребра кубика, к которым стягиваются касательные напряжения  $\tau$ , стремящиеся удлинить одну из его диагоналей, сдвигая грани так, чтобы преобразовать квадрат в ромб.

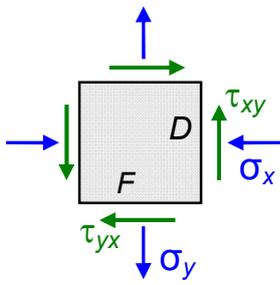


Рис. 3.16

### Решение графическое.

В координатной системе  $\sigma - \tau$ , используя выбранный масштаб, отложим напряженное состояние граней  $D(\sigma_x, \tau_{xy})$  и  $F(\sigma_y, \tau_{yx})$ , то есть  $D(-200; -250)$  и  $F(300; 250)$  (рис. 3.16).

Отрезок  $DF$  – диаметр круга; точка пересечения отрезка  $DF$  с осью абсцисс – центр круга (рис. 3.17). Расстояниями от начала координат до точек пересечения

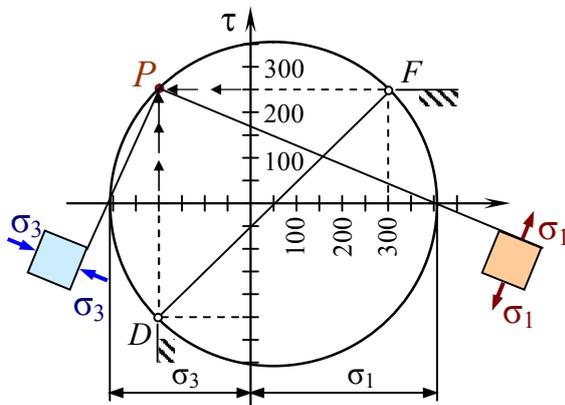


Рис. 3.17

окружности с осью абсцисс определяются величины главных напряжений. Полус  $P$  находим, продлевая до пересечения с окружностью линий, соответствующих положению грани  $D$  (вертикальная) и грани  $F$  (горизонтальная). Линия, соединяющая полюс  $P$  с точкой, соответствующей  $\sigma_1$ , определяет положение первой главной площадки, а с точкой, соответствующей  $\sigma_3$  – положение второй главной площадки (см. рис. 3.17).

**Вывод.** Аналитическим путем и графическим построением определена ориентация главных площадок в выделенном объеме нагруженного тела. Найдены значения главных нормальных напряжений. Результаты аналитического и графического решения совпали.

### 3.7. ОБЪЕМНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

При объемном напряженном состоянии, когда  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \neq 0$  в окрестности исследуемой точки выделяют элементарный кубик с гранями,

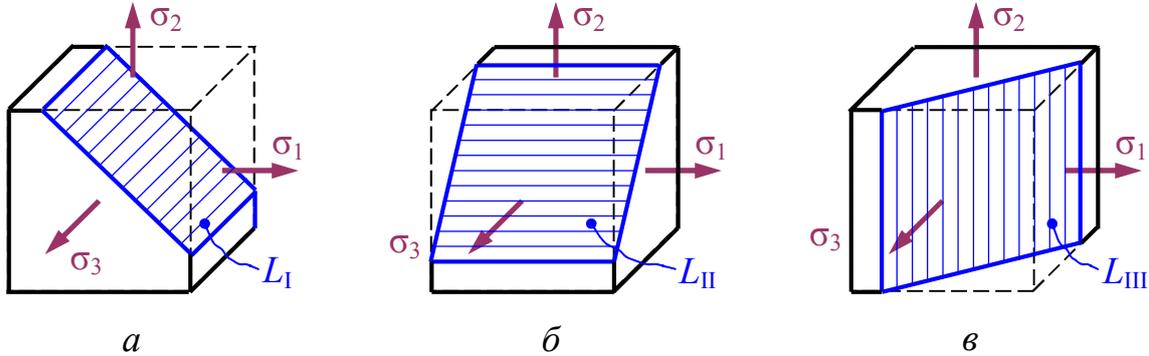


Рис. 3.18

параллельными главным площадкам. Через кубик проводят площадку (заштрихована) параллельно  $\sigma_3$  (рис. 3.18, а). Напряжения  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$  на этой площадке зависят только от  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Используют приемы и формулы (3.3) – (3.8) для плоского напряженного состояния. Диаметр круга напряжений  $L_I$  (рис. 3.19) равен разности  $\sigma_1 - \sigma_2$ . Аналогично для площадки, параллельной  $\sigma_1$  (рис. 3.18, б); диаметр круга напряжений  $L_{II}$  определяется разностью  $\sigma_2 - \sigma_3$ . То же для площадки, параллельной  $\sigma_2$  (рис. 3.18, в).

Для произвольно ориентированной площадки  $D$  напряжения определяют по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \\ \tau_\alpha &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  – углы между нормалью к рассматриваемой площадке и нормальями к главным площадкам. Для объемного напряженного состояния справедливо свойство суммы нормальных напряжений, инвариантной по отношению к наклону площадок:

$$\boxed{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const.}} \quad (3.13)$$

*Сумма нормальных напряжений, действующих по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, есть величина постоянная.*

Из круга Мора (рис. 3.19) следует, что экстремальные касательные напряжения действуют по площадкам, параллельным главному напря-

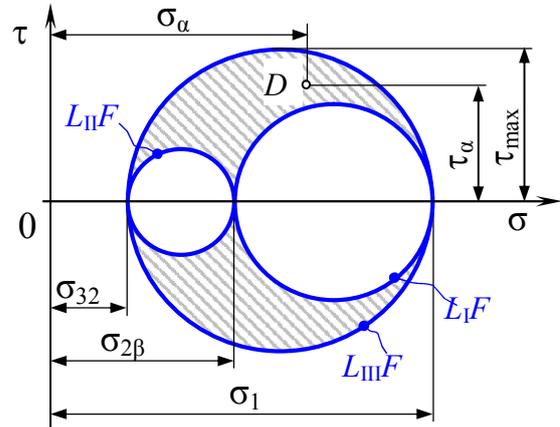


Рис. 3.19

жению  $\sigma_2$ . Площадки наклонены к главным напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  под углом  $45^\circ$ . Значения экстремальных касательных напряжений:

$$\tau_{\max, \min} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.14)$$

### 3.8. ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Наряду с напряженным состоянием различают и **деформированное состояние** – совокупность относительных удлинений и углов сдвига для всевозможных направлений осей, проведенных через рассматриваемую точку. Нормальные напряжения  $\sigma$  вызывают удлинение граней, оцениваемое относительной линейной деформацией  $\varepsilon$ . Касательные напряжения вызывают сдвиг граней, оцениваемый относительным углом сдвига  $\gamma$ .

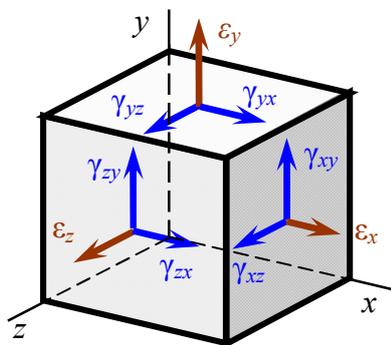


Рис. 3.20

**Главные деформации** – относительные удлинения ребер параллелепипеда, параллельные главным напряжениям; в направлении главных деформаций углы сдвига отсутствуют;

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Для главных направлений тензор деформаций имеет вид:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

### 3.9. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Согласно закону Гука в направлении каждого нормального напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  происходит продольная деформация  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

Напряжения, вызвавшие удлинения ребер				
Деформации ребер	a	$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E};$	$\varepsilon_1'' = -\mu\varepsilon_2 = -\mu \frac{\sigma_2}{E};$	$\varepsilon_1''' = -\mu\varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_3}{E};$
	b	$\varepsilon_2' = -\mu\varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_1}{E};$	$\varepsilon_2'' = \frac{\sigma_2}{E};$	$\varepsilon_2''' = -\mu\varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_3}{E};$
	c	$\varepsilon_3' = -\mu\varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}.$	$\varepsilon_3'' = -\mu\varepsilon_2 = -\mu \frac{\sigma_2}{E}.$	$\varepsilon_3''' = \frac{\sigma_3}{E}.$

Одновременно согласно эффекту Пуассона, в поперечных направлениях происходят противоположные по знаку деформации. Таким образом, в каждом из трех направлений проходит по одной продольной и по две поперечных деформации. Используя принцип суперпозиции и, складывая эти деформации, получим суммарные относительные удлинения в направлениях напряжений:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{cases} \quad (3.15)$$

Если грани элементарного параллелепипеда не совпадают с главными площадками, то по ним действуют касательные напряжения, не удлиняющие или укорачивающие грани, а вызывающие лишь изменение прямых углов между его гранями. На основании инвариантности суммы нормальных напряжений (3.6) обобщенный закон Гука может быть представлен в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}. \end{cases} \quad (3.16)$$

### 3.10. ИЗМЕНЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА

Объем параллелепипеда (рис. 3.21) до деформации

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Объем параллелепипеда в деформированном состоянии

$$V = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1,$$

$$a_1 = a + \Delta a = a + a\varepsilon_1 = a(1 + \varepsilon_1);$$

где  $b_1 = b + \Delta b = b + b\varepsilon_2 = b(1 + \varepsilon_2);$

$$c_1 = c + \Delta c = c + c\varepsilon_3 = c(1 + \varepsilon_3).$$

Изменение объема тела параллелепипеда

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 - a \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot c} = \\ &= \frac{a \cdot b \cdot c (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - abc}{a \cdot b \cdot c} = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1. \end{aligned}$$

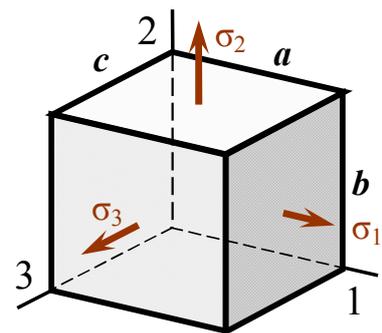


Рис. 3.21

Пренебрегая величинами второго и третьего порядка малости (произведениями  $\varepsilon_i$ ), получим

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (3.17)$$

**Относительное изменение объема равно сумме трех главных деформаций.**

Подставив  $\varepsilon_i$  из обобщенного закона Гука (3.15), получим

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.18)$$

Для произвольно ориентированных площадок подставим (3.16)

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (3.19)$$

Анализ формул (3.18) и (3.19) приводит к **выводам**:

для материалов (каучук, парафин) с большим значением  $\mu = 0,47$  (близко к 0,5) деформация будет происходить без изменения объема при любом из способов нагружения;

для любого материала деформация происходит без изменения объема, если  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ . Например, при кручении  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\sigma_1$ . Изменяется лишь форма (углы между гранями);

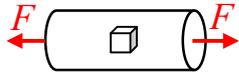
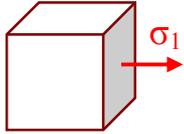
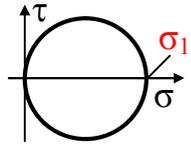
изменение объема происходит без изменения формы, если  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$  (гидростатическое сжатие);

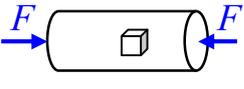
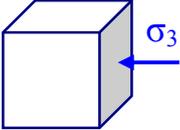
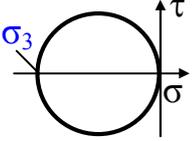
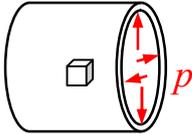
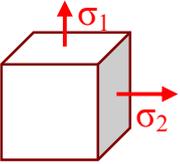
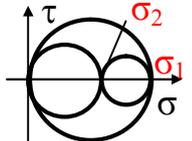
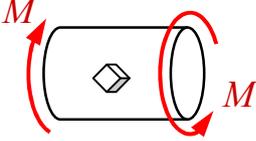
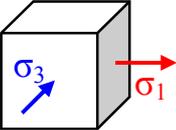
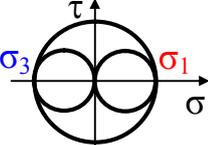
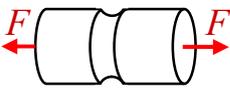
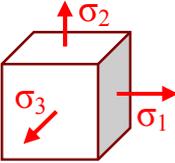
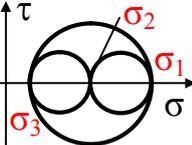
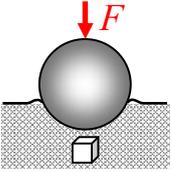
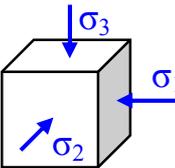
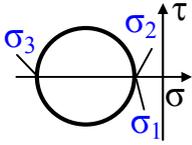
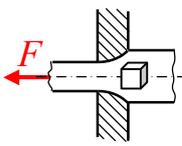
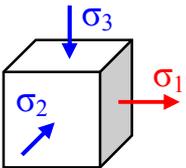
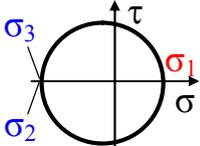
коэффициент Пуассона не может превышать значения 0,5, поскольку при  $\mu > 0,5$  материал уменьшается в объеме при растяжении.

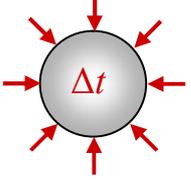
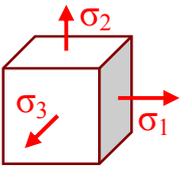
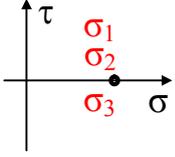
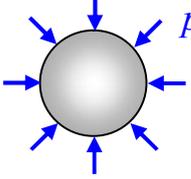
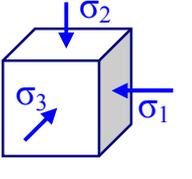
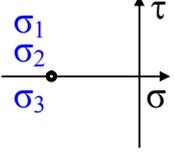
**Примечание:** формулы действительны при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности

### 3.11. ПРИМЕРЫ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Один и тот же материал может проявлять резко различные характеристики прочности и пластичности в зависимости от схемы напряженного состояния (НС).

1. Растяжение гладких образцов <b>ДО</b> образования шейки. Линейное НС			
			$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Сжатие образцов при смазке торцевых поверхностей. Линейное НС			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$
3. Цистерна, баллон под давлением. Плоское НС			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. Вал под действием крутящих моментов. Плоское НС – чистый сдвиг			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$
5. Растяжение образца с концентратором напряжений (надрезом) Объемное одноименное НС			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$
6. Измерение твердости <i>НВ</i> , закрытая ковка в штампах, прессование. Объемное одноименное НС, трехосное сжатие			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$
7. Волочение проволоки, труб. Объемное разноименное НС			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$

8. Быстрый нагрев шара. Трехосное растяжение внутренних слоев			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$
9. Гидростатическое сжатие. Трехосное сжатие			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$

### 3.12. ПОНЯТИЯ О ТЕОРИЯХ ПРОЧНОСТИ

Теории прочности используются для оценки прочности конструкций в случае плоского и объемного напряженных состояний. При двух- и трехосном напряженном состоянии соотношения между нормальными и касательными напряжениями настолько разнообразны (тензор напряжений содержит девять компонентов, из которых шесть независимы), что экспериментальная проверка опасного состояния для каждого из соотношений практически исключается.

Задача несколько упрощается, если вместо шести компонентов напряжений рассматривать эквивалентные им три главных напряжения и найти такую их комбинацию, которая была бы равноопасной линейному напряженному состоянию, то есть простому растяжению или сжатию. Характеристики прочности и пластичности, полученные при испытании на растяжение, достаточно полно приведены в справочной литературе.

Суть теорий (гипотез, критериев) прочности состоит в том, что, определив главную причину разрушения материала (преимущественное влияние того или иного фактора), можно подобрать соответствующее эквивалентное напряжение при сложном напряженном состоянии, а затем сопоставить его с допускаемым или предельным напряжением ( $\sigma_t$ ,  $\sigma_b$ , ...) при простом одноосном растяжении, как показано на схеме (рис. 3.22).

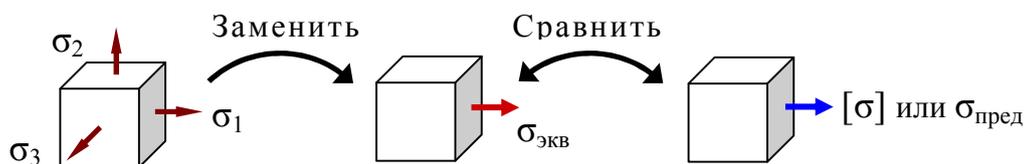


Рис. 3.22

**Эквивалентное напряжение**  $\sigma_{\text{экв}}$  – напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало равноопасным с заданным.

Создан ряд теорий (гипотез, критериев) прочности (более 20), позволяющих определить вид функциональных зависимостей, представляющих сложное напряженное состояние эквивалентным ему одноосным напряженным состоянием.

В качестве причин наступления опасного состояния считают: *а)* нормальные напряжения – разрушение хрупкое, путем отрыва; *б)* линейные деформации; *в)* касательные напряжения – разрушение пластичное, путем сдвига; *г)* энергия деформации и другие.

Следует заметить, что опасное состояние как для пластичных материалов (момент появления больших остаточных деформаций), так и для хрупких (момент появления трещин) лежит на границе области упругого деформирования. Это *позволяет* при всех дальнейших вычислениях, относящихся к проверкам прочности, *пользоваться формулами, выведенными при условии применимости закона Гука.*

### ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (первая теория прочности)

*Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если максимальное нормальное напряжение не превысит допустимого, определенного при простом растяжении:*

$$\sigma_{\text{экв(I)}} = \sigma_1 \leq [\sigma].$$

Здесь  $[\sigma]$  – допустимое напряжение при растяжении. Эту гипотезу связывают с именем Г. Галилея (XVII). Гипотеза пренебрегает действием двух других главных напряжений и не учитывает появления пластических деформаций; дает удовлетворительные результаты для хрупких материалов: стекло, керамика, камень, кирпич, бетон, гипс.

### ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ ЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ (вторая теория прочности)

*Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее относительное удлинение не превысит допустимого, определенного при простом растяжении:*

$$\varepsilon_{\text{max}} \leq [\varepsilon].$$

Гипотеза предложена Э. Мариоттом (1682), развита Б. Сен-Венаном (XIX). Из первой строки обобщенного закона Гука для объемного напряженного состояния (3.12) следует:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \varepsilon_{\text{max}}.$$

Для линейного напряженного состояния, когда  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  и  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Решая совместно последние три равенства, получим:

$$\sigma_{\text{экв(II)}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Экспериментально гипотеза подтверждается слабо, в расчетной практике применялась в начале XX века.

### ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (третья теория прочности)

*Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее касательное напряжение не превзойдет допустимого, определенного при простом растяжении*

$$\tau_{\text{max}} \leq [\tau].$$

Гипотеза предложена Ш. Кулоном (1773 г.), развита Б. Сен-Венаном (1871). Для объемного напряженного состояния

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.17)$$

При простом растяжении (линейном напряженном состоянии,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ )

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma}{2}; \quad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Решая совместно последние два равенства, получим:

$$\sigma_{\text{экв(III)}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (3.18)$$

Гипотеза не учитывает действие второго главного напряжения  $\sigma_2$ . Хорошо согласуется с опытом для пластичных материалов.

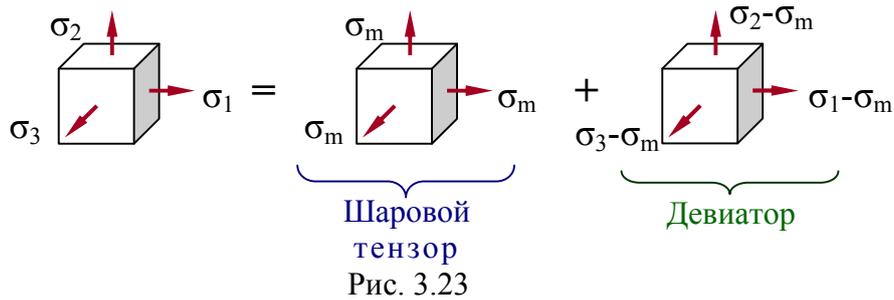
### ГИПОТЕЗА УДЕЛЬНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ – ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ (четвертая теория прочности)

*Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если удельная потенциальная энергия деформации, идущая на изменение формы, не превзойдет допустимого значения, определенного при простом растяжении*

$$u_{\phi} \leq [u].$$

Согласно гипотезе, высказанной Д. Максвеллом в 1856 г. и разработанной М. Хубером в 1930 г., удельную потенциальную энергию деформации следует разложить на две компоненты, одна из которых отвечает за изменение объема, а другая – формы. В расчетах учитывать лишь одну из них – по-

следнюю. Напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , действующие по граням параллелепипеда, тоже можно разложить на две компоненты, как показано на схеме:



Главные напряжения можно представить в виде суммы:

где  $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$  – среднее напряжение.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (\sigma_1 - \sigma_m) + \sigma_m; \\ \sigma_2 &= (\sigma_2 - \sigma_m) + \sigma_m; \\ \sigma_3 &= (\sigma_3 - \sigma_m) + \sigma_m,\end{aligned}$$

Первая компонента – шаровой тензор, по граням которого действует среднее напряжение  $\sigma_m$  (рис. 3.23), отвечает только за изменение объема (одинаковое удлинение всех ребер). Вторая компонента – девиатор (от лат. *deviatio* – отклонение) отвечает за изменение формы элементарного параллелепипеда.

Энергия формоизменения для объемного напряженного состояния (вывод опускается):

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

При одноосном растяжении, когда  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , приняв  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1$ , получим:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_1^2.$$

Тогда условие прочности по четвертой теории можно записать так:

$$\sigma_{\text{экв(IV)}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (3.19)$$

Четвертая теория более точно, чем третья, описывает появление в материале малых пластических деформаций. Опыты хорошо подтверждают четвертую теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие.

### ГИПОТЕЗА КУЛОНА-МОРА (ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ МОРА, 1900)

*Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если круг Мора не выходит за пределы огибающих кругов, построенных на допускаемых напряжениях при простом растяжении и сжатии.*

$$\sigma_{\text{экв(V)}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+]$$

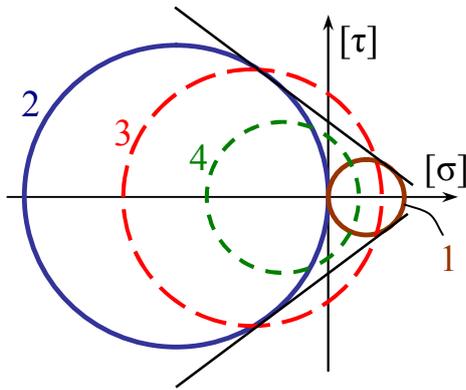


Рис. 3.24

Гипотеза (ее иногда называют пятой и обозначают римской цифрой V) применяется для материалов, обладающих разным сопротивлением растяжению и сжатию (чугун, бетон...). Строят круг Мора 1 (рис. 3.24) по допускаемому напряжению при растяжении, а также круг 2 по допускаемому напряжению при сжатии и проводят огибающие кругов (упрощенная методика).

Круг Мора 3, выходящий за пределы огибающей, соответствует опасному напряженному состоянию. Напряженное состояние, описываемое кругом 4, является безопасным. В случае, если допускаемые напряжения при растяжении  $[\sigma_+]$  и сжатии  $[\sigma_-]$  одинаковы, теория Мора совпадает с третьей теорией прочности.

Таким образом, для практических расчетов следует рекомендовать четвертую или третью теории прочности (строго говоря – теории перехода локального объема в пластическое состояние) для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, то есть пластичных, а теорию Мора – для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию.

**Пример 3.3.** В опасном сечении детали, выполненной из серого чугуна СЧ25, выделен элемент, по граням которого действуют напряжения (в МПа), как показано на рис. 3.25, а. Проверить прочность элемента.

**Решение.** Напряжениям, показанным на рисунке, дадим обозначение согласно координатной системе  $xOy$  (рис. 3.25, б):

$$\sigma_x = -30 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = 50 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = -70 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = 20 \text{ МПа}; \quad \tau_{yx} = -20 \text{ МПа}.$$

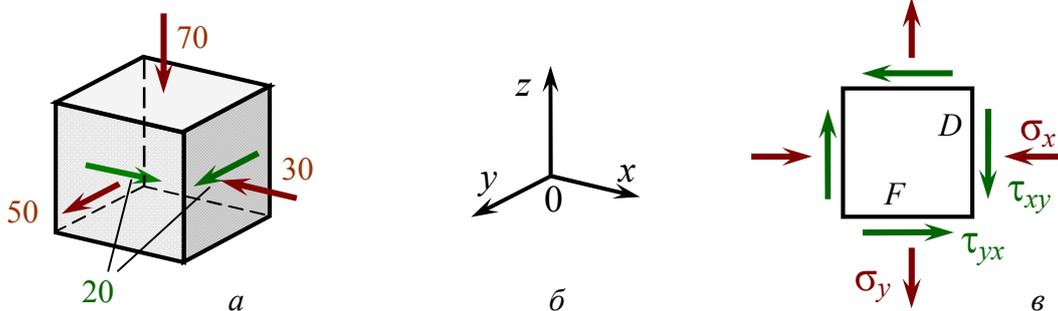


Рис. 3.25

Площадка, нормаль к которой параллельна оси  $z$  – главная, поскольку касательные напряжения на ней отсутствуют. Покажем напряженное состояние на двух других площадках в плоскости  $xOy$  (рис. 3.25, в).

### Величина главных напряжений

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-30 + 50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-30 - 50}{2}\right)^2 + 20^2};$$

$$\sigma_{\max} = 10 + 44,7 = 54,7 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\min} = 10 - 44,7 = -34,7 \text{ МПа}.$$

Назначаем индексы при главных напряжениях:

$$\sigma_1 = 54,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = -34,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -70 \text{ МПа}.$$

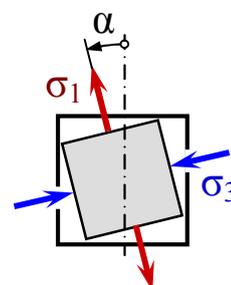


Рис. 3.26

Проверка результатов расчета с использованием свойства суммы нормальных напряжений:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const};$$

$$-30 + 50 - 70 = 54,7 - 34,7 - 70 = -50.$$

### Положение главных площадок

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot 20}{-30 - 50} = 0,5; \quad 2\alpha = 26,6^\circ; \quad \alpha = 13,3^\circ.$$

Угол  $\alpha$  (положительный) отложен против хода часовой стрелки от направления большего из заданных напряжений в плоскости  $xOy$ , то есть от  $\sigma_y$  (рис. 3.27).

Полученный результат можно проверить с помощью кругов Мора, методика построения которых подробно описана в примере 3.2. Запишем координаты граней, нормали к которым параллельны осям  $x$  и  $y$  (рис. 3.25, в):  $D(\sigma_x, \tau_{xy})$ ,  $F(\sigma_y, \tau_{yx})$ ,  $D(-30, 20)$ ,  $F(50, -20)$ .

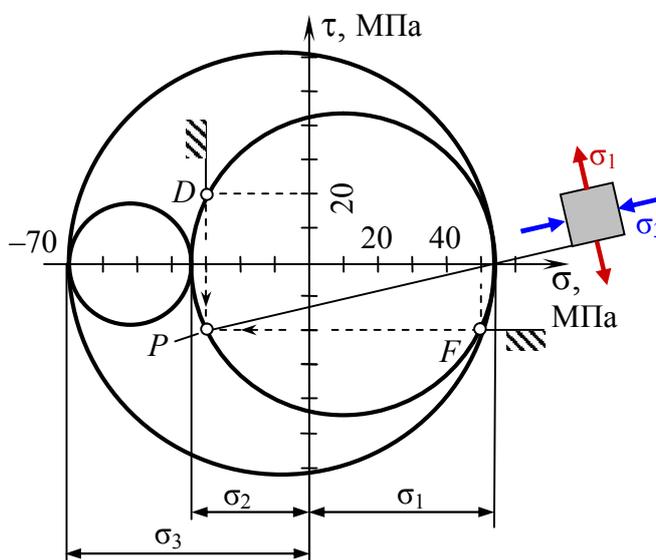


Рис. 3.27

Строим круги Мора (рис. 3.27), определяем величины главных напряжений и положение главных площадок. Результаты аналитического и графического решений совпали.

### Проверка прочности

Назначим допускаемые напряжения, выбрав коэффициент запаса прочности  $[n_B] = 3$ , рекомендуемый для хрупких материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{вр}}{[n_B]} = \frac{250}{3} = 83 \text{ МПа};$$
$$[\sigma_c] = \frac{\sigma_{вс}}{[n_B]} = \frac{980}{3} = 327 \text{ МПа}.$$

Согласно *первой гипотезе прочности*

$$\sigma_{\text{экв, I}} = \sigma_1 = 54,7 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{экв, I}} = \sigma_3 = 70 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 327 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена.

Согласно *второй гипотезе прочности*

$$\sigma_{\text{экв, II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 54,7 - 0,25(-34,7 - 70) = 80,9 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{экв, II}} = \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) = -70 - 0,25(54,7 - 34,7) = -75 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 327 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена.

Согласно *третьей гипотезе прочности*

$$\sigma_{\text{экв, III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 54,7 - (-70) = 124,7 \text{ МПа} > [\sigma_p] = 83 \text{ МПа}.$$

Прочность недостаточна.

Согласно *четвертой гипотезе прочности*

$$\sigma_{\text{экв, IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}[(54,7 + 34,7)^2 + (-34,7 + 70)^2 + (-70 - 54,7)^2]} = 111 \text{ МПа} > [\sigma_p] = 83 \text{ МПа}.$$

Прочность недостаточна.

Согласно *теории прочности Кулона-Мора*

$$\sigma_{\text{экв, V}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}} \sigma_3 = 54,7 - \frac{250}{980}(-70) = 72,6 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 83 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена

**Вывод.** Рассмотрены варианты использования различных теорий прочности при выполнении поверочного расчета элемента из хрупкого материала. Третья и четвертая теории прочности, обычно применяемые для пластичных материалов, дали отрицательный ответ.

## 4. СДВИГ, СМЯТИЕ

*Сдвиг – простой вид деформации, характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями.*

При сдвиге в поперечном сечении из шести внутренних усилий действует только одно – поперечная сила  $Q$  (рис. 4.1).

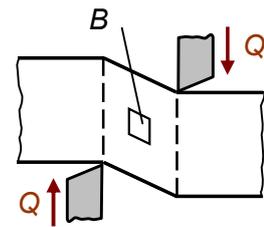


Рис. 4.1

### Порядок вывода расчетных формул в сопротивлении материалов

При выводе любых аналитических зависимостей в сопротивлении материалов рассматривается существование малого элемента тела с целью последовательного определения его перемещений, деформаций и напряжений в нем. Проинтегрировав установленные зависимости по всему объему тела, находят связь перемещений, деформаций и напряжений с внешними силами.

Всякий расчет состоит из четырех этапов:

**статический анализ** – устанавливает связь напряжений с внешними нагрузками путем интегрирования уравнений равновесия элемента по всему объему тела;

**геометрический анализ** – устанавливает связь между перемещениями и деформациями малого элемента тела;

**физический анализ** – устанавливает связь между деформациями элемента и напряжениями в нем. При упругой деформации используется закон Гука;

**синтез установленных зависимостей.** Подставляя найденные на трех предыдущих этапах выражения одно в другое и упрощая их, получают окончательные расчетные формулы.

Для установления связи внутренних усилий с напряжениями и деформациями при сдвиге последовательно рассмотрим перечисленные выше этапы.

**I. Статическая сторона задачи – условие равновесия** (рис. 4.2)

$$\sum Y = 0; \quad Q = \int_A \tau \cdot dA.$$

В действительности, касательные напряжения распределяются по сечению неравномерно. Однако если принять допущение о равномерном распределении напряжений, что широко используется на практике, то

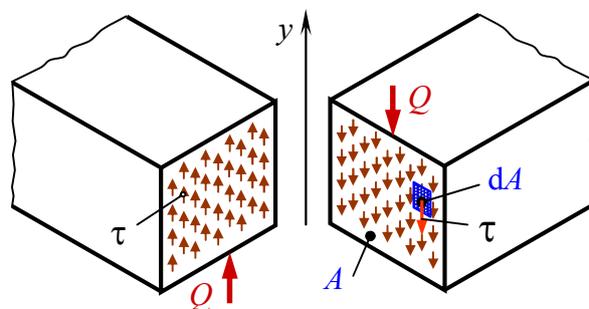
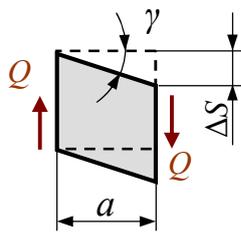


Рис. 4.2

$$Q = \tau \cdot A, \quad \text{откуда} \quad \boxed{\tau = \frac{Q}{A}}. \quad (4.1)$$

### II. Геометрическая (деформационная) сторона задачи



В элементе  $B$ , выделенном на рис. 4.1,  $\Delta S$  – абсолютный сдвиг;  $\gamma$  – относительный сдвиг

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (4.2)$$

### III. Физическая сторона задачи

В области упругих деформаций справедлив закон Гука

$$\boxed{\tau = G \cdot \gamma}. \quad (4.3)$$

### IV. Математическая сторона задачи

Подставляя (4.1) и (4.2) в (4.3), получим закон Гука при сдвиге

$$\frac{Q}{A} = G \frac{\Delta S}{a}, \quad \text{откуда} \quad \boxed{\Delta S = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A}}. \quad (4.4)$$

**Произведение  $G \cdot A$  – жесткость сечения при сдвиге.**

$G$  – модуль сдвига, модуль касательной упругости, модуль упругости второго рода. Для стали в расчетах принимают  $G = 80 \text{ ГПа} = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

Установлена связь между упругими постоянными (разд. 2)

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}}, \quad (4.5)$$

где  $\mu$  – коэффициент поперечной деформации (Пуассона). Для стали примерное соотношение  $G \approx 0,4 E$ .

### Напряженное состояние при сдвиге

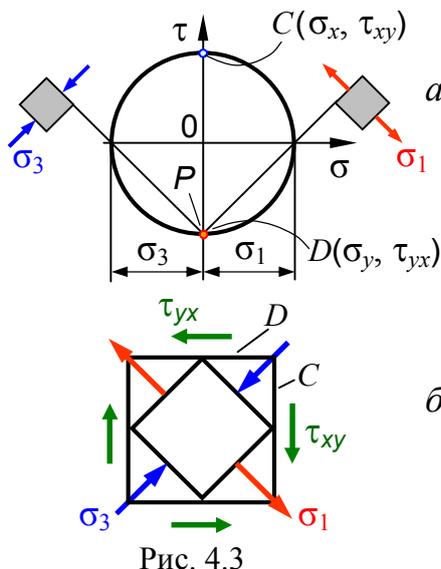


Рис. 4.3

По граням выделенного на рис. 4.1 элемента  $B$  действуют только касательные напряжения  $\tau$ ; нормальные напряжения  $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0$ . Графическим построением (рис. 4.3,  $a$ ) и аналитическим решением по формулам (3.10) и (3.11)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2\tau_{xy}}{0} = -\infty; \quad 2\alpha = -90^\circ;$$

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_{\max} = \tau_{xy} = \sigma_1; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_{\min} = -\tau_{xy} = \sigma_3$$

получаем: главные площадки ориентированы под углом  $45^\circ$  к направлению сдвигающих напряжений (рис. 4.3,  $b$ ), величины главных нормальных напряжений равны касательным напряжениям.

Имеет место *чистый сдвиг* – частный случай плоского напряженного состояния, при котором по граням элемента действуют только касательные напряжения.

При чистом сдвиге главные нормальные напряжения  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{\max}$ .

### Допускаемые напряжения. Расчет на прочность

Эквивалентные напряжения по I гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{экв,I}} = \sigma_1 \leq [\sigma], \text{ но } \sigma_1 = \tau, \text{ следовательно } [\tau] = [\sigma].$$

Соотношение справедливо для хрупких материалов.

Эквивалентные напряжения по III гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{экв,III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \text{ но } \sigma_1 = \tau, \quad \sigma_3 = -\tau. \text{ Тогда } 2[\tau] \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

$$[\tau] = 0,5[\sigma].$$

Эквивалентные напряжения по IV гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{экв,IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Подставив  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$  и  $\sigma_3 = -\tau$ , получим

$$\sigma_{\text{экв,IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2]} = \tau\sqrt{3} \leq [\sigma],$$

откуда

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0,577[\sigma].$$

Таким образом, при расчете деталей из пластичных материалов, работающих на срез (болты, заклепки, шпонки...) **условие прочности** может быть записано так:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau], \text{ где } [\tau] = (0,5 - 0,6)[\sigma]. \quad (4.6)$$

**Смятие** – вид местной пластической деформации, возникающей при сжатии твердых тел, в местах их контакта.

Смятие материала начинается в случае, когда интенсивность напряжений достигает величины предела текучести материала. Размеры смятого слоя зависят от величины, характера и времени воздействия нагрузки, а также от температуры нагрева сжимаемых тел. Смятие наблюдается не только у пластичных, но и у хрупких материалов (закаленная сталь, чугун и др.). Смятие возникает в соединениях (болтовых, заклепочных,

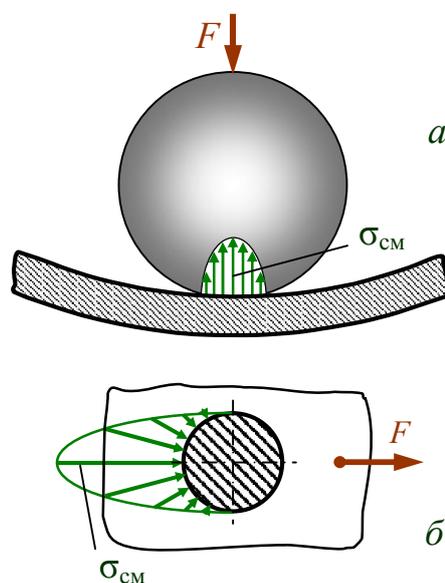


Рис. 4.4

шпоночных и др.), в местах опирания конструкций и в зонах контакта сжатых элементов. Напряжения смятия в зонах контакта, например шара (рис. 4.4, а) или заклепки с листом (рис. 4.4, б) распределяются неравномерно. Однако для простоты в расчетной формуле принимают закон распределения напряжений равномерный. Смятие широко используется для создания заклепочных, врубовых и других плотных соединений; является начальной стадией таких процессов холодной и горячей обработки металлов, как прокатка, вальцовка, ковка. Величину напряжений смятия в конструкциях обычно ограничивают допуском напряжением смятия, которое определяется характером соприкасающихся поверхностей, свойствами используемого материала и его ориентацией относительно действующих нагрузок (например, в случае древесины – вдоль или поперек волокон). Условие прочности

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} \leq [\sigma_{\text{см}}].$$

Для сталей часто принимают  $[\sigma_{\text{см}}] = (1,5 \dots 2,0)[\sigma_p]$ .

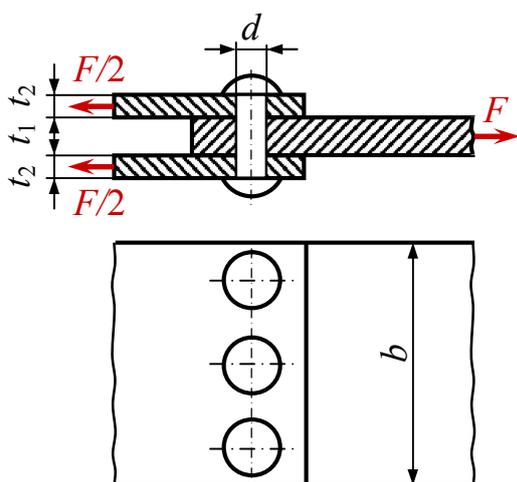


Рис. 4.5

**Пример 4.1.** Подобрать диаметр заклепок, соединяющих накладки толщиной  $t_2 = 3$  мм с листом толщиной  $t_1 = 5$  мм; проверить прочность заклепок на смятие и листов на разрыв. Материал листов и заклепок – прокат из стали Ст3, имеющей предел текучести  $\sigma_T = 235$  МПа. Нагрузка, приложенная к соединению,  $F = 8$  кН. Ширина листов  $b = 50$  мм.

**Решение.** Элементы заклепочного соединения работают на срез (сдвиг), растяжение и смятие. Для определения допустимых напряжений воспользуемся как известными (2.11), (4.6) соотношениями на основе механической характеристики – предела текучести и нормативного коэффициента запаса, так и рекомендациями, приведенными в справочной литературе.

$$[\sigma_p] = \sigma_T / [n_T] = 235 / 1,5 = 156,7 \text{ МПа} \approx 160 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{\text{см}}] = (1,5 \dots 2,0)[\sigma_p] = (1,5 \dots 2,0) \cdot 160 = (240 \dots 320) \text{ МПа}.$$

Допускаемые напряжения согласно рекомендациям табл. П.2.4:

$$[\sigma_p] = 125 \text{ МПа}; \quad [\tau_{\text{ср}}] = 75 \text{ МПа}; \quad [\sigma_{\text{см}}] = 190 \text{ МПа}.$$

## 1. Определение диаметра заклепок

Из двух значений допускаемого напряжения на срез (96 и 75 МПа) принимаем меньшее значение допускаемого напряжения  $[\tau_{\text{ср}}] = 75$  МПа.

Из условия прочности при срезе (4.1)

$$\tau = \frac{Q}{A_{\text{ср}}} \leq [\tau]$$

определяем требуемую площадь поперечного сечения заклепок.

Стержень заклепки подвергается перерезыванию в двух плоскостях (рис. 4.6); средняя часть заклепки сдвигается вправо. Суммарная площадь среза

$$A_{\text{ср}} \geq \frac{Q}{[\tau]} = \frac{\pi d^2}{4} m \cdot n, \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi \cdot m \cdot n \cdot [\tau]}}$$

где  $m = 2$  – количество плоскостей среза заклепки;

$n = 3$  – количество заклепок.

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 8000}{\pi \cdot 2 \cdot 3 \cdot 75 \cdot 10^6}} = 0,00476 \text{ м.}$$

Принимаем  $d = 5$  мм.

## 2. Проверка заклепок на смятие

Давление, передающееся на поверхность заклепки от листа, распределяется неравномерно, по сложной зависимости, изменяясь от нуля до значительных величин (рис. 4.4). На практике, чтобы вычислить условное напряжение смятия необходимо разделить силу, приходящуюся на заклепку, на площадь диаметрального сечения. Эта площадь представляет собой прямоугольник, одной стороной которой служит диаметр заклепки, другая сторона равна толщине листа, передающего давление на стержень заклепки. Так как толщина среднего листа меньше суммы толщин обеих накладок, то в худших (наиболее опасных) условиях по смятию будет находиться именно средняя часть заклепки. Условие прочности на смятие:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где

$$A_{\text{см}} = d \cdot t_1 \cdot n = 5 \cdot 5 \cdot 3 = 75 \text{ мм}^2.$$

Тогда

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} = \frac{8000}{75} = 106,7 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 106,7 \text{ МПа.}$$

Прочность на смятие обеспечена.

## 3. Проверка прочности листа на разрыв

Опасным считают сечение листа, проходящее через заклепочные отверстия; здесь рабочая ширина листа является наименьшей. Площадь сечения листа, ослабленного заклепочными отверстиями (площадь «живого» сечения)

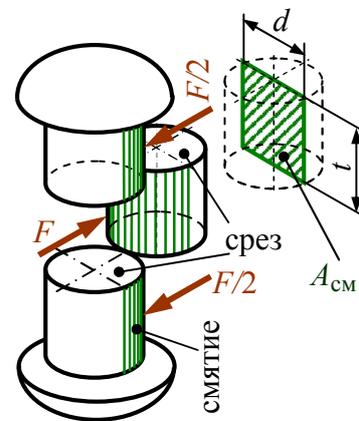


Рис. 4.6

$$A_{\text{разр}} = b \cdot t_1 - n \cdot d \cdot t_1 = t_1(b - n \cdot d) = 5(50 - 3 \cdot 5) = 175 \text{ мм}^2;$$

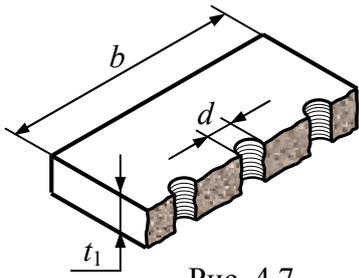


Рис. 4.7

$$\sigma_{\text{разр}} = \frac{8000}{175} = 45,7 \text{ МПа, что меньше допускаемого } [\sigma] = 125 \text{ МПа.}$$

**Вывод.** Из условия прочности на сдвиг подобран диаметр двухсрезных заклепок. Условия прочности на смятие заклепок и разрыва листа выполняются.

**Примечание.** В нормативных документах приведены рекомендации по выбору расположения заклепок на листе (рядное, шахматное), расстоянию между заклепками, расстоянию отверстий под заклепки от края листа и др.

**Пример 4.2.** Определить длину  $\ell$  флангового сварного шва, необходимую для соединения двумя накладками с двух сторон стальных листов, растягиваемых усилием  $F = 500 \text{ кН}$  (рис. 4.8). Допускаемое напряжение на срез металла шва  $[\tau] = 180 \text{ МПа}$ , размер катета сварного шва  $k = 8 \text{ мм}$ .

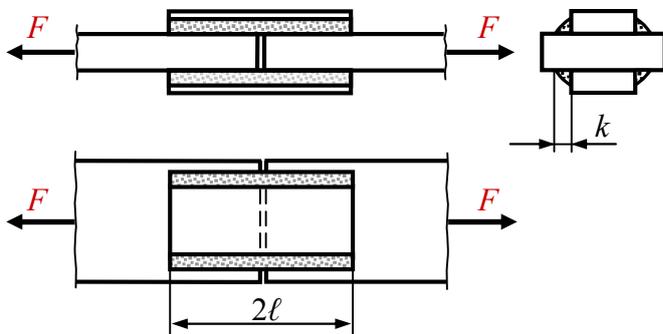


Рис. 4.8

При смещении накладки 2 относительно листа 1 трещина 3 срез (сдвига) в сварном шве "находит" кратчайший путь от вершины треугольника к его основанию, разделяя шов на две части (рис. 4.9). Трещина расположена под углом  $\beta$ , близким к  $45^\circ$ . Ее длина равна  $k \cdot \text{tg } \beta \approx 0,7 \cdot k$ , где  $k$  – катет сварного шва. Площадь сдвига (среза) одного шва  $A_{\text{ср}} = 0,7 \cdot k \cdot \ell$ , где  $\ell$  – длина флангового шва.

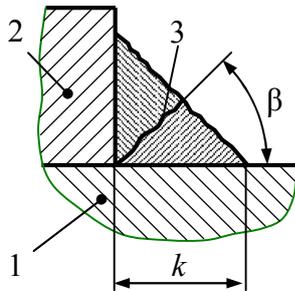


Рис. 4.9

Рассчитываем необходимую длину одного из четырех фланговых швов на одном из листов

$$\tau = \frac{Q}{A_{\text{ср}}} = \frac{F}{4 \cdot \ell \cdot 0,7 \cdot k} = \frac{F}{2,8 \ell k} \leq [\tau],$$

откуда

$$\ell \geq \frac{F}{2,8 [\tau] k} = \frac{500000}{2,8 \cdot 180 \cdot 10^6 \cdot 0,008} = 0,124 \text{ м.}$$

Полученный размер длины  $\ell$  сварного шва округляем до 13 см. Полная длина сварных швов, соединяющих два листа (для учета затрат труда, материалов, электроэнергии), составляет  $L = 2 \times 4 \times \ell = 2 \cdot 4 \cdot 13 = 104 \text{ см}$ .

**Примечание.** В практике расчета сварных соединений применяют формулы, содержащие коэффициенты для учета некоторых особенностей процессов сварки, например, изменение свойств металла на границе сплавления.

## 5. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

**Кручение** – вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $T$ . Остальные силовые факторы ( $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) отсутствуют.

**Вал** – брус, работающий на кручение.

Принято внешние силовые факторы называть *вращающими* или *скручивающими* моментами и обозначать  $M$ ; внутренние усилия – *крутящим* моментом  $T$  (от англ. *torsion, torque*)

В расчетах на прочность и жесткость при кручении знак крутящего момента значения не имеет, но для удобства построения эпюр принято правило:

*Крутящий момент считают положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса он стремится вращать сечение против хода часовой стрелки.*

*Положительный крутящий момент вызывает положительные касательные напряжения*

### 5.1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

На основании метода сечений крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.

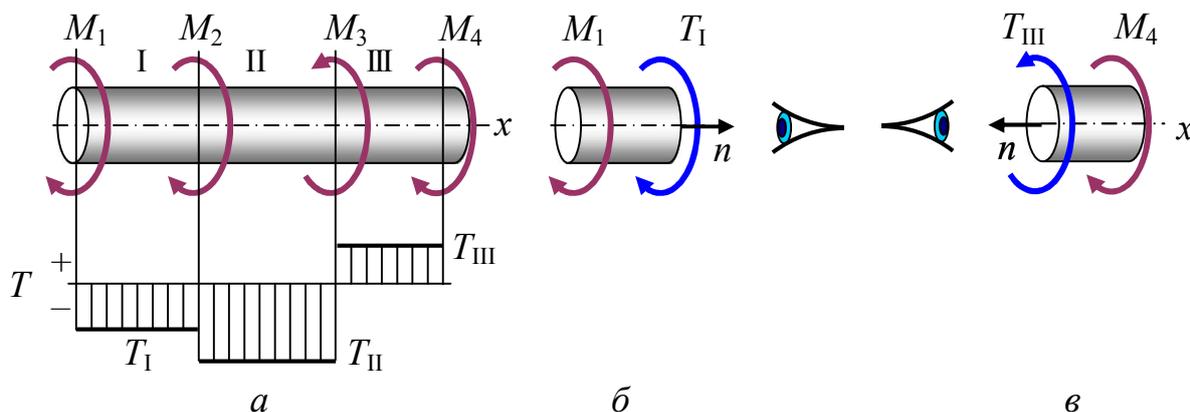


Рис. 5.1

На рис. 5.1, б:  $\sum M_x = 0$ ;  $T_I + M_1 = 0$ ;  $T_I = -M_1$ .

На рис. 5.1, в:  $\sum M_x = 0$ ;  $T_{III} - M_4 = 0$ ;  $T_{III} = M_4$ .

**Эпюра крутящих моментов** – график изменения крутящих моментов по длине бруса.

Во всех случаях эпюры внутренних усилий строят на осевой линии бруса. Величину силового фактора откладывают по нормали к оси.

## 5.2. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

Теория брусьев, имеющих круглое сплошное или кольцевое поперечное сечение, основана на следующих положениях.

– Поперечные сечения бруса плоские до деформации остаются плоскими и в деформированном состоянии – гипотеза твердых дисков (гипотеза Бернулли).

– Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину. Поперечные сечения остаются круглыми.

– Расстояния между поперечными сечениями вдоль оси бруса не изменяются.

Для установления связи напряжений с внутренними усилиями рассмотрим несколько этапов решения задачи.

### I. Условие равновесия – статическая сторона задачи (рис. 5.2, в).

$\tau \cdot dA$  – элементарное усилие;

$\rho \cdot (\tau \cdot dA)$  – элементарный крутящий момент;

$T$  – равнодействующий момент касательных напряжений.

$$T = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA. \quad (5.1)$$

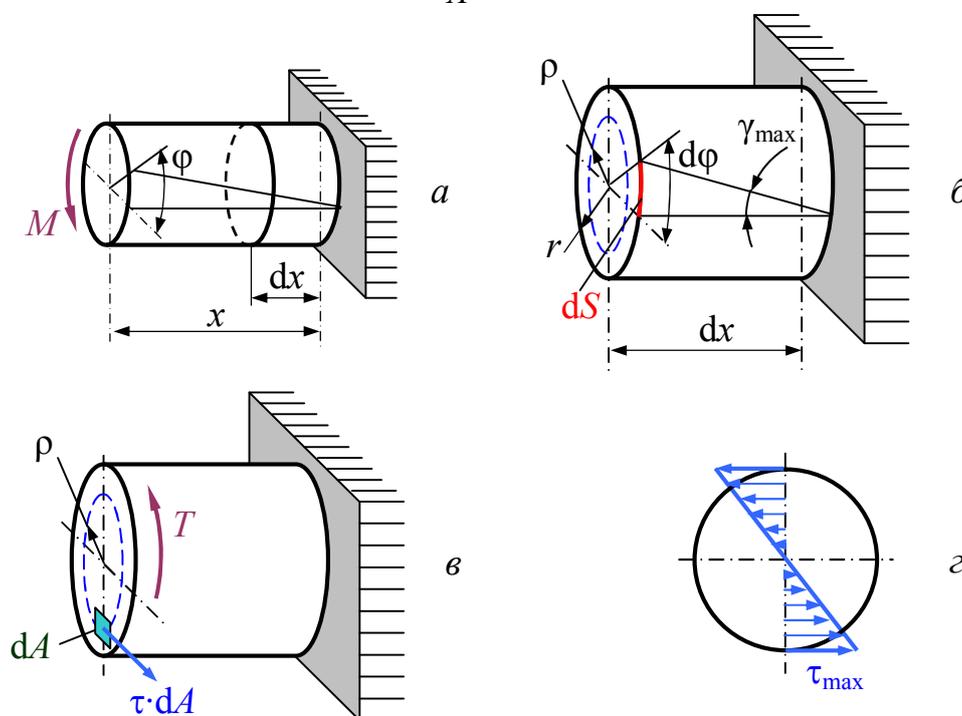


Рис. 5.2

Для нахождения сдвигающих напряжений  $\tau$  рассмотрим физическую сторону задачи.

## II. Физическая сторона задачи – закон Гука при сдвиге

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (5.2)$$

связывающий касательные напряжения  $\tau$  с деформацией сдвига  $\gamma$ . Деформацию сдвига  $\gamma$  найдем, рассмотрев геометрическую сторону задачи.

## III. Деформационная (геометрическая) сторона задачи

Левый торец бруса длиной  $x$  (рис. 5.2, а) под действием внешнего скручивающего момента  $M$  повернется на угол  $\varphi$ . В элементе длиной  $dx$  аналогичный угол  $d\varphi$  (рис. 5.2, б). Образующая цилиндра отклоняется от исходного положения на угол  $\gamma$ . На поверхности элемента радиусом  $r$  угол  $\gamma$  принимает максимальное значение

$$\gamma_{\max} \approx \operatorname{tg} \gamma_{\max} = \frac{dS}{dx} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx}.$$

В цилиндре произвольного радиуса  $\rho$  внутри элемента угол  $\gamma$ :

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.3)$$

Рассмотренные ранее этапы объединяет математическая сторона задачи.

## IV. Математическая сторона задачи

Уравнение (5.1) подставляем в уравнение (5.3),

$$\tau = G \cdot \rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad (5.4)$$

а уравнение (5.4) – в уравнение (5.2):

$$T = \int_A \rho^2 G \frac{d\varphi}{dx} dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA.$$

Обозначая  $\int_A \rho^2 dA = I_p$  как полярный момент инерции (геометрическая характеристика поперечного сечения), получим:

$$T = I_p G \frac{d\varphi}{dx}, \quad \text{откуда} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{G \cdot I_p}. \quad (5.5)$$

Относительный угол закручивания элементарного участка  $d\varphi/dx$  (5.5) подставим в (5.4):

$$\tau = G \cdot \rho \frac{T}{G \cdot I_p}$$

и получим напряжение в произвольной точке сечения

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{I_p}. \quad (5.6)$$

Закон распределения касательных напряжений – линейный. В центре  $\tau = 0$ , так как  $\rho = 0$ , на периферии  $\tau = \tau_{\max}$ , так как  $\rho_{\max} = r$  (рис. 5.2, з).

### 5.3. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Принимая отношение  $\frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{I_p}{r} = W_p$ , условие прочности при кручении можно представить как

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (5.7)$$

где  $T_{\max}$  – максимальный крутящий момент (из эпюры внутренних усилий);  
 $W_p$  – полярный момент сопротивления поперечного сечения.

Для круглого сечения  $I_p = \frac{\pi D^4}{32}$ ,  $W_p = \frac{\pi D^3}{16}$ .

Для кольцевого сечения  $I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4)$ ,  $W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4)$ ,

где  $c = \frac{d}{D}$  – коэффициент пустотелости.

Если сечение некруглое (прямоугольное, треугольное, эллиптическое...), используют  $I_k$ ,  $W_k$ , которые вычисляют по специальным формулам.

Допускаемое напряжение при кручении  $[\tau] = (0,5-0,6)[\sigma]$ .

Виды расчетов на прочность:

а) поверочный – вычисляют  $\tau_{\max}$  и сравнивают его с  $[\tau]$ , определяя недогрузку или перегрузку в процентах, либо находят коэффициент запаса прочности и сравнивают его с нормативными значениями;

б) проектный – вычисляют диаметр вала  $D$  при известных значениях  $T$  и  $[\tau]$ ;

в) определяют допускаемый крутящий момент при известных диаметре вала  $D$  и допускаемом касательном напряжении  $[\tau]$ .

### 5.4. ДЕФОРМАЦИЯ ВАЛА ПРИ КРУЧЕНИИ

Из уравнения (5.5)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{G \cdot I_p} \quad (5.8)$$

находим угол закручивания элементарного участка

$$d\varphi = \frac{T}{G \cdot I_p} dx,$$

а угол закручивания всего вала

$$\varphi = \int_{\ell} \frac{T}{G \cdot I_p} dx.$$

Для вала *постоянной* жесткости сечения (произведение  $G \cdot I_p$ ) на длине  $\ell$  и *постоянного* крутящего момента  $T$  угол закручивания вала

$$\varphi = \frac{T \cdot \ell}{G \cdot I_p}. \quad (5.9)$$

Полученную зависимость называют **законом Гука при кручении**. Произведение  $G \cdot I_p$  – **жесткость сечения при кручении**.

### 5.5. РАСЧЕТ ВАЛОВ НА ЖЕСТКОСТЬ

За меру жесткости принимают относительный (погонный) угол закручивания, то есть угол, приходящийся на единицу длины вала (1 м)

$$\theta = \frac{\varphi}{\ell} = \frac{T}{G \cdot I_p}.$$

$$\text{Условие жесткости: } \theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \leq [\theta],$$

где  $[\theta]$  имеет размерность рад / м. Чаще пользуются условием

$$\theta^\circ = \frac{T_{\max}}{G \cdot I_p} \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta^\circ]. \quad (5.10)$$

Допускаемое значение угла  $[\theta^\circ]$  закручивания зависит от назначения вала. В трансмиссиях принимают  $[\theta^\circ] = (0,3-1,0)$  град/м. В подвеске гусеничных машин (танков, тракторов), а также артиллерийских орудий в качестве упругих элементов используют торсионы – валы, углы закручивания которых достигают  $\approx 20$  град/м. Схема торсионной подвески приведена на обложке учебного пособия.

При расчете валов на прочность и жесткость часто задают мощность  $N$ , передаваемую валом и частоту его вращения  $n$ . Для вычисления крутящего момента по этим данным удобно воспользоваться табл. 5.1.

Таблица 5.1

$M = \frac{N}{\omega}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{с}^{-1}} = \text{Н} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N}{n} \frac{30}{\pi} = 9549 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{кВт}}{\text{мин}^{-1}} = \text{Н} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N}{n} \frac{30}{\pi \cdot 9,807} = 973,8 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{кВт}}{\text{мин}^{-1}} = \text{кг} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N}{n} \frac{30 \cdot 0,736}{\pi} = 7028 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{л.с.}}{\text{мин}^{-1}} = \text{Н} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N}{n} \frac{30 \cdot 0,736}{\pi \cdot 9,807} = 71620 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{л.с.}}{\text{мин}^{-1}} = \text{кг} \cdot \text{см}$

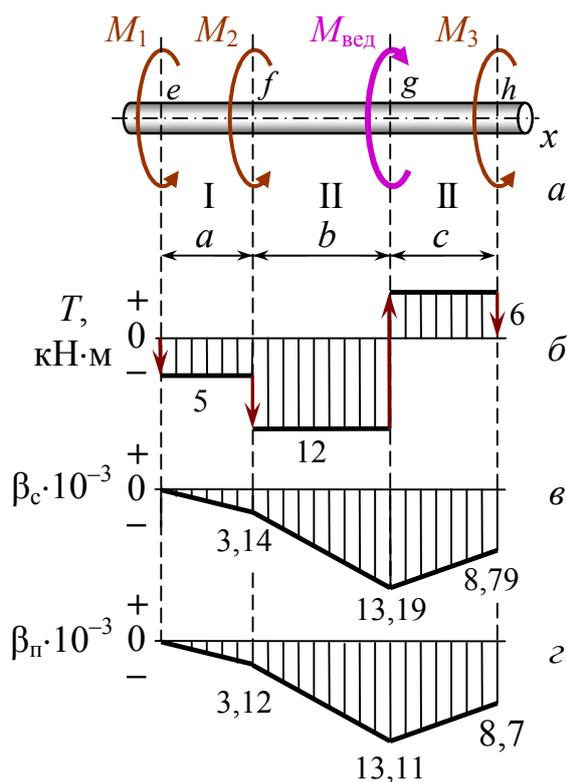


Рис. 5.3

$M_{\text{вед}} - M_1 - M_2 - M_3 = 0$ , откуда  $M_{\text{вед}} = M_1 + M_2 + M_3 = 5 + 7 + 6 = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Для расчетов на прочность и жесткость необходимо найти положение опасных сечений и величины крутящих моментов, действующих в этих сечениях вала (рис. 5.3, а). Воспользовавшись методом сечений определим внутренние усилия и построим эпюру крутящих моментов (рис. 5.3, б). Стрелками показаны скачки момента. Опасными являются все сечения на участке II, где действует  $T_{\text{max}} = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

## II. Проектный расчет валов сплошного и полого сечений

Предварительно найдем допускаемое касательное напряжение, связанное с допускаемым нормальным напряжением. Принимаем по третьей теории прочности

$$[\tau] = 0,5 [\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа}.$$

Из условий прочности (5.7) и жесткости (5.10) при кручении находим требуемые значения полярных момента сопротивления и момента инерции

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T_{\text{max}}}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow W_p \geq \frac{T_{\text{max}}}{[\tau]} = \frac{12000}{80 \cdot 10^6} = 0,00015 \text{ м}^3 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta] \Rightarrow I_p \geq \frac{T}{G \cdot [\theta]} \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{12000 \cdot 180}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,8 \cdot \pi} = 1,074 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Для наглядности сходства и различия расчетов сплошного и полого валов результаты и представляем их в виде двух колонок.

**Пример 5.1.** Из условия прочности и жесткости выполнить проектный расчет: определить диаметры валов в двух вариантах исполнения – сплошного и полого с коэффициентом пустотелости  $s = d/D = 0,8$ . Результаты округлить согласно ГОСТу. Построить эпюры углов закручивания вала. Варианты исполнения валов сопоставить по металлоемкости и жесткости.

Дано:

$$M_1 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad a = 0,6 \text{ м};$$

$$M_2 = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad b = 0,8 \text{ м};$$

$$M_3 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad c = 0,7 \text{ м};$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}; \quad [\theta] = 0,8 \text{ град/м}.$$

### I. Определение внутренних усилий

Значение ведущего момента  $M_{\text{вед}}$  определим из условия равновесия вала:  $\Sigma M_x = 0$ ;

### Этапы расчетов

Сплошное сечение	Полое сечение
Моменты сопротивления полярные	
$W_{p, \text{спл}} = \frac{\pi D^3}{16}$	$W_{p, \text{пол}} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4)$
Диаметры из условия прочности	
$D_{\text{спл}} \geq 3 \sqrt{\frac{16 W_p}{\pi}}$	$D_{\text{пол}} \geq 3 \sqrt{\frac{16 W_p}{\pi (1 - c^4)}}$
$D_{\text{спл}} = 3 \sqrt{\frac{16 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,0914 \text{ м}$	$D_{\text{пол}} \geq 3 \sqrt{\frac{16 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot (1 - c^4)}} = 0,1090 \text{ м}$
Моменты инерции полярные	
$I_{\text{спл}} = \frac{\pi D^4}{32}$	$I_{\text{пол}} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4)$
Диаметры из условия жесткости	
$D_{\text{спл}} \geq 4 \sqrt{\frac{32 \cdot I_{\text{спл}}}{\pi}}$	$D_{\text{пол}} \geq 4 \sqrt{\frac{32 \cdot I_{\text{пол}}}{\pi (1 - c^4)}}$
$D_{\text{спл}} \geq 4 \sqrt{\frac{32 \cdot 1,074 \cdot 10^{-5}}{\pi}} = 0,1023 \text{ м}$	$D_{\text{пол}} \geq 4 \sqrt{\frac{32 \cdot 1,074 \cdot 10^{-5}}{\pi (1 - 0,8^4)}} = 0,1167 \text{ м}$
Диаметры, округленные согласно ГОСТу 6636–69 (табл. П. 2.3)	
$D_{\text{спл}} = 105 \text{ мм}$	$D_{\text{пол}} = 120 \text{ мм}$
Площади поперечных сечений	
$A_{\text{спл}} = \frac{\pi D_{\text{спл}}^2}{4}$	$A_{\text{пол}} = \frac{\pi D_{\text{пол}}^2}{4} (1 - c^2)$
$A_{\text{спл}} = \frac{\pi}{4} 0,105^2 = 86,6 \text{ см}^2$	$A_{\text{пол}} = \frac{\pi}{4} 0,120^2 (1 - 0,8^2) = 40,7 \text{ см}^2$
Моменты инерции сечений, вычисленные по принятым диаметрам	
$I_{\text{спл}} = \frac{\pi \cdot 0,105^4}{32} = 1,193 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$	$I_{\text{пол}} = \frac{\pi \cdot 0,120^4}{32} (1 - 0,8^4) = 1,202 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$
Жесткость поперечных сечений	
$G \cdot I_p = 80 \cdot 10^9 \cdot 1,19 \cdot 10^{-5} = 0,955 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$	$G \cdot I_p = 80 \cdot 10^9 \cdot 1,20 \cdot 10^{-5} = 0,961 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$

Углы закручивания участков вала	
$\varphi_I = \frac{T_I a}{G I_p} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{0,955 \cdot 10^6} = -0,00314$	$\varphi_I = \frac{T_I a}{G I_p} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{0,961 \cdot 10^6} = -0,00312$
$\varphi_{II} = \frac{T_{II} b}{G I_p} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,955 \cdot 10^6} = -0,01005$	$\varphi_{II} = \frac{T_{II} b}{G I_p} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,961 \cdot 10^6} = -0,00999$
$\varphi_{III} = \frac{T_{III} c}{G I_p} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{0,955 \cdot 10^6} = 0,00440$	$\varphi_{III} = \frac{T_{III} c}{G I_p} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{0,961 \cdot 10^6} = 0,00437$
Углы закручивания характерных сечений вала	
$\beta_{спл,e} = 0;$	$\beta_{пол,e} = 0$
$\beta_{спл,f} = \varphi_I = -3,14 \cdot 10^{-3};$	$\beta_{пол,f} = \varphi_I = -3,12 \cdot 10^{-3}$
$\beta_{спл,g} = \varphi_I + \varphi_{II} = -(3,14 + 10,05) \cdot 10^{-3} =$ $= -13,19 \cdot 10^{-3};$	$\beta_{пол,g} = \varphi_I + \varphi_{II} = -(3,12 + 9,99) \cdot 10^{-3} =$ $= -13,11 \cdot 10^{-3}$
$\beta_{спл,h} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} =$ $= -(3,14 + 10,05 - 4,40) \cdot 10^{-3} = -8,79 \cdot 10^{-3}.$	$\beta_{пол,h} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} =$ $= -(3,12 + 9,99 - 4,37) \cdot 10^{-3} = -8,74 \cdot 10^{-3}$

Строим эпюры углов закручивания вала сплошного и полого сечений (рис. 5.3, в и г). Результаты расчета вала в двух вариантов исполнения сведены в табл. 5.2

Таблица 5.2

Поперечное сечение вала	Наружный диаметр вала, мм			Площадь поперечного сечения, мм <sup>2</sup>	Угол закручивания крайнего сечения
	Из условия прочности	Из условия жесткости	Принято по ГОСТу		
Сплошное	91,4	102	105	8659	0,00879
Полое	109	116,7	120	4072	0,00874

### III. Сопоставление металлоемкости валов двух вариантов

Металлоемкость вала определяется его объемом, то есть произведением длины на площадь поперечного сечения. Поскольку длина вала неизменна, сопоставим площади поперечных сечений сплошного вала с ПОЛЫМ

$$\frac{A_{\text{спл}}}{A_{\text{пол}}} = \frac{(\pi/4)D_{\text{спл}}^2}{(\pi/4)D_{\text{пол}}^2(1-c^2)} = \frac{105^2}{120^2(1-0,8^2)} = 2,13.$$

### Выводы:

– Из условий прочности и жесткости найдены диаметры вала двух вариантов исполнения, сплошного и пустотелого: 105 и 120 мм соответственно.

– Вычислены деформации валов на каждом из участков, построены эпюры углов закручивания валов сплошного и пустотелого. Жесткости валов практически одинаковы.

– Сопоставлены металлоемкости валов двух вариантов исполнения. Расход металла для вала сплошного сечения вдвое больше, чем для вала пустотелого.

**Примечание.** Полученный результат по сопоставлению металлоемкости валов ожидаем, поскольку достаточно большой объем материала, сосредоточенный около центра тяжести сечения, испытывает напряжение ниже

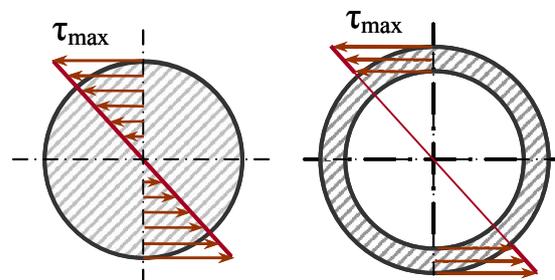


Рис. 5.4

допускаемого и вклад его в общую прочность конструкции невелик. Поэтому целесообразно убирать неработающий материал из этой области. Конструкции из полого сечения созданы природой: камыш, тростник, бамбук, злаковые культуры, трубчатые кости птиц и млекопитающих. В авиации и космонавтике используют полые валы, в строительстве – пустотные плиты перекрытий.

### 5.6. ПОНЯТИЕ О КРУЧЕНИИ ВАЛОВ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Задача определения напряжений в брус с некруглым поперечным сечением методами сопротивления материалов **решена быть не может**. Упрощающая *гипотеза плоских сечений* в данном случае *неприемлема*. Деформация скручиваемого стержня состоит из двух частей: кроме поворотов поперечных сечений, как в круглом вале (рис. 5.5, б), происходит еще и депланация (искривление, коробление) поперечных сечений (рис. 5.5, в). Характер деформаций можно наблюдать на резиновой модели стержня прямоугольного поперечного сечения с нанесенной на его гранях квад-

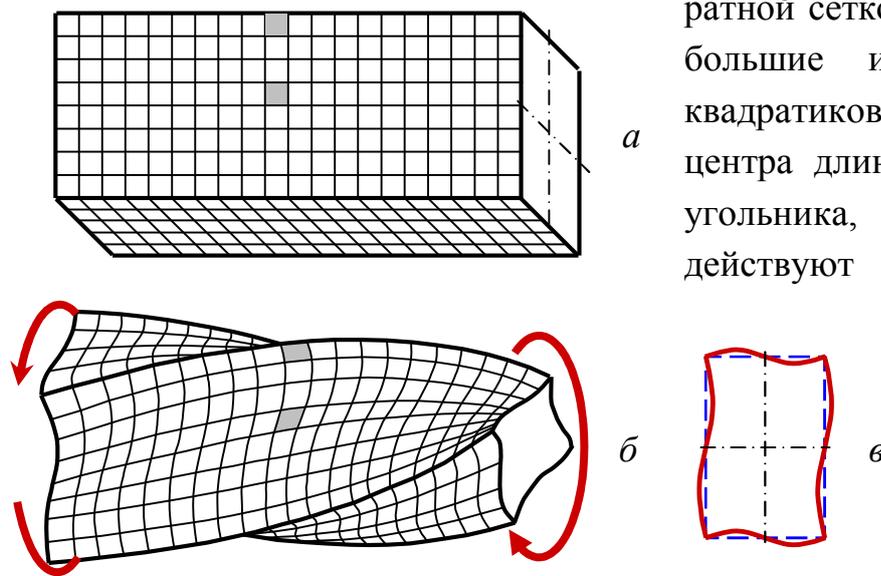


Рис. 5.5

ратной сеткой (рис. 5.5, *a*). Наибольшие искажения (сдвиги) квадратиков наблюдаются у центра длинных сторон прямоугольника, то есть там, где действуют наибольшие касательные напряжения. Квадратики у ребер, то есть в углах сечения, не перекашиваются, напряжения там отсутствуют.

сутствуют.

Общий метод решения задачи о кручении стержня некруглого сечения впервые был дан Б. Сен-Венаном в 1864 г. Теоретические исследования кручения бруса некруглого сечения приводятся в теории упругости.

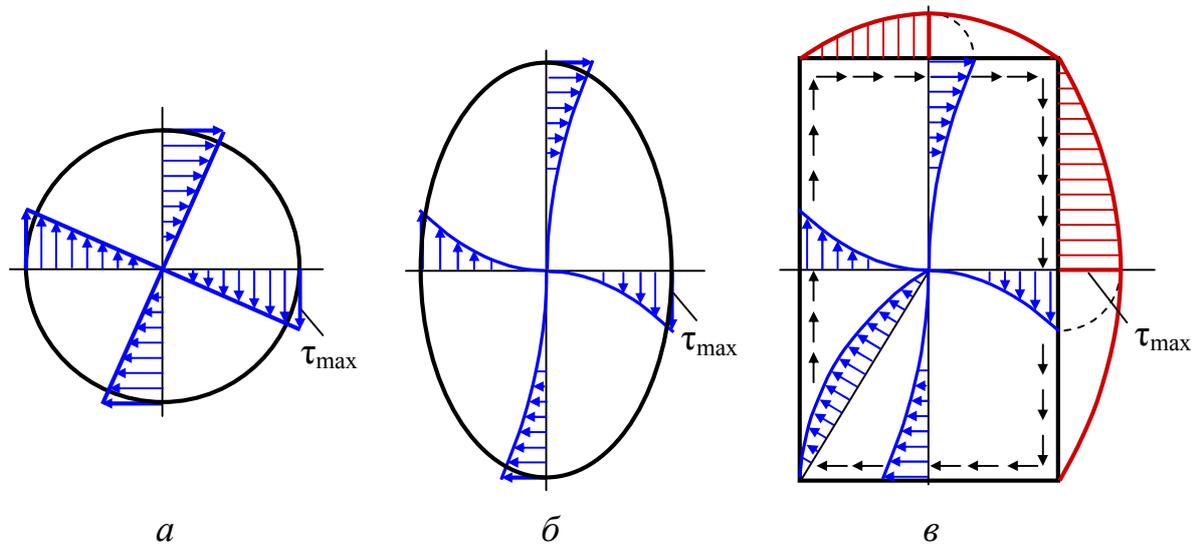


Рис. 5.6

При экспериментальном решении задач о кручении ценной оказалась мембранная аналогия, введенная Л. Прандтлем (1903 г.). Дифференциальные уравнения поверхности упругой мембраны, опертой по краям того же очертания, что и поперечное сечение скручиваемого стержня, и подвергнутые равномерному гидростатическому давлению, аналогичны уравнениям, описывающим распределение касательных напряжений в этом же

сечении. Существуют аналогии между задачами о кручении и гидродинамическими задачами о движении жидкости в трубах.

Анализируя различия в эпюрах касательных напряжений в круглом (подразд. 5.3 и рис. 5.6, *а*) и некруглом сечениях (рис. 5.6, *б* и *в*) можно сделать выводы.

– В брусе любой формы поперечного сечения касательные напряжения в центре тяжести равны нулю.

– В брусе круглого поперечного сечения максимальные напряжения – на периферии, в точках наиболее удаленных от центра тяжести; закон распределения напряжений – линейный.

– Если сечение имеет внешние углы (они наиболее удалены от центра тяжести), то в них касательные напряжения обращаются в нуль. Закон распределения напряжений – нелинейный.

– Наибольшие напряжения возникают по серединам сторон; максимальные – по серединам длинных сторон (расстояние до них минимальное).

В расчетах на прочность и жесткость используют формулы, аналогичные (5.7) и (5.9)

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_{\kappa}} \leq [\tau], \quad \varphi = \frac{T \cdot \ell}{G \cdot I_{\kappa}},$$

где  $W_{\kappa}$  и  $I_{\kappa}$  – момент сопротивления и момент инерции сечения при кручении – геометрические характеристики, аналогичные полярным моменту сопротивления и моменту инерции круглого сечения; вычисляются по формулам, содержащим размеры сторон фигуры и коэффициенты, зависящие от их отношения (см. таблицу в конце раздела 6).

## 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

При растяжении стержня напряжения во всех точках одинаковы, поэтому его напряженное состояние определяется внешней нагрузкой и площадью поперечного сечения, но не зависит от его формы.

В случае изгиба и кручения брусьев напряжения в точках поперечного сечения зависят от его формы и размеров, а при изгибе еще и от его ориентации к направлению нагрузок. Кроме площади  $A$  (англ. area) сечение характеризуется:

- статическим моментом площади  $S$  (англ. area-moment ratio);
- моментами инерции  $I$  (англ. moment of inertia);
- радиусами инерции  $i$  (англ. radius of inertia);
- моментами сопротивления сечения  $W$  (англ. modulus of section).

У большинства характеристик физического смысла нет, но есть геометрическая интерпретация и аналогия с физическими и механическими понятиями.

### 6.1. СТАТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ

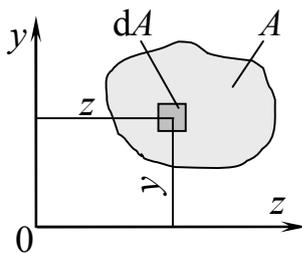


Рис. 6.1

**Статический момент площади** – *распространенная на всю площадь сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на расстояние от них до этой оси* (рис. 6.1)

$$S_z = \int_A y \cdot dA, \quad S_y = \int_A z \cdot dA. \quad (6.1)$$

Это понятие аналогично моменту силы относительно оси. Если предположить, что  $A$  – вес пластины, имеющей форму нашего сечения, то статический момент  $S_z$  – это момент силы тяжести пластины относительно оси  $z$ . Размерность: единицы длины в третьей степени ( $\text{см}^3$ ;  $\text{м}^3$ ). Знаки: плюс, ноль и минус (рис. 6.2).

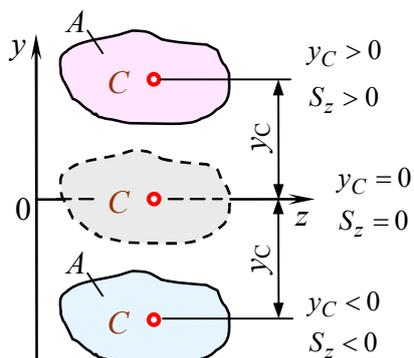


Рис. 6.2

**Ось центральная** – *ось, относительно которой статический момент площади равен нулю.*

**Центр тяжести сечения** – *точка пересечения центральных осей.*

Если фигура имеет ось симметрии, то эта ось является центральной.

Статический момент составного сечения равен сумме статических моментов элементов этого сечения. Это следует из свойства определенного интеграла, который можно вычислять по частям – свойство аддитивности (от англ. *add* – прибавлять, присоединять, складывать). При известных статических моментах частей сечения можно найти координаты центра тяжести составной фигуры:

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2 + \dots + z_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}; \quad y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + \dots + y_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}.$$

**Пример 6.1.** Определить положение центральных осей, параллельных основанию и высоте фигуры (рис. 6.3).

Размеры фигуры:

$$H = 10 \text{ см}; \quad h = 2 \text{ см};$$

$$L = 8 \text{ см}; \quad \ell = 2 \text{ см}.$$

**Решение.** Разбиваем сложную фигуру на две простые, в конкретном примере – на два прямоугольника. Их центры тяжести  $C_1$  и  $C_2$  расположены посередине высоты и посередине ширины каждого из прямоугольников.

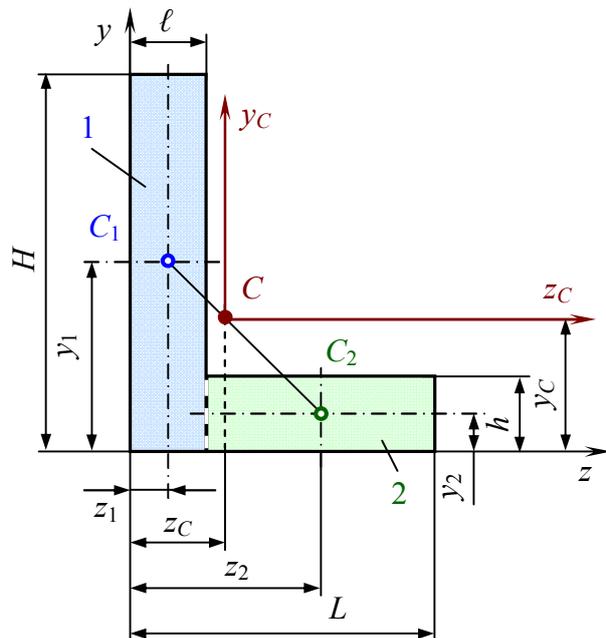


Рис. 6.3

### Координаты центров тяжести и площади простых фигур

$$z_1 = \frac{\ell}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см};$$

$$z_2 = \ell + \frac{L - \ell}{2} = 2 + \frac{8 - 2}{2} = 5 \text{ см};$$

$$y_1 = \frac{H}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ см};$$

$$y_2 = \frac{h}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см};$$

$$A_1 = \ell \cdot H = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = (L - \ell)h = (8 - 2)2 = 12 \text{ см}^2.$$

### Статические моменты площадей простых фигур

$$S_{z1} = y_1 \cdot A_1 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ см}^3; \quad S_{y1} = z_1 \cdot A_1 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ см}^3;$$

$$S_{z2} = y_2 \cdot A_2 = 1 \cdot 12 = 12 \text{ см}^3; \quad S_{y2} = z_2 \cdot A_2 = 5 \cdot 12 = 60 \text{ см}^3.$$

### Координаты центра тяжести составной фигуры

$$z_c = \frac{S_{y1} + S_{y2}}{A_1 + A_2} = \frac{20 + 60}{20 + 12} = 2,5 \text{ см}; \quad y_c = \frac{S_{z1} + S_{z2}}{A_1 + A_2} = \frac{100 + 12}{20 + 12} = 3,5 \text{ см}.$$

Через найденную точку  $C$  (рис. 6.3) проводим центральные оси  $z_c$  и  $y_c$ , параллельные основанию фигуры и ее высоте.

**Примечание.** Центр тяжести фигуры, составленной из двух частей, лежит на линии, соединяющей центры тяжести простых фигур ее составляющих, причем расстояния до них обратно пропорциональны площадям простых фигур. Если сложная фигура составлена из нескольких простых, то общий центр тяжести находится внутри многоугольника, вершинами которого являются центры тяжести простых фигур.

## 6.2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

**Момент инерции** – распространяемая на всю площадь сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на квадраты расстояний от них до этой оси.

$$\text{Осевые моменты инерции } I_z = \int_A y^2 \cdot dA, \quad I_y = \int_A z^2 \cdot dA. \quad (6.2)$$

$$\text{Полярный момент инерции } I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA, \quad (6.3)$$

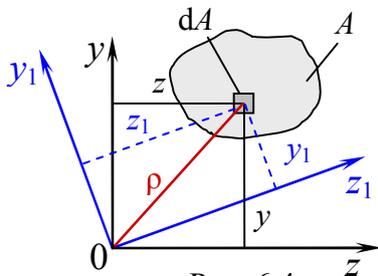


Рис. 6.4

где  $\rho$  – расстояние от площадки  $dA$  до точки (полюса), относительно которого вычисляется полярный момент инерции. Полярный момент инерции связан с осевыми моментами инерции

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A (z_1^2 + y_1^2) dA,$$

то есть для любой пары взаимно перпендикулярных осей, проходящих через полюс 0

$$I_p = I_z + I_y = I_{z_1} + I_{y_1}. \quad (6.4)$$

*Сумма моментов инерции относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей с общим началом постоянна.*

Центробежный момент инерции определяется интегралом произведений элементарных площадей на их расстояния до двух взаимно перпендикулярных осей (рис. 6.4)

$$I_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA. \quad (6.5)$$

Размерность моментов инерции – единицы длины в четвертой степени. Осевые и полярный момент инерции всегда положительны (так как переменные  $z$ ,  $y$  во второй степени), центробежный момент инерции может принимать значения (+), (–) и ноль. Если фигура имеет ось симметрии, то относительно этой оси центробежный момент инерции равен нулю. Действительно, произведения  $z_1 y_1$  и  $z_2 y_2$  для фигур  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 6.5) различаются лишь знаком, следовательно, их сумма равна нулю.

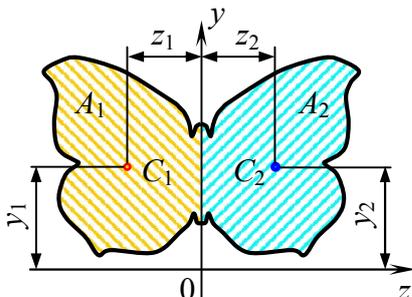


Рис. 6.5

**Пример 6.2.** Найти моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей, параллельных основанию и высоте.

**Решение.** Обозначим ширину  $b$  и высоту  $h$  сечения соответственно от английских слов *breadth* и *height*. Выделим элементарную площадку

$$dA = b \cdot dy.$$

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}.$$

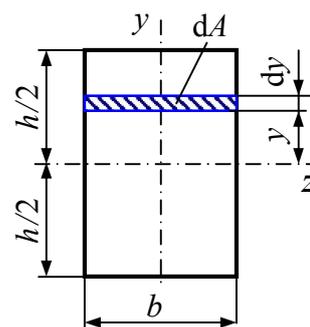


Рис. 6.6

Аналогичное решение относительно оси  $y$ . Таким образом

$$\boxed{I_z = \frac{bh^3}{12}} \quad \boxed{I_y = \frac{b^3h}{12}} \quad (6.6)$$

*Момент инерции прямоугольника пропорционален первой степени основания и кубу высоты.*

**Пример 6.3.** Найти моменты инерции круглого и кольцевого сечений.

**Решение.** Площадь  $dA$  элементарного кольца радиусом  $\rho$  (рис. 6.7) – произведение длины окружности кольца на его толщину  $d\rho$ :  $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$ .

Полярный момент инерции круга:

$$I_p = \int_A \rho^2 d\rho = \int_0^{D/2} 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \frac{(D/2)^4}{4} = \pi \frac{D^4}{32}.$$

Поскольку имеется связь  $I_p = I_z + I_y$  (6.4), а для круга

$$I_z = I_y, \text{ то } I_z = I_y = \frac{I_p}{2}.$$

Таким образом, полярный и осевые моменты инерции круга соответственно равны

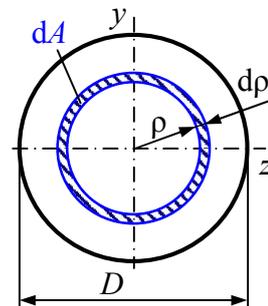


Рис. 6.7

$$\boxed{I_p = \frac{\pi D^4}{32}} \quad \boxed{I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}} \quad (6.7)$$

Кольцо  $I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$ . Обозначая  $c = \frac{d}{D}$  – коэффициентом пустотелости, получим полярный и осевые моменты инерции кольца:

Таким образом, полярный и осевые моменты инерции кольца:

$$\boxed{I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4)}, \quad \boxed{I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4)}. \quad (6.8)$$

**Пример 6.4.** Найти момент инерции треугольника (рис. 6.8) относительно центральной оси, параллельной основанию.

**Решение.** Выделенную элементарную площадку  $dA$  можно представить в виде прямоугольника, основание которого  $b_y$  переменное, так как зависит от координаты  $y$ . Площадь выделенного элемента  $dA = b_y \cdot dy$ .

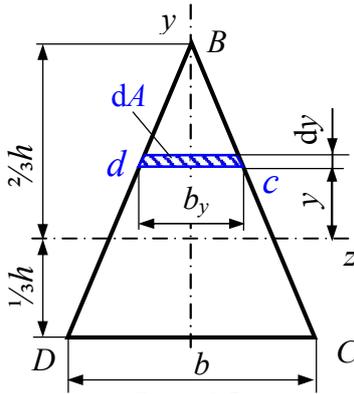


Рис. 6.8

Из подобия  $\triangle DBC \sim \triangle dBc$  следует:

$$\frac{b_y}{b} = \frac{2/3h - y}{h}, \quad \text{откуда} \quad b_y = \frac{b}{h} \left( \frac{2}{3}h - y \right).$$

$$\text{Тогда} \quad dA = \frac{b}{h} \left( \frac{2}{3}h - y \right) dy.$$

Момент инерции относительно оси  $z$

$$I_z = \int_A y^2 dA = \frac{b}{h} \int_{-h/3}^{2/3h} \left( \frac{2}{3}h - y \right) y^2 dy = \frac{b}{h} \left( \frac{2}{3}h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{-h/3}^{2/3h} = \frac{bh^3}{36}.$$

Окончательно 
$$I_z = \frac{bh^3}{36}. \quad (6.9)$$

### 6.3. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

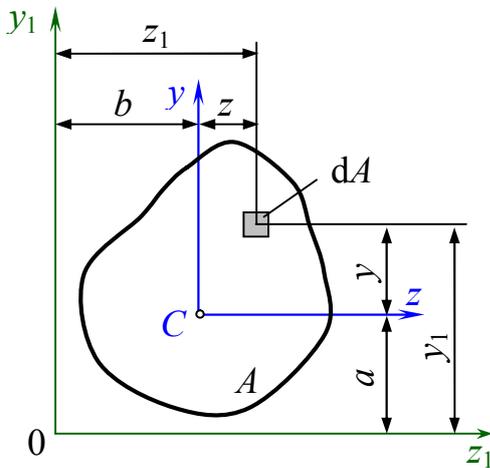


Рис. 6.9

$C$  – центр тяжести фигуры площадью  $A$ ; оси  $z, y$  – центральные;  $a, b$  – расстояния между параллельными осями. Новые координаты для произвольной площадки  $dA$ :

$$z_1 = z + b; \quad y_1 = y + a.$$

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA;$$

$$I_{z_1} = \underbrace{\int_A y^2 \cdot dA}_I + 2a \underbrace{\int_A y \cdot dA}_{II} + a^2 \underbrace{\int dA}_{III}.$$

Интеграл I – момент инерции фигуры относительно центральной оси; интеграл II – статический момент площади  $A$  относительно оси  $y$  равен нулю, поскольку эта ось является центральной (см. подразд. 6.1); интеграл III – площадь  $A$  фигуры.

$$\boxed{I_{z_1} = I_z + a^2 A}; \quad \boxed{I_{y_1} = I_y + b^2 A}. \quad (6.10)$$

Момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

Для центробежного момента инерции

$$I_{z_1 y_1} = I_{z y} + a \cdot b \cdot A. \quad (6.11)$$

Эти соотношения часто называют формулами Гюйгенса - Штейнера.

**Пример 6.5.** Определить моменты инерции составной фигуры относительно центральных осей, параллельных основанию и высоте фигуры.

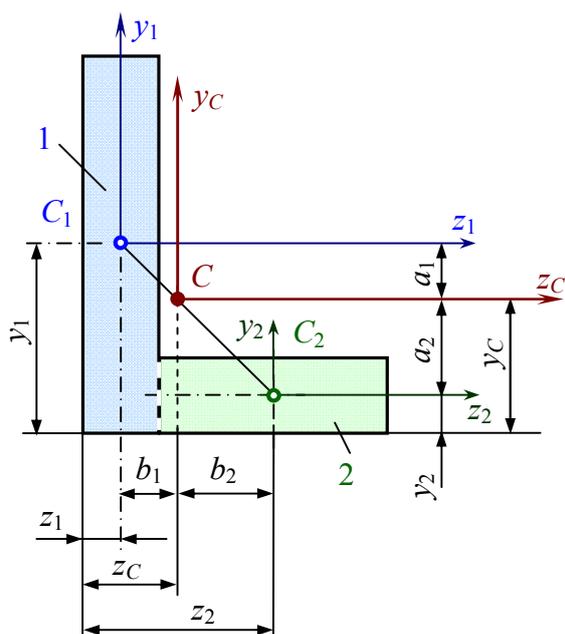


Рис. 6.10

**Решение.** Используем результаты решения примера 6.1:

$$A_1 = 20 \text{ см}^2; \quad A_2 = 12 \text{ см}^2;$$

$$z_1 = 5 \text{ см}; \quad z_2 = 1 \text{ см};$$

$$y_1 = 5 \text{ см}; \quad y_2 = 1 \text{ см};$$

$$z_C = 2,5 \text{ см}; \quad y_C = 3,5 \text{ см}.$$

Расстояния между центральными осями  $z_C$  и  $y$  осями составляющих простых фигур  $z_i, y_i$

$$a_1 = y_1 - y_C = 5 - 3,5 = 1,5 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_C = 1 - 3,5 = -2,5 \text{ см};$$

$$b_1 = z_1 - z_C = 5 - 2,5 = 2,5 \text{ см};$$

$$b_2 = z_2 - z_C = 1 - 2,5 = -1,5 \text{ см}.$$

Фигура 1 выше центральной оси – расстояние  $a_1 > 0$ ; фигура 2 ниже оси  $z_C$  – расстояние  $a_2$  отрицательно. Аналогично с координатами  $b_1$  и  $b_2$ . Моменты инерции относительно центральных осей, параллельных основанию и высоте (используем формулы (6.10) и (6.11)):

$$\begin{aligned} I_{z_C} &= \left[ \frac{\ell \cdot H^3}{12} + a_1^2 A_1 \right] + \left[ \frac{(L - \ell) \cdot h^3}{12} + a_2^2 A_2 \right] = \\ &= \left[ \frac{2 \cdot 10^3}{12} + 1,5^2 \cdot 20 \right] + \left[ \frac{(8 - 2)2^3}{12} + (-2,5)^2 \cdot 12 \right] = 212 + 75 = 287 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_C} &= \left[ \frac{\ell^3 \cdot H}{12} + b_1^2 A_1 \right] + \left[ \frac{(L - \ell)^3 \cdot h}{12} + b_2^2 A_2 \right] = \\ &= \left[ \frac{2^3 \cdot 10}{12} + (-1,5)^2 \cdot 20 \right] + \left[ \frac{(8 - 2)^3 \cdot 2}{12} + 2,5^2 \cdot 12 \right] = 52 + 111 = 163 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

## Центробежный момент инерции

$$I_{z_c y_c} = [0 + a_1 b_1 A_1] + [0 + a_2 b_2 A_2] = [1,5(-1,5)20] + [(-2,5)2,5 \cdot 12] = -120 \text{ см}^4.$$

Оси  $z_1, z_2$  и  $y_1, y_2$  являются осями симметрии, поэтому относительно них центробежные моменты инерции равны нулю.

**Пример 6.6.** Определить момент инерции таврового

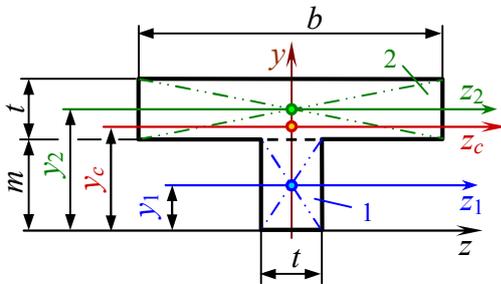


Рис. 6.11

Дано:

$m = 6 \text{ мм}$
$t = 4 \text{ мм}$
$b = 20 \text{ мм}$

сечения (рис. 6.11) относительно центральной оси и оси, проведенной через основание.

**Решение.** Сложную фигуру разбиваем на простые: два прямоугольника, центры тяжести которых, находятся посередине

ширины и посередине высоты. Через основание фигуры проводим ось  $z$ , от которой определяем расстояние до центральных осей  $z_1$  и  $z_2$  элементарных фигур. Вычисляем абсциссы центров тяжести фигур и их площади.

$$y_1 = \frac{m}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ мм}; \quad A_1 = m \cdot t = 6 \cdot 4 = 24 \text{ мм}^2;$$

$$y_2 = m + \frac{t}{2} = 6 + \frac{4}{2} = 8 \text{ мм}; \quad A_2 = b \cdot t = 20 \cdot 4 = 80 \text{ мм}^2.$$

Моменты инерции элементарных фигур относительно оси  $z$

$$(I_z)_1 = \frac{t \cdot m^3}{12} + y_1^2 \cdot A_1 = \frac{4 \cdot 6^3}{12} + 3^2 \cdot 24 = 288 \text{ мм}^4;$$

$$(I_z)_2 = \frac{b \cdot t^3}{12} + y_2^2 \cdot A_2 = \frac{20 \cdot 4^3}{12} + 8^2 \cdot 80 = 5227 \text{ мм}^4.$$

Момент инерции составной фигуры относительно оси  $z$

$$I_z = (I_z)_1 + (I_z)_2 = 288 + 5227 = 5515 \text{ мм}^4.$$

Положение центральной оси

$$y_c = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{3 \cdot 24 + 8 \cdot 80}{24 + 80} = 6,85 \text{ мм}.$$

Момент инерции относительно центральной оси (минимален!)

$$I_{z_c} = I_z - y_c^2 \cdot A = 5515 - 6,85^2(24 + 80) = 635 \text{ мм}^4.$$

### 6.4. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Свяжем новые координаты  $z_1, y_1$  элементарной площадки  $dA$  с координатами в исходной системе  $z, y$  (рис. 6.12):

$$z_1 = OE = OD + DE = OD + CF;$$

$$y_1 = BE = BF - EF = BF - DC.$$

Длины отрезков в исходной системе координат:

$$OD = z \cdot \cos \alpha; \quad CF = y \cdot \sin \alpha;$$

$$BF = y \cdot \cos \alpha; \quad DC = z \cdot \sin \alpha.$$

Таким образом:

$$z_1 = z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha;$$

$$y_1 = y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha.$$

Момент инерции в новой системе координат

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha)^2 = \\ &= \int_A y^2 \cos^2 \alpha \cdot dA - 2 \int_A z \cdot y \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot dA + \int_A z^2 \sin^2 \alpha \cdot dA. \end{aligned}$$

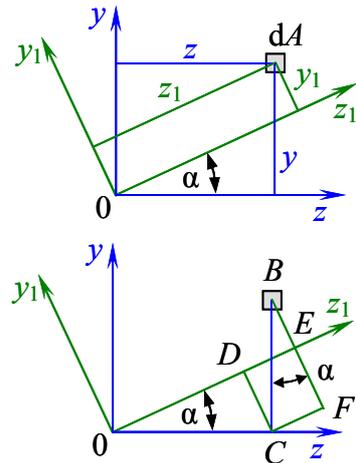


Рис. 6.12

Выполнив аналогичные действия относительно другой оси, получим:

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha; \\ I_{y_1} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha; \\ I_{z_1 y_1} &= \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (6.12)$$

*Примечание.* Относительно главных осей центробежный момент инерции равен нулю (см. подразд. 6.2).

Складывая первые два равенства, получим

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y = I_p. \quad (6.13)$$

*Сумма моментов инерции относительно любых двух взаимно-перпендикулярных осей не меняется (инвариантна) при их повороте.*

## 6.5. ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

При изменении угла  $\alpha$  значения  $I_{z_1}$ ,  $I_{y_1}$ ,  $I_{z_1 y_1}$  (6.12) изменяются, и при некотором значении угла  $\alpha_0$  они принимают экстремальные значения. Взяв первую производную по углу  $\alpha$  от формул (6.12) и приравняв ее нулю, получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2I_{zy}}{I_z - I_y}. \quad (6.14)$$

Эта формула определяет положение двух осей, относительно одной из которых осевой момент максимален, а относительно другой – минимален. Такие *оси* называют *главными*. Моменты инерции относительно главных осей называют *главными моментами инерции*. Их вычисляют следующим образом:

$$I_{\max, \min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}. \quad (6.15)$$

Главные оси обладают свойствами:

- центробежный момент инерции относительно них равен нулю;
- моменты инерции относительно главных осей экстремальны;
- для симметричных сечений оси симметрии являются главными.

*Главные оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называют главными центральными осями инерции.*

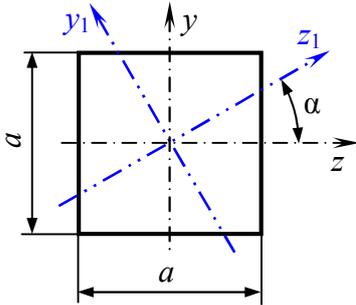


Рис. 6.13

**Пример 6.7.** Определить, каким образом изменяется момент инерции квадратного сечения (рис. 6.13) при его повороте.

**Решение.** Момент инерции относительно повернутой оси (6.12):

$$I_{z1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha.$$

Поскольку оси  $z, y$  квадрата являются осями симметрии, то есть главными, то центробежный момент инерции относительно них  $I_{zy} = 0$ :

$$I_{z1} = \frac{a^4}{12} \cos^2 \alpha + \frac{a^4}{12} \sin^2 \alpha = \frac{a^4}{12} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{a^4}{12}.$$

**Выводы.** 1. Моменты инерции квадратного сечения с изменением положения центральных осей остаются постоянными.

2. В квадрате и других правильных многоугольниках (треугольниках, пятиугольниках) любая центральная ось является и главной. Такие фигуры называют *фигурами равного сопротивления*.

**Пример 6.8.** Для фигуры, представленной в примере 6.1, определить главные центральные моменты инерции.

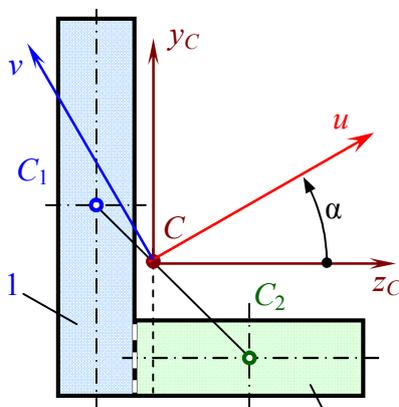


Рис. 6.14

**Решение.** Используем результаты решения примеров 6.1 и 6.5. Моменты инерции относительно центральных осей инерции, параллельных основанию и высоте:

$$I_{z_c} = 287 \text{ см}^4; \quad I_{y_c} = 163 \text{ см}^4; \quad I_{z_c y_c} = -120 \text{ см}^4.$$

Направления главных осей инерции (6.14)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2I_{z_c y_c}}{I_{z_c} - I_{y_c}} = \frac{2(-120)}{287 - 163} = 1,935;$$

$$2\alpha_0 = 62,6^\circ; \quad \alpha_0 = 31,3^\circ$$

Угол  $\alpha_0$  (положительный) откладываем против хода часовой стрелки от оси с бóльшим моментом инерции, то есть  $z_C$ .

Значения главных центральных моментов инерции (6.15)

$$\begin{aligned}
 I_{\max} = I_u &= \frac{I_{zC} + I_{yC}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{zC} - I_{yC}}{2}\right)^2 + I_{zC yC}^2} = \\
 &= \frac{287 + 163}{2} + \sqrt{\left(\frac{287 - 163}{2}\right)^2 + (-120)^2} = 360 \text{ см}^4; \\
 I_{\min} = I_v &= \frac{I_{zC} + I_{yC}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{zC} - I_{yC}}{2}\right)^2 + I_{zC yC}^2} = \\
 &= \frac{287 + 163}{2} - \sqrt{\left(\frac{287 - 163}{2}\right)^2 + (-120)^2} = 90 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Для проверки вычислений используем свойство (6.4) суммы моментов инерции:  $I_{zC} + I_{yC} = I_u + I_v = \text{const}$ .

$$287 + 163 = 360 + 90; \quad 450 \equiv 450. \quad \text{Вычисления выполнены верно.}$$

## 6.6. РАДИУС ИНЕРЦИИ

**Радиус инерции  $i$**  – геометрическая характеристика сечения, связывающая момент инерции  $I$  фигуры с ее площадью  $A$  формулами

$$I_y = i_y^2 \cdot A; \quad I_z = i_z^2 \cdot A. \quad (6.16)$$

Радиус инерции можно понимать как расстояние от оси до той точки, в которой следует условно сосредоточить площадь сечения  $A$ , чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего сечения. Из (6.16) следует

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \quad (6.17)$$

Таким образом, радиус инерции отражает отношение жесткости сечения на изгиб ( $EI$ ) и на сжатие ( $EA$ ). Эту характеристику используют преимущественно в расчетах при внецентренном растяжении или сжатии (см. примеры 8.4, 8.5 и 8.6) и продольном изгибе (см. раздел 11).

## 6.7. МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

**Момент сопротивления** – отношение момента инерции к расстоянию до наиболее удаленной точки.

В расчетах на прочность при изгибе используют осевые моменты сопротивления

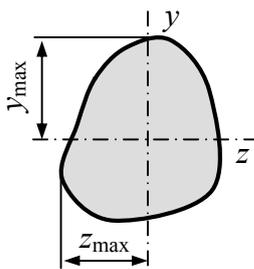


Рис. 6.15

$$\boxed{W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}} \quad \text{и} \quad \boxed{W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}} \quad (6.18)$$

Например, для прямоугольника

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{b^3h}{12} \frac{2}{b} = \frac{b^2h}{6}.$$

В расчетах на прочность при кручении сечений круглого профиля используют полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} \quad (6.19)$$

Так, для круга и кольца соответственно

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32} \frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{16}, \quad W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32} \frac{2}{D} (1 - c^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4).$$

**Примечание.** Для сечений некруглого профиля, например прямоугольного, моменты инерции и моменты сопротивления при кручении вычисляют по специальным формулам, включающим высоту и ширину профиля, а также коэффициент, зависящий от отношения высоты к ширине (см. подразд. 5.6 и табл. 6.2).

## 6.8. ПОНЯТИЕ ОБ ЭКОНОМИЧНОСТИ СЕЧЕНИЯ

Одной из задач проектного расчета на изгиб является подбор рациональной формы поперечного сечения, обеспечивающего наибольшие значения момента инерции и момента сопротивления. Обе эти геометрические характеристики содержатся в знаменателях формул условия прочности (7.11) и деформации (9.2) при изгибе. Чем больше знаменатели, тем меньше деформация и напряжение в конструктивном элементе, следовательно, выше его жесткость и прочность при изгибе.

Проанализируем варианты образования различных форм поперечного сечения, имеющих одну и ту же площадь.

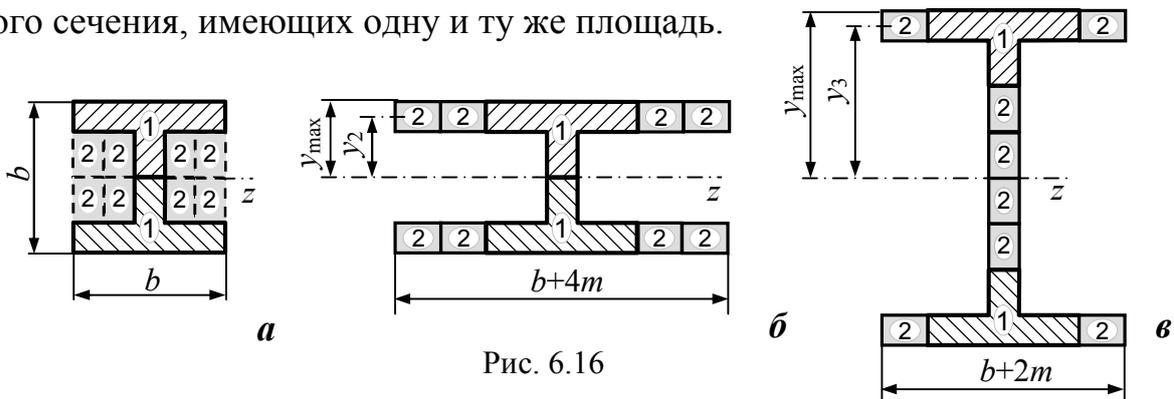
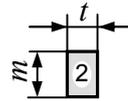


Рис. 6.16

Момент инерции квадрата (рис. 6.16, а) размером  $b \times b = 20 \times 20$  мм

$$I_z = \frac{b \cdot b^3}{12} = \frac{20^4}{12} = 13\,333 \text{ мм}^4.$$

Вычленим из квадрата (рис. 6.16, а) два тавровых профиля (1) и восемь прямоугольников (2) размером  $m \times t = 6 \times 4$  мм. Приложив прямоугольники (2) к полкам тавров (1), получим двутавровое сечение (рис. 6.16, б). Момент инерции двутавра



$$I_z = 2 \left[ I_{z,\Gamma} + 4 \left( \frac{m \cdot t^3}{12} + y_2^2 \cdot m \cdot t \right) \right];$$

$$I_z = 2 \left[ 5515 + 4 \left( \frac{6 \cdot 4^3}{12} + 8^2 \cdot 6 \cdot 4 \right) \right] = 23\,574 \text{ мм}^4.$$

Здесь  $I_{z,\Gamma} = 5515 \text{ мм}^4$  – момент инерции таврового сечения, взятый из примера 6.6. Там же взято значение расстояния от оси  $z$  до центральной оси полки тавра  $y_2 = 8$  мм.

Если прямоугольники (2), выбранные из квадрата (рис. 6.16, а), расположить так, как показано на рис. 6.16, в, то момент инерции более высокого двутавра

$$I_z = \frac{t \cdot (6m)^3}{12} + 2 \left[ \frac{(b + 2m) \cdot t^3}{12} + y_3^2 (b + 2m) \cdot t \right];$$

$$I_z = \frac{4 \cdot (6 \cdot 6)^3}{12} + 2 \left[ \frac{(20 + 2 \cdot 6) 4^3}{12} + 20^2 (20 + 2 \cdot 6) 4 \right] = 118\,293 \text{ мм}^4.$$

Здесь  $y_3 = 3 \cdot m + t/2 = 3 \cdot 6 + 4/2 = 20$  мм – расстояние от оси  $z$  до центра полки двутавра.

Сопоставив моменты инерции созданных двутавров (рис. 6.16, б и в) с моментом инерции квадрата (рис. 6.16, а), получим:

$$\frac{(I_z)_{\delta}}{(I_z)_a} = \frac{23\,574}{13\,333} = 1,768; \quad \frac{(I_z)_{\epsilon}}{(I_z)_a} = \frac{118\,293}{13\,333} = 8,872.$$

Вычислим моменты сопротивления рассмотренных выше фигур, определив предварительно расстояние до наиболее удаленной точки сечений.

$$(y_{\max})_a = (y_{\max})_{\delta} = \frac{b}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ мм}; \quad (y_{\max})_{\epsilon} = 3m + t = 3 \cdot 6 + 4 = 22 \text{ мм}.$$

$$(W_z)_a = \frac{(I_z)_a}{(y_{\max})_a} = \frac{13\,333}{10} = 1\,333 \text{ мм}^3;$$

$$(W_z)_{\delta} = \frac{(I_z)_{\delta}}{(y_{\max})_{\delta}} = \frac{23\,574}{10} = 2\,357 \text{ мм}^3;$$

$$(W_z)_{\epsilon} = \frac{(I_z)_{\epsilon}}{(y_{\max})_{\epsilon}} = \frac{118\,293}{22} = 5\,377 \text{ мм}^3.$$

Сопоставим моменты сопротивления двутавров с моментом сопротивления квадрата той же площади поперечного сечения:

$$\frac{(W_z)_{\delta}}{(W_z)_a} = \frac{2\,357}{1\,333} = 1,768; \quad \frac{(W_z)_{\epsilon}}{(W_z)_a} = \frac{5\,377}{1\,333} = 4,034.$$

Для оценки экономичности поперечных сечений часто используют безразмерный параметр  $\text{Эк}$  – отношение момента инерции к квадрату площади сечения. Для рассматриваемого примера

$$\text{Эк} = \frac{(I_z)_a}{A^2} = \frac{13333}{400^2} = 0,083; \quad \text{Эк} = \frac{(I_z)_{\delta}}{A^2} = \frac{23574}{400^2} = 0,147; \quad \text{Эк} = \frac{(I_z)_{\epsilon}}{A^2} = \frac{118333}{400^2} = 0,740.$$

Для некоторых профилей, используемых на практике, значение экономичности представлено в табл. 6.1.

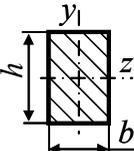
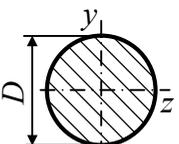
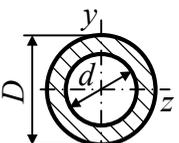
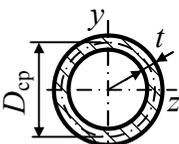
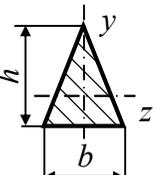
Таблица 6.1. Параметр экономичности поперечных сечений

Вид сечения	Экономичность $\text{Эк} = \frac{I_z}{A^2}$
Круг	$\text{Эк} = \frac{\pi D^4}{64} \frac{16}{\pi^2 D^4} = \frac{1}{4\pi} = 0,0796$
Прямоугольник с отношением $h/b = 3/2$	$\text{Эк} = \frac{bh^3}{12} \frac{1}{b^2 h^2} = \frac{h}{12b} = \frac{3}{12 \cdot 2} = 0,125$
Кольцо с отношением $c = d/D = 0,8$	$\text{Эк} = \frac{\pi D^4}{64} \frac{16}{\pi^2 D^4} \frac{1-c^4}{(1-c^2)^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{1+c^2}{1-c^2} = 0,363$
Двутавр № 10	$\text{Эк} = \frac{198}{12^2} = 1,375$
Двутавр № 60	$\text{Эк} = \frac{76806}{138^2} = 4,033$

**Примечание.** А. Паран, а позже Б. Бюльфингер и Ш. Кулон независимо друг от друга дали решение задачи о том, как из круглого бревна получить прямоугольный брус, имеющий наибольший момент сопротивления. Рациональное отношение сторон бруса  $h/b = \sqrt{2}$ .

Геометрические характеристики для некоторых простых сечений: прямоугольника, треугольника, круглого сплошного, пустотелого а также тонкостенного профилей приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2. Геометрические характеристики простейших сечений

Сечение	Площадь	При изгибе				При кручении	
	$A$	$I_z$	$\langle I_y \rangle$	$W_z$	$\langle W_y \rangle$	$I_k$	$W_k$
	$b \cdot h$	$\frac{bh^3}{12}$	$\left\langle \frac{hb^3}{12} \right\rangle$	$\frac{bh^2}{6}$	$\left\langle \frac{hb^2}{6} \right\rangle$	$\beta = \sqrt{0,04632 \ln(h/b) + 0,01972}$ , где $\beta b^3 h$	$\alpha = \sqrt{0,025 \ln(h/b) + 0,04295}$ , где $\alpha b^2 h$
	$\frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{\pi D^4}{64}$		$\frac{\pi D^3}{32}$		$\frac{\pi D^4}{32}$	$\frac{\pi D^3}{16}$
	$\frac{\pi D^2}{4} \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$	$\frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$		$\frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$		$\frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$	$\frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$
	$\pi D_{cp} t$	$\frac{\pi D_{cp}^3}{8} t$		$\frac{\pi D_{cp}^2}{4} t$		$\frac{\pi D_{cp}^3}{4} t$	$\frac{\pi D_{cp}^2}{2} t$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\left\langle \frac{hb^3}{48} \right\rangle$	$\frac{bh^2}{24}$	$\left\langle \frac{hb^2}{24} \right\rangle$	Равносторонний $\frac{h^4}{15\sqrt{3}}$	Равносторонний $0,05b^3$

## 7. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

**Изгиб** – вид деформации, при котором происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны кривого бруса.

**Изгиб плоский (прямой изгиб)** – случай изгиба, при котором внешние силы лежат в главной плоскости инерции и являются перпендикулярными к геометрическим осям. Если сечение имеет ось симметрии, то внешние силы располагаются в плоскости симметрии.

**Главная плоскость инерции** – плоскость, проходящая через геометрическую ось бруса и главную ось инерции.

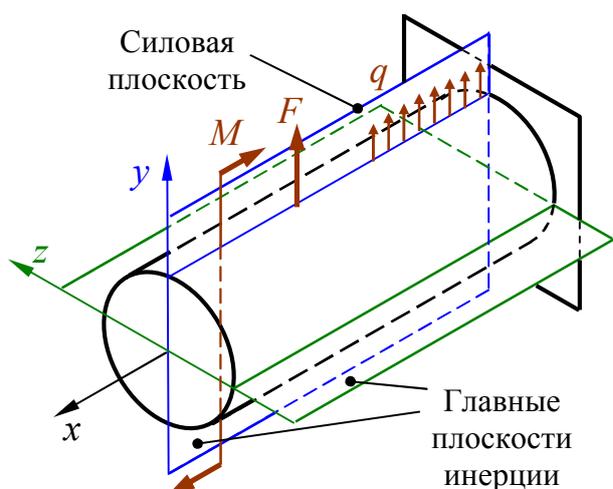


Рис. 7.1

**Изгиб чистый** – вид деформации, при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно – изгибающий момент  $M_z$  или  $M_y$ .

**Изгиб поперечный** – случай изгиба, при котором в сечениях бруса наряду с изгибающим моментом  $M$  действует и поперечная сила  $Q$ .

В нагруженном состоянии балка прогибается так, что часть волокон укорачивается, другая часть волокон удлиняется.

**Нейтральный слой** – слой волокон, в котором нормальные напряжения отсутствуют.

**Нейтральная ось** – след пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения.

**Балка** – конструктивный элемент, с прямолинейной геометрической осью, обычно в виде бруса, работающий главным образом на изгиб.

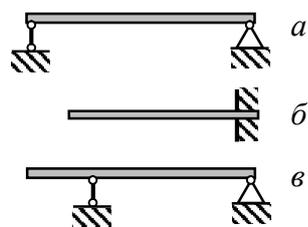


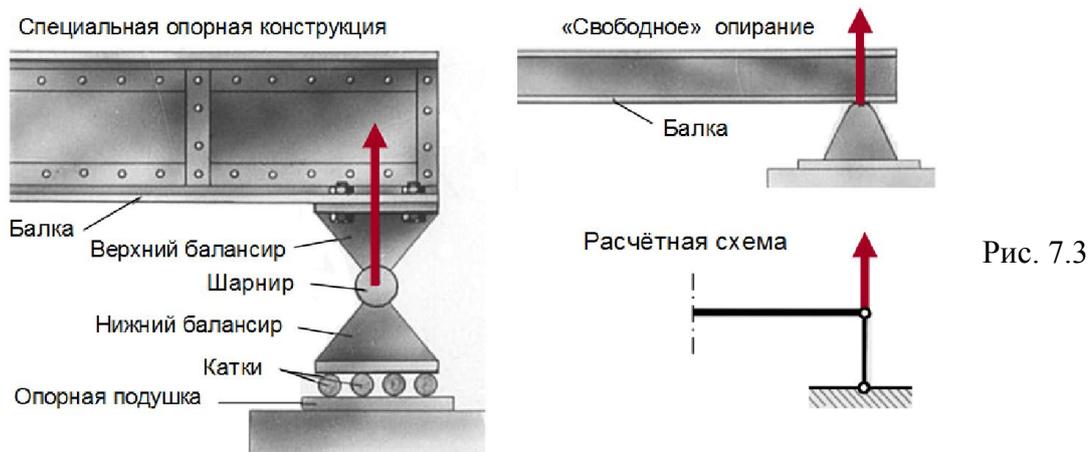
Рис. 7.2

**Балка простая** – однопролетная балка без консолей, лежащая на двух опорах: шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной (рис. 7.2, а). Расстояние между опорами называют пролетом.

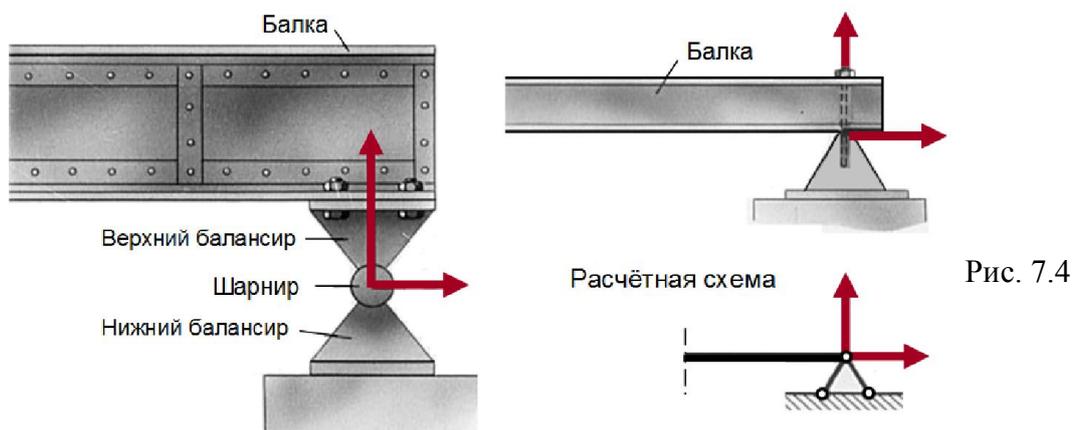
**Консоль** – балка с одним защемленным концом (рис. 7.2, б) или часть балки, свешивающаяся за опору (рис. 7.2, в).

## Опоры и опорные реакции

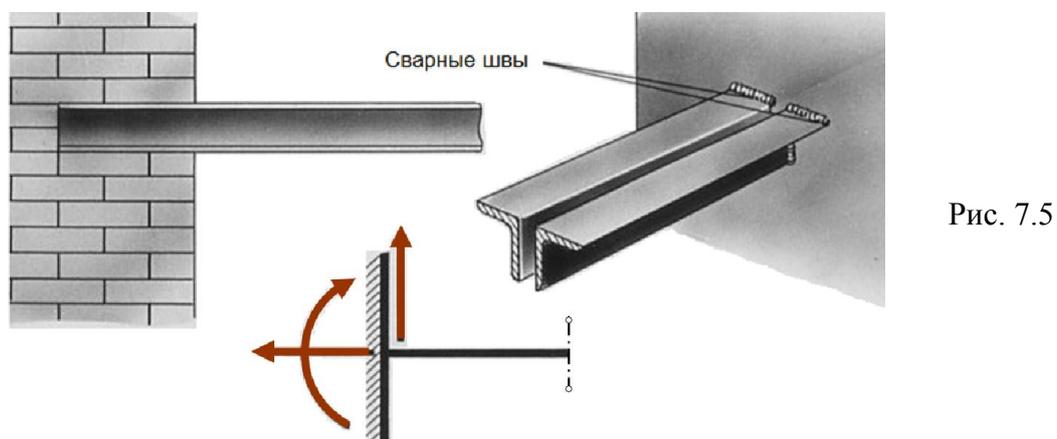
Схемы реальных опорных устройств можно свести к трем типам.



**Шарнирно-подвижная опора** допускает поворот опорного сечения и перемещение его в одном направлении. Опорная реакция перпендикулярно к плоскости опирания катков.



**Шарнирно-неподвижная опора** допускает только поворот опорного сечения балки. Реакция имеет две составляющие: горизонтальную и вертикальную.



**Жесткая заделка (защемление)** не допускает поворота опорного сечения и любых его перемещений. Имеет три реакции: горизонтальную и вертикальную составляющие, а также опорный момент.

## 7.1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Из шести внутренних усилий, действующих в сечении в общем случае, при плоском поперечном изгибе только два не равны нулю:  $Q_y$  и  $M_z$  (индексы часто опускают).

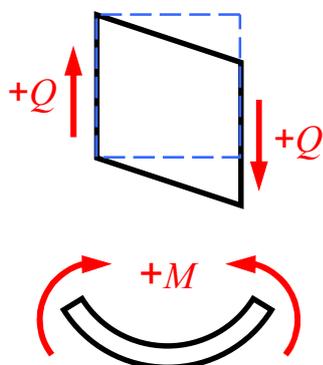


Рис. 7.6

**Правила знаков** устанавливают не по направлению действию сил, как в теоретической механике, а по виду деформации (рис. 7.6).

*Поперечная сила  $Q$  в сечении положительна, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной балки по ходу часовой стрелки (положительная поперечная сила вызывает положительное касательное напряжение).*

*Изгибающий момент  $M$  в сечении положителен, если он вызывает сжатие в верхней части бруса, а растянутая область изгибаемого элемента – в нижней.*

Часто эпюры изгибающего момента строят со стороны сжатой зоны элемента, но удобнее – со стороны растянутой.

Иногда, в связи со сложившейся традицией, употребляют термины «растянутые волокна», «сжатые волокна», хотя структура большинства материалов, используемых в машиностроении и строительстве, не волокнистая.

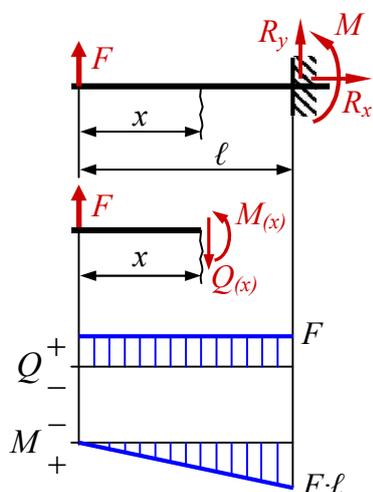


Рис. 7.7

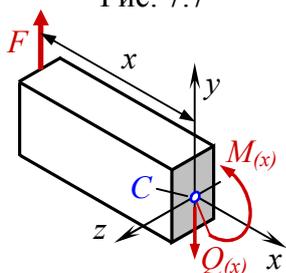


Рис. 7.8

**Пример 7.1.** *Определить внутренние усилия в поперечном сечении консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой (рис. 7.7).*

**Решение.** Опора (защемление) накладывает три связи, обуславливающие возникновение трех реакций: вертикальную и горизонтальную составляющие реакции  $R_x$  и  $R_y$ , а также опорный момент  $M$ . В целях упрощения расчета внутренние усилия определяем со свободного конца. Используем метод сечений:

**Рассекаем** балку на две части;

**Отбрасываем** одну из частей;

**Заменяем** действие отброшенной части внутренними усилиями (положительными в соответствие с установленными правилами знаков), составляем

**Уравнения** равновесия, из которых находим внутренние усилия. Система координат помещена в центр тяжести  $C$  рассматриваемого сечения (рис. 7.8).

$$\begin{aligned} \text{I участок: } 0 \leq x \leq \ell. \\ \sum Y = 0; \quad F - Q_{(x)} = 0; \quad \Rightarrow \quad Q_{(x)} = F; \\ \sum M_z = 0; \quad -F \cdot x + M_{(x)} = 0; \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} = F \cdot x. \end{aligned}$$

Поперечная сила  $Q_{(x)}$  – функция от абсциссы  $x$  – величина постоянная. Изгибающий момент  $M_{(x)}$  – линейная функция от абсциссы  $x$ , описывается уравнением прямой; для ее построения находим значение функции в двух точках – в начале и конце участка:

$$M_{x=0} = 0; \quad M_{x=\ell} = F \cdot \ell.$$

Строим эпюры  $Q$  и  $M$ . Опасным является сечение в защемлении.

**Пример 7.2.** Определить внутренние усилия в поперечном сечении консольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 7.9, а).

**Решение.** В защемлении возникают три опорные реакции, но определять их не станем, поскольку внутренние усилия в произвольном сечении участка будем рассматривать со свободного конца. Расстояние до произвольного сечения от начала участка изменяется в пределах:  $0 \leq x \leq \ell$ . Сила  $qx$  (рис. 7.9, б), эквивалентная (результатирующая) действию распределенной нагрузки  $q$  на длине  $x$  отсеченной части балки, приложена посередине участка. Расстоянием  $x/2$  определяется плечо до сечения, в котором определяют внутренние усилия (рис. 7.10).

$$\sum Y = 0; \quad -Q_{(x)} - qx = 0, \quad \Rightarrow \quad Q_{(x)} = -qx.$$

$$\sum M_z = 0; \quad M_{(x)} + qx(x/2) = 0, \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} = -q \frac{x^2}{2}.$$

Функция поперечной силы  $Q_{(x)}$  – уравнение прямой. Для ее построения находим значения  $Q$  в начале и в конце участка.

$$Q_{x=0} = 0; \quad Q_{x=\ell} = -q\ell.$$

Функция изгибающего момента  $M_{(x)}$  – уравнение параболы. Для ее построения поступаем аналогично.

$$M_{x=0} = 0; \quad M_{x=\ell} = -q \frac{\ell^2}{2}.$$

Строим эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. 7.9, в и г). Опасным является сечение в заделке, где действуют максимальные изгибающий момент и поперечная сила.

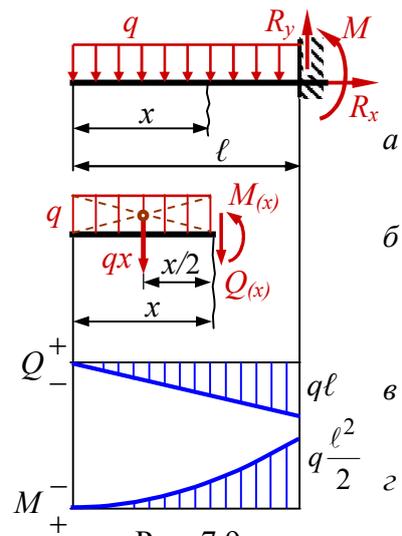


Рис. 7.9

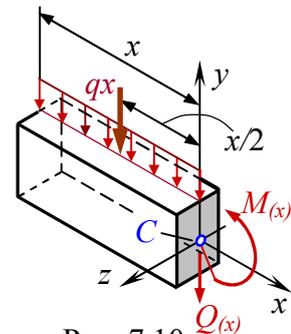


Рис. 7.10

## Общий подход к определению внутренних усилий при изгибе

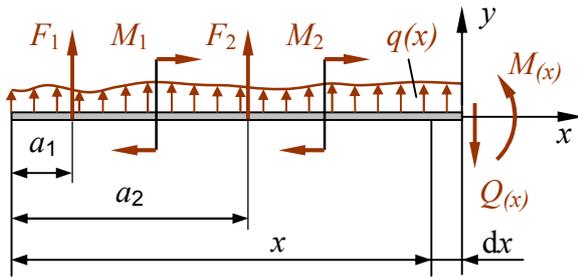


Рис. 7.11

В балке бесконечной протяженности выберем начало координат на левом конце. Внутренние усилия находим методом сечений

$$\sum Y = 0; \quad \sum_1^n F_i + \int_0^x q(x) dx - Q(x) = 0;$$

$$\text{откуда: } Q(x) = \sum_1^n F_i + \int_0^x q(x) dx.$$

*Поперечная сила в произвольном сечении равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения x.*

$$\sum M_z = 0; \quad \sum_1^n M_i + \sum_1^n F_i(x - a_i) + C_q \int_0^x q(x) dx - M(x) = 0;$$

$$\text{откуда: } M(x) = \sum_1^n M_i + \sum_1^n F_i(x - a_i) + C_q \int_0^x q(x) dx.$$

Здесь  $C_q$  – множитель, имеющий смысл координаты центра тяжести распределенной нагрузки.

*Изгибающий момент в произвольном сечении равен алгебраической сумме моментов от всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения x, взятых относительно центра тяжести рассматриваемого сечения.*

### 7.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

В балке, находящейся под действием плоской системы сил, двумя поперечными сечениями выделим элемент протяженностью  $dx$  (см. рис. 7.11), к которому не приложены сосредоточенные силы и моменты. Поскольку вся балка находится в равновесии, то в равновесии находится и элемент  $dx$ .

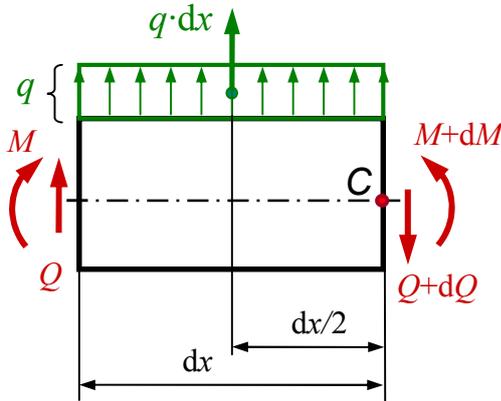


Рис. 7.12

$$\sum Y = 0; \quad Q - (Q + dQ) + q \cdot dx = 0;$$

$$-dQ + q \cdot dx = 0,$$

$$\text{Откуда } \boxed{\frac{dQ}{dx} = q}. \quad (7.1)$$

*Первая производная от поперечной силы по абсциссе x равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной оси балки.*

$$\sum M_C = 0; \quad -M + (M + dM) - Q \cdot dx - q \cdot dx \cdot \underbrace{\frac{dx}{2}}_{\rightarrow 0} = 0;$$

$$dM - Q \cdot dx = 0, \quad \text{откуда} \quad \boxed{\frac{dM}{dx} = Q}. \quad (7.2)$$

*Первая производная от изгибающего момента по абсциссе  $x$  равна поперечной силе.*

С учетом формул (7.1) и (7.2) получаем дифференциальные зависимости Д. И. Журавского

$$\boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q(x)}. \quad (7.3)$$

Полученные зависимости действительны в *правой системе координат*, то есть когда  $x$  возрастает от левого конца балки к правому. В *левой* системе координат знаки перед  $Q$  и  $q$  обратные.

### 7.3. ПРАВИЛА ПРОВЕРКИ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР $Q$ И $M$

Напомним, *геометрический смысл первой производной некоторой функции – тангенс угла наклона касательной к кривой, отображающей эту функцию, и положительным направлением оси абсцисс*. На основании дифференциальных зависимостей (7.3) при изгибе установлены следующие правила.

1. На участках, свободных от распределенной нагрузки, эпюра  $Q$  ограничена прямыми линиями, параллельными базовой (поперечная сила постоянна), а эпюра  $M$  – наклонными (изгибающий момент изменяется по линейному закону).

2. На участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра  $Q$  – наклонная прямая, а эпюра  $M$  – парабола выпуклостью в направлении действия нагрузки  $q$ .

3. В тех сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:  
а) на эпюре  $Q$  будут скачки на величину и в направлении приложенных сил;  
б) на эпюре  $M$  будут изломы, причем острие излома направлено по действию силы.

4. В сечении балки, где приложен сосредоточенный момент, эпюра  $M$  имеет скачок на величину этого момента. На эпюре  $Q$  действие пары сил не отражается.

5. На участках, где  $Q > 0$ , момент  $M$  возрастает, то есть положительные ординаты увеличиваются, отрицательные – уменьшаются. На участках, где поперечная сила  $Q$  отрицательна, момент  $M$  убывает.

6. В том сечении, где эпюра  $Q$ , изменяясь, пересекает базисную линию (поперечная сила  $Q = 0$ ), изгибающий момент достигает экстремума

(максимума или минимума). Касательная к линии, ограничивающей эпюру  $M$  в этом сечении, параллельна оси эпюры.

7. На концевой шарнирной опоре поперечная сила равна реакции этой опоры, а изгибающий момент равен нулю, если в опорном сечении не приложена пара сил.

8. В защемленном конце балки (заделке) значения  $Q$  и  $M$  равны опорной реакции и опорному моменту.

#### 7.4. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Рассмотрим простейший случай изгиба – чистый изгиб, при котором в поперечных сечениях бруса действует только *одно внутреннее усилие – изгибающий момент*. Например, в условиях чистого изгиба работают участки балки (рис. 7.13), на которых изгибающий момент постоянен, а поперечная сила отсутствует ( $dM/dx = 0$ ).

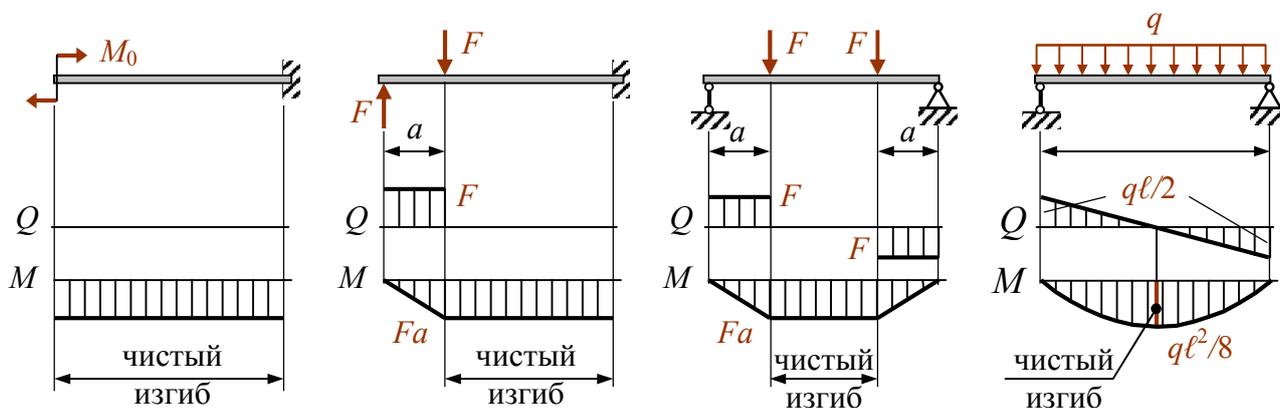


Рис. 7.13

При расчете балки на изгиб будем считать справедливыми принятые ранее гипотезы, из которых выделим следующие:

- *гипотеза плоских сечений* (Бернулли): поперечные сечения бруса плоские до деформации, остаются плоскими и в деформированном состоянии;
- *гипотеза постоянства напряжений по ширине бруса*;
- *гипотеза отсутствия боковых давлений*: боковые волокна бруса не давят друг на друга.

#### *Геометрический анализ*

Двумя сечениями  $ad$  и  $bc$  на расстоянии  $dx$  выделим малый элемент (рис. 7.14,  $a, б$ ) и рассмотрим его деформацию (рис. 7.14,  $в$ ). Длина отрезка нейтрального слоя  $dx = \rho \cdot d\varphi$ . Волокно нейтрального слоя не деформируется  $\varepsilon = 0$ ,  $\sigma = 0$ . Любое другое волокно, находящееся на расстоянии  $y$  изменит свою длину и станет равным  $(\rho + y)d\varphi$ . Его относительное удлинение

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi}.$$

После преобразования получим  $\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}$ . (7.4)

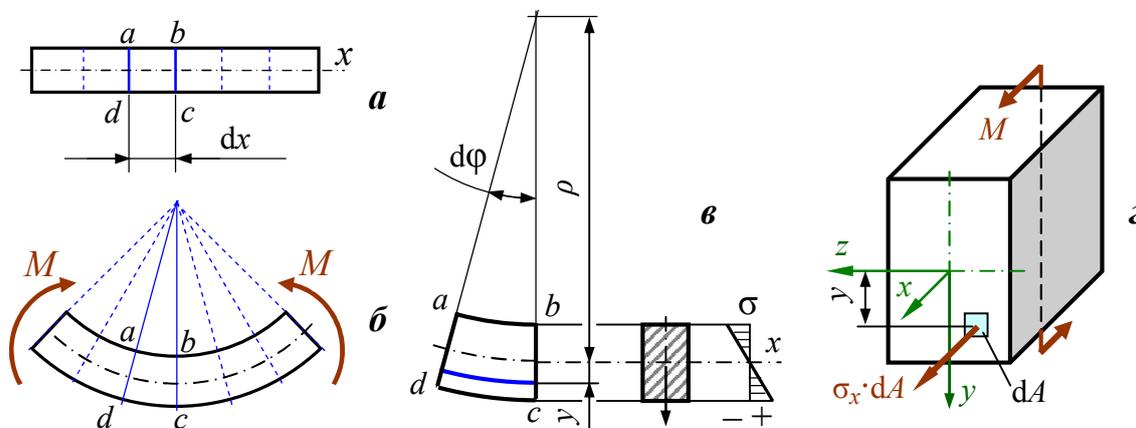


Рис. 7.14

*Деформация волокон пропорциональна их расстоянию до нейтрального слоя.*

### Физический анализ

В общем случае нагружения продольная деформация по закону Гука (см. систему уравнений (3.16))

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)],$$

однако в силу **гипотезы отсутствия боковых давлений**  $\sigma_z = 0$  и  $\sigma_y = 0$ , то есть волокна бруса испытывают только деформацию растяжения. Имеет место **линейное напряженное состояние**

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \tag{7.5}$$

### Статический анализ (рис. 7.14, в)

$\sigma_x \cdot dA$  – элементарное усилие;  $y(\sigma_x \cdot dA)$  – элементарный момент.  
Момент во всем сечении

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA. \tag{7.6}$$

### Синтез установленных зависимостей

Приравниваем правые части уравнений (7.4) и (7.5):

$$\frac{y}{\rho} = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \text{откуда} \quad \sigma_x = \frac{E}{\rho} y. \tag{7.7}$$

Зависимость (7.7) подставляем в (7.6)

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z,$$

где  $I_z = \int_A y^2 dA$  – момент инерции, геометрическая характеристика поперечного сечения (см. (6.2)). Из последнего равенства найдем отношение

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z} \quad (7.8)$$

и подставим его в (7.7). Опуская индекс при  $\sigma$ , получим уравнение А. Навье (1826)

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y. \quad (7.9)$$

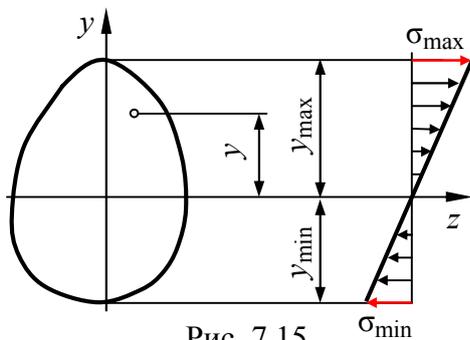


Рис. 7.15

### Следствия из формулы Навье

- Центр тяжести сечения является началом координат для анализа напряжений и приведения внешних сил.
- Напряжения изгиба зависят от значений изгибающего момента, момента инерции сечения и координаты точки.
- Напряжения в любой точке, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны между собой.
- Наибольшие по величине напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтрального слоя.

### Условие равновесия

Из статического анализа (рис. 7.14, з) следует:

$$\sum X = 0; \quad N = \int_A \sigma_x dA = 0.$$

В полученное равенство подставляем (7.7):  $\sigma_x = \frac{E}{\rho} y$ .

Тогда 
$$\int_A \frac{E}{\rho} y \cdot dA = \frac{E}{\rho} S_z = 0,$$

где  $S_z = \int_A y \cdot dA$  – статический момент площади, геометрическая характеристика (см. подразд. 6.1).

Поскольку отношение  $\frac{E}{\rho} \neq 0$ , то  $S_z = 0$ , следовательно, нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения.

Радиус кривизны нейтрального слоя является и радиусом кривизны изогнутой оси бруса.

**Деформация балки при изгибе – кривизна ее геометрической оси.**

Из (7.8)  $\frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z}$  следует

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}}. \quad (7.10)$$

Это равенство называют **законом Гука при изгибе**.

**Следствия из закона Гука при изгибе**

– Момент инерции сечения  $I_z$  характеризует способность бруса сопротивляться искривлению в зависимости от размеров и формы его поперечного сечения. Чем больше значение  $I_z$  при заданной величине изгибающего момента  $M$ , тем большим окажется радиус  $\rho$  кривизны нейтрального слоя бруса, то есть брус искривляется меньше.

– Модуль упругости  $E$  материала характеризует способность бруса сопротивляться искривлению.

**Произведение  $E \cdot I_z$**  называют **жесткостью сечения при изгибе**.

## 7.5. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ ПО НОРМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Максимальные напряжения в опасном (где действует  $M_{\max}$ ) сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} y_{\max}.$$

Принимая отношение  $\frac{I_z}{y_{\max}} = W_z$ , получим условие прочности при изгибе

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]}, \quad (7.11)$$

где  $W_z$  – осевой момент сопротивления сечения (см. подразд. 6.7).

Для прямоугольника  $W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$ .

Для круга  $W_z = \frac{\pi}{32} D^3 \approx 0,1 D^3$ .

Для кольца  $W_z = \frac{\pi}{32} D^3 (1 - c^4) \approx 0,1 D^3 (1 - c^4)$ , где  $c = d/D$  – коэффициент пустотелости.

Здесь  $d$  – внутренний диаметр полого сечения.

Используя условие прочности (7.11) выполняют три вида расчетов.

– **Поверочный.** Вычисляют  $\sigma_{\max}$ , а затем вычисляют перегрузку или недогрузку в процентах по отношению к допускаемому напряжению, либо находят коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести для пластичных материалов или пределу прочности для хрупких.

– **Проектный.** Из условия прочности при изгибе (7.11) находят необходимое значение момента сопротивления. Размеры нестандартных сечений (круг, прямоугольник...) округляют в соответствии с ГОСТом. Стандартные прокатные профили выбирают из таблиц сортамента. Если размер сечения выбран меньше требуемого, то выполняют поверочный расчет. Перегрузка более 5 % не допускается.

– **Определение допускаемой нагрузки.** При известных характеристиках прочности материала и заданном размере поперечного сечения определяют допускаемое *внутреннее* усилие (изгибающий момент), а затем, исходя из схемы нагружения, находят допускаемые *внешние* силовые факторы.

Если сечение несимметрично относительно оси  $z$  (трапецеидальное, треугольное, тавровое...), а также при использовании хрупкого материала (чугун, керамика...), условие прочности проверяют отдельно по максимальным и минимальным напряжениям, используя формулу (7.9).

#### 7.6. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

От поперечной силы  $Q_y$  в поперечном сечении возникают касательные напряжения  $\tau_y$ . Для их определения приняты следующие гипотезы.

– Касательные напряжения  $\tau_y$  параллельны поперечной силе  $Q_y$  и соответственно оси  $Oy$ .

– Касательные напряжения равномерно распределены по ширине поперечного сечения на любом уровне их определения, задаваемом ординатой  $y$ .

– Для определения нормальных напряжений используют выражения, выведенные для случая чистого изгиба.

Д. И. Журавским предложена формула

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S'_z}{b \cdot I_z}, \quad (7.12)$$

где  $Q_y$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

$S'_z$  – статический момент площади отсеченной части сечения относительно центральной оси  $z$ ;

$b$  – ширина сечения на уровне исследуемой точки;

$I_z$  – момент инерции сечения относительно центральной оси  $z$ .

*Знак* касательных напряжений  $\tau_y$  определяется *знаком* поперечной силы  $Q_y$ .

**Пример 7.3.** Построить эюру  $\tau$  для прямоугольного сечения (рис.7.16).

**Решение.** Момент инерции сечения  $I_z = \frac{bh^3}{12}$ .

Площадь  $A'$  отсеченной части сечения

$$A' = b \left( \frac{h}{2} - y \right).$$

Ордината  $y'_C$  центра тяжести  $C'$  площади отсеченной части сечения

$$y'_C = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right).$$

Статический момент  $S'_z$  площади отсеченной части сечения

$$S'_z = A' \cdot y'_C = \frac{b}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( \frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{bh^2}{8} \left( 1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right).$$

$S'_z$  изменяется по параболической зависимости (координата  $y$  во второй степени) и определяет характер изменения напряжения  $\tau$ :

$$\tau = \frac{Q \cdot S'_z}{b \cdot I_z} = \frac{Q}{b} \frac{12}{bh^3} \frac{bh^2}{8} \left( 1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right) = \frac{3Q}{2bh} \left( 1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right).$$

При  $y = 0$  (на нейтральной оси)

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}.$$

При  $y = h/2$  (на периферии)  $\tau = 0$ .

**Пример 7.4.** Построить эюру касательных напряжений  $\tau$  для круглого сечения (рис. 7.17).

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \left( 1 - \frac{y^2}{R^2} \right);$$

$$\tau_{\max} = 1,333 \frac{Q}{\pi R^2}.$$

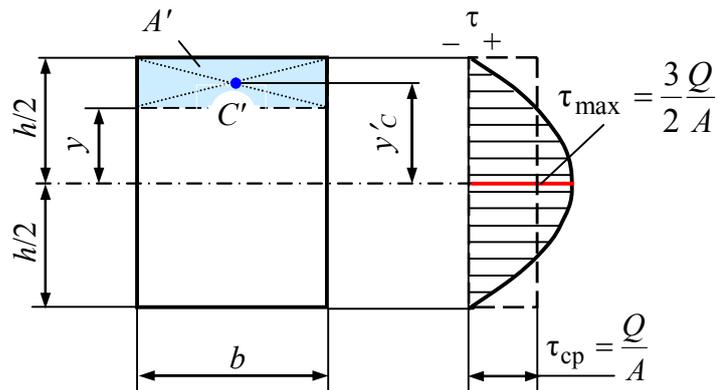


Рис. 7.16

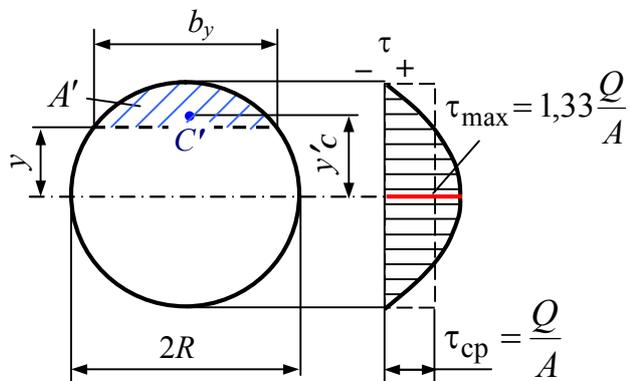


Рис. 7.17

## О влиянии касательных напряжений при поперечном изгибе

Касательные напряжения переменны по высоте, вызывают искривление поперечного сечения, причем в тем большей степени, чем больше  $\tau$ , то есть в центральной части сечения больше, на периферии – меньше. Следовательно, **гипотеза плоских сечений**, на которой основывался вывод формулы нормальных напряжений, **неприменима**. Однако это искривление почти не отражается на продольных деформациях волокон, что позволяет пользоваться формулой (7.9)  $\sigma = \frac{M_z}{I_z} y$  и при наличии поперечной силы.

**Пример 7.5.** Оценить соотношение нормальных и касательных напряжений при поперечном изгибе.

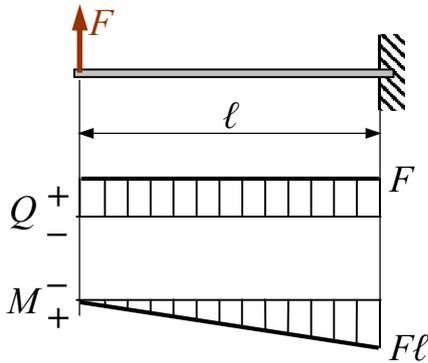


Рис. 7.18

**Решение.** Для консольной балки (рис. 7.18) прямоугольного поперечного сечения  $b \times h$  максимальные нормальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{F\ell}{bh^2/6} = \frac{6F\ell}{bh^2},$$

а максимальные касательные –

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3F}{2bh}.$$

Сопоставив эти напряжения, получим

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{6F\ell}{bh^2} \frac{2bh}{3F} = 4 \frac{\ell}{h}.$$

Аналогичное соотношение для круглого поперечного сечения диаметром  $d$ :

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{32F\ell}{\pi d^3} \frac{3}{4} \frac{\pi d^2}{F4} = 6 \frac{\ell}{d}.$$

**Вывод:** касательные напряжения в длинных ( $\ell > 5h$  и  $\ell > 5d$ ) балках существенно меньше нормальных.

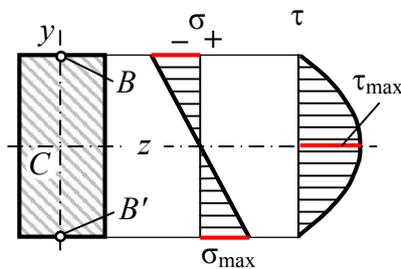


Рис. 7.19

Отметим, что  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  действуют в разных точках сечения:  $\sigma_{\max}$  на периферии, в точках  $B$  и  $B'$  наиболее удаленных от нейтральной оси, где  $\tau = 0$ ;  $\tau_{\max}$  – в центре  $C$ , на нейтральной оси, где  $\sigma = 0$ . Для приведенного выше примера в опасном сечении (в заземлении) эпюры распределения нормальных и касательных напряжений показаны на рис. 7.19. В точках  $B$  и  $B'$  возникает линейное напряженное состояние, а в точке  $C$  – чистый сдвиг, плоское напряженное состояние (см. разд. 4 и подразд. 3.11).

По мере укорочения длины пролета или участка балки роль момента, а, следовательно, и нормальных напряжений, снижается (в рассмотренном примере  $M$  зависит от длины, а  $Q$  – величина постоянная). Превалирующими в этом случае могут оказаться касательные напряжения. В сложившейся практике подбор размеров поперечного сечения выполняют по максимальным нормальным напряжениям (как при чистом изгибе), а проверку прочности проводят – по максимальным касательным.

**Особенность расчета балки двутаврового сечения** (рис. 7.20) заключается в том, что опасной может оказаться точка  $K$  в сопряжении стойки с полкой, где действуют достаточно большие нормальные, а также касательные напряжения:

$$\sigma_K = \frac{M_z}{I_z} y_K; \quad \tau_K = \frac{Q \cdot S'_z}{d \cdot I_z}.$$

Здесь координату точки  $K$  и статический момент отсеченной части площади  $A'$  (на рис. 7.20 заштрихована) находят как

$$y_K = \frac{h}{2} - t;$$

$$S'_z = A' \cdot y'_c = b \cdot t \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

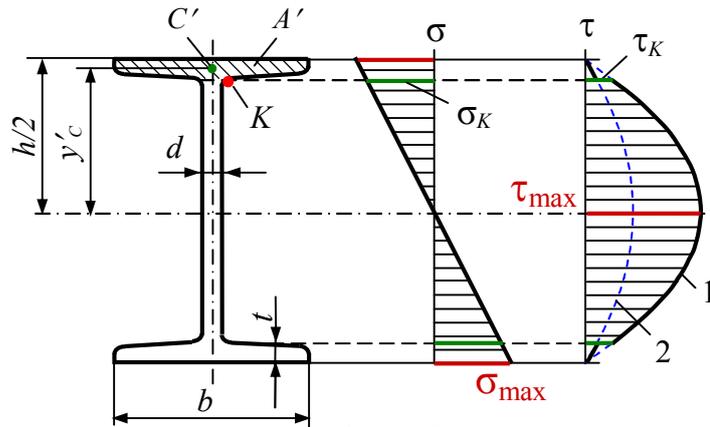


Рис. 7.20

Эквивалентные напряжения в точке  $K$  вычисляют по теориям прочности. Линия 1 на эпюре касательных напряжений отражает закон распределения  $\tau$ , рассчитанных для ширины сечения  $d$ , а линия 2 – ширины сечения  $b$ . Размеры отличаются примерно в 20 раз, чем и обусловлен скачок напряжений  $\tau$  в окрестности точки  $K$ .

**Пример 7.6.**<sup>1</sup> Подобрать размеры поперечного сечения деревянного бруса с отношением сторон  $h/b = 4/3$  для балки, схема нагружения которой представлена на рис. 7.21.

Дано:	$a = 1,6$ м	$[\sigma] = 10$ МПа
$F = 100$ кН	$c = 0,2$ м	$[\tau] = 2,5$ МПа

**Решение.** Для рассчитываемой симметричной схемы нагружения опорные реакции определяем в уме:  $R = F$ .

### Внутренние усилия

$$\begin{array}{ll} \text{I участок: } 0 \leq x \leq c & \text{II участок: } 0 \leq x \leq a \\ Q_{(x)} = R = F; \quad M_{(x)} = R \cdot x; & Q_{(x)} = R - F = 0; \quad M_{(x)} = R(c + x) - F \cdot x; \end{array}$$

<sup>1</sup> Использовано условие задачи из кн. Беляев Н. М. Сборник задач..., № 4.80.

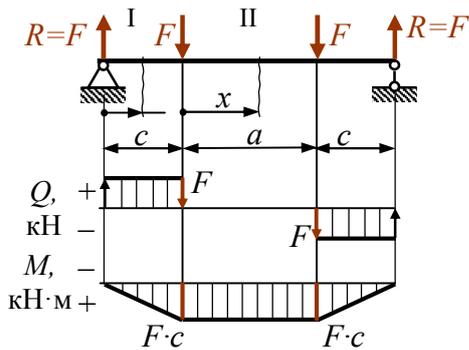


Рис. 7.21

Вычисляем значения внутренних усилий в характерных сечениях и строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. На среднем участке имеет место чистый изгиб. Опасными являются сечения в окрестности точек приложения сил. Максимальные значения внутренних усилий:

$$Q_{\max} = F = 100 \text{ кН};$$

$$M_{\max} = F \cdot c = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

находим требуемое значение момента сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 0,002 \text{ м}^3; \quad W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \left( \frac{4}{3}b \right)^2}{6} = \frac{8}{27}b^3, \text{ откуда}$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{27}{8} \cdot 0,002} = 0,189 \text{ м}.$$

Из условия прочности по касательным напряжениям для прямоугольного сечения (см. пример 7.3)

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau]$$

находим требуемое значение площади поперечного сечения

$$A \geq \frac{3}{2} \frac{Q_{\max}}{[\tau]} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 10^3}{2 \cdot 2,5 \cdot 10^6} = 0,06 \text{ м}^2; \quad A = b \cdot h = b \frac{4}{3}b, \text{ откуда}$$

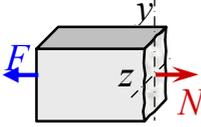
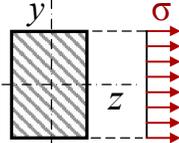
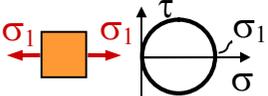
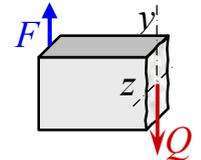
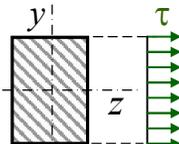
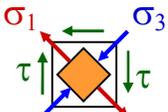
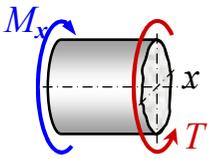
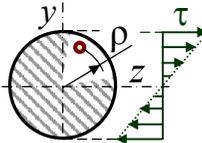
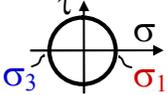
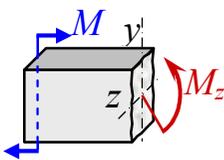
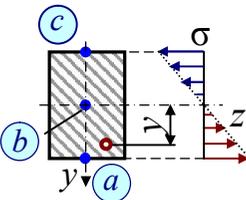
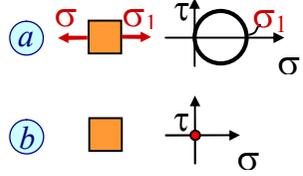
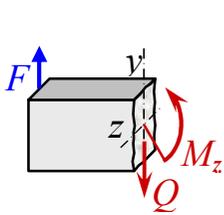
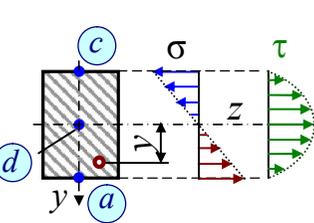
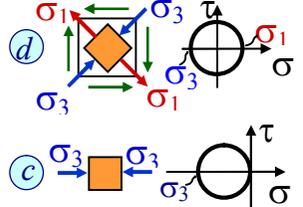
$$b \geq \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 0,06} = 0,212 \text{ м}; \quad h = 1,333b = 1,333 \cdot 0,212 = 0,283 \text{ м}.$$

Из двух найденных значений ширины бруса  $b$  выбираем большее, удовлетворяющее условиям прочности по нормальным и касательным напряжениям. Принимаем брус с размерами поперечного сечения  $b \times h = 22 \times 28$  см.

**Вывод.** Балки, у которых отношение длины пролета (или его участка) к размеру поперечного сечения менее пяти, считают короткими. В рассматриваемом примере указанное отношение  $c/h = 0,2/0,28 = 0,714 < 5$ . Действие касательных напряжений оказалось преобладающим.

Основные зависимости, связывающие внутренние усилия с напряжениями и деформациями, используемые в расчетах на прочность и жесткость при простых видах сопротивления, приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТАХ

Вид сопроотивления	Внутренние усилия	Распределение напряжений	Напряжение в произвольной точке	Условие прочности	Напряженное состояние	Деформация (закон Гука)
Растяжение (сжатие)			$\sigma = \frac{N}{A}$	$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$		$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$
Сдвиг			$\tau = \frac{Q}{A}$	$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau]$		$\gamma = \frac{\tau}{G}$ $\Delta S = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A}$
Кручение			$\tau = \frac{T \cdot \rho}{I_p}$	$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$		$\gamma = \frac{\tau}{G}$ $\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}$
Изгиб чистый			$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z}$	$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$		Уравнение упругой линии $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_z}$
Изгиб поперечный			$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z}$ $\tau = \frac{Q \cdot S'_z}{b \cdot I_z}$	$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$ $\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S'_{z,\max}}{b \cdot I_z} \leq [\tau]$		

## 8. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

В общем случае нагрузка на брус может быть такой, что в его поперечных сечениях возникает одновременно несколько внутренних усилий. Такой случай рассматривают как комбинацию простых видов сопротивления и называют *сложным сопротивлением*.

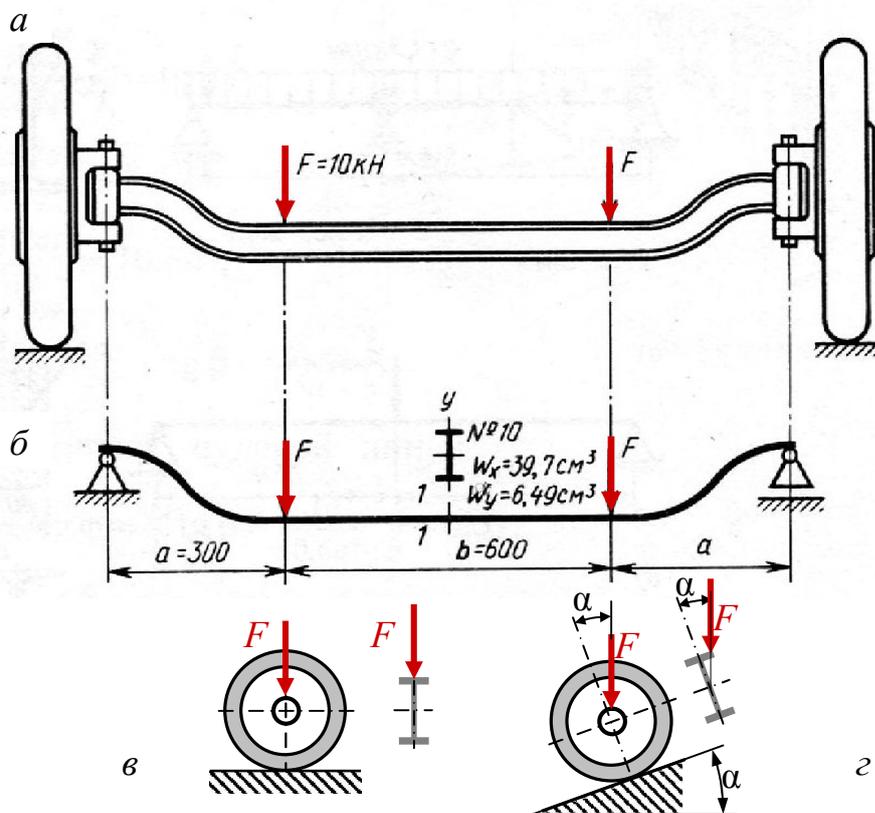
Расчеты на прочность и жесткость бруса при сложном сопротивлении основываются обычно на *принципе независимости действия сил (суперпозиций)*, при котором каждый из простых видов сопротивления рассматривают независимо от остальных. Полные напряжения и деформации, возникающие в упругой системе, определяют путем геометрического сложения напряжений и перемещений, соответствующих простым видам сопротивления.

В зависимости от сочетания внутренних усилий сложное сопротивление условно подразделяют на три вида: косо́й изгиб, изгиб с растяжением, а также изгиб с кручением.

### 8.1. КОСО́Й ИЗГИБ

*Косо́й изгиб* – частный случай сложного сопротивления, при котором силовая плоскость не совпадает с главными плоскостями инерции.

При движении автомобиля по горизонтальной плоскости (рис. 8.1, в)



имеет место плоский изгиб. В случае въезда автомобиля на наклонную плоскость (рис. 8.1, з) линия действия силы  $F$  не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения балки, выполненного в виде двутавра. Наступает косо́й изгиб.

Рис. 8.1

В начале движения мостового крана вдоль пролета цеха (рис. 8.2), а также при его торможении возникает горизонтальная сила вследствие инерции груза. Балка крана испытывает косой изгиб.

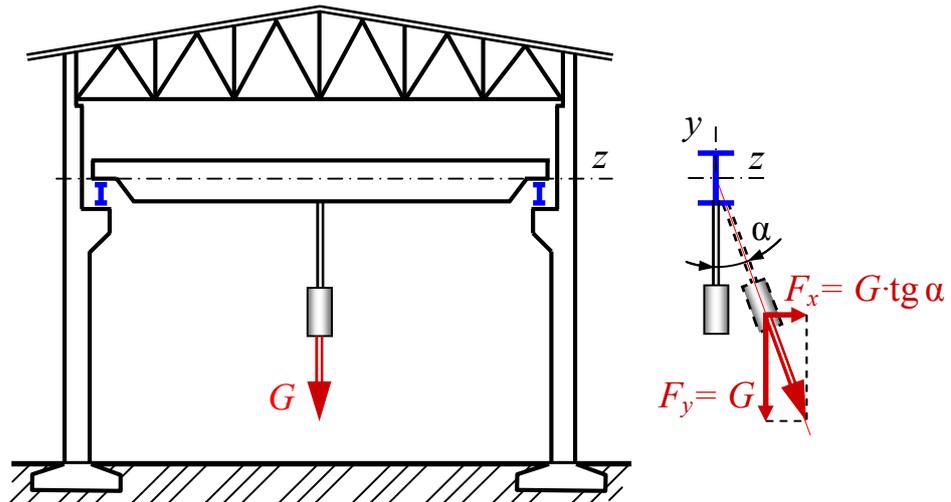


Рис. 8.2

В общем случае косоуго изгиба в поперечных сечениях возникают четыре внутренних усилия: две поперечные силы  $Q_z$ ,  $Q_y$  и два изгибающих момента  $M_z$ ,  $M_y$ . Влиянием поперечных сил на прочность и жесткость при расчете длинных балок часто пренебрегают ввиду их малости. Так, для прямоугольника и круга соответственно  $\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 4 \frac{\ell}{h}$  и  $\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 6 \frac{\ell}{d}$  (см. пример 7.5). В дальнейшем будем учитывать только изгибающие моменты.

### Напряжения при косом изгибе

Изгибающий момент  $M$  (рис. 8.3, а) в сечении раскладывают на две его составляющие, действующие в главных плоскостях инерции  $M_z = M \cdot \cos \alpha$  и  $M_y = M \cdot \sin \alpha$  (рис. 8.3, б).

От каждого из внутренних усилий возникают нормальные напряжения, приложенные к одной паре площадок. Две другие пары площадок свободны от напряжений. Имеет место *линейное напряженное состояние*. Нормальные напряжения в произвольной точке с координатами  $z$ ,  $y$  определяют суммой напряжений от моментов  $M_z$ ,  $M_y$  (рис. 8.3, в):

$$\sigma = \pm \sigma' \pm \sigma'' = \pm \frac{M_z \cdot y}{I_z} \pm \frac{M_y \cdot z}{I_y}. \quad (8.1)$$

Из рисунка следует, что опасными являются точки, в которых складываются напряжения с одним знаком, то есть точки А и С:

$$\sigma = M \left( \frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha}{I_y} \right). \quad (8.2)$$

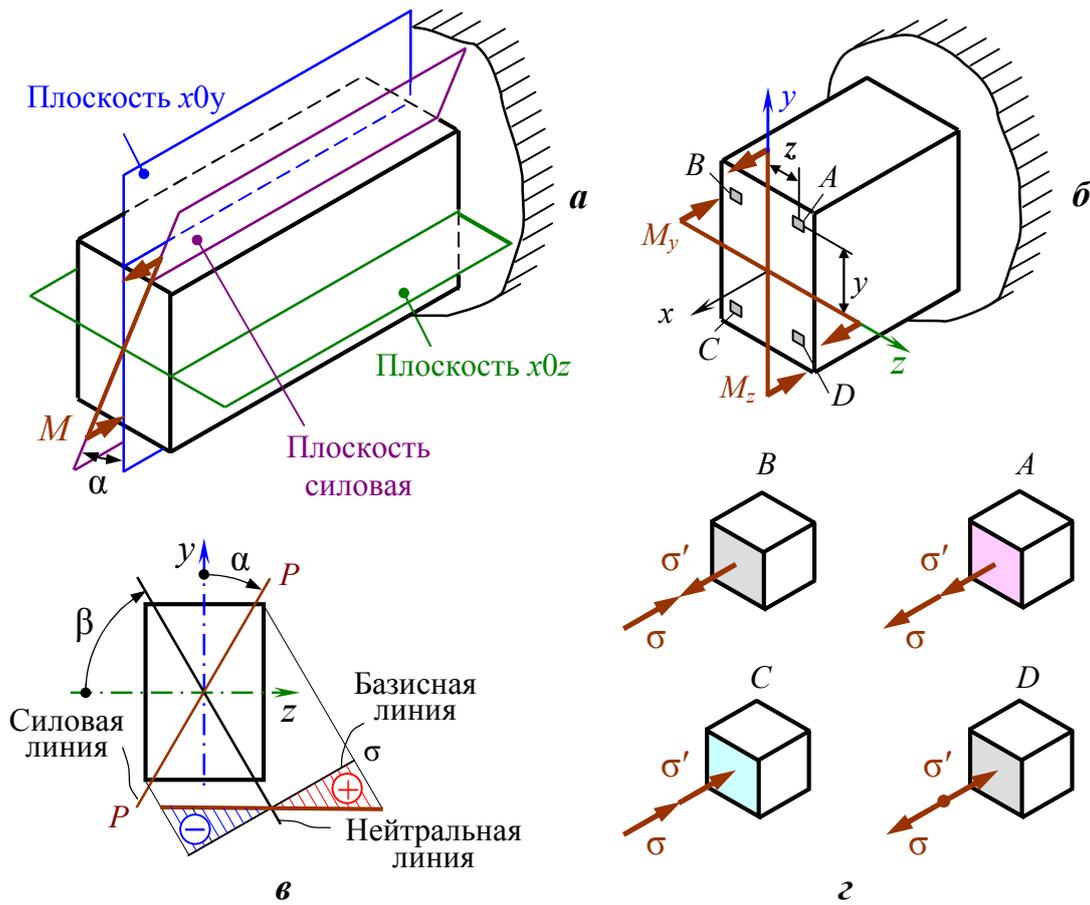


Рис. 8.3

**Правила знаков:** из анализа знаков напряжений (рис. 8.3, г) следует, что для получения верного результата по формулам (8.1) и (8.2) необходим как учет знака *изгибающего момента*, так и выбор (назначение) *направления координатных осей* в сечении.

*Направление координатных осей следует выбирать так, чтобы в первом квадранте координатной системы  $zOy$  (где  $z > 0$ ;  $y > 0$ ) изгибающий момент вызывал растягивающие напряжения.*

Примеры выбора координатных осей приведены на рис. 8.4.

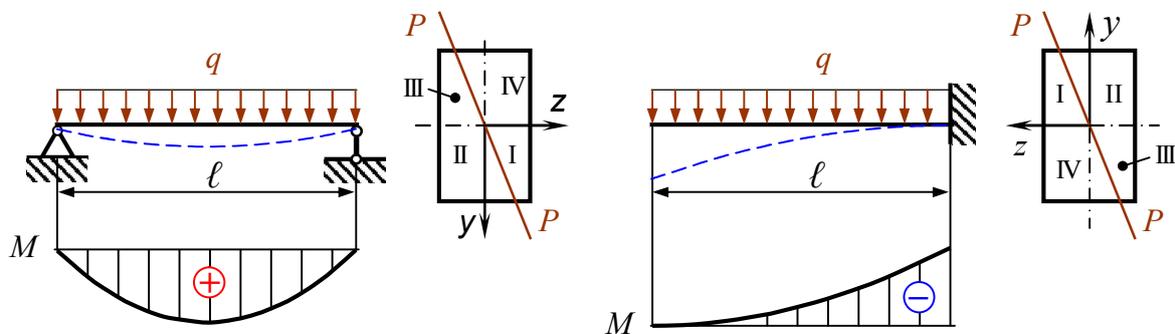


Рис. 8.4

## Нейтральная линия при косом изгибе

В уравнении (8.2), связывающем напряжение в произвольной точке с ее координатами, переменными являются координаты  $z$ ,  $y$ . Поскольку они в первой степени, то, следовательно, напряжения распределяются по *линейному* закону и должна быть линия, на которой напряжения равны нулю.

**Нейтральная линия (нейтральная ось)** – геометрическое место точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Приравняв (8.2) нулю

$$0 = M \left( \frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha}{I_y} \right),$$

получают уравнение нейтральной линии вида  $y = k \cdot x + b$ :

$$\frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha}{I_y} = 0;$$

$$y = -\frac{I_z \sin \alpha}{I_y \cos \alpha} z,$$

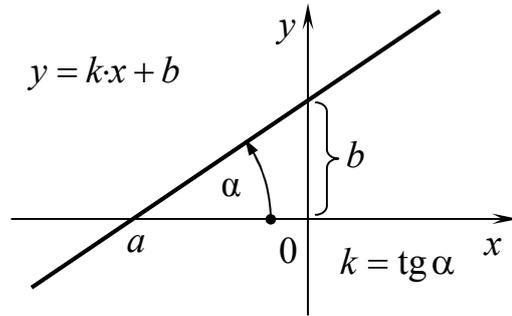


Рис. 8.5

то есть уравнение прямой с угловым коэффициентом, известное из школьного курса, график которого представлен на рис. 8.5.

$$y = \left( -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \right) \cdot z + 0, \tag{8.3}$$

где собственно угловой коэффициент вычисляют

$$k = -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta. \tag{8.4}$$

### Анализ уравнений (8.3), (8.4)

1. Свободный член уравнения (8.3) равен нулю, следовательно, прямая проходит через начало координат. Нейтральная линия разделяет сечение на *сжатую* и *растянутую* области (рис. 8.6).

2. Углы  $\alpha$  и  $\beta$  в уравнении (8.4) имеют разные знаки, следовательно, силовая и нейтральная линии лежат в разных плоскостях. Углы  $\alpha$  и  $\beta$  откладываются в одном направлении, но от разноименных осей (см. рис. 8.3, в).

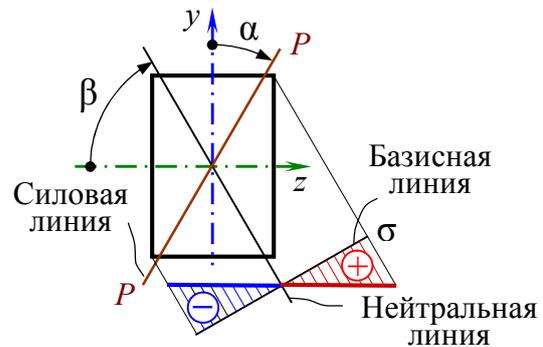


Рис. 8.6

3. Углы  $\alpha \neq \beta$ , следовательно, силовая  $P-P$  и нейтральная линии не перпендикулярны (см. рис. 8.3, в).

### Расчет на прочность при косом изгибе

Поскольку напряженное состояние линейное (см. рис. 8.3, з), результаты расчета по любой из гипотез прочности совпадают. Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. Их положение определяют графически после построения нейтральной линии (см. рис. 8.3, в).

*Условие прочности*, вытекающее из уравнения (8.1):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} + \frac{M_y \cdot z_{\max}}{I_y} \leq [\sigma],$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (8.5)$$

*Условие прочности*, вытекающее из уравнения (8.2):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \left( \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right) \leq [\sigma], \quad (8.6)$$

то есть такое же как при плоском изгибе, но с множителем в скобках бóльшим единицы.

Выполняют три вида расчетов: поверочный, проектный и определение допускаемой нагрузки.

**Проектный расчет.** Требуемый размер поперечного сечения находят из условия прочности при косом изгибе (8.6):

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \left( \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right). \quad (8.7)$$

Искомый параметр находится по обе стороны от знака неравенства. Полученное уравнение – **трансцендентное**, то есть *не могушее быть выраженным алгебраическим выражением*. Такие уравнения решают методом **итераций**, то есть методом последовательных приближений.

Для стандартного прокатного профиля (двутавра, швеллера...) отношение  $W_z/W_y$  зависит от размеров профиля. Так, для двутавров от № 10 до № 60 отношение  $W_z/W_y$  изменяется в диапазоне от 6,12 до 14,07. Поэтому в первом приближении принимают среднее число из указанного диапазона (например, 10). Подбирают профиль, а затем выполняют поверочный расчет. Следующая проба – уточненная. Перегрузку (*overload*)

$$ol = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100$$

выше 5 % не допускают.

**Пример 8.1.** Подобрать размер двутавра для консольной балки длиной  $\ell = 2$  м, нагруженной распределенной нагрузкой  $q = 5$  кН/м. Силовая плоскость наклонена под углом  $\alpha = 10^\circ$ . Допускаемое напряжение материала балки  $[\sigma] = 200$  МПа.

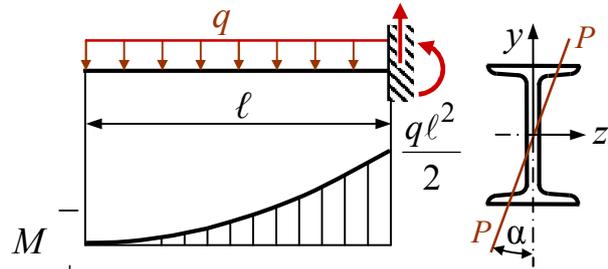


Рис. 8.7

**Решение.** Из условия прочности при косом изгибе (форм. 8.6):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \left( \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right) \leq [\sigma]$$

требуемый момент сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \left( \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right),$$

где  $M_{\max} = q\ell^2/2 = 5 \cdot 4/2 = 10$  кН·м;

$$W_z \geq \frac{10 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} (0,985 + 10 \cdot 0,174) = 136 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Принимаем двутавр № 18 (табл. П.2.1):  $W_z = 143$  см<sup>3</sup>;  $W_y = 18,4$  см<sup>3</sup>.

Проверочный расчет:  $\sigma_{\max} = \frac{10 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^{-6}} \left( 0,985 + \frac{143}{18,4} 0,174 \right) = 163$  МПа.

Недогрузка (*underload*)  $ul = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} = \frac{200 - 163}{200} 100 = 18,2$  %.

Принимаем двутавр № 16:  $W_z = 109$  см<sup>3</sup>;  $W_y = 14,5$  см<sup>3</sup>.

Проверочный расчет:  $\sigma_{\max} = \frac{10 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} \left( 0,985 + \frac{109}{14,5} 0,174 \right) = 210$  МПа.

Перегрузка  $ol = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} = \frac{200 - 210}{200} 100 = -5$  %.

Такая перегрузка допустима.

Напряжения при плоском изгибе, то есть при  $\alpha = 0$

$$\sigma_{\alpha=0} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{10 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 91,7 \text{ МПа}.$$

Сопоставление напряжений при косом и плоском изгибах:

$$\frac{\sigma_{\max, \text{кос}}}{\sigma_{\max, \text{пл}}} = \frac{210}{91,7} = 2,29.$$

**Вывод:** напряжения при косом изгибе больше, чем при плоском изгибе в 2,29 раз. Косой изгиб опаснее плоского.

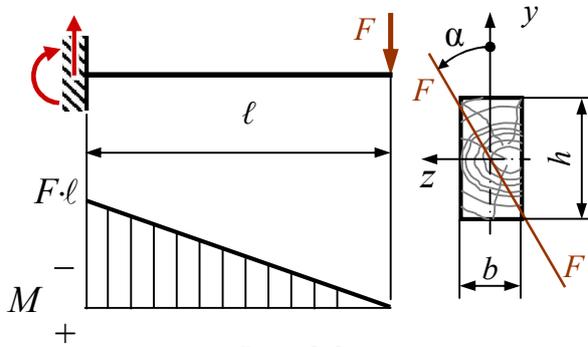


Рис. 8.8

**Пример 8.2.** Подобрать размеры поперечного сечения деревянной балки длиной  $\ell = 3$  м, нагруженной силой  $F = 2$  кН. Силовая плоскость наклонена под углом  $\alpha = 30^\circ$ . Отношение высоты к ширине профиля  $c = h/b = 2$ . Допускаемое напряжение древесины  $[\sigma] = 10$  МПа.

**Решение.** Из условия проч-

ности при косом изгибе (форм. (8.6)):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \left( \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right) \leq [\sigma]$$

требуемый момент сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \left( \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right),$$

$$\text{где } \frac{W_z}{W_y} = \frac{bh^2}{6} \frac{6}{hb^2} = \frac{h}{b} = c = 2.$$

С другой стороны,  $W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(bc)^2}{6} = \frac{b^3c^2}{6}$ , откуда  $b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_z}{c^2}}$ .

Из эпюры моментов  $M_{\max} = F \cdot \ell = 2 \cdot 3 = 6$  кН·м. Тогда

$$W_z \geq \frac{6000}{10^6} (\cos 30^\circ + 2 \sin 30^\circ) = 1120 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3, \text{ откуда}$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1120 \cdot 10^{-6}}{2^2}} = 0,119 \text{ м.}$$

Принимаем:  $b = 0,12$  м,  $h = 0,24$  м. Выполняем поверочный расчет:

$$\sigma_{\max} = \frac{6000 \cdot 6}{0,12 \cdot 0,24^2} \left( 0,866 + \frac{0,24}{0,12} 0,5 \right) = 9,72 \text{ МПа, что меньше } [\sigma].$$

$$\sigma_{\alpha=0} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6000 \cdot 6}{0,12 \cdot 0,24^2} = 5,21 \text{ МПа. } \frac{\sigma_{\alpha=30}}{\sigma_{\alpha=0}} = \frac{9,72}{5,21} = 1,86 \text{ раз.}$$

**Вывод:** косой изгиб опаснее плоского.

## 8.2. ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ

*Изгиб с растяжением* – частный случай сложного сопротивления, при котором на брус действуют продольные и поперечные нагрузки, пересекающие ось бруса.

В общем случае в поперечных сечениях возникают пять внутренних усилий: действующие в двух плоскостях изгибающие моменты  $M_z$ ,  $M_y$ , поперечные силы  $Q_z$ ,  $Q_y$ , а также продольная сила  $N$ . Возникает сложный изгиб с растяжением или сжатием.

Пренебрегая касательными напряжениями от поперечных сил  $Q_z$ ,  $Q_y$  (для длинных балок с отношением  $l/h > 5$  их влияние незначительно), можно считать напряженное состояние в опасных точках линейным.

### Внецентренное растяжение или сжатие

*Внецентренное растяжение* – частный случай изгиба с растяжением, при котором брус растягивается силами, параллельными оси бруса так, что их равнодействующая не совпадает с осью бруса, а проходит через точку  $P$ , называемую центром давления или полюсом силы.

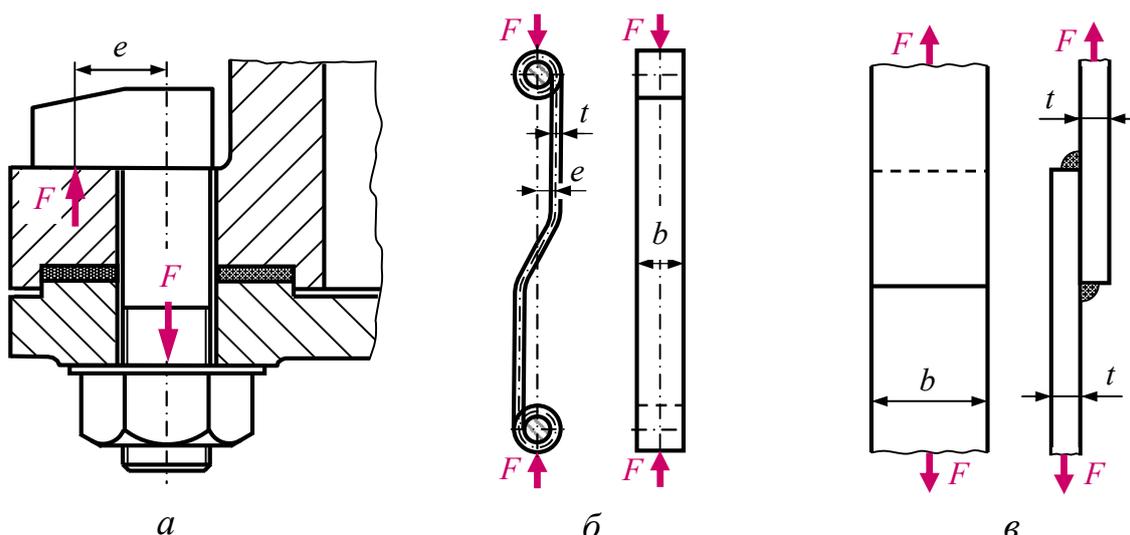


Рис. 8.9

Такому виду сопротивления подвержены, например, болт-костыль, пружина сцепления, сварное соединение (рис. 8.9).

### Внутренние усилия и напряжения

В произвольном сечении  $x$  бруса (рис. 8.10,  $a$ ) методом сечений определяем внутренние усилия

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad N = F; & \quad \sum M_x = 0; & \quad T = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad Q_y = 0; & \quad \sum M_y = 0; & \quad M_y = F \cdot z_P; \\ \sum Z = 0; & \quad Q_z = 0; & \quad \sum M_z = 0; & \quad M_z = F \cdot y_P. \end{aligned}$$

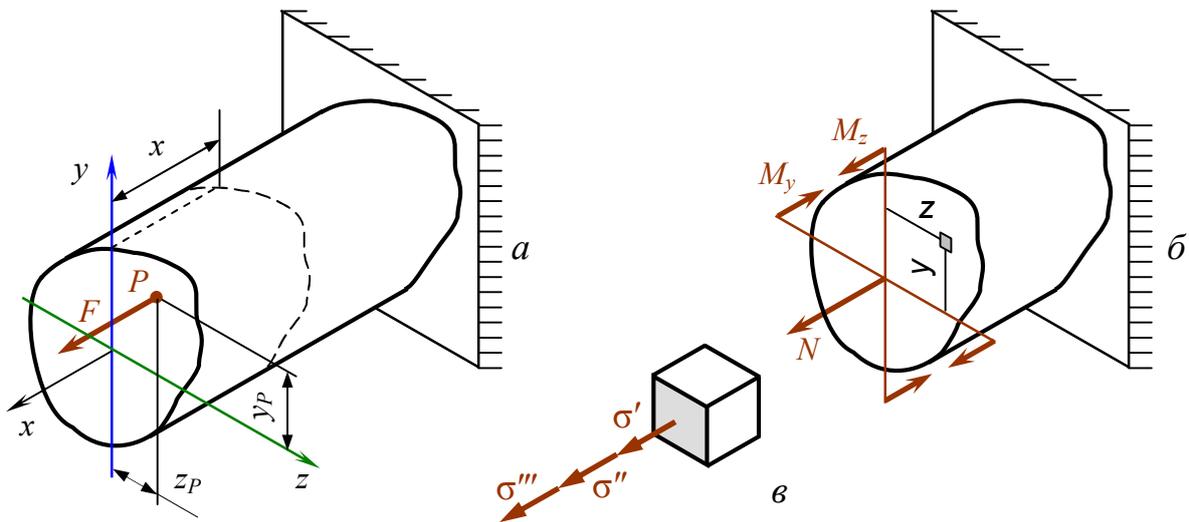


Рис. 8.10

Отличны от нуля три внутренних усилия (рис. 8.10, б), от которых возникают нормальные напряжения, действующие по одной из трех пар граней (рис. 8.10, в); две другие пары граней свободны от напряжений. Имеет место **линейное напряженное состояние**. Напряжения в произвольной точке являются суммой трех слагаемых

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z; \quad \sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_P \cdot y}{A \cdot I_z / A} + \frac{F \cdot z_P \cdot z}{A \cdot I_y / A}.$$

Учитывая, что отношение  $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  – радиус инерции сечения, получим

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_P y}{i_z^2} + \frac{z_P z}{i_y^2} \right). \quad (8.8)$$

**О правиле знаков внутренних усилий.** Формула (8.8) выведена для случая положительной растягивающей силы  $N$  и изгибающих моментов  $M_z$ ,  $M_y$ , вызывающих растягивающие напряжения в точке, принадлежащей первой четверти осей координат (где  $x > 0$  и  $y > 0$ ). Поэтому *оси координат поперечного сечения бруса следует направлять так, чтобы полюс  $P$  (точка приложения силы) находился в первом квадранте*. Если сила, приложенная к брусу, сжимающая, то ее *числовое* значение будет со знаком минус.

### Анализ формулы (8.8)

1. Отсутствие координаты  $x$  свидетельствует о неизменности напряжений вдоль оси бруса.
2. В случае приложения силы в центр тяжести сечения ( $z_P = 0$ ,  $y_P = 0$ ) напряжения в любой точке сечения постоянны и равны  $\sigma = F/A$ , то есть центральное растяжение является частным случаем внецентренного.
3. Независимо от значений координат полюса  $P$  напряжение в центре тяжести сечения ( $y_{ц.т} = 0$ ,  $z_{ц.т} = 0$ ),  $\sigma_{ц.т} = F/A$ .

4. Переменные  $z$  и  $y$  в первой степени, следовательно, формула (8.8) является уравнением прямой и нормальные напряжения распределяются по линейному закону, значит должна быть нейтральная линия, на которой напряжения равны нулю.

### Уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении

**Нейтральная линия (нейтральная ось)** – геометрическое место точек, в которых нормальное напряжение в поперечном сечении равно нулю.

Приравняем нулю уравнение (8.8). Поскольку  $F/A \neq 0$ , то выражение в скобках равно нулю

$$1 + \frac{y_P \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_P \cdot z}{i_y^2} = 0.$$

Переменные  $z$ ,  $y$  в первой степени, следовательно, нормальные напряжения в сечении распределяются по линейной зависимости. Полученное выражение приведем к виду уравнения **прямой в отрезках** (рис. 8.11), известному из школьного курса, где  $a$  и  $b$  – отрезки, отсекаемые линией на осях координат. В нашем случае уравнение нейтральной линии будет записано как

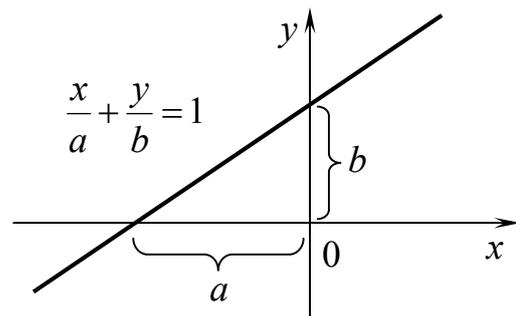


Рис. 8.11

$$\frac{y}{\left(-\frac{i_z^2}{y_P}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{i_y^2}{z_P}\right)} = 1. \quad (8.9)$$

Свободный член полученного уравнения не равен нулю, следовательно, **нейтральная линия через начало координат не проходит**. Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях  $y$  и  $z$ , соответственно равны:

$$y_{н.л} = -\frac{i_z^2}{y_P}; \quad z_{н.л} = -\frac{i_y^2}{z_P}. \quad (8.10)$$

По найденным значениям отрезков проводят нейтральную линию и находят точки  $B$  и  $C$ , наиболее удаленные от нее (рис. 8.12). Выполняют это простым геометрическим построением, проводя касательные к сечению, параллельные нейтральной оси. Найденные точки – опасные, поскольку напряжения в них наибольшие по величине. Уравнения (8.10), связываю-

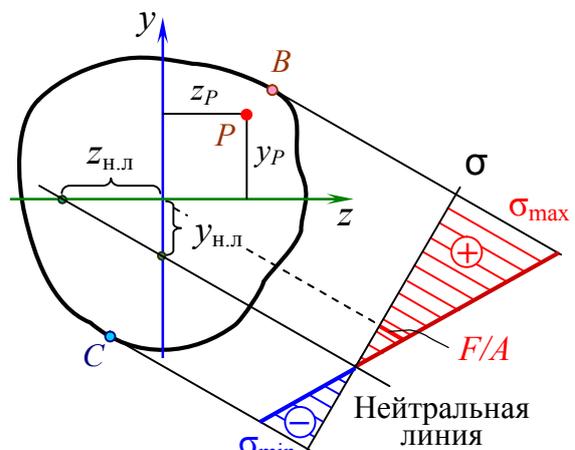


Рис. 8.12

щие координаты полюса  $P$  – точки приложения внешней нагрузки с положением нейтральной линии, являются гиперболической функцией. Чем ближе полюс  $P$  к центру тяжести сечения (значения  $y_P, z_P$  уменьшаются), тем нейтральная линия проходит дальше и в пределе стремится к бесконечности. И, наоборот, по мере отдаления точки приложения силы от центра тяжести нейтральная линия асимптотически приближается к нему. Однако пересечь центр тяжести сечения нейтральная линия не может (см. анализ формулы (8.8)). В центре тяжести  $\sigma_{ц.т} = F/A$  (рис. 8.12), поскольку  $y_{ц.т} = 0$  и  $z_{ц.т} = 0$  (подставьте в (8.8)).

Нейтральная линия *может* разделять поперечное сечение на области, в которых действуют напряжения разных знаков. Некоторые материалы (чугун, силумин, керамика, кирпичная кладка...) хорошо сопротивляются сжатию и плохо – растяжению. Поэтому необходимо уметь определять такую область приложения нагрузки, в которой не возникают напряжения разных знаков.

### Ядро сечения

**Ядро сечения** – область вокруг центра тяжести сечения, при приложении нагрузки внутри которой, напряжения во всем сечении будут одного знака.

Контур ядра сечения строят путем окатывания нейтральной линией

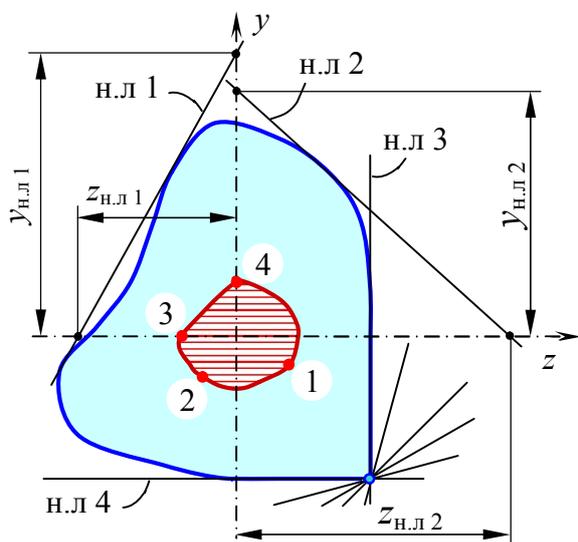


Рис. 8.13

контура поперечного сечения, то есть решают задачу обратную той, в которой определяли положение нейтральной линии: *куда следует прикладывать силу, чтобы нейтральная линия не пересекала контур сечения, а только касалась его*. Задают несколько положений нейтральной линии, касательной к сечению (например, н.л. 1, н.л. 2, н.л. 3), определяют координаты точек пересечения этих линий с осями координат (например,  $z_{н.л. 1}, y_{н.л. 1}$ ). Затем, преобразуя уравнение (8.10), находят соответствующие им координаты точек ядра сечения (точки 1, 2, 3):

$$y_{я} = y_P = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.}}; \quad z_{я} = z_P = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.}}. \quad (8.11)$$

Так как при переходе нейтральной линии с одной стороны на другую (например, от н.л. 3 к н.л. 4) она поворачивается вокруг угловой точки сече-

ния, то точка приложения силы перемещается по прямой (на рис. 8.13 отрезок 3 – 4), образуя контур ядра.

**Пример 8.4.** Построить ядро сечения для круга диаметром  $d$  (рис. 8.14).

**Решение.** Квадрат радиуса инерции круга:

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{\pi d^2} = \frac{d^2}{16}.$$

Задаем положение нейтральной линии 1-1, касательной к окружности. Ее координаты:

$$z_{н.л.1} = \infty; \quad y_{н.л.1} = d/2.$$

Координаты точки ядра сечения:

$$z_{я1} = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.1}} = -\frac{d^2}{16 \cdot \infty} = 0;$$

$$y_{я1} = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.1}} = -\frac{d^2 \cdot 2}{16 \cdot d} = -\frac{d}{8}.$$

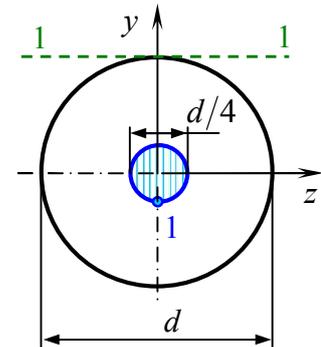


Рис. 8.14

Из симметрии сечения относительно его центра тяжести следует, что при других положениях нейтральной линии на окружности диаметром  $d$  **точки ядра сечения образуют концентрический с ней круг диаметром  $d/4$ .**

**Пример 8.5.** Построить ядро сечения для прямоугольника (рис. 8.15) с размером сторон  $b \times h$ .

**Решение.** Квадраты радиусов инерции:

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{bh^3}{12} \frac{1}{bh} = \frac{h^2}{12}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{b^3h}{12} \frac{1}{bh} = \frac{b^2}{12}.$$

Задаем положение нейтральной линии 1-1, касательной к верхней грани прямоугольника. Ее координаты:  $z_{н.л.1} = \infty$ ;  $y_{н.л.1} = h/2$ . Координаты соответствующей точки ядра сечения:

$$z_{я1} = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.1}} = -\frac{b^2}{12 \cdot \infty} = 0; \quad y_{я1} = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.1}} = -\frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6}.$$

Аналогично для нейтральной линии 2-2:  $z_{н.л.2} = b/2$ ;  $y_{н.л.2} = \infty$ .

$$z_{я2} = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.2}} = -\frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{b}{6}; \quad y_{я2} = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.2}} = -\frac{h^2}{12 \cdot \infty} = 0.$$

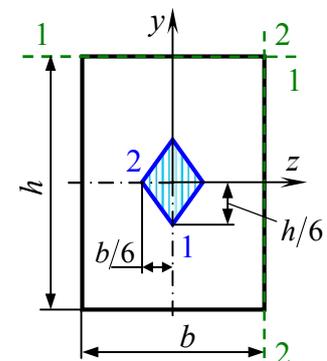


Рис. 8.15

Учитывая симметрию прямоугольного сечения относительно осей  $z$  и  $y$ , задаем положения нейтральных линий на противоположных сторонах прямоугольника и получаем еще две точки. Соединяя все точки, получаем **ядро сечения в виде ромба с диагоналями, равными  $h/3$  и  $b/3$ .**

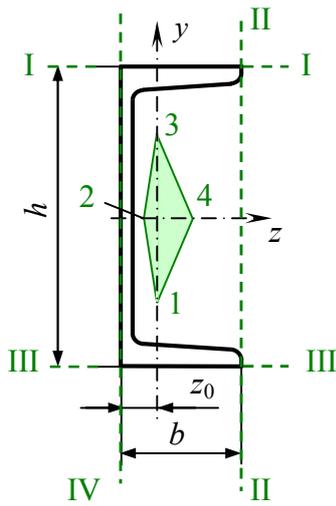


Рис. 8.16

**Пример 8.6.** Построить ядро сечения для швеллера № 20 (рис. 8.16).

**Решение.** Из таблицы сортамента выпишем исходные данные и выполним рисунок швеллера.

Последовательно задаем положение нейтральной линии (I-I, II-II, III-III, IV-IV), касающейся контура сечения, и вычисляем координаты точек ядра сечения. Расчеты представлены в табличном виде.

Ядро сечения имеет вид четырехугольника, асимметричного относительно оси ординат. *Положение ядра сечения зависит лишь от формы и размеров поперечного сечения, но*

*не зависит от величины приложенной силы.*

I-I	$y_{н.л} = h/2 = 20/2 = 10 \text{ см};$ $z_{н.л} = \infty;$
1	$y_я = -\frac{i_z^2}{y_{н.л}} = -\frac{8,07^2}{10} = -6,51 \text{ см};$ $z_я = -\frac{i_y^2}{z_{н.л}} = -\frac{2,2^2}{\infty} = 0;$
II-II	$y_{н.л} = \infty;$ $z_{н.л} = b - z_0 = 7,6 - 2,07 = 5,53 \text{ см};$
2	$y_я = -\frac{i_z^2}{y_{н.л}} = -\frac{8,07^2}{\infty} = 0;$ $z_я = -\frac{i_y^2}{z_{н.л}} = -\frac{2,2^2}{5,53} = 0,845 \text{ см};$
III-III	$y_{н.л} = -h/2 = -20/2 = -10 \text{ см};$ $z_{н.л} = \infty;$
3	$y_я = -\frac{i_z^2}{y_{н.л}} = -\frac{8,07^2}{-10} = 6,51 \text{ см};$ $z_я = -\frac{i_y^2}{z_{н.л}} = -\frac{2,2^2}{\infty} = 0;$
IV-IV	$y_{н.л} = \infty;$ $z_{н.л} = -b = -2,07 \text{ см};$
4	$y_я = -\frac{i_z^2}{y_{н.л}} = -\frac{8,07^2}{\infty} = 0;$ $z_я = -\frac{i_y^2}{z_{н.л}} = -\frac{2,2^2}{-2,07} = 2,34 \text{ см}.$

### Расчет на прочность при внецентренном нагружении

*Поверочный расчет* выполняют, используя условие прочности

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

*Проектный расчет* обладает особенностью, связанной с тем, что геометрические характеристики, входящие в условие прочности содержат искомый размер поперечного сечения в разной степени. Площадь  $A$  измеряется в  $\text{м}^2$ , а моменты сопротивления  $W$  в  $\text{м}^3$ . Попытка выразить искомый размер из условия прочности приводит к *трансцендентной функции*, то есть аналитической функции, не являющейся алгебраической.

**Проектный расчет** выполняют методом *итераций*<sup>1</sup> [от лат. *iteratio* – повторение]. В первом приближении, пренебрегая одним из внутренних усилий, – продольной силой  $N$  – подбирают размер сечения только из условия прочности при изгибе. Полученный размер подставляют в исходное уравнение и выполняют следующую пробу. Процесс повторяют до тех пор, пока невязка – разность размеров последующей и предыдущей проб, не достигнет заданной наперед малости.

**Пример 8.7.** (Винокуров А. И. Сборник задач ... 5.35)

Подобрать диаметр стержня выпускного клапана (рис. 8.17). При расчете использовать усилие  $F$  в момент открывания клапана в конце рабочего хода поршня.

Дано:  
 $p = 1,5$  МПа;  $e = 12$  мм;  
 $D = 35$  мм;  $[\sigma] = 210$  МПа

**Решение.** Сила давления газов на тарелку клапана

$$F = p \cdot A_{\text{клап}} = p \frac{\pi}{4} D^2 = 1,5 \frac{\pi}{4} 35^2 = 1443 \text{ Н.}$$

Внутренние усилия в сечении 1-1 стержня клапана (по модулю):

$$N = F; \quad M = F \cdot e.$$

Условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\max} = \frac{F \cdot 4}{\pi d^2} + \frac{F \cdot e \cdot 32}{\pi d^3} \leq [\sigma].$$

$$\frac{4F}{\pi d^3} (d + 8e) \leq [\sigma], \quad \text{откуда} \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{4F}{\pi[\sigma]} (d + 8e)}.$$

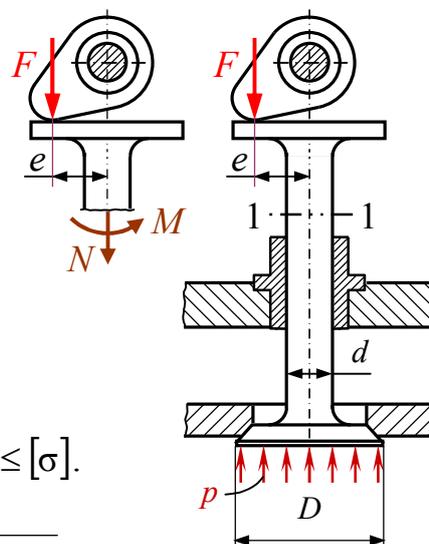


Рис. 8.17

По обе стороны от знака неравенства искомый диаметр – имеем **трансцендентное уравнение**, которое решаем методом приближений:

$$d_0 = 0; \quad d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210} (0 + 8 \cdot 12)} = 9,435 \text{ мм.}$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210} (9,435 + 8 \cdot 12)} = 9,735 \text{ мм.}$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210} (9,735 + 8 \cdot 12)} = 9,744 \text{ мм.}$$

Разность между последним и предпоследним приближениями

<sup>1</sup> Метод последовательных приближений, при котором каждое новое приближение вычисляют исходя из предыдущего; начальное приближение выбирается в достаточной степени произвольно.

$$\frac{9,744 - 9,735}{9,744} 100 = 0,0924 \% .$$

Процесс подбора прекращаем, принимаем  $d = 10$  мм.

**Проверка:**

$$\sigma = \frac{F \cdot 4}{\pi d^2} + \frac{F \cdot e \cdot 32}{\pi d^3} = \frac{1443 \cdot 4}{\pi \cdot 100} + \frac{1443 \cdot 12 \cdot 32}{\pi \cdot 1000} = 18,4 + 176,4 = 194,8 \text{ МПа} .$$

Напряжения изгиба больше напряжений растяжения в

$$\frac{\sigma_{\text{изг}}}{\sigma_{\text{раст}}} = \frac{176,4}{18,4} = 9,6 \text{ раза} .$$

### 8.3. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

*Изгиб с кручением* – вид сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении бруса возникают изгибающие и крутящий моменты.

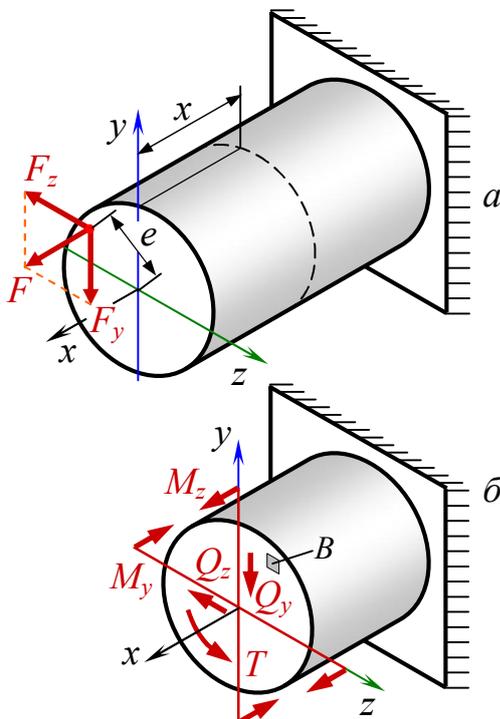


Рис. 8.18

Рассмотрим случай, при котором внешние силы располагаются в плоскости поперечного сечения, но не пересекают геометрическую ось  $x$  (рис. 8.18, а). Силу  $F$  разложим на ее составляющие  $F_z$ ,  $F_y$ . Методом сечений определим внутренние усилия в произвольном сечении  $x$  (рис. 8.18, б).

Спроецировав все силы на координатные оси и составив уравнения моментов относительно координатных осей, найдем внутренние усилия. Из шести внутренних усилий не равно нулю пять.

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; \quad N = 0; \quad \Sigma M_x = 0; \quad T = F \cdot e; \\ \Sigma Y = 0; \quad Q_y = F_y; \quad \Sigma M_y = 0; \quad M_y = F_z \cdot x; \\ \Sigma Z = 0; \quad Q_z = F_z; \quad \Sigma M_z = 0; \quad M_z = F_y \cdot x. \end{aligned}$$

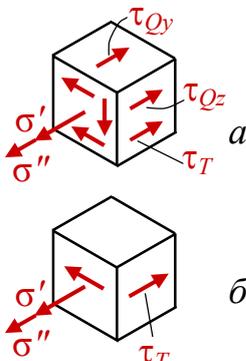


Рис. 8.19

На выделенном элементе  $B$  (рис. 8.18, б) показаны действующие по его граням напряжения (рис. 8.19, а). От поперечных сил и крутящего момента возникают касательные напряжения  $\tau_{Q_y}$ ,  $\tau_{Q_z}$ ,  $\tau_T$ . От изгибающих моментов – нормальные напряжения  $\sigma'$  и  $\sigma''$ . Для длинных

валов и балок ( $\ell > 5d$ ) влиянием поперечных сил часто пренебрегают. Таким образом, учитывают только три момента: крутящий и два изгибающих. От них возникают три напряжения: одно касательное и два нормальных (рис. 8.19, б).

### Расчет на прочность при изгибе с кручением

Из рис. 8.19, б следует, что в произвольном сечении возникает плоское напряженное состояние

$$\sigma_x = \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z; \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = 0;$$

$$\tau_{xz} = \tau_T = \frac{T}{I_p} \rho.$$

Как при изгибе, так и при кручении круглого сечения опасными являются точки на периферии. Для круга и кольца

$$W_z = W_y = W_{oc}; \quad W_p = 2W_{oc}.$$

$$\sigma_{M_y, \max} = \frac{M_y}{W_{oc}}; \quad \sigma_{M_z, \max} = \frac{M_z}{W_{oc}}; \quad \tau_{T, \max} = \frac{T}{2W_{oc}}.$$

Условие прочности для пластичных материалов по III теории прочности (наибольших касательных напряжений):  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ ,

где

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}.$$

Тогда

$$\sigma_{\text{экв}} = \left[ \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_T^2} \right] - \left[ \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_T^2} \right];$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_T^2} \leq [\sigma].$$

Поскольку для круглого и кольцевого сечений не существует точки, одинаково удаленной от обеих осей инерции  $z, y$ , то используют *результурующий момент – геометрическую сумму векторов изгибающих моментов* относительно осей  $z, y$ :

$$M_{\text{рез}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (8.12)$$

Тогда

$$\sigma_x = \frac{M_{\text{рез}}}{W_{oc}}.$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{M_y^2 + M_z^2}{W_{oc}^2} + 4 \frac{T^2}{(2W_{oc})^2}} \leq [\sigma], \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}}{W_{oc}} \leq [\sigma].$$

Условие прочности при совместном действии изгиба и кручения:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma]. \quad (8.13)$$

$M_{\text{прив}}$  – приведенный момент, действие которого эквивалентно совместному действию  $M_y, M_z, T$  в соответствии с используемыми теориями прочности.

По III теории прочности (наибольших касательных напряжений)

$$M_{\text{прив, III}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}. \quad (8.14)$$

По IV теории прочности (энергетической)

$$M_{\text{прив, IV}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75 \cdot T^2}. \quad (8.15)$$

Приведенного момента в действительности не существует, изобразить его нельзя, вектора он не имеет. Величина приведенного момента зависит от используемой теории прочности. Результаты расчетов по III и IV теориям прочности близки, отличаются примерно на 5–10 %.

**Пример 8.8.** (Вольмир А. С. Сборник задач ... 6.52). Вал с кривошипом (рис. 8.20, а) подвергается действию силы  $F = 3,5 \text{ кН}$ . Определить диаметр вала по третьей теории прочности при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;  $\ell = 50 \text{ см}$ ,  $a = 10 \text{ см}$ .

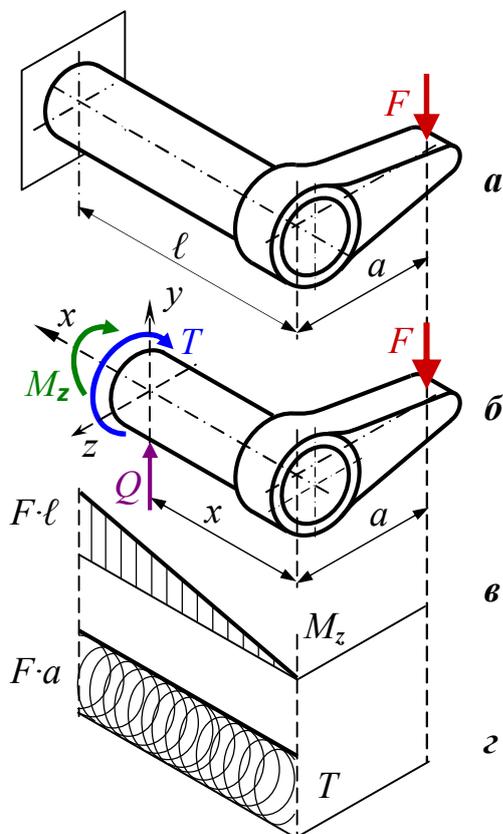


Рис. 8.20

**Решение.** Внутренние усилия определяем методом сечений (рис. 8.20, б).

**Р**ассекаем вал на две части в произвольном сечении  $x$ ,

**О**тбрасываем одну из частей (поз. б рисунка),

**З**аменяем действие отброшенной части внутренними усилиями и в координатной системе  $x, y, z$  составляем

**У**равнения статики:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; N = 0; \quad \sum M_x = 0; T = -F \cdot a; \\ \sum Y = 0; Q_y = F; \quad \sum M_y = 0; M_y = 0; \\ \sum Z = 0; Q_z = 0; \quad \sum M_z = 0; M_z = -F \cdot x. \end{aligned}$$

**С**троим эпюры изгибающего и крутящего моментов, действующих в поперечных сечениях вала (рис. 8.20, в и г).

Находим приведенный момент в опасном сечении – в защемлении:

$$\begin{aligned} M_{\text{прив}} &= \sqrt{M_z^2 + T^2} = \sqrt{(-F\ell)^2 + (-Fa)^2} = \\ &= F\sqrt{\ell^2 + a^2} = 3500\sqrt{0,5^2 + 0,1^2} = 1785 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Из условия прочности при изгибе с кручением  $\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_{\text{ос}}} = [\sigma]$  находим

$$W_{\text{ос}} = \frac{M_{\text{прив}}}{[\sigma]} = \frac{\pi}{32} d^3,$$

откуда 
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{прив}}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1785}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0484 \text{ м}.$$

Округлив до большего значения, принимаем диаметр вала  $d = 50 \text{ мм}$ .

**Сопоставление касательных напряжений от сдвигающей силы  $Q_y$  и крутящего момента  $T = M_x$**

$$\tau_Q = \frac{Q_y}{A} = \frac{F}{\pi(d^2/4)} = \frac{3500 \cdot 4}{\pi \cdot 50^2} = 1,78 \text{ МПа};$$

$$\tau_T = \frac{T}{W_p} = \frac{-F \cdot a}{\pi(d^3/16)} = \frac{-3500 \cdot 100 \cdot 16}{\pi \cdot 50^3} = -14,3 \text{ МПа}.$$

Отношение напряжений

$$\frac{\tau_T}{\tau_Q} = \frac{|-14,3|}{1,78} = 8,01.$$

**Выводы:** а) из условия прочности при совместном действии изгиба и кручения найден диаметр вала, результат округлен до большей стандартной величины; б) касательные напряжения от сдвига примерно на порядок меньше касательных напряжений от кручения.

## 9. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА УПРУГИХ СИСТЕМ

Метод основан на равенстве работы  $W$  внешних сил, действующих на линейно деформируемую упругую систему и потенциальной энергии  $U$  деформации, то есть  $W = U$ .

### 9.1. РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

При статическом приложении нагрузки (возрастающей от нуля до своего конечного значения с такой малой скоростью, что силами инерции

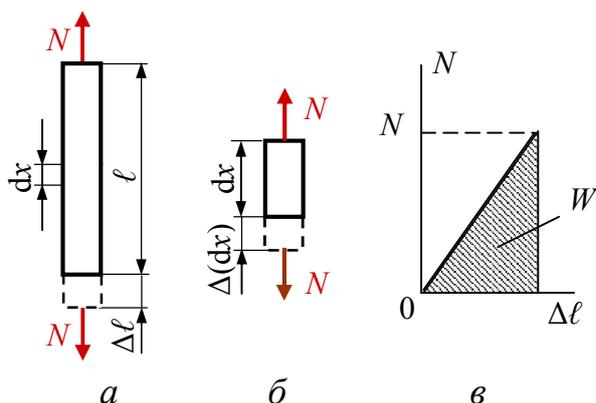


Рис. 9.1

вследствие ускорения можно пренебречь) работа  $W$  внешней силы равна **половине** произведения значения этой силы на величину соответствующего ей перемещения (теорема Клапейрона<sup>1</sup> сформулирована в 1852 г.).

При простом виде нагружения – растяжении в упругой области работа внешней силы – это площадь  $W$  треугольника под диаграммой растяжения (рис. 9.1)

$$W = \frac{N \cdot \Delta \ell}{2}; \quad \Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}; \quad W = \frac{N^2 \ell}{2EA}.$$

Для малого элемента  $dx$  закон Гука и работа соответственно равны

$$\Delta(dx) = \frac{N \cdot (dx)}{E \cdot A}; \quad dW = \frac{N^2 \cdot dx}{2E \cdot A}.$$

Потенциальная энергия деформации всего стержня

$$U = \int_{\ell} \frac{N^2 dx}{2EA}.$$

Для других видов сопротивления (сдвиг, кручение, изгиб,...) подход аналогичен. В общем случае нагружения при наличии всех шести внутренних усилий для бруса, имеющего несколько ( $n$ ) участков, с использованием принципа независимости действия сил, потенциальная энергия упругой деформации

$$U = \sum_n \int_{\ell} \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum_n k_y \int_{\ell} \frac{Q_y^2 dx}{2GA} + \sum_n k_z \int_{\ell} \frac{Q_z^2 dx}{2GA} + \\ + \sum_n \int_{\ell} \frac{M_x^2 dx}{2GI_p} + \sum_n \int_{\ell} \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \sum_n \int_{\ell} \frac{M_z^2 dx}{2EI_z}.$$

<sup>1</sup> Бенуа Поль Эмиль Клапейрон (1799 — 1864) — французский физик и инженер

Здесь знак  $\Sigma$  указывает на суммирование по всем элементам упругой системы; коэффициенты  $k_y, k_z$  характеризуют неравномерность распределения по сечению касательных напряжений.

## 9.2. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Потенциальная энергия деформации численно равна половине произведения величины силового фактора на значение перемещения, *соответствующего* этой силе:

$$U = \frac{\Phi \cdot \Delta}{2}.$$

Наличие в знаменателе формул множителя 2 объясняется тем, что в формулы входят конечные значения  $N, \Delta \ell, \sigma, \varepsilon$ , в то время как они изменялись от нуля до этих конечных значений.

Таким образом, появляется возможность решать задачу в общем виде, не конкретизируя ни силовые факторы, ни перемещения. Вводят понятия **обобщенной силы** ( $\Phi$ ) и **обобщенного перемещения** ( $\Delta$ ).

**Обобщенная сила** – силовой фактор, который удобно выделить при вычислении потенциальной энергии деформации.

**Обобщенное перемещение** – деформационный фактор, на котором обобщенная сила совершает работу.

Обобщенная сила и обобщенное перемещение, будучи перемноженными, дают величину с размерностью работы.

$\Phi$	$\Delta$	$W$	Примеры
$F,$ Н	$\Delta \ell,$ м $\delta,$ м	Н·м	
$M,$ Н·м	$\varphi,$ рад $\nu,$ рад	Н·м	
$q,$ Н/м	$\omega,$ м <sup>2</sup>	Н·м	
$p,$ Н/м <sup>2</sup>	$\Delta V,$ м <sup>3</sup>	Н·м	

## Обозначения перемещений

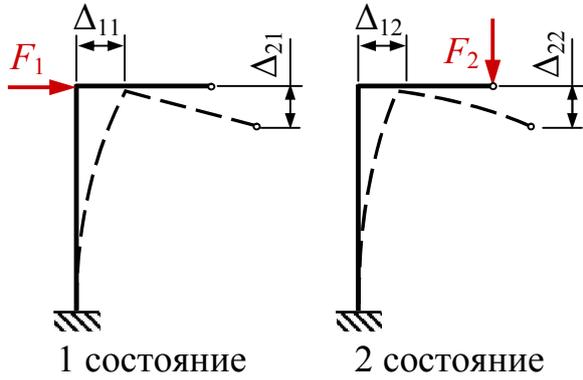


Рис. 9.2

Перемещения в системе (прогибы, углы поворота сечений) в результате ее деформации обозначают  $\Delta_{mn}$ , где  $m$  – направление перемещения;  $n$  – силовой фактор, вызвавший перемещение.

$\Delta_{11}$  – перемещение по направлению действия силы  $F_1$  от действия силы  $F_1$ ;

$\Delta_{12}$  – перемещение по направлению действия силы  $F_1$  от действия силы  $F_2$ ;

$\Delta_{21}$  – перемещение по направлению действия силы  $F_2$  от действия силы  $F_1$ ;

$\Delta_{22}$  – перемещение по направлению действия силы  $F_2$  от действия силы  $F_2$ . *Перемещения, содержащие в обозначении два одинаковых индекса ( $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{22}$ ) называют главными. Остальные ( $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{21}$ ) – побочными.*

*Перемещения, вызванные единичной силой ( $F = 1$ ) или единичным моментом ( $M = 1$ ), называют удельным перемещением и обозначают  $\delta$*

$$\Delta_F = F \cdot \delta_F.$$

Размерность удельного перемещения:

$$[\delta] = \frac{\text{размерность обобщенного перемещения}}{\text{размерность обобщенной силы}}.$$

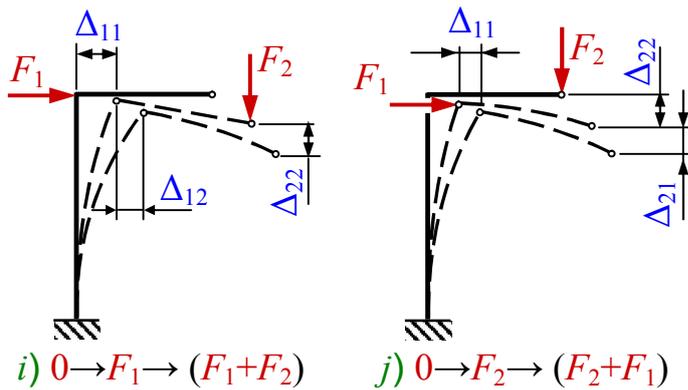


Рис. 9.3

### Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)

Рассмотрены два варианта последовательности нагружения системы:

- i)* нагружение силой  $F_1$ , догружение силой  $F_2$ ;
- j)* нагружение силой  $F_2$ , догружение силой  $F_1$ ;

Работа для каждого из вариантов

$$\left. \begin{aligned} W_{(i)} &= W_{11} + W_{22} + W_{12} = \frac{F_1 \cdot \Delta_{11}}{2} + \frac{F_2 \cdot \Delta_{22}}{2} + F_1 \cdot \Delta_{12} \\ W_{(j)} &= W_{22} + W_{11} + W_{21} = \frac{F_2 \cdot \Delta_{22}}{2} + \frac{F_1 \cdot \Delta_{11}}{2} + F_2 \cdot \Delta_{21} \end{aligned} \right\}$$

Поскольку работа сил не зависит от порядка их приложения, то

$$W_i = W_j$$

$$W_{11} + W_{22} + W_{12} = W_{22} + W_{11} + W_{21};$$

$$W_{12} = W_{21}.$$

*Работа внешних сил первого состояния на перемещениях, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях, вызванных силами первого состояния*

### **Теорема о взаимности перемещений** (теорема Мэквелла)

Рассматривая состояния системы, нагруженной единичными силами  $F_1 = 1$  и  $F_2 = 1$ , определим удельные (единичные) перемещения  $\delta_{12}$  и  $\delta_{21}$ . На основании теоремы о взаимности работ  $F_1 \cdot \delta_{12} = F_2 \cdot \delta_{21}$ .

Но так как  $F_1 = F_2 = 1$ , то  $\delta_{12} = \delta_{21}$ , или в общем случае действия любых единичных сил

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}. \quad (9.1)$$

*Для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй единичной силы, вызванному первой единичной силой.*

### **9.3. МЕТОД МЭКСВЕЛЛА-МОРА**

Метод предложен Мэквеллом в 1864 г., в расчетную практику введен Мором в 1874 г. Метод является разновидностью теоремы А. Кастильяно, согласно которой *частная производная от потенциальной энергии деформации тела по какой-либо внешней силе равна перемещению точки приложения этой силы в направлении действия силы*

$$\frac{\partial U}{\partial \Phi} = f.$$

Для реализации метода используют две системы, имеющие одинаковые размеры и способы закрепления. Одна из них действительная (или грузовая), нагружена всеми внешними нагрузками. К другой из систем – фиктивной, прикладывают единичный силовой фактор, соответствующий искомого перемещению (см. подразд. 9.2). Величина этого фактора равна безразмерной единице, поэтому часто эту систему называют единичной.

В общем случае интеграл Мэквелла-Мора содержит шесть слагаемых, по числу внутренних усилий. Деформации от усилий  $N$ ,  $Q_y$  и  $Q_z$  значительно меньше деформаций от  $T$ ,  $M_y$  и  $M_z$ . Поэтому ими часто пренебрегают. Для пространственной системы из прямолинейных брусьев

$$\Delta = \sum_{\ell} \int \frac{T \cdot T_1}{G \cdot I_p} dx + \sum_{\ell} \int \frac{M_y \cdot M_{y1}}{E \cdot I_y} dx + \sum_{\ell} \int \frac{M_z \cdot M_{z1}}{E \cdot I_z} dx.$$

Для плоской системы из прямолинейных брусьев  $T = M_y = 0$ . Тогда, опуская индекс ‘z’, интеграл записывают так:

$$\Delta = \sum_{\ell} \int \frac{M_P \cdot M_1}{EI} dx. \quad (9.2)$$

Здесь  $M_P$  – внутреннее усилие для действительного (грузового) состояния;  $M_1$  – внутреннее усилие для фиктивного (единичного) состояния.

**Примечание.** В расчетной практике широко применяют графоаналитический способ вычисления интеграла Максвелла-Мора, который называют правилом или способом Верещагина<sup>2</sup>. Суть способа заключается в том, что значение интеграла М-М равно произведению площади эпюры момента  $M_P$  грузовой системы на ординату эпюры момента  $M_{1C}$ , соответствующей положению центра тяжести эпюры момента грузовой системы. При соответствующем навыке построения эпюр внутренних усилий способ Верещагина менее трудоемок и более нагляден.

### Порядок определения перемещений

1. Нарисовать фиктивную систему, имеющую такие же, как у действительной, размеры и способы закрепления.
2. Приложить к фиктивной системе единичный силовой фактор, соответствующий искомому перемещению. Соответствие по признакам:
  - а) виду деформации (угловая, линейная);
  - б) расположению сечения в брус;
    - в) направлению перемещения (горизонтальное, вертикальное...).
3. Определить внутренние усилия в действительной и фиктивной системах.
4. Решить интеграл Максвелла-Мора.
5. *Положительный* знак ответа означает, что направление перемещения *совпадает* с направлением единичной нагрузки.

**Пример 9.1.** Определить стрелу прогиба (максимальный прогиб  $f$ ) консольной балки, нагруженной моментом  $M_0$  (рис. 9.4, а).

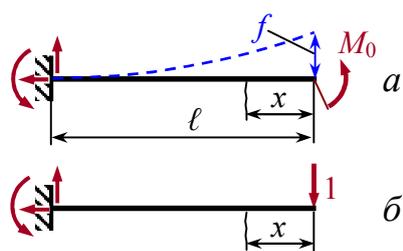


Рис. 9.4

### Решение

1. Рисуем фиктивную балку, размеры которой и способы закрепления, аналогичны данной.
2. К фиктивной балке (рис. 9.4, б) прикладываем единичную силу, соответствующую искомому линейному перемещению.
3. Определяем внутренние усилия в обеих системах. В защемлении возникают три опорных реакции, определять которые не имеет смысла, поскольку находить внутренние усилия станем со свободного конца.

Участок:	$0 \leq x \leq l$
$M_P = M_0;$	$M_1 = -1 \cdot x$

<sup>2</sup> Андрей Константинович Верещагин (1896-1959) – физик. В 1924 г. будучи студентом МИИТ предложил правило для вычисления интеграла М-М для частного случая прямого стержня постоянного поперечного сечения.

4. Записываем и решаем интеграл Максвелла-Мора

$$f \cdot EI = \int_{\ell} M_P M_1 dx = \int_0^{\ell} M_0(-1 \cdot x) dx = -M_0 \frac{\ell^2}{2}; \quad f = -\frac{M_0 \ell^2}{2EI}.$$

Знак минус означает, что направление перемещения не совпадает с направлением действия единичной силы.

**Пример 9.2.** Определить стрелу прогиба (максимальный прогиб  $f$ ) консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой  $F$  (рис. 9.5, а).

**Решение**

1. Рисуем фиктивную балку с такими же размерами и способом закрепления, как и заданная (рис. 9.5, б).

2. Прикладываем к фиктивной балке в заданном сечении сосредоточенную единичную силу (рис. 9.5, б), соответствующую линейному перемещению.

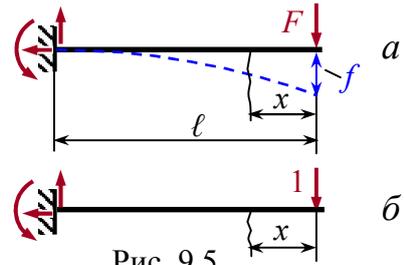


Рис. 9.5

3. В обеих системах определяем внутренние усилия, рассматривая произвольное сечение со свободного конца.

4. Решаем интеграл Максвелла-Мора.

$$f \cdot EI = \int_{\ell} M_P M_1 dx = \int_0^{\ell} (-F \cdot x)(-1 \cdot x) dx = \frac{F \ell^3}{3}; \quad f = \frac{F \ell^3}{3EI}.$$

**Пример 9.3.** К каретке, перемещающейся вдоль оси балки (рис. 9.6), приложена сосредоточенная сила. Определить перемещение концевого сечения балки.

I участок:  $0 \leq x \leq (L - \ell)$

$$M_P = 0; \quad M_1 = -1 \cdot x.$$

II участок:  $0 \leq x \leq \ell$

$$M_P = -F \cdot x; \quad M_1 = -1(L - \ell + x).$$

сосредоточенную силу, соответствующую линейному перемещению.

2. В произвольных сечениях обоих участков определяем внутренние усилия для действительного и единичного состояний.

3. Решаем интеграл Максвелла-Мора

**Решение<sup>3</sup>**  
1. К концу сечению фиктивной балки прикладываем единичную сосредоточенную силу,

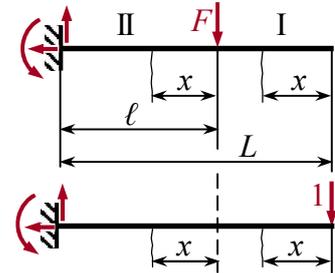


Рис. 9.6

$$v \cdot EI = \int_0^{\ell} Fx(L - \ell + x) dx = F \left( L \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\ell} - \ell \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\ell} + \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\ell} \right) = F \left( \frac{L \ell^2}{2} - \frac{\ell^3}{2} + \frac{\ell^3}{3} \right);$$

<sup>3</sup> Полученная формула используется в лабораторной работе «Деформация балок при косом изгибе»

$$v = \frac{F\ell^3}{6EI} \left( 3\frac{L}{\ell} - 1 \right)$$

В крайнем правом положении каретки при  $\ell = L$   $v_{\max} = f = \frac{F\ell^3}{3EI}$ .

**Пример 9.4.** Определить стрелу прогиба (максимальный прогиб  $f$ ) консольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$  (рис. 9.7, а).

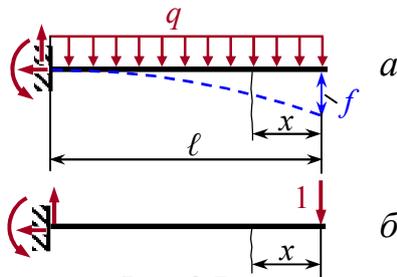


Рис. 9.7

### Решение

1. Рисуем фиктивную балку с такими же размерами и способом закрепления, как и заданная (рис. 9.7, б).

2. Искомому линейному перемещению концевое сечение балки соответствует единичная сосредоточенная сила, которую и прикладываем к фиктивной балке.

3. В произвольных сечениях  $x$  обеих балок определяем внутренние усилия.

Участок  $0 \leq x \leq \ell$

$$M_P = -qx \frac{x}{2}; \quad M_1 = -1 \cdot x.$$

4. Найденные внутренние усилия подставляем в интеграл Максвелла-Мора и решаем его.

$$f \cdot EI = \int_0^{\ell} M_P M_1 dx = \int_0^{\ell} \left( -q \frac{x^2}{2} \right) (-1 \cdot x) dx = \frac{q}{2} \frac{\ell^4}{4}; \quad f = \frac{q\ell^4}{8EI}.$$

**Пример 9.5.** Балка на двух опорах нагружена сосредоточенным моментом, приложенным в окрестности одной из опор (рис. 9.8, а). Определить прогиб балки в середине пролета.

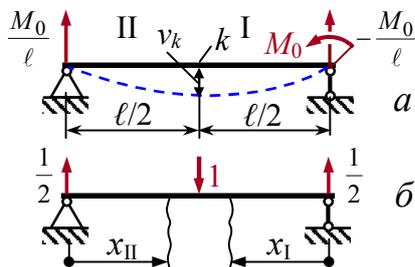


Рис. 9.8

**Решение.** Балка имеет один пролет,

однако характерное сечение, перемещение которого требуется определить, является признаком для деления балки на два участка (рис. 9.8, а). Расчет ведем по разработанному для такого рода задач алгоритму.

1. Рисуем фиктивную схему, размеры и способы закрепления которой аналогичны заданной (рис. 9.8, б).

2. Посередине пролета, в точке  $k$  к фиктивной системе прикладываем единичную сосредоточенную силу, соответствующую искомому линейному перемещению  $v_k$ . Максимум прогиба смещен от центра ближе к правой опоре и обозначался бы символом  $f$  (стрела прогиба).

3. Находим внутренние усилия в обеих системах, предварительно вычислив опорные реакции с помощью уравнений статики (величины реакций показаны на рисунках).

$$\begin{array}{ll} \text{I участок:} & \text{II участок:} \\ 0 \leq x_I \leq \ell/2 & 0 \leq x_{II} \leq \ell/2 \\ M_P = M_0 - \frac{M_0}{\ell} x; \quad M_1 = \frac{1}{2} x. & M_P = \frac{M_0}{\ell} x; \quad M_1 = \frac{1}{2} x. \end{array}$$

4. Решаем интеграл Максвелла-Мора.

$$\begin{aligned} v_k \cdot EI &= \sum \int_{\ell} M_P M_1 dx = \int_0^{\ell/2} \left( M_0 - \frac{M_0}{\ell} x \right) \left( \frac{1}{2} x \right) dx + \int_0^{\ell/2} \frac{M_0}{\ell} x \frac{x}{2} dx; \\ v_k \cdot EI &= \frac{M_0}{2} \int_0^{\ell/2} x dx - \frac{M_0}{2\ell} \int_0^{\ell/2} x^2 dx + \frac{M_0}{2\ell} \int_0^{\ell/2} x^2 dx = \frac{M_0}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\ell/2}; \\ v_c &= \frac{M_0 \ell^2}{16 EI}. \end{aligned}$$

**Пример 9.6.** Определить стрелу прогиба двухопорной балки, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной посередине пролета (рис. 9.9).

**Решение.** Выполнив этапы расчета 1 и 2, видим, что обе схемы симметричны. Для выполнения этапа 3 достаточно найти внутренние усилия лишь на одном из участков

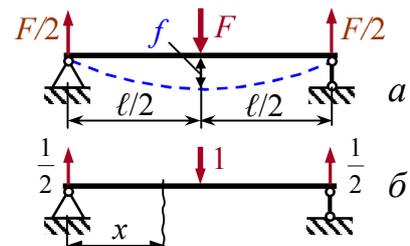


Рис. 9.9

$$\begin{array}{ll} \text{Участок:} & 0 \leq x \leq \ell/2 \\ M_P = (F/2) \cdot x; & M_1 = (1/2) \cdot x, \end{array}$$

а на этапе 4 – решить удвоенный интеграл Максвелла-Мора

$$f \cdot EI = 2 \int_{\ell} M_P M_1 dx = f \cdot EI = 2 \int_0^{\ell/2} \left( \frac{F}{2} x \right) \left( \frac{1}{2} x \right) dx = \frac{F}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\ell/2} = \frac{F}{6} \frac{\ell^3}{8}; \quad f = \frac{F \ell^3}{48 EI}.$$

**Пример 9.7.** Определить стрелу прогиба двухопорной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 9.10).

**Решение.** Используя известный алгоритм решения и, поступая аналогично предыдущему примеру, найдем внутренние усилия на участках грузовой и единичной систем

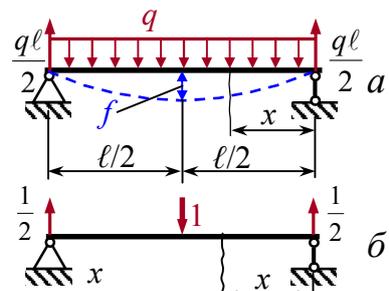


Рис. 9.10

Участки I и II:  $0 \leq x \leq \ell/2$

$$M_P = \frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2; \quad M_1 = \frac{1}{2}x.$$

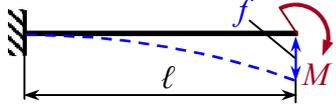
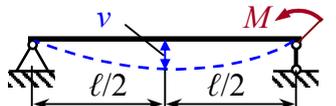
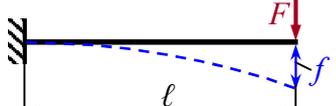
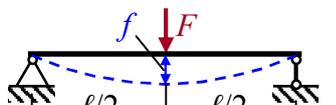
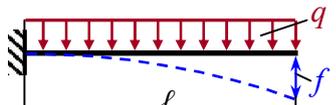
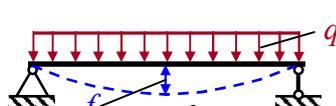
Решение интеграла Максвелла-Мора

$$f \cdot EI = 2 \int_{\ell} M_P M_1 dx = 2 \int_0^{\ell/2} \left( \frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right) \frac{x}{2} dx = \frac{q}{2} \left( \ell \int_0^{\ell/2} x^2 dx - \int_0^{\ell/2} x^3 dx \right);$$

$$f \cdot EI = \frac{q}{2} \left( \ell \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\ell/2} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^{\ell/2} \right) = \frac{q}{2} \left( \frac{\ell \ell^3}{3 \cdot 8} - \frac{1 \ell^4}{4 \cdot 16} \right); \quad f = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}.$$

Полученные результаты сведены в таблицу. Здесь же сопоставлены величины прогибов балок, закрепленных по-разному (консольно и на двух опорах), но от действия силовых факторов аналогичных.

**Вывод:** жесткость консольных балок на порядок и более уступает жесткости балок на двух опорах.

Схемы нагружения	Величина прогиба	Отношение прогибов
1. 	$f_1 = \frac{M\ell^2}{2EI}$	$\frac{f_1}{v_2} = 8$
2. 	$v_2 = \frac{M\ell^2}{16EI}$	
3. 	$f_3 = \frac{F\ell^3}{3EI}$	$\frac{f_3}{f_4} = 16$
4. 	$f_4 = \frac{F\ell^3}{48EI}$	
5. 	$f_5 = \frac{q\ell^4}{8EI}$	$\frac{f_5}{f_6} = 9,6$
6. 	$f_6 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$	

#### 9.4. ПОНЯТИЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БРУСЕ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОСЬЮ

В рассмотренных ранее примерах интегрирование произведения моментов  $M_P \cdot M_1$  выполняли по длине  $l$  бруса с прямолинейной геометрической осью, а элементарный отрезок имел длину  $dx$ . Перемещения в кривом брусе вычисляют с использованием интеграла

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_S M_P M_1 dS = \frac{R}{EI} \int_S M_P M_1 d\varphi,$$

где  $S = R \cdot \varphi$  – длина криволинейного участка бруса;  $dS = R \cdot d\varphi$  – длина элементарного отрезка криволинейного участка. Грузовые  $M_P$  и единичные  $M_1$  моменты вычисляются как обычно: произведением силы на плечо – расстояние от линии действия силы до рассматриваемого сечения. Появившиеся под интегралом тригонометрические функции несколько усложняют расчет, однако имеющиеся в учебной литературе таблицы позволяют с легкостью справиться с решением.

#### 9.5. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

##### I. Общие понятия и определения

**Статически определимой** называют систему, в которой реакции в связях закрепления, а также внутренние усилия в элементах системы могут быть определены исходя из уравнений равновесия, например, как на рис. 9.11, а.

Если число опорных связей уменьшить, например до двух (рис. 9.11, б), то балка превращается в геометрически изменяемую систему (механизм).

**Геометрически изменяемой** называют систему, в которой перемещения ее точек или элементов могут происходить без деформации стержней.

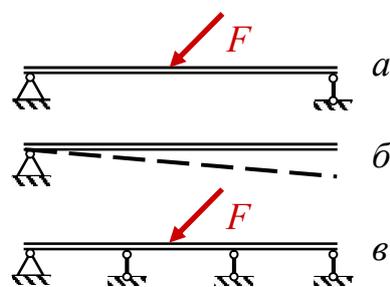


Рис. 9.11

Таким образом, необходимое число опорных связей в балке или стержневой системе должно быть не менее трех.

**Геометрически неизменяемой** называют систему, в которой перемещения точек или элементов возможны лишь за счет деформации ее элементов.

**Статически неопределимой** называют конструкцию, силовые факторы в элементах которой определить только из уравнений равновесия (статики) невозможно. Число связей при этом превышает количество уравнений статики (рис. 9.11, в).

Статически неопределимой называют систему, содержащую связи, количество которых превышает число независимых уравнений равновесия.

**Связью** называют *всякое препятствие, не допускающее изменения взаимного положения точек или сечений системы.*

Связи условно подразделяются на две группы:

- а) внешние, препятствующие смещениям опорных точек: опорный момент и две составляющие опорной реакции (для плоской системы);
- б) внутренние, препятствующие взаимным перемещениям сечений: продольное усилие  $N$ , поперечные силы  $Q_y$ ,  $Q_z$  и три момента  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

**Лишними неизвестными** называют *усилия в лишних связях; их число совпадает с числом лишних связей.*

**Степень (порядок) статической неопределимости равна Числу лишних Связей, то есть разности между числом искомых усилий и числом Независимых Уравнений Равновесия, которые можно составить для их получения**

$$\boxed{СН = ЧС - НУР} \quad (9.3)$$

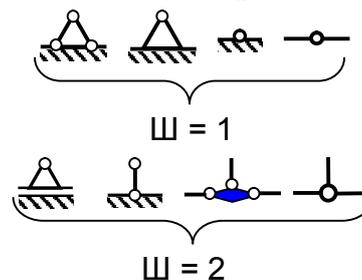
	$СН = 3 \cdot 1 - 2 = 1$
	$СН = 3 \cdot 2 - 4 = 2$
	$СН = 3 \cdot 1 - 0 = 3$
	$СН = 3 \cdot 2 - 2 = 4$
	$СН = 3 \cdot 2 - 1 = 5$
	$СН = 3 \cdot 2 - 0 = 6$
	$СН = 3 \cdot 2 - 2 = 4$

Более универсальной является формула

$$СН = 3К - Ш, \quad (9.4)$$

где  $K$  – количество замкнутых контуров в предположении отсутствия шарнирных соединений;  $Ш$  – число одиночных шарниров.

**Замкнутый контур** – система, состоящая из ряда элементов (прямых или криволинейных), жестко (без шарниров) связанных между собой и образующих замкнутую цепь. Любой замкнутый контур **трижды** статически неопределим.



Так, для примера в первой строке приведенной выше таблицы  $СН = (2+2) - 3 = 1$  (две опоры по две связи и НУР = 3 для плоской системы). Аналогичный расчет для второго примера. Рама из третьего примера (такие снаряды используют воздушные гимнасты, работающие под куполом цирка) опор не имеет; применение формулы (9.3) вызывает затруднение. Такая же ситуация для строк 5 и 6 таблицы.

Статически неопределимые системы имеют «*лишние*» связи. Термин следует понимать не как ненужные, а как *избыточные*, превышающие необходимое число независимых уравнений равновесия (для плоской системы их три). *Лишние*, дополнительные связи придают системе прочность и жесткость. Примером лишних связей являются опоры многопролетных мостов, эстакад надземных трубопроводов, коленчатых и распределительных валов ДВС.

*Ферма* – несущая конструкция, состоящая из прямолинейных стержней, узловые соединения которых при расчете условно принимаются шарнирными. Фермы применяют главным образом в строительстве (покрытия зданий, пролетные строения мостов, мачты, опоры линий электропередачи, гидротехнические затворы и др.), а также в качестве несущих конструкций машин и механизмов.

*Рама* – стержневая система, элементы которой (стойки, ригели, подкосы) во всех или в некоторых узлах жестко соединены между собой. Рамы служат в основном несущими конструкциями зданий, мостов, эстакад и др. сооружений, а также рабочих и транспортных машин. Различают рамы пространственные и плоские.

*Плоская система* – система конструкций, в которой оси симметрии всех элементов и линии действия внешних сил находятся в одной плоскости. Расчет рам обычно производится с помощью общих методов расчета статически неопределимых систем: метода сил, метода перемещений и смешанного метода.

## II. Раскрытие статической неопределимости методом сил

Принцип раскрытия статической неопределимости заключается в том, что к уравнениям равновесия составляют *дополнительные* уравнения – *уравнения совместности деформаций*.

Метод заключается в том, что систему раскрепляют до статической определимости, отбрасывая лишние связи, позволяют ей деформироваться в тех сечениях и в том направлении, в котором лишние связи запрещали перемещения. Взамен лишних связей прикладывают силовые факторы такой величины, при которых перемещения в направлении реакций от лишних связей равнялись бы нулю. Таким образом, вычисляя *деформацию*

системы, находят *силы* (реакции связей или внутренние усилия). Отсюда и название «метод сил». Вариантов раскрепления системы до статической определимости может быть несколько.

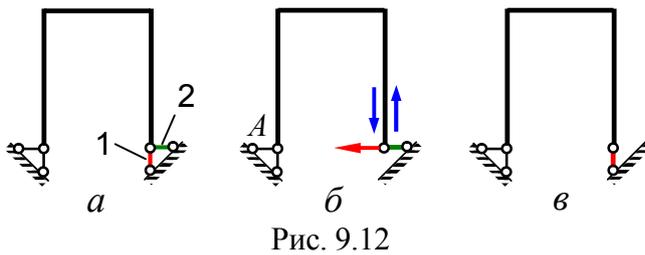


Рис. 9.12

*Связи, удаление которых превращает систему в геометрически изменяемую, называют абсолютно необходимыми* (на рис. 9.12, а, связь 1).

*Связи, удаление которых НЕ превращает систему в геометрически изменяемую, называют условно необходимыми* (на рис. 9.12, а, связь 2).

На рис. 9.12, б показано ошибочное удаление вертикального стерженька (связи 1), из-за которого рама стала геометрически изменяемой: может поворачиваться вокруг точки А.

– Отбросив *лишние* связи, превращают заданную Статически Неопределимую Систему (СНС) (рис. 9.13, а) в *основную* (раскрепленную) статически определимую, нагруженную внешними силами, имеющую лишь необходимые связи (рис. 9.13, в).

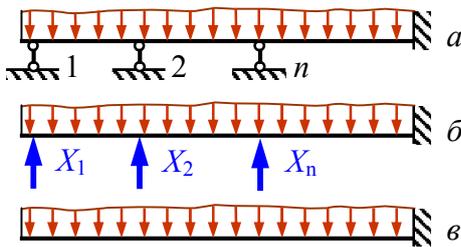


Рис. 9.13

– *Эквивалентной* называют статически определимую систему, нагруженную внешними силами, а также дополнительными силами и моментами, представляющими собой реакции отброшенных связей (рис. 9.13, б).

– Основная система получила возможность перемещения в тех направлениях, в которых связи 1, 2, n накладывали ограничения:  $\Delta_{1P}$ ,  $\Delta_{2P}$ ,  $\Delta_{nP}$  (рис. 9.14, з). Здесь символом  $\Delta$  обозначают перемещение от *внешних* нагрузок; первым индексом – номер (направление) отброшенной связи; вторым индексом – силовой фактор (причина), вызвавший перемещение (см. подразд. 9.2).

– Прикладывают силовой фактор, соответствующий *первой* лишней неизвестной (рис. 9.14, д). При этом раскрепленная (основная) система получит перемещения:  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{21}$ ,  $\delta_{n1}$ .

– Прикладывают силовой фактор, соответствующий *второй* лишней неизвестной, результатом которого появятся перемещения  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{n2}$  (рис. 9.14, е).

– Аналогично для *n-й* лишней неизвестной. Получим  $\delta_{1n}$ ,  $\delta_{2n}$ ,  $\delta_{nn}$  (рис. 9.12, ж).

– Поскольку единичный силовой фактор **1** отличается от лишней неизвестной  $X_1$  в  $X_1$  раз, то и перемещения будут отличаться в  $X_1$  раз. Тогда,

пользуясь принципом независимости действия сил, и, складывая перемещения от каждой лишней неизвестной  $X_1, X_2, X_n$ , получим в первом направлении:

$$\delta_{1Xi} = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n.$$

Лишние связи в рассматриваемых опорах запрещают перемещения. Поэтому для сохранения эквивалентности исходной и рассматриваемой систем необходимо равенство нулю перемещений от внешних нагрузок и от лишних неизвестных. В итоге для заданной конструкции получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \dots + \delta_{3n}X_n + \Delta_{3P} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (9.5)$$

*Уравнения, записанные по определенному канону (правилу, закону) называют каноническими. Число уравнений равно порядку (степени) статической неопределимости.*

Смысл уравнений: суммарные перемещения в основной системе, вызванные внешней нагрузкой и лишними неизвестными по направлению самих неизвестных должны быть равны нулю.

Коэффициенты  $\Delta_{1P}, \Delta_{2P}, \Delta_{nP}$  называют *грузовыми перемещениями*. Их размер-

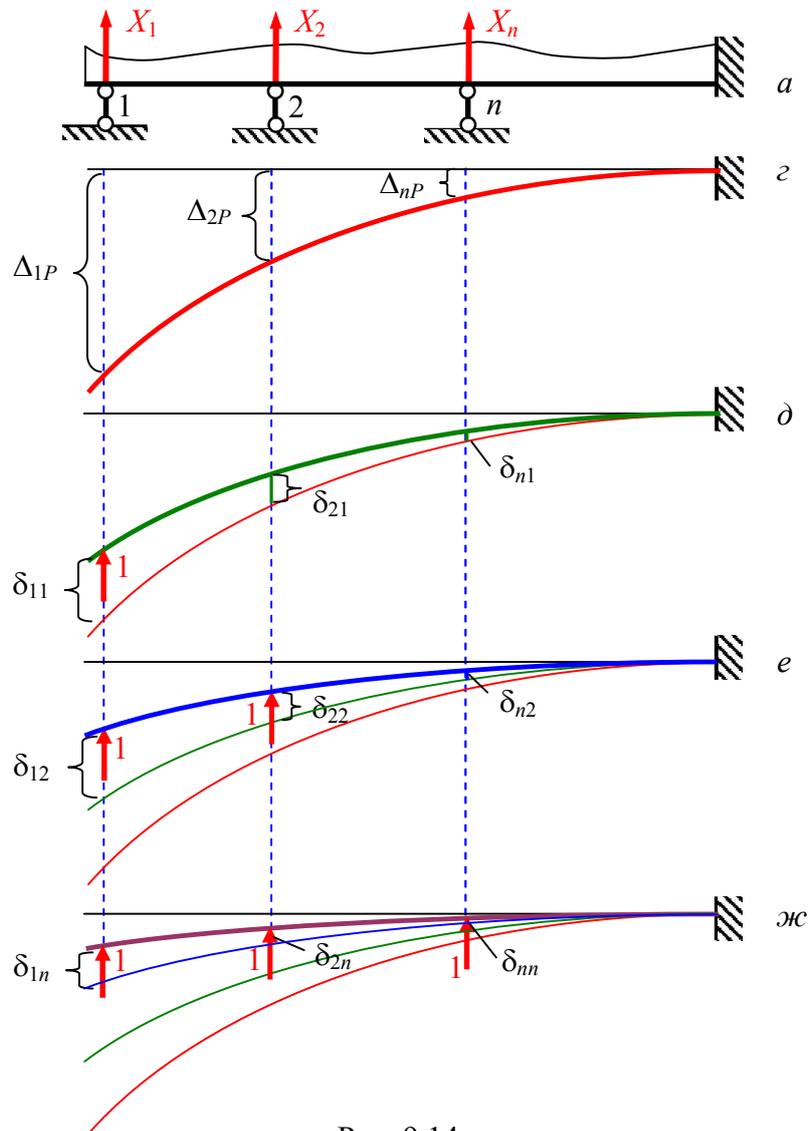


Рис. 9.14

ность определяется видом нагрузки лишней неизвестной (см. подразд. 6.2. Обобщенные силы, обобщенные перемещения):  $H \rightarrow m$ ;  $H \cdot m \rightarrow \text{рад}$ ; могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Коэффициенты  $\delta$ , называют *единичными перемещениями*; имеющие одинаковые индексы  $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}$  – *главными единичными перемещениями*; их знаки только положительные. Коэффициенты с разными индексами  $\delta_{ij}$  называют *побочными единичными перемещениями*; могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. В соответствие с теоремой о взаимности перемещений (формула (9.1))  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

Перемещения определяют обычно методом Мáксвелла-Мора. Метод предполагает использование шести (по количеству внутренних усилий) интегралов. Для плоской системы крутящий момент  $T$  равен нулю, а деформациями от поперечных  $Q_y, Q_z$  и продольных  $N$  сил часто пренебрегают ввиду незначительности их вклада в общую деформацию (формула (9.2)).

$$\Delta_{iP} = \sum_{\ell} \int \frac{M_P \cdot M_i}{E \cdot J_{oc}} dx, \quad \delta_{ij} = \sum_{\ell} \int \frac{M_i \cdot M_j}{E \cdot J_{oc}} dx,$$

где  $M_P$  – внутренний изгибающий момент, определяемый в грузовой (основной) системе, то есть только от внешних нагрузок;

$M_i$  – внутренний изгибающий момент, определяемый в единичной системе, то есть системе нагруженной только единичной силой, приложенной в  $i$ -сечении или  $i$ -направлении;

$M_j$  – внутренний изгибающий момент, определяемый в единичной системе, то есть системе нагруженной только единичной силой, приложенной в  $j$ -сечении или  $j$ -направлении.

Таким образом, для нахождения коэффициентов канонических уравнений необходимо построить грузовую (основную) систему и столько единичных систем, каков порядок статической неопределимости. Внутренние усилия, найденные в этих системах, подставить в интегралы Мáксвелла-Мора, найти грузовые и единичные перемещения.

Построение эпюр внутренних усилий удобно производить на основании принципа суперпозиций методом суммирования по схеме:

$$\begin{cases} M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + M_P; \\ Q = Q_1 \cdot X_1 + Q_2 \cdot X_2 + \dots + Q_P; \\ N = N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 + \dots + N_P. \end{cases} \quad (9.6)$$

**Пример 9.8.** Консольная балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой. Установить влияние дополнительной опоры на прочность и жесткость балки.

**Решение**

**Расчет на прочность**

В представленной схеме (рис. 9.15, а) четыре связи: три в защемлении и одна – в дополнительной опоре. Имеем статически неопределимую систему первого порядка, для которой каноническое уравнение метода сил (9.5) принимает вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

откуда значение лишней неизвестной

$$X_{1P} = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}.$$

В качестве лишней неизвестной примем реакцию в дополнительной опоре. Изобразим системы эквивалентную (рис. 9.15, б), основную (рис. 9.15, в), и единичную (рис. 9.15, з). Внутренние усилия в основной и единичной системах:

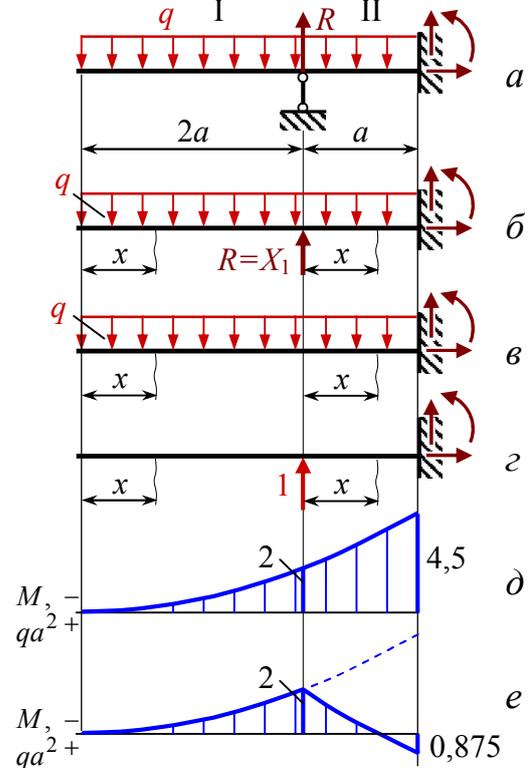


Рис. 9.15

Участок I:  $0 \leq x \leq 2a$

$$M_P = -\frac{q}{2}x^2; \quad M_1 = 0.$$

Участок II:  $0 \leq x \leq a$

$$M_P = -q \cdot 2a \left( \frac{2a}{2} + x \right) - \frac{q}{2}x^2; \quad M_1 = 1 \cdot x.$$

Грузовое  $\Delta_{1P}$  и единичное  $\delta_{11}$  перемещения:

$$\begin{aligned} EI \cdot \Delta_{1P} &= \int_0^a M_P \cdot M_1 dx = -q \left( \int_0^a 2a(a+x)x dx + \int_0^a \frac{1}{2}x^3 dx \right) = \\ &= -q \left( 2a^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^a + 2a \frac{x^3}{3} \Big|_0^a + \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} \Big|_0^a \right) = -\frac{43}{24} qa^4. \\ EI \cdot \delta_{11} &= \int_0^a M_1 \cdot M_1 dx = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}. \end{aligned}$$

Лишняя неизвестная:

$$R = X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{43 \cdot 3}{24} \frac{qa^4}{a^3} = \frac{43}{8} qa.$$

Для балки без промежуточной опоры (рис. 9.15, в), имеющей фактически один участок, моменты в произвольном, а также в характерных сечениях:

$$M(x) = -\frac{q}{2}x^2; \quad M_{x=2a} = -\frac{q}{2}(2a)^2 = -2qa^2; \quad M_{x=3a} = -\frac{q}{2}(3a)^2 = -4,5qa^2.$$

Для определения внутренних усилий в произвольном сечении II участка балки с промежуточной опорой используем эквивалентную систему (рис. 9.15, б) и, подставляя абсциссы характерных сечений, вычисляем в них моменты

$$M(x) = -q \cdot 2a(a+x) - \frac{q}{2}x^2 + R \cdot x;$$

$$M_{x=0} = -q \cdot 2a \cdot a = -2qa^2; \quad M_{x=a} = -q \cdot 2a \cdot 2a - \frac{q}{2}a^2 + \frac{43}{8}qa^2 = 0,875qa^2.$$

Сопоставляя эпюры изгибающих моментов балки с промежуточной опорой (рис. 9.15, е) и без нее (рис. 9.15, в), приходим к **выводам**:

- в консольной балке опасным является сечение в защемлении, где момент достигает значений  $4,5 qa^2$ ;
- с установкой дополнительной опоры внутренние усилия в защемлении уменьшаются в  $4,5 / 0,875 = 5,14$  раз, а опасным становится другое сечение, в котором максимальный момент стал меньше в  $4,5 / 2 = 2,25$  раз.

### Расчет на жесткость

Определим перемещения концевого сечения с консольной балки (рис.

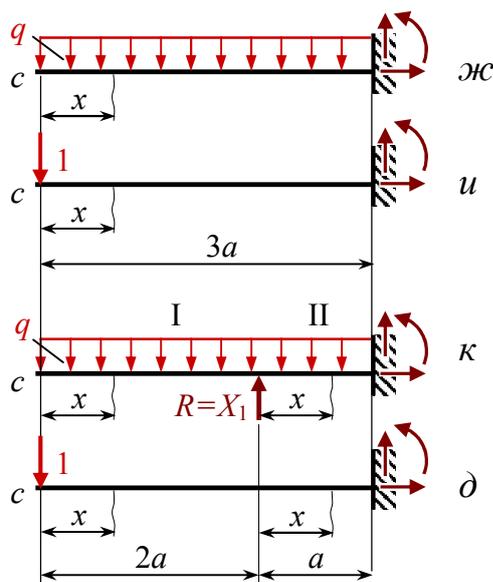


Рис. 9.16

9.16, ж) и балки с дополнительной опорой, для которой используем эквивалентную систему (рис. 9.16, к).

Перемещение консольной балки

Внутренние усилия на участке

$$0 \leq x \leq 3a \text{ (рис. 9.16, ж, и)}$$

$$M_P = -\frac{q}{2}x^2; \quad M_1 = -1 \cdot x.$$

$$EI \cdot v_c = \int_0^{3a} \left( -\frac{q}{2}x^2 \right) (-1 \cdot x) dx = \frac{q}{2} \frac{x^4}{4} \Big|_0^{3a} = \frac{81}{8} qa^4.$$

Перемещение балки с дополнительной опорой

Внутренние усилия на

участке I

$$0 \leq x \leq 2a$$

участке II

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_P = -\frac{q}{2}x^2; \quad M_P = -q \cdot 2a(a+x) - \frac{q}{2}x^2 + R \cdot x;$$

$$M_1 = -1 \cdot x.$$

$$M_1 = -1 \cdot (2a+x).$$

$$\begin{aligned} EI \cdot v_c &= \int_0^{2a} \left( -\frac{q}{2}x^2 \right) (-1 \cdot x) dx + \int_0^a (-q \cdot 2a)(a+x)(-2a-x) dx - \\ &- \int_0^a \frac{q}{2}x^2(-2a-x) dx + \frac{43}{8} \int_0^a qax(-2a-x) dx = -3,83 qa^4. \end{aligned}$$

**Вывод.** Установка дополнительной опоры привела к уменьшению перемещения сечения в  $\frac{81}{8 \cdot 3,8} = 2,66$  раз.

### 9.6. Замечание об использовании симметрии конструкции

В технике часто встречаются симметричные конструкции (шпангоуты судов, рамы автомобилей и тракторов, арки мостов и др.), внутренние усилия  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в которых удобнее определять, рассекая систему плоскостью симметрии. При этом все усилия делятся на две группы: симметричные и кососимметричные. *Симметричные силы* – внешние нагрузки, приложенные к правой части, являющиеся зеркальным отражением сил, приложенных к левой части. *Кососимметричные* – то же, но с обратным знаком. Грузовые  $\Delta$  и единичные  $\delta$  перемещения, вычисляемые путем перемножения симметричных на кососимметричные усилия (эпюры) становятся равными нулю. Расчет симметричного сооружения значительно упрощается, в чем убедимся, рассмотрев два примера.

**Пример 9.9** (симметричная система). Дано:  $M_0$ ,  $a$ ,  $b$ , причем  $b = 2a$ . Для последующего расчета на прочность плоской рамы построить эпюру изгибающего момента.

#### Решение

1. Рама (рис. 9.17, а) трижды статически неопределима ( $CH = 3K - III$ ), поскольку имеет один замкнутый контур (К) и ни одного шарнира (Ш) (формула (9.4)).

2. С учетом порядка статической неопределимости система канонических уравнений (9.5) примет вид:

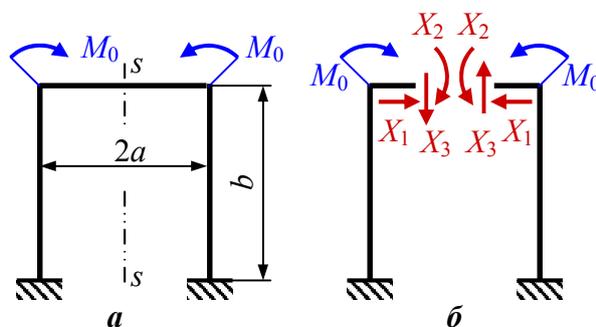


Рис. 9.17

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

3. Рассечем раму (рис. 9.17, а) плоскостью симметрии  $s - s$  на две части и покажем эквивалентную систему (рис. 9.17, б). Лишними неизвестными являются внутренние силовые факторы: продольное усилие  $N = X_1$ , изгибающий момент  $M = X_2$  и поперечная сила  $Q = X_3$ . Первых два усилия и внешний силовой фактор  $M_0$  симметричны относительно средней линии  $s - s$ , а поперечная сила  $Q$  – кососимметрична.

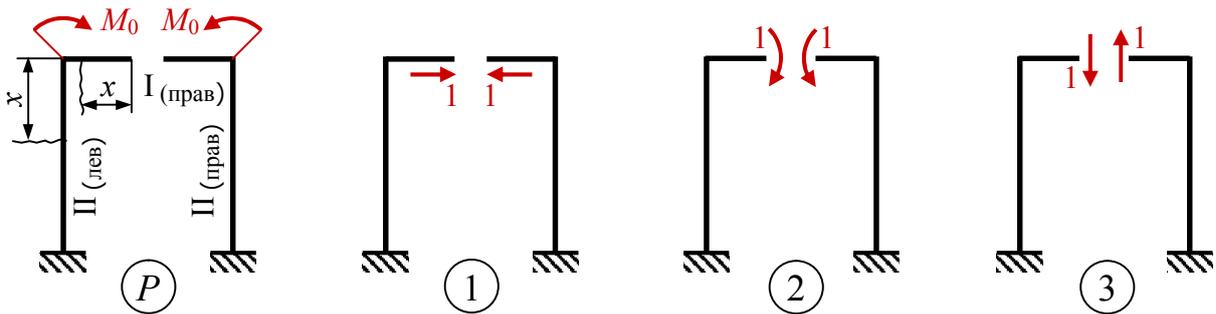


Рис. 9.18

Внутренние усилия	I участок: $0 \leq x \leq a$		II участок: $0 \leq x \leq b$		
	$M_P$	$M_1$	$M_2$	$M_3$ (лев)	$M_3$ (прав)
$M_P$	0	0	1	$1 \cdot x$	$-1 \cdot x$
$M_1$	0	1	$1 \cdot a$	$1 \cdot a$	$-1 \cdot a$
$M_2$	1	1	$1 \cdot a$	$1 \cdot a$	$-1 \cdot a$
$M_3$ (лев)	$1 \cdot x$	$1 \cdot a$	$1 \cdot a$	$1 \cdot a$	$-1 \cdot a$
$M_3$ (прав)	$-1 \cdot x$	$-1 \cdot a$	$-1 \cdot a$	$-1 \cdot a$	$-1 \cdot a$

Определяем внутренние усилия (изгибающие моменты) от внешней нагрузки (рис. 9.18) и единичных сил, соответствующих лишним неизвестным. Симметричные внутренние усилия записываем для одной из сторон (правой или левой), а затем, при вычислении интеграла Максвелла-Мора, результат удвоим. **Правило знаков:** момент считаем положительным, если на внешней стороне изгибаемого бруса возникают растягивающие напряжения.

4. Единичные и грузовые перемещения, полученные путем перемножения симметричных внутренних усилий и внешних нагрузок на кососимметричные равны нулю. Это  $\delta_{13}$  и  $\delta_{31}$ ,  $\delta_{23}$  и  $\delta_{32}$ ,  $\Delta_{3P}$ , следовательно неизвестная  $X_3$  равна нулю. Порядок системы уравнений (9.7) снизился до двух.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Коэффициенты канонических уравнений вычисляем, решая интегралы Максвелла-Мора

Грузовые перемещения

$$EI \cdot \Delta_{1P} = 2 \left( M_0 \int_0^b x \cdot dx \right) = M_0 b^2; \quad EI \cdot \Delta_{2P} = 2 \left( M_0 \int_0^b dx \right) = 2M_0 b;$$

Главные единичные перемещения

$$EI \cdot \delta_{11} = 2 \left( \int_0^b x^2 \cdot dx \right) = \frac{2}{3} b^3; \quad EI \cdot \delta_{22} = 2 \int_0^a dx + 2 \int_0^b dx = 2(a+b);$$

Побочные единичные перемещения

$$EI \cdot \delta_{12} = EI \cdot \delta_{21} = 2 \int_0^b x \cdot dx = 2 \frac{b^2}{2} = b^2;$$

Систему (9.8) канонических уравнений представляем в виде матрицы, составленной из коэффициентов единичных перемещений и столбца из грузовых перемещений

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}b^3 & b^2 \\ b^2 & 2(a+b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -M_0b^2 \\ -2M_0b \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \frac{2}{3}b & 1 \\ b^2 & 2(a+b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -M_0 \\ -2M_0b \end{vmatrix}.$$

Решая систему, найдем лишние неизвестные – осевую силу  $N$  и изгибающий момент  $M$

$$N = X_1 = -\frac{M_0}{2a}; \quad M = X_2 = -\frac{M_0}{3}.$$

Эпюру моментов строим, предварительно определив значения моментов в характерных сечениях  $e, f, g$  (рис. 9.19, *a*). Используем принцип независимости действия сил, складывая момент  $M_P$  от внешних нагрузок с произведениями  $M_1 \cdot X_1$  и  $M_2 \cdot X_2$  в соответствующих сечениях (формула (9.6)). Эпюра моментов представлена на рис. 9.19, *б*, а примерный (утрированный) вид изогнутой оси рамы показан на рис. 9.19, *в*.

Ригель – горизонтальный участок:

$$M_e = M_P + M_1 X_1 + M_2 X_2 = 0 + 0 + 1 \left( -\frac{M_0}{3} \right) = -\frac{M_0}{3};$$

$$M_f = M_P + M_1 X_1 + M_2 X_2 = 0 + 0 + 1 \left( -\frac{M_0}{3} \right) = -\frac{M_0}{3}.$$

Стойка – вертикальный участок:

$$M_f = M_P + M_1 X_1 + M_2 X_2 = M_0 + 0 + 1 \left( -\frac{M_0}{3} \right) = \frac{2}{3} M_0;$$

$$M_g = M_P + M_1 X_1 + M_2 X_2 = M_0 + b \left( -\frac{M_0}{2a} \right) + 1 \left( -\frac{M_0}{3} \right) = -\frac{1}{3} M_0.$$

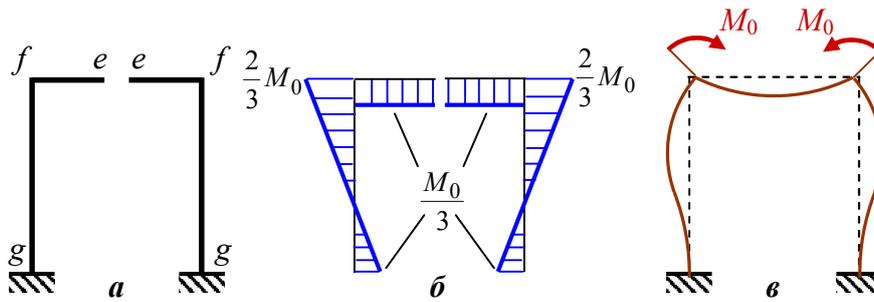


Рис. 9.19

**Выводы.** При действующей на симметричную систему симметричной внешней нагрузки кососимметричное внутреннее усилие ( $Q$ ) равно нулю. Опасным для заданной схемы нагружения является сечение  $f$  в месте перехода от стойки к ригелю, где изгибающий момент достигает значения  $\frac{2}{3}M_0$ .

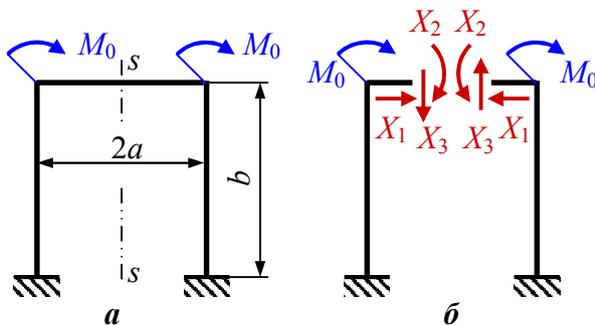


Рис. 9.20

**Пример 9.10.** (кососимметричная система). Дано:  $M_0, a, b$ . Для последующего расчета на прочность плоской рамы построить эпюры изгибающего момента.

**Решение.**

1. Рама (рис. 9.20, а) представляет собой статически неопределимую систему третьего порядка ( $СН = 3К - Ш$ ).

2. Канонические уравнения метода сил для нее имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

3. Рассекаем раму (рис. 9.20, а) плоскостью симметрии  $s - s$  на две части и покажем эквивалентную систему (рис. 9.20, б). Лишними неизвестными являются внутренние силовые факторы: продольное усилие  $N = X_1$ , изгибающий момент  $M = X_2$  и поперечная сила  $Q = X_3$ . Первых два

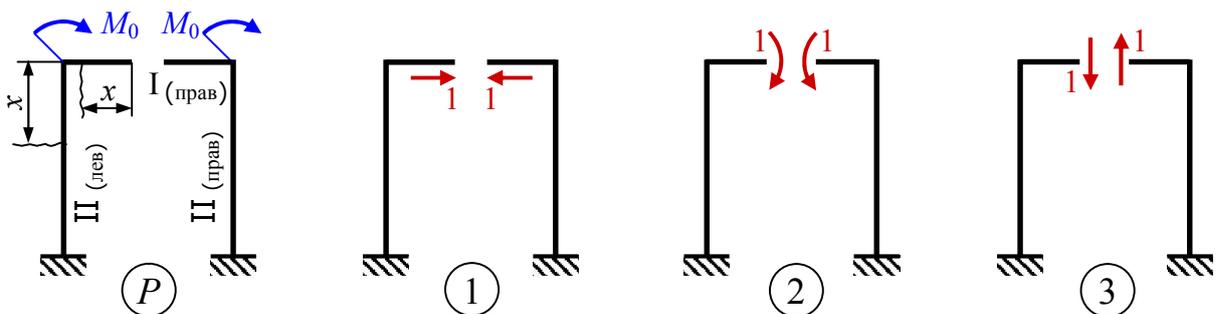


Рис. 9.21

усилия симметричны относительно средней линии  $s - s$ , а внешний силовой фактор  $M_0$  и поперечная сила  $Q$  – кососимметричны. Грузовая и единичные системы показаны на рис. 9.21, а внутренние усилия в них занесены в таблицу. Правило знаков прежнее.

Внутренние усилия	I участок: $0 \leq x \leq a$		II участок: $0 \leq x \leq b$	
	Левая сторона	Правая сторона	Левая сторона	Правая сторона
$M_P$	0	0	$M_0$	$-M_0$
$M_1$	0	0	$1 \cdot x$	$1 \cdot x$
$M_2$	1	1	1	1
$M_3$	$1 \cdot x$	$-1 \cdot x$	$1 \cdot a$	$-1 \cdot a$

4. Произведения  $M_P \cdot M_1$ ,  $M_P \cdot M_2$  под интегралом для вычисления грузовых перемещений  $\Delta_{1P}$  и  $\Delta_{2P}$  (это свободные члены системы уравнений (9.9)) равны нулю. Следовательно, и лишние неизвестные  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = 0$ . Система трех уравнений (9.9) выродилась в одно уравнение

$$\delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} = 0. \quad (9.10)$$

Коэффициенты канонических уравнений вычисляем, решая интеграл Максвелла-Мора

Грузовое перемещение

$$EI \cdot \Delta_{3P} = M_0 a \int_0^b dx - M_0 (-a) \int_0^b dx = 2M_0 ab.$$

Главное единичное перемещение

$$EI \cdot \delta_{33} = \int_0^a x^2 \cdot dx + \int_0^a (-x)^2 \cdot dx + \int_0^b a^2 dx + \int_0^b (-a)^2 dx = 2a^2 \left( \frac{a}{3} + b \right).$$

Подставляя  $b = 2a$ , получим значение третьей лишней неизвестной – поперечной силы  $Q = X_3$ .

$$X_3 = \frac{-2M_0 ab}{2a^2 \left( \frac{a}{3} + b \right)} = -\frac{6 M_0}{7 a}.$$

Эпюру моментов строим, предварительно определив значения моментов в характерных сечениях  $e, f, g$ . Используем принцип независимости действия сил, складывая момент  $M_P$  от внешних нагрузок с произведениями  $M_3 \cdot X_3$  в соответствующих сечениях (формула (9.2)). Строим эпюры и изображаем примерный вид изогнутой оси рамы (рис. 9.22).

Ригель – горизонтальный участок

$$M_e = M_P + M_3 X_3 = 0 + 0 = 0.$$

$$M_{f, \text{лев}} = M_P + M_3 X_3 = 0 + a \left( -\frac{6 M_0}{7 a} \right) = -\frac{6}{7} M_0;$$

$$M_{f, \text{прав}} = M_P + M_3 X_3 = 0 + (-a) \left( -\frac{6 M_0}{7 a} \right) = \frac{6}{7} M_0.$$

Стойка – вертикальный участок

$$M_{f, \text{лев}} = M_P + M_3 X_3 = M_0 + a \left( -\frac{6 M_0}{7 a} \right) = \frac{1}{7} M_0;$$

$$M_{f, \text{прав}} = M_P + M_3 X_3 = -M_0 + (-a) \left( -\frac{6 M_0}{7 a} \right) = -\frac{1}{7} M_0.$$

$$M_{g, \text{лев}} = M_P + M_3 X_3 = M_0 + a \left( -\frac{6 M_0}{7 a} \right) = \frac{1}{7} M_0;$$

$$M_{g, \text{прав}} = M_P + M_3 X_3 = -M_0 + (-a) \left( -\frac{6 M_0}{7 a} \right) = -\frac{1}{7} M_0.$$

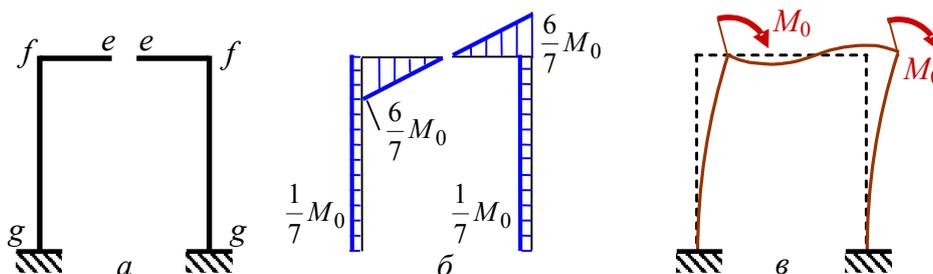


Рис. 9.22

Во многих случаях вычисление интеграла Максвелла-Мора при определении грузовых и единичных перемещений выполняют графоаналитическим способом Верещагина (путем перемножения эпюр), что позволяет решение задачи без ее усложнения сделать более наглядным (см. примечание к подразд. 9.3).

### Выводы

1. От действия симметричных единичных силовых факторов ( $N = 1$ ,  $M = 1$ ) внутренние усилия (и эпюры) изгибающих моментов симметричны; от кососимметричной силы ( $Q = 1$ ) – усилие (и эпюра) кососимметричны.

2. Побочные перемещения  $\delta_{ij}$  и свободные члены (грузовые перемещения  $\Delta_{iP}$ ,  $\Delta_{jP}$ ), определяемые путем умножения симметричных усилий на кососимметричные, равны нулю.

3. При кососимметричной внешней нагрузке симметричные усилия ( $M$ ,  $N$ ) равны нулю. При симметричной внешней нагрузке кососимметричное усилие ( $Q$ ) равно нулю.

## 10. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ СИЛ

**Нагрузка статическая** – постоянная или изменяющаяся так медленно, что силами инерции вследствие ускорения, можно пренебречь.

**Нагрузка динамическая** – быстро меняющая свое значение или место приложения.

Метод расчета на динамическую нагрузку основан на **принципе Даламбера**: всякое движущееся тело можно рассматривать как находящееся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции, равную произведению массы тела на его ускорение ( $J = a \cdot m$ ), направленную в сторону, противоположную ускорению. Для определения динамических напряжений при ударе используют закон сохранения энергии.

### 10.1. РАВНОУСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА. ДИНАМИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ

**Пример.** Груз  $Q$  поднимают с постоянным ускорением  $a$  тросом с площадью поперечного сечения  $A$ , изготовленным из материала с объемным весом  $\gamma$  (рис. 10.1). Определить напряжение в тросе.

**Решение.** Методом сечений определяем внутреннее усилие в произвольном сечении троса

$$N_{\text{дин}} = Q + J = Q + \frac{Q}{g} a = Q \left( 1 + \frac{a}{g} \right),$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

В покое статическое усилие  $N_{\text{ст}} = Q$ . За счет движения с ускорением усилие возрастает в отношении

$$K_{\text{дин}} = \frac{N_{\text{дин}}}{N_{\text{ст}}} = 1 + \frac{a}{g}. \quad (10.1)$$

Отношение динамического значения некоторого фактора (усилия, напряжения, перемещения) к соответствующему статическому значению этого фактора называют **динамическим коэффициентом**.

Напряжение в тросе

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{Q}{A} \left( 1 + \frac{a}{g} \right). \quad (10.2)$$

Если **учитывать вес троса**, то внутренние усилия в нем:

$$N_{\text{ст}} = Q + \gamma \cdot A \cdot x.$$

Динамическое напряжение в тросе

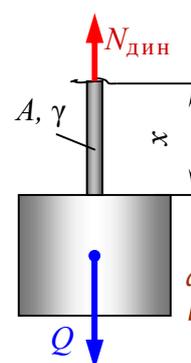


Рис. 10.1

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{N_{\text{дин}}}{A} = \frac{N_{\text{ст}} K_{\text{дин}}}{A} = \sigma_{\text{ст}} K_{\text{дин}}. \quad (10.3)$$

Условие прочности

$$\sigma_{\text{дин}} \leq [\sigma] \Rightarrow \sigma_{\text{ст}} K_{\text{дин}} \leq [\sigma].$$

Для нашего примера

$$\sigma_{\text{дин}} = \left( \frac{Q}{A} + \gamma \cdot x \right) \left( 1 + \frac{a}{g} \right) \leq [\sigma]. \quad (10.4)$$

## 10.2. УДАРНОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ

**Удар** – взаимодействие тел, при котором за очень малый промежуток времени скачкообразно возникают конечные изменения скорости соударяемых тел.

Приняты следующие **допущения**.

– Удар неупругий, то есть тела после соударения не отделяются друг от друга и движутся совместно. После соударения в некоторый момент времени скорость перемещения ударяющего груза становится равной нулю;

– Вид деформированной системы (*эюра перемещений*) при ударе в любой момент времени подобен виду деформированного состояния системы при статическом нагружении (рис. 10.2):

$$\frac{\delta_{x \text{ дин}}}{\delta_{x \text{ ст}}} = \frac{\delta_{\text{дин}}}{\delta_{\text{ст}}} = K_{\text{дин}},$$

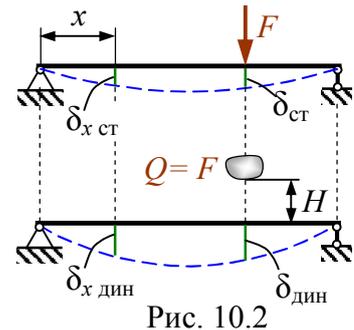


Рис. 10.2

где  $\delta_{x \text{ дин}}$ ,  $\delta_{x \text{ ст}}$  – динамический и статический прогиб в произвольном сечении  $x$ ;  $\delta_{\text{дин}}$ ,  $\delta_{\text{ст}}$  – динамический и статический прогиб в точке соударения;

– Масса ударяемого тела считается малой по сравнению с массой ударяющего тела;

– Напряжения при ударе не превосходят предела пропорциональности так, что закон Гука при ударе сохраняет силу;

– Потерей части энергии, перешедшей в тепло и колебания, пренебрегают.

### **Динамический коэффициент без учета сил инерции ударяемого тела**

Груз  $Q$ , падая с высоты  $H$ , деформирует систему на  $\delta_{\text{дин}}$  (рис. 10.3). Работа, совершаемая грузом  $Q$  на перемещении  $(H + \delta_{\text{дин}})$  определяется как

$$W = Q(H + \delta_{\text{дин}}).$$

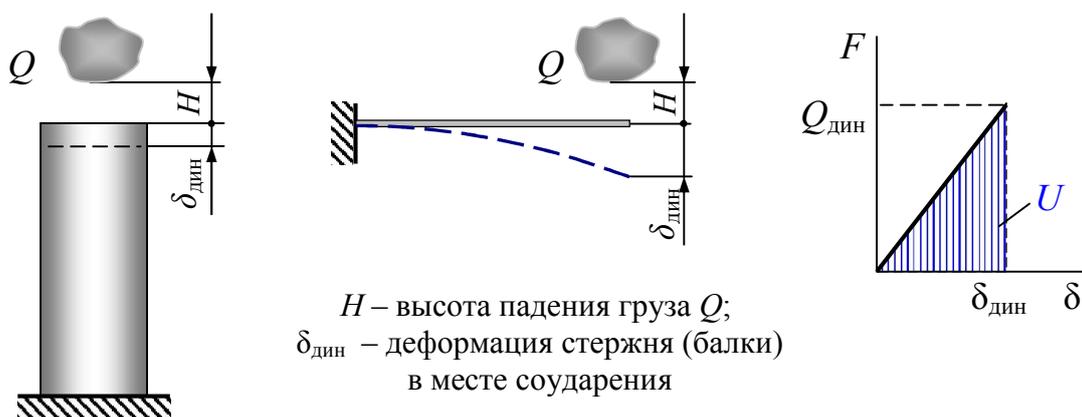


Рис. 10.3

Сила, деформирующая стержень (или балку) от момента соударения до остановки груза, изменяется от нуля до значения  $Q_{\text{дин}}$ .

При этом потенциальная энергия упругой деформации стержня

$$U = \frac{1}{2} Q_{\text{дин}} \cdot \delta_{\text{дин}}.$$

На основании закона сохранения энергии работа  $W$  внешних сил равна потенциальной энергии  $U$  системы:  $W = U$

$$Q \cdot H + Q \cdot \delta_{\text{дин}} = \frac{1}{2} Q_{\text{дин}} \cdot \delta_{\text{дин}}.$$

Принимая допущения  $Q_{\text{дин}} = Q \cdot K_{\text{дин}}$  и  $\delta_{\text{дин}} = \delta_{\text{ст}} \cdot K_{\text{дин}}$ , получим

$$Q \left( H + \delta_{\text{ст}} \cdot K_{\text{дин}} - \frac{1}{2} K_{\text{дин}} \cdot \delta_{\text{ст}} \cdot K_{\text{дин}} \right) = 0.$$

$$2H + 2\delta_{\text{ст}} \cdot K_{\text{дин}} - \delta_{\text{ст}} \cdot K_{\text{дин}}^2 = 0;$$

$$K_{\text{дин}}^2 - 2K_{\text{дин}} - \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}} = 0.$$

Решая уравнение относительно динамического коэффициента, получим

$$K_{\text{дин}} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}}.$$

Так как динамический коэффициент отрицательным быть не может, то

$$\boxed{K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}}}. \quad (10.5)$$

При свободном падении тела

$$m g H = \frac{m V^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad H = \frac{V^2}{2g}.$$

Тогда

$$\boxed{K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \cdot \delta_{\text{ст}}}}}. \quad (10.6)$$

### 10.3. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

Большинство деталей машин, энергетических установок, химических аппаратов испытывают переменные напряжения, циклически изменяющиеся во времени. В некоторых случаях доля циклической составляющей в общей нагрузке невелика и при расчетах на прочность не учитывается. В других случаях пренебрежение переменной составляющей нагрузки или ее неправильный учет приводит к авариям и разрушениям подчас с тяжелыми последствиями и человеческими жертвами.

Анализ случаев поломок машин свидетельствует о том, что большинство поломок (по литературным данным 80–90 %) происходит вследствие усталости металлов. Этот вид разрушения металлов наблюдается при повторном и повторно-переменном действии нагрузки.

#### Усталость материалов

***Усталость** – процесс постепенного накопления повреждений под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению.*

***Выносливость** – свойство материала противостоять усталости.*

*Весь диапазон чисел циклов, где возникает разрушение от переменных нагрузок, условно разбит на две области: малоциклового и многоциклового усталости.*

***Усталостное повреждение** – необратимое изменение физико-механических свойств материала объекта под действием переменных напряжений. Накопление повреждений начинается задолго до окончательного разрушения. Разрушение, как правило, наступает внезапно.*

***Усталостное разрушение** – разрушение материала нагружаемого объекта до полной потери его прочности или работоспособности вследствие распространения усталостной трещины.*

***Усталостная трещина** – частичное разделение материала под действием переменных напряжений.*

#### Циклы напряжений

В подавляющем числе случаев напряжение в элементах механических систем изменяется периодически. Законы изменения во времени  $t$  переменных напряжений  $\sigma$  могут быть различными, что обусловлено кинематикой механизма и взаимодействием движущихся систем. Некоторые виды циклов представлены на рис. 10.4: треугольный (а); трапецеидальный (б); гармонический (в); результирующий от сложения трех гармонических циклов с различной частотой и амплитудой (г).

Совокупность последовательных значений напряжений за один период их изменения  $T$  называют **циклом напряжений** или просто **циклом**.

**Циклом** называют замкнутую однократную смену напряжений, проходящих непрерывный ряд значений.

Время  $T$ , в течение которого протекает один цикл, называют **периодом**.

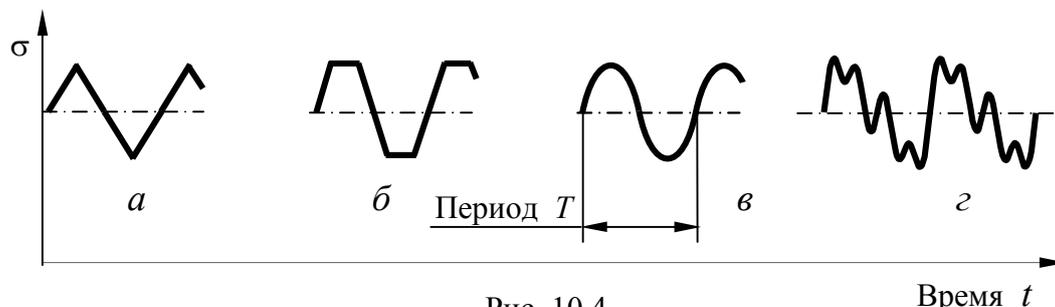


Рис. 10.4

**Максимальное напряжение цикла  $\sigma_{\max}$**  – наибольшее по алгебраическому значению напряжение цикла.

**Минимальное напряжение цикла  $\sigma_{\min}$**  – наименьшее по алгебраическому значению напряжение цикла.

**Среднее напряжение цикла  $\sigma_m$**  – постоянная составляющая цикла напряжений, равная алгебраической полусумме максимального и минимального напряжений цикла:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}. \quad (10.7)$$

**Амплитуда напряжений цикла  $\sigma_a$**  – наибольшее числовое положительное значение переменной составляющей цикла, равной алгебраической полуразности:

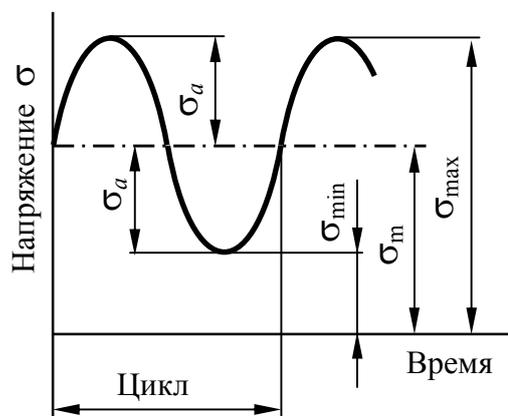


Рис. 10.5

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (10.8)$$

**Коэффициент асимметрии цикла напряжений  $R_\sigma$**  – отношение минимального напряжения цикла к максимальному

$$R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (10.9)$$

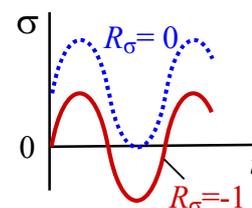


Рис. 10.6

При лабораторных испытаниях на выносливость наиболее употребительны симметричный и отнулевой циклы (рис. 10.6).

**Симметричный цикл напряжений** – цикл, у которого максимальное и минимальное напряжения равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку  $R_\sigma = -1$ .

**Отнулевой цикл напряжений** – знакопостоянный цикл напряжений, изменяющихся от нуля до максимума  $R_\sigma = 0$ .

### Кривая усталости и предел выносливости

**Кривая усталости** – график, характеризующий зависимость между максимальными напряжениями  $\sigma_{\max}$  или амплитудами цикла  $\sigma_a$  и циклической долговечностью  $N$  одинаковых образцов, построенный при фиксированном среднем напряжении цикла  $\sigma_m = \text{const}$ , или при заданном коэффициенте асимметрии цикла напряжений  $R = \text{const}$ .

Кривую усталости представляют как в полулогарифмических ( $\sigma - \lg N$ ), так и в двойных ( $\lg \sigma - \lg N$ ) логарифмических координатах (реже). Благодаря особенности логарифмической шкалы на ней можно отложить циклическую долговечность, исчисляемую как единицами, так десятками и сотнями миллионов циклов без потери физической сущности явления.

Зависимость между действующими напряжениями и числом циклов до разрушения имеет вид, называемый в литературе S-образным, что обусловлено наличием на кривой усталости двух перегибов и трех основных участков, отличающихся типом разрушения (рис. 10.7).

В пределах I участка происходит выделение и накопление односторонней деформации, приводящей к разрушению, по всем признакам аналогичному статическому растяжению. Из-за этого участок получил название участка (области) **квазистатического разрушения**. Протяженность I участка зависит от характеристик прочности и пластичности материала, а также от коэффициента асимметрии цикла на-

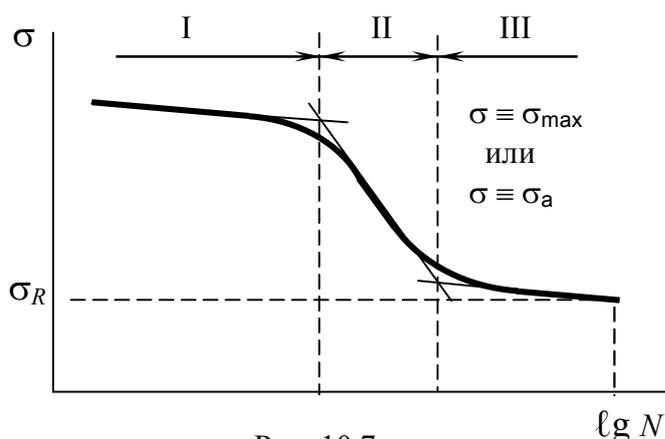


Рис. 10.7

пряжений. При  $R_\sigma \rightarrow 1$  его протяженность может составлять до нескольких десятков или сотен тысяч циклов. Если  $R_\sigma \rightarrow -1$  участок I укорачивается до нескольких тысяч циклов. При симметричном цикле напряжений ( $R_\sigma = -1$ ) участок I вырождается.

При  $R_\sigma \rightarrow 1$  его протяженность может составлять до нескольких десятков или сотен тысяч циклов. Если  $R_\sigma \rightarrow -1$  участок I укорачивается до нескольких тысяч циклов. При симметричном цикле напряжений ( $R_\sigma = -1$ ) участок I вырождается.

В пределах участка III остаточное удлинение  $\delta$  и сужение  $\psi$  почти отсутствуют ( $\psi \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ ). Разрушение имеет хрупкий характер и происходит от усталостной трещины (усталостное разрушение). В некоторых случаях участок кривой усталости переходит в горизонтальную линию, соответствующую пределу выносливости  $\sigma_R$ . Этот участок получил название участка (области) *многоциклового усталости*.

*Многоцикловая усталость* – усталость материала, при которой усталостное повреждение или разрушение происходит в основном при упругом деформировании.

На участке II происходит переход от квазистатического типа разрушения (участок I) к усталостному (участок III). Для участка II характерны признаки двух типов разрушения: хрупкого от усталостной трещины и вязкого – от накопленной односторонней деформации. На фоне развитой шейки можно наблюдать трещины разной длины и степени раскрытия. Этим участком ограничивается область *малоциклового усталости*.

*Малоцикловая усталость* – усталость материала, при которой усталостное повреждение или разрушение происходит при упругопластическом деформировании.

*Предел выносливости*  $\sigma_R$  – максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором еще не происходит усталостное разрушение до базы испытаний (см. рис. 10.7). Для симметричного цикла  $\sigma_R \equiv \sigma_{-1}$ . Для отнулевого цикла  $\sigma_R \equiv \sigma_0$ .

*База испытаний* – предварительно задаваемая наибольшая продолжительность испытаний на усталость. Для черных металлов принята база, равная  $10^7$  циклов; для цветных металлов –  $10^8$  циклов. Иногда для оценки усталостной прочности назначают другую базу испытаний, например  $10^4$  или  $10^5$ . Тогда определяют *ограниченный предел выносливости, соответствующий заданному числу циклов*.

Предел выносливости определяют по результатам испытаний. Природа накопления усталостных повреждений такова, что результаты испытаний могут иметь значительный случайный разброс, на порядок и более. Для получения достоверных характеристик прочности материала при циклическом нагружении требуется от нескольких десятков до нескольких сотен однотипных образцов. Метод трудоемок и продолжителен по времени. Так, при испытании на изгиб с вращением при частоте нагружения  $n = 3000 \text{ мин}^{-1}$  для наработки базы испытаний  $10^7$  циклов одним образцом требуется 3333 минуты, или 55,5 часов, или 2,3 суток при безостановочной работе. Полный цикл испытаний занимает несколько недель или месяцев.

Разработаны ускоренные методы испытаний, а также предлагаются эмпирические зависимости, устанавливающие связь предела выносливости с характеристиками прочности и пластичности, например, при изгибе и кручении соответственно

$$\sigma_{-1} \approx 0,43 \sigma_B; \quad \tau_{-1} \approx 0,24 \sigma_B. \quad (10.9)$$

$$\tau_B \approx 0,6 \cdot \sigma_B; \quad \tau_{-1} \approx 0,55 \cdot \sigma_{-1}. \quad (10.10)$$

### Расчеты на выносливость при переменном нагружении<sup>1</sup>

Из многочисленных факторов, влияющих на усталостную прочность детали наряду с механическими свойствами материала, особо выделим следующие:

- 1) концентрация напряжений;
- 2) качество обработки поверхности (шероховатость) и состояние поверхностного слоя;
- 3) абсолютные размеры детали (масштабный фактор);
- 4) состояние внешней среды: температура, облучение, агрессивность;
- 5) технологические методы упрочнения.

Рассмотрим первых три фактора несколько подробнее.

**Концентрация напряжений** – явление повышения напряжений по сравнению с номинальными. Концентрация напряжений возникает в местах резкого изменения формы и размеров детали: выточки, надрезы, отверстия, шпоночные пазы, галтели. Показателем повышения напряжения служит **теоретический коэффициент концентрации** для нормальных и касательных напряжений соответственно

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}}; \quad \tau_\sigma = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{ном}}}.$$

Теоретический коэффициент концентрации определяют методами теории упругости из предположения однородности материала и совершенной упругости при его деформировании. Структура реального конструкционного материала содержит микрообъемы (феррит, перлит, мартенсит,...), имеющие разные размеры и по-разному сопротивляющиеся деформации. В некоторых из них начинают появляться пластические деформации при общем упругом деформировании детали, из-за чего реальные максимальные напряжения в зоне концентратора оказываются ниже рассчитанных по теоретическим формулам. **Эффективные коэффициенты концентрации напряжений**  $K_\sigma$  и  $K_\tau$  связаны с теоретическими и позволяют учитывать

<sup>1</sup> См. ГОСТ 25.504–82 Методы расчета характеристик сопротивления усталости.

чувствительность материала к концентрации напряжений (хрупкие и высокопрочные более чувствительны).

**Шероховатость поверхности**, зависящая от вида механической обработки, оказывает сильное влияние на усталостную прочность. Трещины усталости, как правило, начинают развиваться с поверхности. Качество поверхности оценивается коэффициентом  $\varepsilon_{\text{п}}$ , равным отношению предела выносливости образцов с данной шероховатостью поверхности  $\sigma_{-1\text{п}}$  к пределу выносливости образцов  $\sigma_{-1}$  с поверхностью не грубее  $Ra = 0,35$  (по ГОСТ 2789–73)

$$\varepsilon_{\text{п}} = \frac{\sigma_{-1\text{п}}}{\sigma_{-1}}$$

**Абсолютные размеры поперечного сечения** заметно влияют (так называемый масштабный фактор) на усталостную прочность при изгибе и кручении. При одном и том же напряжении  $\sigma_{\text{max}}$  (рис.10.8) долговечность образца малого размера поперечного сечения больше. Это явление можно объяснить бóльшим градиентом<sup>2</sup> снижения напряжения у

образца малого (М) диаметра  $\text{grad M} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{r}$  (рис.

10.8, а) по сравнению с градиентом в образце большого (Б) диаметра  $\text{grad Б} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{R}$  (рис. 10.8,

б). Темп роста, зародившейся с поверхности трещины, быстрее замедляется в образце малого диаметра. В образце большого диаметра трещина продолжает развиваться, что приводит к уменьшению долговечности образца. При циклическом **растяжении** масштабный фактор **не проявляется** (градиент равен нулю). Масштабный фактор оценивают коэффициентом  $\varepsilon_{\text{м}}$

$$\varepsilon_{\text{м}} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}}$$

где  $(\sigma_{-1})_{d_0}$  – предел выносливости гладкого лабораторного образца диаметром 7–10 мм;  $(\sigma_{-1})_d$  – предел выносливости рассматриваемой детали диаметром  $d > d_0$ .

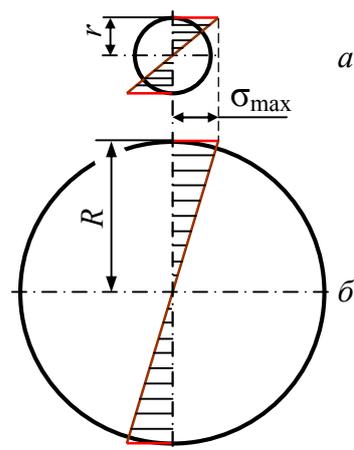


Рис. 10.8

<sup>2</sup> [от латин. *gradiens* — восходящий]. Изменение какой-н. величины на какую-н. единицу длины

В связи с этим расчеты на усталость выполняют, как правило, поочередно. Вычисляют коэффициенты запаса прочности отдельно по нормальным напряжениям при растяжении или изгибе и по касательным напряжениям при кручении:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_M \cdot \varepsilon_{II}} \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \sigma_m}, \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}}{\varepsilon_M \cdot \varepsilon_{II}} \tau_a + \frac{\tau_{-1}}{\tau_B} \tau_m}. \quad (10.11)$$

В случае одновременного действия нормальных и касательных напряжений общий коэффициент запаса прочности находят с учетом обоих частных коэффициентов

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (10.12)$$

Деталь считают работоспособной, если  $n \geq [n]$ . Нормативный запас прочности  $[n]$  может зависеть от следующих факторов:

- 1) достоверной точности определения усилий и напряжений;
- 2) однородности материала;
- 3) культуры производства и технологии изготовления детали.

В зависимости от перечисленных выше факторов выделяют три группы значений допускаемого коэффициента запаса прочности при расчетах на выносливость:

1) группа  $[n] = 1,3-1,5$  назначается при повышенной точности расчета с использованием экспериментальных данных определения усилий для деталей, изготовленных из однородного материала при качественной технологии и высокой культуре производства (например, коленчатые валы);

2) группа  $[n] = 1,5-2$  назначается при недостаточно полном объеме экспериментальной информации о нагрузках и прочности детали, при среднем уровне культуры производства, но в условиях систематического дефектоскопического контроля;

3) группа  $[n] = 2-3$  назначается при малом объеме или отсутствии экспериментальной информации, высоком уровне производства.

## 11. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

Ранее (см. раздел 2) расчеты стержня, нагруженного продольной силой, проводили из условия прочности

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma], \quad \text{где } [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} \quad \text{или} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}.$$

Однако при сжатии стержня продольной силой его разрушение может произойти при напряжениях, меньших предела текучести или предела прочности из-за искривления его прямолинейной оси и **потери устойчивости**.

Упругое равновесие *устойчиво*, если деформированное тело при любом малом отклонении его от состояния равновесия оно стремится возвратиться к первоначальному состоянию и возвращается к нему после удаления внешнего воздействия, нарушившего первоначальное равновесное состояние (рис. 11.1, а).

Упругое равновесие *неустойчиво*, если деформированное тело, будучи выведенным из него каким-либо воздействием, продолжает деформироваться в направлении вызванного отклонения и после прекращения воздействия в исходное положение не возвращается (рис. 11.1, б).

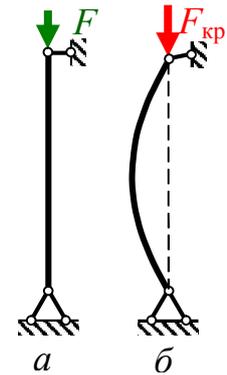


Рис. 11.1

Переходное состояние между устойчивым и неустойчивым называют *критическим*. При критическом состоянии деформированное тело находится в безразличном равновесии: оно может сохранять первоначально приданную ему форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия. *Нагрузку, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы тела, называют критической нагрузкой* и обозначают  $F_{кр}$ .

### 11.1. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Между изгибающим моментом и деформацией справедливо соотношение

Из рис. 11.2, б, в

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}. \quad (11.1)$$

$$M = -F \cdot y. \quad (11.2)$$

Тогда

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{F}{EI} y = 0, \quad (11.3)$$

или

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0, \quad (11.4)$$

где

$$k^2 = \frac{F}{EI}. \quad (11.5)$$

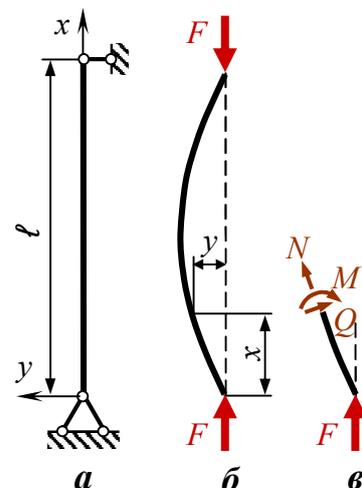


Рис. 11.2

Решением дифференциального уравнения (11.4) является

$$y = A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx, \quad (11.6)$$

где  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий: при  $x = 0, y = 0$ ;

$$0 = A \cdot \sin 0 + B \cdot \cos 0; \Rightarrow B = 0.$$

Уравнение (11.6) упругой линии принимает вид синусоиды:

$$y = A \cdot \sin kx. \quad (11.7)$$

При другом граничном условии:  $x = \ell, y = 0$  имеем

$$0 = A \cdot \sin k\ell. \quad (11.8)$$

Условие (11.8)  $\sin k\ell = 0$  удовлетворяется при

$$k\ell = \pi n, \quad (11.9)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Первый корень  $n = 0$  должен быть отброшен, так как  $\ell \neq 0$  и  $F \neq 0$  согласно исходным данным задачи. Тогда произведение  $k\ell$  (см. (11.5)),

$$k\ell = \ell \sqrt{\frac{F}{EI}}.$$

Из (11.9), а также из (11.5) находим  $k$ , а затем  $k^2$ :

$$k = \frac{\pi n}{\ell}; \quad k^2 = \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}; \quad k^2 = \frac{F}{EI}. \quad (11.10)$$

Приравняв правые части равенств (11.10) и учитывая, что сжатые стержни изгибаются относительно оси минимального момента инерции  $I_{\min}$ , получим **формулу Эйлера**

$$F_{\text{кр}} = \frac{(\pi n)^2 EI_{\min}}{\ell^2}. \quad (11.11)$$

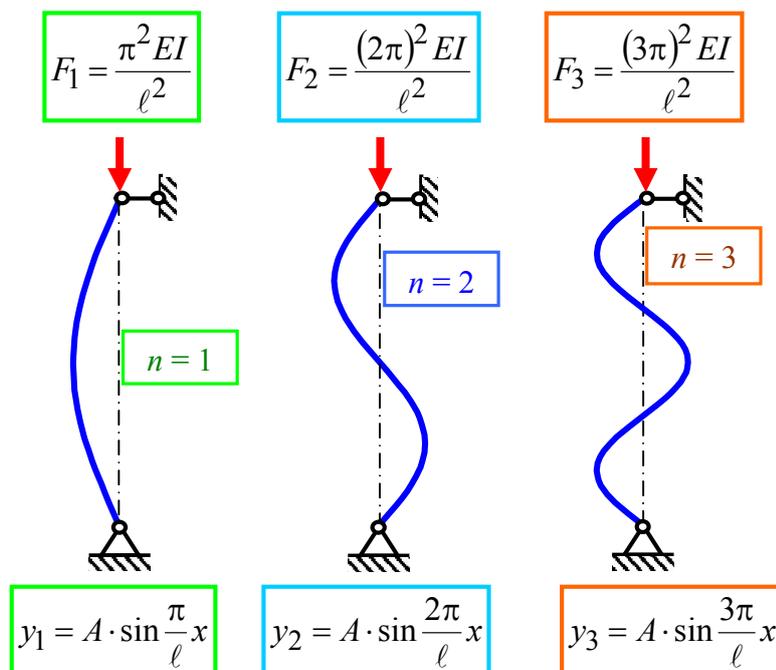


Рис.11.3

Из анализа формулы Эйлера следует, что криволинейная форма равновесия стержня возможна только при фиксированных значениях сжимающей силы. При  $n = 1$  стержень изгибается с образованием одной полуволны синусоиды. При всех последующих  $n$  число полуволн соответственно равно  $n$ . Наименьшее значение сила  $F$  принимает при  $n = 1$  (рис. 11.3).

Состояния для  $n = 2$  и  $n = 3$  возможны лишь при установке промежуточных опор.

### 11.2. ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

В общем случае формула Эйлера имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\omega \ell)^2}, \quad (11.12)$$

где  $\omega \ell$  – приведенная длина стержня;  $\omega$  – коэффициент приведенной длины, учитывающий способы закрепления концов стержня; *коэффициент  $\omega$  показывает, какое количество длин стержня укладывается в полуволне синусоиды.*

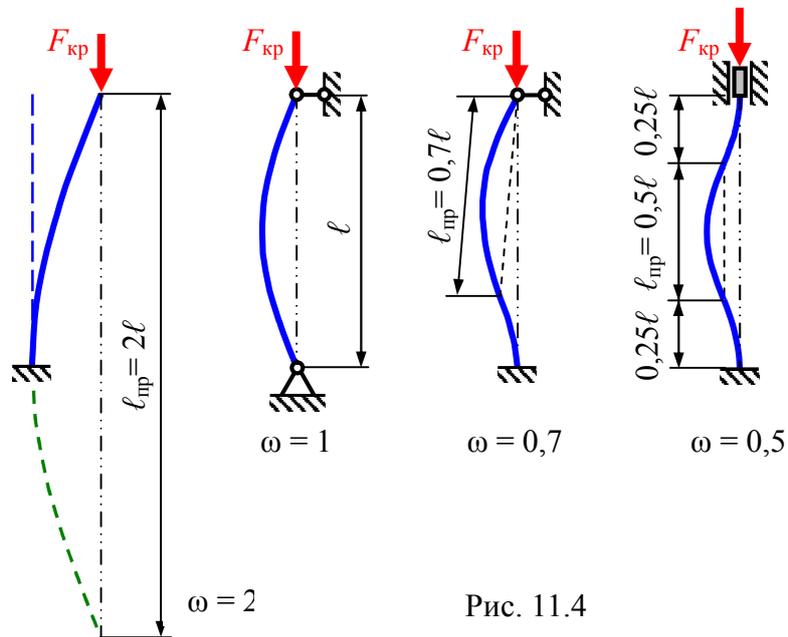


Рис. 11.4

### 11.3. КРИТИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

Работоспособность конструктивного элемента оценивается выполнением условия прочности, для чего необходимо вычислять напряжения

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}; \quad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{(\omega \ell)^2} \frac{I_{\min}}{A}; \quad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{(\omega \ell)^2} i_{\min}^2.$$

Принимая  $\lambda = \frac{\omega \ell}{i_{\min}}$ , получим:  $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (11.13)$

Работы Эйлера по устойчивости стержней были выполнены еще в 1744 году и долгое время не находили практического применения. К ним обратились во второй половине XIX века, когда началось возведение железных конструкций, особенно железнодорожных мостов. Тогда выяснилось, что для коротких стержней формула Эйлера дает завышенные и, следовательно, опасные для практики значения напряжений. Как видно из формулы (11.12), с уменьшением длины  $\ell$  стержня (а, следовательно, и  $\lambda$ ) напряжения растут в *гиперболической* зависимости, что приводит к работе стержня в неупругой области. Причина была установлена русским инженером Ф. С. Ясинским.

## 11.4. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛERA

В основу формулы Эйлера положено дифференциальное уравнение (11.1) УПРУГОЙ линии при изгибе, следовательно, напряжение в стержне не должно превышать ПРЕДЕЛА УПРУГОСТИ (ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ) данного материала  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$ :

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц} \Rightarrow \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$$

**Предельная гибкость** – то наименьшее значение гибкости, при котором формула Эйлера еще применима:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{пред}^2}, \text{ откуда } \lambda_{пред} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$$

Для стали Ст3  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\sigma_{пц} = 200$  МПа;  $\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{200 \cdot 10^6}} \approx 100$ .

Для стали 60  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\sigma_{пц} = 620$  МПа;  $\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{620 \cdot 10^6}} = 56,4$ .

Для древесины  $\lambda_{пред} \approx 110$ . Для чугуна  $\lambda_{пред} \approx 80$ .

На практике резких переходов от одного состояния к другому не происходит. Существует область с характерными признаками обоих состояний – *потеря устойчивости при пластическом деформировании*. Для стержней, имеющих гибкость меньшую предельной, Ясинским Ф. С. предложена эмпирическая формула критических напряжений

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda,$$

где  $a$  и  $b$  – определяемые экспериментально коэффициенты, зависящие от свойств материала. Например, для стали Ст3 коэффициенты:

$$a = 310 \text{ МПа};$$

$$b = 1,14 \text{ МПа}.$$

Таким образом схематичная связь между предельными (разрушающими) напряжениями и гибкостью сжатых стержней может быть представлена в виде трех областей (рис. 11.5):

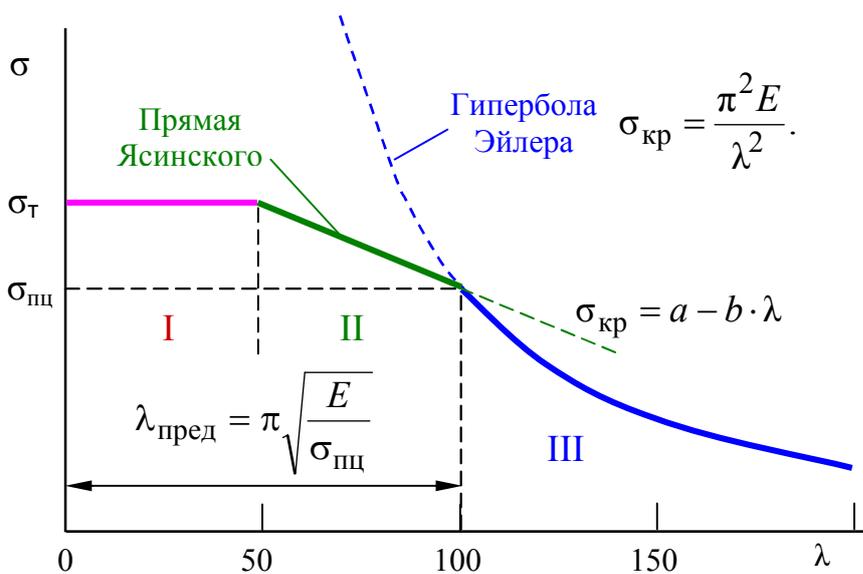


Рис. 11.5

I – область **пластического течения** или хрупкого разрушения материала;  
 II – область **потери устойчивости с признаками пластической деформации**;  
 III – область **потери устойчивости при упругих деформациях**.

### 11.5. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Для выполнения расчета необходимо определить диапазон гибкости стержней, в котором предполагается работа стержня

**Область I**  
 $0 \leq \lambda \leq 50$   
 пластическая

$$\frac{F}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]}, \quad \text{или} \quad \frac{F}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_B}{[n_B]}.$$

**Область II**  
 $50 \leq \lambda \leq 100$   
 упругопластическая

$$\frac{F}{A} \leq [\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{k_y} = \frac{a - b\lambda}{k_y}.$$

**Область III**  
 $\lambda > \lambda_{пред}$   
 упругая

$$\frac{F}{A} \leq [\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{k_y} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 k_y}.$$

Здесь  $[n_T]$ ,  $[n_B]$ ,  $k_y$  – коэффициенты запаса по текучести, прочности, устойчивости соответственно.

Предложен общий подход:  $\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y]$ , где  $[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma]$ .

Здесь  $[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение на устойчивость;  $[\sigma]$  – основное допускаемое напряжение на сжатие;  $\varphi$  – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения (коэффициент продольного изгиба). Значения  $\varphi$  в зависимости от гибкости  $\lambda$  для разных материалов приведены в таблицах для дискретных значений  $\lambda$  (10, 20, 30, ..., 200). Данные таблицы (П.2.7) можно представить графиками (рис. 11.6) зависимости коэффициента  $\varphi$  уменьшения основных допускаемых напряжений от гибкости  $\lambda$  стержня, которые, по сути, являются аппроксимациями кусочных функций типа, представленной на рис. 11.5.

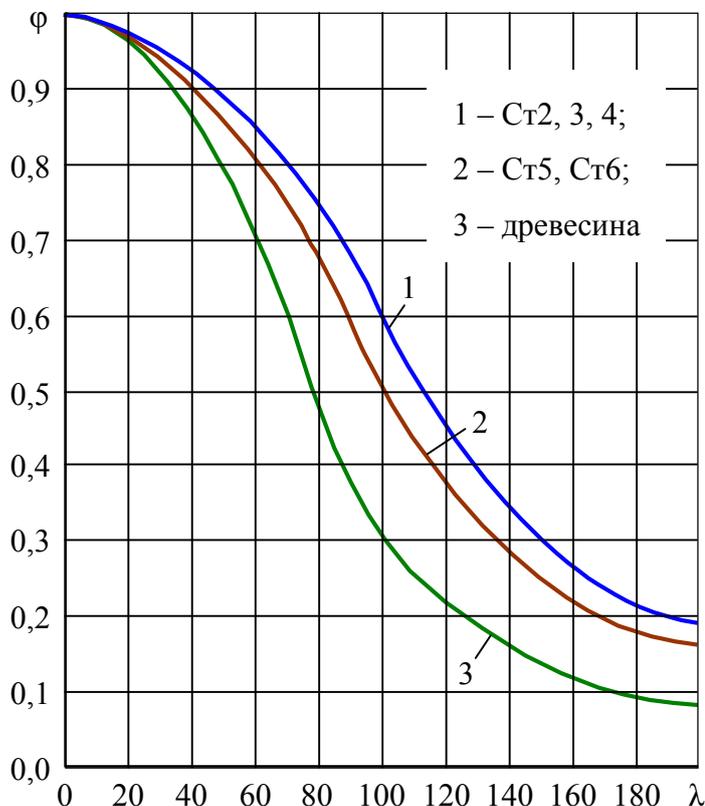


Рис. 11.6

Подбор размеров поперечного сечения осуществляется численным методом решения математических задач – методом итераций (рис. 11.7). Решение задачи сводится в конечном итоге к поиску такого значения коэффициента  $\varphi$ , при котором удовлетворяется условие устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma]. \quad (11.14)$$

Задают (этап 1) начальное приближение коэффициента  $\varphi$ , например 0,6 (среднее табличное значение). Вычисляют площадь  $A$  (этап 2), затем радиус инерции  $i_{\min}$  (этап 3), гибкость  $\lambda$  (этап 4). По таблице, используя метод линейной интерполяции, находят значение  $\varphi$ , соответствующее найденной гибкости  $\lambda$  (этап 5). Проверяют условие устойчивости, вычисляя действительное напряжение  $\sigma$  и, сравнивая его с допускаемым на устойчивость

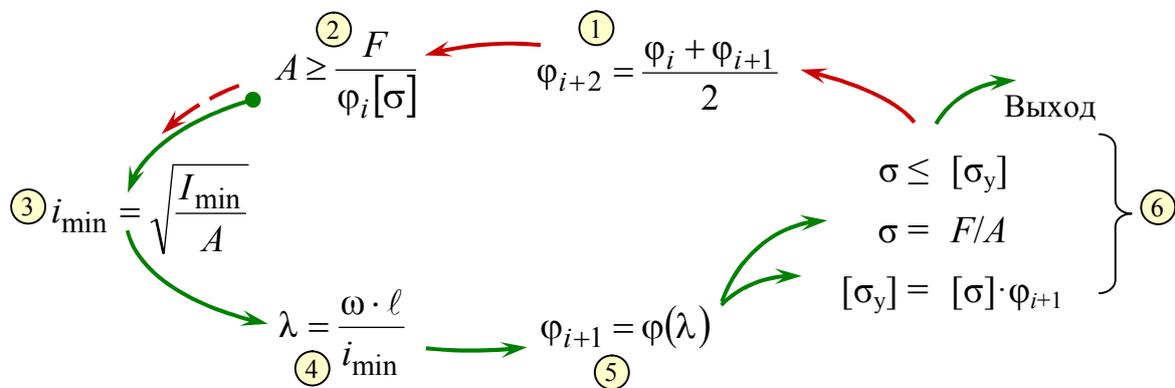


Рис. 11.7

$[\sigma_y]$  (этап 6). Если условие устойчивости не выполняется, приступают к следующему циклу итераций, задавая коэффициент уменьшения допускаемых напряжений  $\varphi$  как среднее арифметическое между заданным в предыдущем приближении и только что найденным (этап 1).

### О рациональной форме поперечного сечения стержня

Рациональной является такая форма поперечного сечения, при которой величина критического напряжения в обеих главных плоскостях инерции одинакова

$$\sigma_{\text{кр},y} = \sigma_{\text{кр},z} \Rightarrow \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_z^2} \Rightarrow \lambda_y = \lambda_z.$$

При **одинаковых** способах закрепления концов стержня в главных плоскостях инерции  $\omega_y = \omega_z$  условию равнопрочности  $I_y = I_z$  удовлетворяет любая правильная фигура (круг, кольцо, любой правильный многоугольник).

При *разных* способах закрепления концов стержня, например, шатуна кривошипно-шатунного механизма ( $\omega = 1$  в плоскости движения шатуна;  $\omega = 0,5$  – в перпендикулярной плоскости) условию равнопрочности (равноустойчивости) удовлетворяет соотношение

$$\lambda_y = \lambda_z \Rightarrow \frac{\omega_y}{i_y} = \frac{\omega_z}{i_z}.$$

Кроме того рациональной считают форму, обеспечивающую экономичность сечения, оцениваемую отношением  $I/A^2$  (см. подразд. 6.8). Например, для круглого сечения

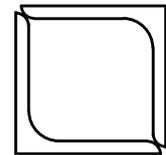
$$\frac{I}{A^2} = \frac{\pi D^4}{64} \frac{4^2}{\pi^2 D^4} = 0,0796.$$

Для кольцевого сечения с коэффициентом пустотелости  $c = d/D = 0,8$

$$\frac{I}{A^2} = \frac{\pi D^4}{64} \frac{4^2}{\pi^2 D^4} \frac{1-c^4}{(1-c^2)^2} = 0,0796 \cdot 4,555 = 0,363.$$

Кольцевое сечение экономичнее круглого в 4,6 раза.

При проектировании составных колонн стремятся создавать пустотелые сечения из прокатных профилей: уголков, швеллеров.



### Особенности расчета составной колонны

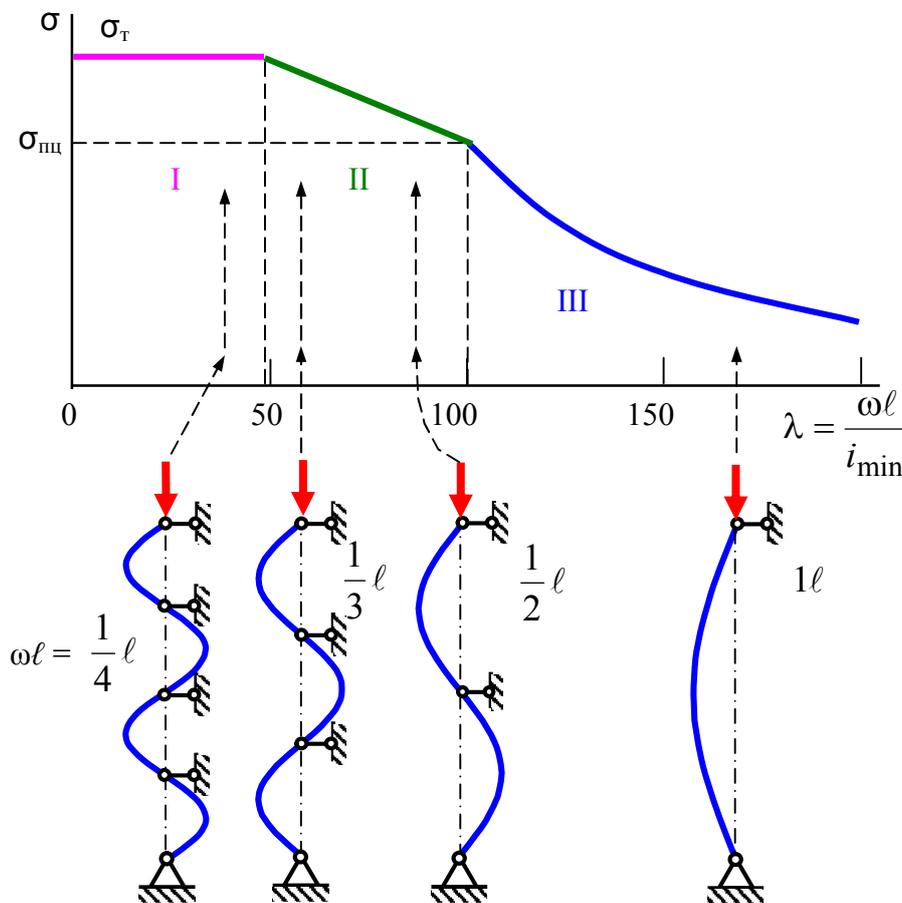


Рис. 11.8

У составных колонн отдельные ветви для совместной работы связаны между собой планками. Участок ветви между планками называют панелью и обозначают  $\ell_{\text{пан}}$ . Количество планок и длину панели выбирают из соображения предотвратить изгиб участка ветви между соединительными планками. Участок ветви на этом отрезке гибкости  $\lambda$  должен работать только на сжатие.

Это условие обеспечивается в области I (рис. 11.8) при

$$\lambda_{\text{пан}} = \frac{\omega_{\text{пан}} \cdot \ell_{\text{пан}}}{i_{\min}} = 30 - 40.$$

В расчетах принимают способ крепления планок *шарнирный*,  $\omega_{\text{пан}} = 1$ , хотя на практике соединение сварное, *жесткое*, которому соответствует  $\omega_{\text{пан}} = 0,5$ . Повышение прочности идет в запас. Из приведенной выше формулы определим длину панели

$$\ell_{\text{пан}} = \frac{\lambda_{\text{пан}} \cdot i_{\min}}{\omega_{\text{пан}}} = \frac{(30 - 40) \cdot i_{\min}}{1} = (30 - 40) \cdot i_{\min}. \quad (11.14)$$

Для профилей, представленных на рис. 11.9,  $i_{\min} = i_y$ .

Величину просвета «а» между профилями составной колонны рассчитывают из условия равной устойчивости колонны относительно главных

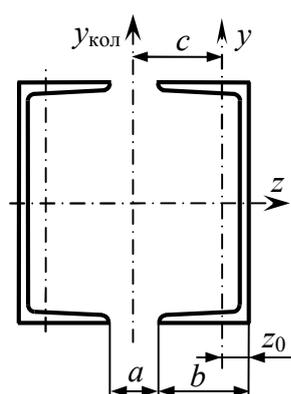


Рис. 11.9

центральных осей инерции составного сечения. Это свойство может быть обеспечено при равенстве гибкостей  $\lambda_{y \text{ кол}} = \lambda_{z \text{ кол}}$ . Для представленного на рис. 11.9 сечения ось  $z$  – материальная, а ось  $y_{\text{кол}}$  – сквозная. Поэтому равная устойчивость может быть реализована при условии

$$I_{y \text{ кол}} = m \cdot I_{z \text{ кол}},$$

где  $m$  – коэффициент ( $m > 1$ ), учитывающий большую гибкость колонны относительно свободной оси  $y_{\text{кол}}$ . Действительную гибкость колонны относительно свободной оси вычисляют по формуле<sup>1</sup>

$$\left(\lambda_{y \text{ кол}}\right)_d = \sqrt{\frac{\lambda_{z \text{ кол}}^2}{m} + \lambda_{y \text{ пан}}^2}, \text{ откуда } m = \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda_{y \text{ пан}}}{\lambda_{z \text{ кол}}}\right)^2}. \quad (11.15)$$

Для показанного на рисунке профиля

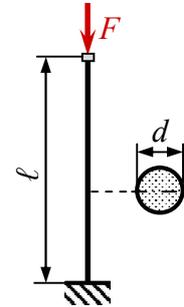
$$I_{y \text{ кол}} = 2(I_y + c^2 A) = 2 \left[ I_y + \left(\frac{a}{2} + b - z_0\right)^2 A \right].$$

<sup>1</sup> Расчеты на устойчивость и элементы проектирования составной колонны: учеб. пособ. /В. П. Багмутов, А. А. Белов, А. С. Столярчук, З. П. Журкина; ВолгГТУ. – Волгоград, 2006. – 56 с.

**Пример 11.1.** Подобрать размер круглого поперечного сечения деревянной стойки, воспринимающей нагрузку, приложенную вдоль центральной оси.

Дано:  
 $F = 40$  кН;  
 $\ell = 2,5$  м;  
 Древесина  
 $[\sigma] = 10$  МПа

**Решение.** Из условия устойчивости при продольном изгибе  $\sigma_y = F/A \leq [\sigma_y]$  находим требуемый размер площади поперечного сечения стойки  $A \geq F/[\sigma_y]$ , где допускаемое напряжение на устойчивость  $[\sigma_y] = [\sigma] \cdot \varphi$ , а коэффициент  $\varphi$  уменьшения основного допускаемого напряжения зависит от гибкости  $\varphi = \varphi(\lambda)$ , которую можно вычислить  $\lambda = \omega \cdot \ell / i_{\min}$  лишь, если известен радиус инерции  $i_{\min}$  поперечного сечения, зависящий в свою очередь от площади  $A$ .



Круг относится к *фигурам равного сопротивления*, для которых моменты инерции и радиусы инерции относительно любых центральных осей равны. Находим связь радиуса инерции круга с его площадью

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4}, \text{ но } d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}, \text{ тогда } i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

Подбор сечения ведем методом последовательных приближений согласно алгоритму, иллюстрированному на рис. 11.7. Для отслеживания сходимости процесса итерации промежуточные значения параметров расчетных формул каждого цикла заносим в табл. 11.1, расположенную в конце задачи.

В начальном приближении принимаем среднее (между 1 и 0,08) значение коэффициента снижения основных допускаемых напряжений (табл. П.2.7)  $\varphi_0 = 0,54$  (этап 1), затем находим требуемое значение площади  $A_1$  поперечного сечения (этап 2).

Этапы расчета	Действие
1. Коэффициент $\varphi$	$\varphi_0 = 0,54$
2. Площадь сечения	$A_1 \geq \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi_0} = \frac{40 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6 \cdot 0,54} = 0,00741 \text{ м}^2.$
3. Радиус инерции	$i_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0,00741}{\pi}} = 0,0243 \text{ м}.$
4. Гибкость стержня	$\lambda = \frac{\omega \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 2,5}{0,0243} = 205.$
5. Коэффициент $\varphi$	$\varphi_1 = 0,08.$
6. Действительное напряжение	$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,00741} = 5,4 \text{ МПа}.$
Допускаемое напряжение	$[\sigma_y] = \varphi_1 \cdot [\sigma] = 0,08 \cdot 10 = 0,8 \text{ МПа}.$

Условие $\sigma \leq [\sigma_y]$ не выполняется: большая перегрузка.																
1. Коэффициент $\varphi$	$\varphi_2 = \frac{1}{2} (\varphi_0 + \varphi_1) = \frac{1}{2} (0,54 + 0,08) = 0,310.$															
2. Площадь сечения	$A_2 \geq \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi_2} = \frac{40 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6 \cdot 0,31} = 0,0129 \text{ м}^2.$															
3. Радиус инерции	$i_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_2}{\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0,0129}{\pi}} = 0,0320 \text{ м}.$															
4. Гибкость стержня	$\lambda = \frac{\omega \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 2,5}{0,032} = 156.$															
5. Коэффициент $\varphi$	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>\lambda</math></td> <td><math>\varphi</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>160</td> <td>0,12</td> <td></td> </tr> <tr> <td><u>150</u></td> <td><u>0,14</u></td> <td><math>\varphi_3 = 0,14 - 6 \cdot 0,002 = 0,128.</math></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>-0,020</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>-0,002</td> <td></td> </tr> </table>	$\lambda$	$\varphi$		160	0,12		<u>150</u>	<u>0,14</u>	$\varphi_3 = 0,14 - 6 \cdot 0,002 = 0,128.$	10	-0,020		1	-0,002	
$\lambda$	$\varphi$															
160	0,12															
<u>150</u>	<u>0,14</u>	$\varphi_3 = 0,14 - 6 \cdot 0,002 = 0,128.$														
10	-0,020															
1	-0,002															
Действительное напряжение	$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,0129} = 3,1 \text{ МПа}.$															
6. Допускаемое напряжение	$[\sigma_y] = \varphi_3 \cdot [\sigma] = 0,128 \cdot 10 = 1,28 \text{ МПа}.$															
Условие $\sigma \leq [\sigma_y]$ не выполняется: большая перегрузка.																
1. Коэффициент $\varphi$	$\varphi_4 = \frac{1}{2} (\varphi_2 + \varphi_3) = \frac{1}{2} (0,31 + 0,128) = 0,219.$															
2. Площадь сечения	$A_3 \geq \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi_4} = \frac{40 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6 \cdot 0,219} = 0,0183 \text{ м}^2.$															
3. Радиус инерции	$i_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_3}{\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0,0183}{\pi}} = 0,0381 \text{ м}.$															
4. Гибкость стержня	$\lambda = \frac{\omega \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 2,5}{0,0381} = 131.$															
5. Коэффициент $\varphi$	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>\lambda</math></td> <td><math>\varphi</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>140</td> <td>0,16</td> <td></td> </tr> <tr> <td><u>130</u></td> <td><u>0,18</u></td> <td><math>\varphi_5 = 0,18 - 1 \cdot 0,002 = 0,178.</math></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>-0,020</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>-0,002</td> <td></td> </tr> </table>	$\lambda$	$\varphi$		140	0,16		<u>130</u>	<u>0,18</u>	$\varphi_5 = 0,18 - 1 \cdot 0,002 = 0,178.$	10	-0,020		1	-0,002	
$\lambda$	$\varphi$															
140	0,16															
<u>130</u>	<u>0,18</u>	$\varphi_5 = 0,18 - 1 \cdot 0,002 = 0,178.$														
10	-0,020															
1	-0,002															
Действительное напряжение	$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,0183} = 2,19 \text{ МПа}.$															
6. Допускаемое напряжение	$[\sigma_y] = \varphi_5 \cdot [\sigma] = 0,178 \cdot 10 = 1,78 \text{ МПа}.$															
Условие $\sigma \leq [\sigma_y]$ не выполняется: большая перегрузка.																
1. Коэффициент $\varphi$	$\varphi_6 = \frac{1}{2} (\varphi_4 + \varphi_5) = \frac{1}{2} (0,219 + 0,178) = 0,199.$															

2. Площадь сечения	$A_4 \geq \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi_5} = \frac{40 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6 \cdot 0,199} = 0,0201 \text{ м}^2.$															
3. Радиус инерции	$i_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_3}{\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0,0201}{\pi}} = 0,0400 \text{ м}.$															
4. Гибкость стержня	$\lambda = \frac{\omega \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 2,5}{0,04} = 125.$															
5. Коэффициент $\varphi$	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>\lambda</math></td> <td><math>\varphi</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>130</td> <td>0,18</td> <td></td> </tr> <tr> <td><u>120</u></td> <td><u>0,21</u></td> <td><math>\varphi_6 = 0,21 - 5 \cdot 0,003 = 0,195.</math></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>-0,030</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>-0,003</td> <td></td> </tr> </table>	$\lambda$	$\varphi$		130	0,18		<u>120</u>	<u>0,21</u>	$\varphi_6 = 0,21 - 5 \cdot 0,003 = 0,195.$	10	-0,030		1	-0,003	
$\lambda$	$\varphi$															
130	0,18															
<u>120</u>	<u>0,21</u>	$\varphi_6 = 0,21 - 5 \cdot 0,003 = 0,195.$														
10	-0,030															
1	-0,003															
Действительное напряжение	$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,0201} = 1,99 \text{ МПа}.$															
6. Допускаемое напряжение	$[\sigma_y] = \varphi_6 \cdot [\sigma] = 0,195 \cdot 10 = 1,95 \text{ МПа}.$															
	$\frac{\sigma_y - [\sigma_y]}{[\sigma_y]} 100 = \frac{1,99 - 1,95}{1,95} 100 = 2,05 \text{ \%}.$															
Условие $\sigma \leq [\sigma_y]$ выполняется: перегрузка менее 5 %.																

По найденной площади стержня находим его диаметр

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,0201}{\pi}} = 0,160 \text{ м}.$$

Полученный размер соответствует ГОСТу 6636–69.

Изменение параметров расчетных формул в процессе итерации при подборе размеров поперечного сечения

Таблица 11.1

$n$	$\varphi_i$	$A, \text{ м}^2$	$i, \text{ м}$	$\lambda$	$\varphi_{i+1}$	$\sigma_y$ МПа	$[\sigma_y],$ МПа	Перегр., %
1	0,540	0,0074	0,0243	205	0,080	5,4	0,8	575
2	0,310	0,0129	0,0320	156	0,128	3,10	1,28	142
3	0,219	0,0183	0,0381	131	0,178	2,19	1,78	55
4	0,199	0,0201	0,0400	125	0,195	1,99	1,95	2,05

**Вывод.** За четыре цикла итераций подобрана площадь поперечного сечения деревянного бруса. Требуемый диаметр бруса 160 мм. Допускаемые напряжения на устойчивость для заданной схемы закрепления концов и длины стержня оказались меньше основных допускаемых напряжений в

$$\frac{[\sigma]}{[\sigma_y]} = \frac{10}{1,95} = 5,13.$$

## 12. ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

### 12.1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

- Приступать к выполнению задания необходимо лишь после изучения соответствующего учебного материала.
- Студенты заочного отделения выполняют работу на одной стороне листа формата А4 или в тетради чернилами, разборчивым почерком. Титульный лист оформить согласно примеру (с. 172). Студенты заочного обучения дополнительно указывают дату отсылки работы и почтовый адрес.
- Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие, составить аккуратно схему в масштабе и указать на ней величины, необходимые для расчета.
- Решение должно сопровождаться краткими и грамотными, без сокращения слов, пояснениями и чертежами, ссылками на рисунки и использованную литературу. Необходимо избегать механического пересказа учебника.
- Все вычисления следует проводить с точностью до трех значащих цифр. Размеры подобранных сечений округлить согласно ГОСТу.
- Размерность величин, получаемых в результате вычислений, должна соответствовать Международной системе единиц.
- Контрольная работа должна быть выполнена в установленные графиком сроки, представлена в деканат и зарегистрирована не позднее недели до начала зачетно-экзаменационной сессии. При защите студент должен уметь решать задачи по соответствующим разделам курса.
- Если программой курса предусмотрено изучение дисциплины в течение одного семестра, студенты выполняют одну контрольную работу, состоящую из первых шести задач: с первой по шестую включительно. Студенты, обучающиеся в течение двух семестров, выполняют две контрольных работы. Вторая работа включает задачи 7, 8 и 9 или 10.

Выбор варианта производить с использованием номера зачетной книжки по табл.12.1. Исходные данные для расчета выбирать из табл. 12.2

*Таблица 12.1*

**Выбор варианта контрольной работы**

Предпоследняя цифра номера	Последняя цифра номера зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0–3	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
4–6	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
7–9	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

Таблица 12.2

№ варианта	№ схемы	Силы, кН				Моменты, кН·м				Нагрузка, кН/м $q$	Длины участков, м $a$ $b$ $c$ $e$				Марка стали	Марка чугуна
		$F$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_3$		$a$	$b$	$c$	$e$		
1	1	30	15	35	60	12	10	15	50	38	0,6	0,7	1,0	0,9	Ст3	СЧ35
2	2	28	20	30	65	20	15	10	45	40	0,7	0,9	1,1	1,2	Ст4	СЧ30
3	3	26	25	35	10	14	20	25	60	44	1,0	1,1	1,2	1,2	Ст5	СЧ25
4	4	24	20	35	20	16	50	30	25	42	1,1	1,2	1,3	1,4	Ст6	СЧ20
5	5	22	25	10	35	35	40	30	20	30	1,0	1,2	1,3	1,4	Ст2	СЧ15
6	6	20	10	30	15	15	30	45	10	24	1,3	1,4	1,5	1,5	Ст3	СЧ10
7	7	18	35	40	30	30	15	30	45	20	1,2	1,3	1,4	1,6	Ст4	СЧ35
8	8	16	20	15	55	14	10	40	15	36	1,2	1,4	1,6	1,6	Ст5	СЧ30
9	9	14	45	10	65	13	25	20	50	49	0,9	1,0	1,1	1,7	Ст6	СЧ25
10	10	12	50	60	20	20	20	10	35	20	1,5	1,6	1,7	1,8	Ст2	СЧ20
11	1	32	23	22	60	6	15	20	40	25	0,5	0,6	0,9	0,9	Ст3	СЧ15
12	2	30	25	15	55	40	5	30	45	10	0,6	0,7	0,7	1,0	Ст4	СЧ10
13	3	28	30	45	15	12	10	35	60	46	1,1	1,2	1,3	1,1	Ст5	СЧ35
14	4	26	45	55	25	14	50	60	5	44	1,2	1,3	1,4	1,2	Ст6	СЧ30
15	5	24	40	15	60	30	35	45	5	25	0,9	1,1	1,2	1,3	Ст2	СЧ25
16	6	22	20	35	20	13	15	20	10	30	1,0	1,1	1,3	1,4	Ст3	СЧ20
17	7	20	15	35	45	20	10	20	40	15	1,1	1,2	1,3	1,5	Ст4	СЧ15
18	8	18	20	10	55	12	15	35	20	34	1,1	1,3	1,4	1,5	Ст5	СЧ10
19	9	16	25	15	60	12	25	30	60	50	1,0	1,2	1,3	1,6	Ст6	СЧ35
20	10	14	35	50	30	20	10	15	30	20	1,4	1,6	1,7	1,8	Ст2	СЧ30
21	1	40	35	10	65	12	5	15	60	28	0,7	0,9	1,1	1,1	Ст3	СЧ25
22	2	38	40	15	70	40	15	30	50	30	0,8	0,9	1,1	1,2	Ст4	СЧ20
23	3	36	20	35	25	10	10	35	60	48	1,2	1,3	1,4	1,1	Ст5	СЧ15
24	4	34	35	45	40	12	40	60	10	46	1,3	1,4	1,5	1,4	Ст6	СЧ10
25	5	32	35	20	65	30	50	70	15	25	1,1	1,3	1,4	1,5	Ст2	СЧ35
26	6	30	22	42	15	14	15	30	5	23	1,2	1,3	1,5	1,6	Ст3	СЧ30
27	7	28	45	55	30	16	20	30	50	36	1,2	1,4	1,5	1,5	Ст4	СЧ25
28	8	24	15	20	55	18	25	50	20	18	1,4	1,5	1,6	1,7	Ст5	СЧ20
29	9	22	45	15	70	11	40	30	80	51	1,1	1,2	1,4	1,2	Ст6	СЧ15
30	10	20	50	65	30	14	22	13	20	20	0,7	0,9	1,2	1,3	Ст2	СЧ10

## 12.2. УСЛОВИЯ ЗАДАЧ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

### Контрольная работа № 1

#### Расчеты на прочность и жесткость при растяжении

**Задача 1.** Стальной ступенчатый брус нагружен сосредоточенными силами. Соотношение между площадями поперечных сечений приведены на рис. 12.1. Из условия прочности при растяжении найти площадь поперечного сечения  $A$ . Определить удлинение стержня.

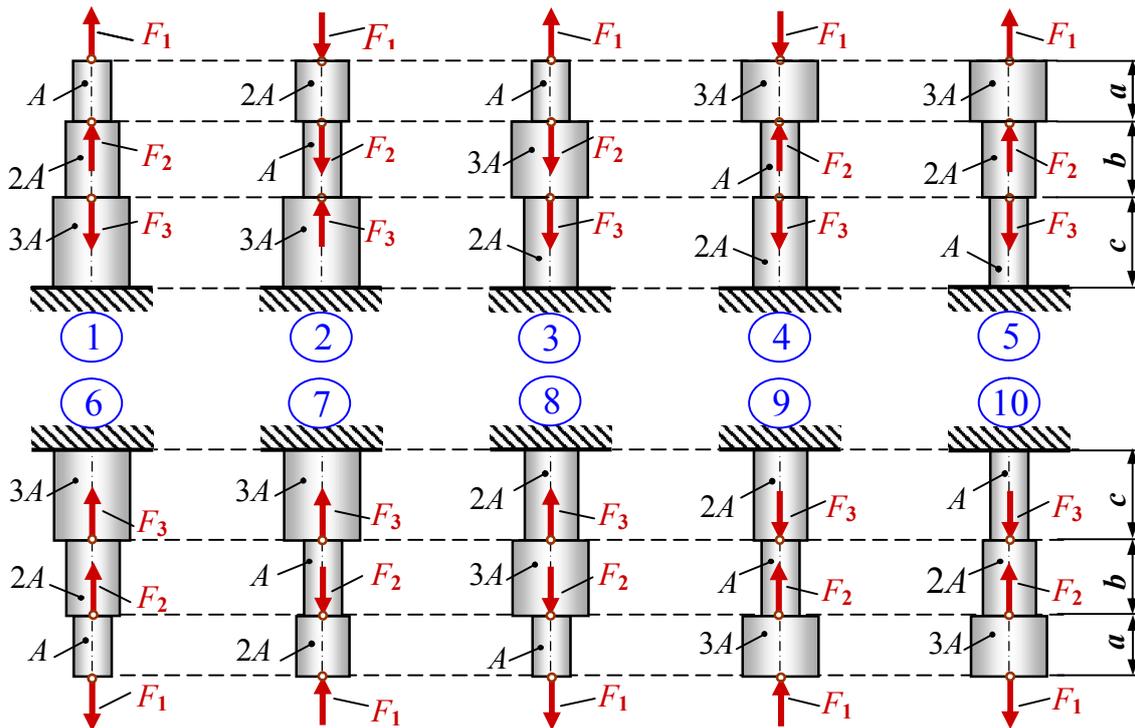


Рис. 12.1

Порядок выполнения задачи.

1. Методом сечений определить внутренние усилия и напряжения на каждом из участков. Найти наиболее напряженный участок.
2. Из условия прочности при растяжении найти требуемое значение площади поперечного сечения.
3. Вычислить фактические напряжения на каждом из участков. Построить эпюры внутренних усилий и напряжений.
4. Найти удлинения каждого из участков в отдельности. Определить перемещение характерных сечений. Построить эпюру перемещений.

## Расчеты на прочность и жесткость при кручении

**Задача 2.** К стальному ступенчатому валу с отношением диаметров  $D/d = 2$  приложены вращающие моменты. Из условия прочности при кручении найти диаметры  $D$  и  $d$  участков вала. Определить деформацию вала.

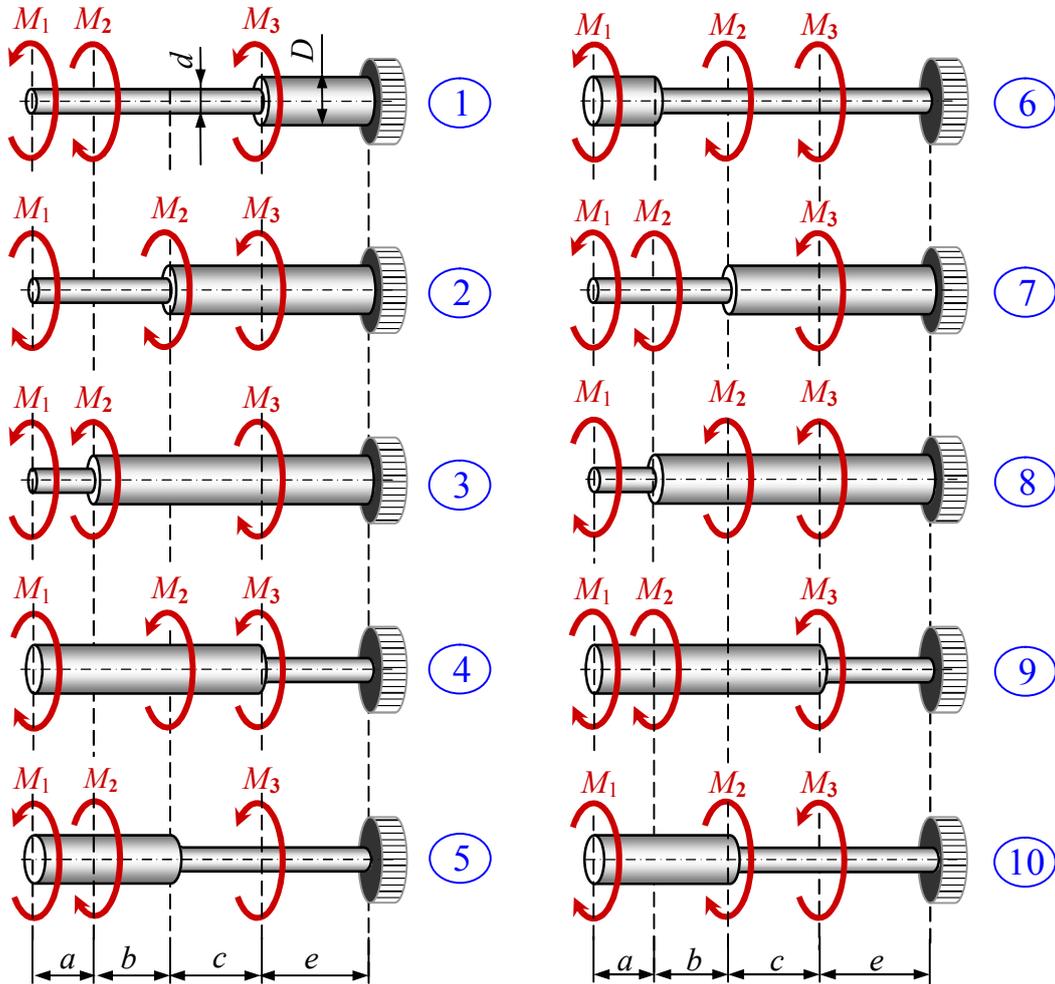


Рис. 12.2

Порядок решения задачи.

1. Методом сечений определить внутренние усилия и напряжения на каждом из участков. Найти наиболее напряженный участок.
2. Из условия прочности при кручении найти требуемое значение момента сопротивления полярного, а затем и диаметры участков.
3. Вычислить фактические напряжения на каждом из участков. Построить эпюры внутренних усилий и напряжений.
4. Найти углы закручивания каждого из участков в отдельности. Определить угловое перемещение характерных сечений. Построить эпюру перемещений.

## Расчеты на прочность при плоском изгибе

**Задача 3.** Для стальной балки, лежащей на двух опорах, подобрать размеры поперечных сечений в нескольких вариантах исполнения: двутаврового, прямоугольного с отношением высоты к ширине  $h/b = 1,5$ , круглого и трубчатого с отношением внутреннего диаметра к наружному  $d/D = 0,8$ . Варианты исполнения поперечных сечений сопоставить по металлоемкости. Выполнить проверку прочности всех вариантов по касательным напряжениям.

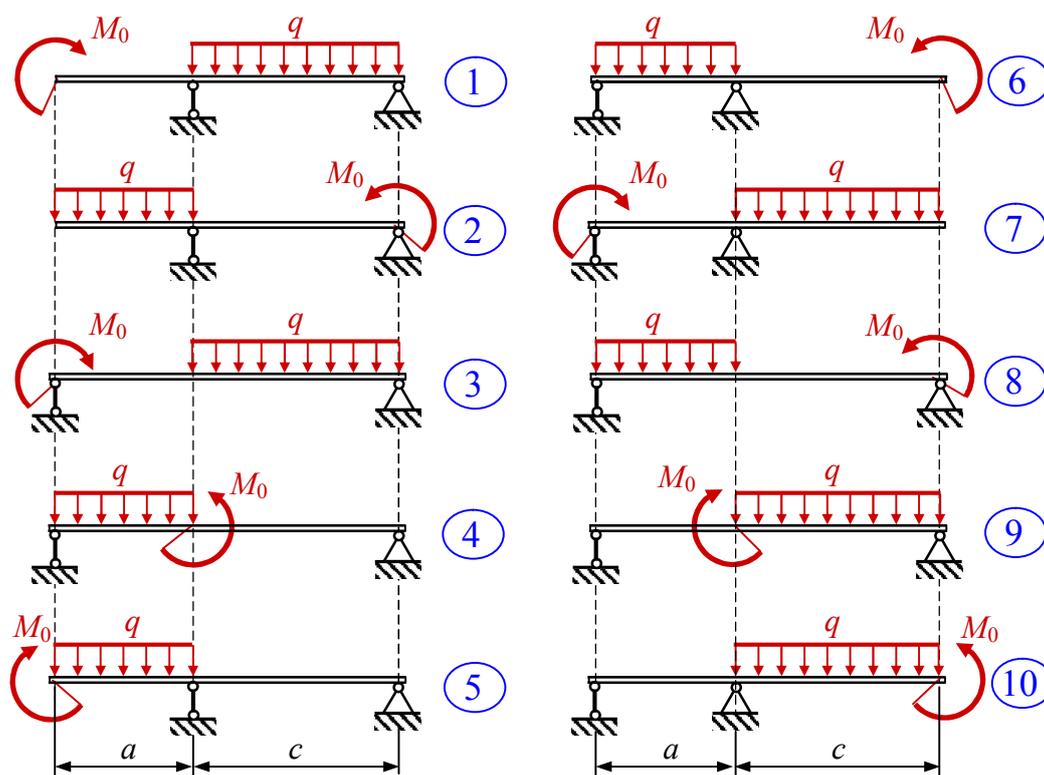


Рис. 12.3

Порядок решения задачи.

1. Найти опорные реакции и выполнить проверку правильности расчета.
2. Методом сечений определить внутренние усилия на каждом из участков. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Найти опасное сечение.
3. Из условия прочности при изгибе найти требуемое значение момента сопротивления осевого.
4. С использованием найденного момента сопротивления подобрать размеры поперечных сечений указанных в задании форм. Размеры нестандартных профилей округлить согласно ГОСТу.
5. Вычислить максимальные касательные напряжения. Построить эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по высоте поперечного сечения.
6. Варианты исполнения поперечного сечения балки сопоставить по металлоемкости.

## Расчеты на прочность при сложном сопротивлении

**Задача 4.** Плоскость  $P - P$  действия внешних нагрузок наклонена под углом  $\alpha = 15^\circ$  к вертикальной плоскости (рис. 12.4, *a*). Подобрать размеры поперечного сечения стального бруса в форме прямоугольника с отношением  $h/b = 1,5$  или двутавра (в зависимости от варианта задания). Сопоставить напряжения в сечении при косом изгибе с напряжениями при плоском изгибе.

Порядок решения задачи.

1. Методом сечений определить внутренние усилия  $Q$  и  $M$  на участках балки. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ . Найти опасное сечение и величину изгибающего момента в нем.
2. Из условия прочности при косом изгибе найти требуемый момент сопротивления, подобрать размер поперечного сечения. Определить положение нейтральной линии, провести ее, найти опасные точки и напряжения в них. Построить эпюру напряжений в сечении.
3. Сопоставить напряжения, возникающие при косом и плоском изгибах.

**Задача 5.** Короткий брус двутаврового (выполнен из стали) или прямоугольного  $b \times h = 6 \times 9$  см (выполнен из чугуна) сечения нагружен сжимающей силой  $F$ , направленной параллельно его геометрической оси и приложенной в полюс  $P$  ( $m = 1$  см;  $n = 1,5$  см) (рис. 12.4, *б*). Выполнить поверочный расчет. Определить допускаемую нагрузку на брус. Сопоставить напряжения, возникающие при внецентренном и осевом нагружениях.

Порядок решения задачи.

1. Выбрать направления осей координат с учетом схемы нагружения. Вычислить координаты полюса и отрезков, отсекаемых нейтральной линией; построить нейтральную линию. Найти опасные точки в сечении.
2. Вычислить напряжения в опасных точках сечения. Построить эпюру распределения напряжений в сечении. Определить запасы прочности, либо значения перегрузки или недогрузки.
3. Определить допускаемую нагрузку, прикладываемую к брусу.
4. Сопоставить напряжения при внецентренном нагружении с осевым.

**Задача 6.** Подобрать размеры круглых поперечных сечений двух участков стального бруса с ломаной геометрической осью (рис. 12.4, *в*).

Порядок решения задачи.

1. Методом сечений определить внутренние усилия, действующие на участках бруса. В расчетах учитывать лишь изгибающие и крутящие моменты.
2. Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов. Определить вид сопротивления на каждом из участков, найти положение опасного сечения.
3. Выполнить проектный расчет для каждого из участков. Найденные размеры округлить до стандартных значений.

1			
2			
3			
4			
5			
<i>a</i>		<i>б</i>	<i>в</i>

Рис. 12.4 (начало)

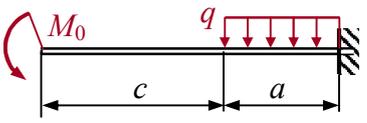
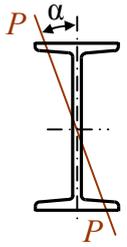
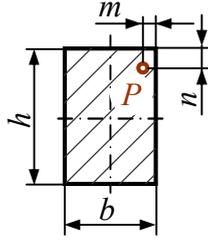
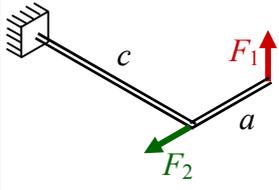
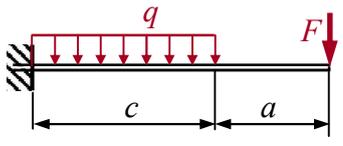
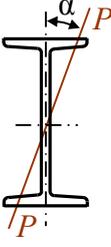
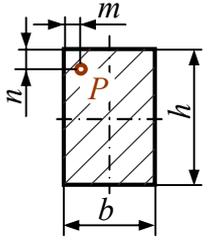
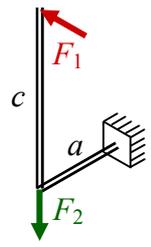
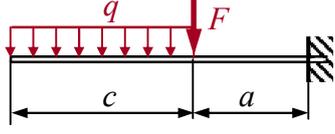
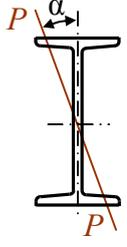
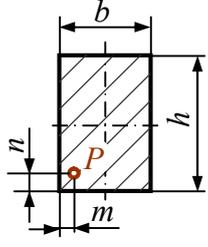
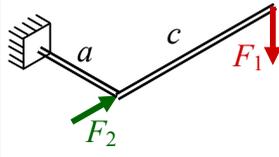
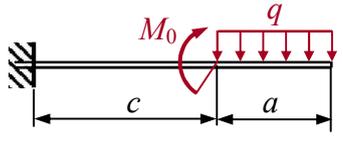
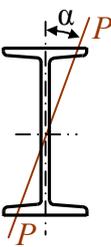
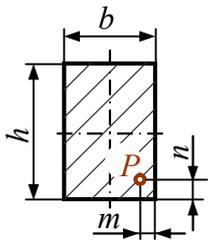
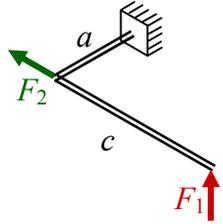
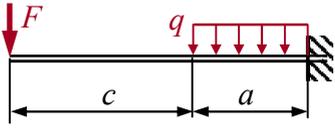
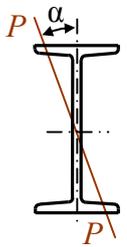
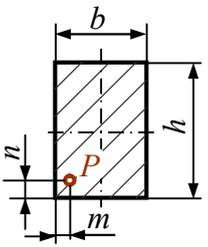
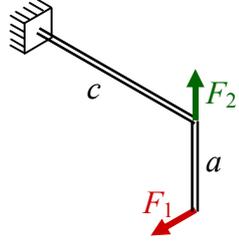
6				
7				
8				
9				
10				
	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	

Рис. 12.4 (окончание)

## Пример оформления титульного листа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет \_\_\_\_\_

Кафедра «Сопротивление материалов»

Контрольная работа по сопротивлению материалов

**Расчеты на прочность и жесткость  
элементов конструкций**

Вариант № \_\_\_\_

Зачетная книжка № \_\_\_\_\_

Выполнил студент группы \_\_\_\_\_

Проверил \_\_\_\_\_

Волгоград 2014

## Контрольная работа № 2

### Энергетический метод расчета упругих систем

Задача 7. Для плоской рамы (рис. 12.5) подобрать размер поперечного сечения двутаврового профиля.

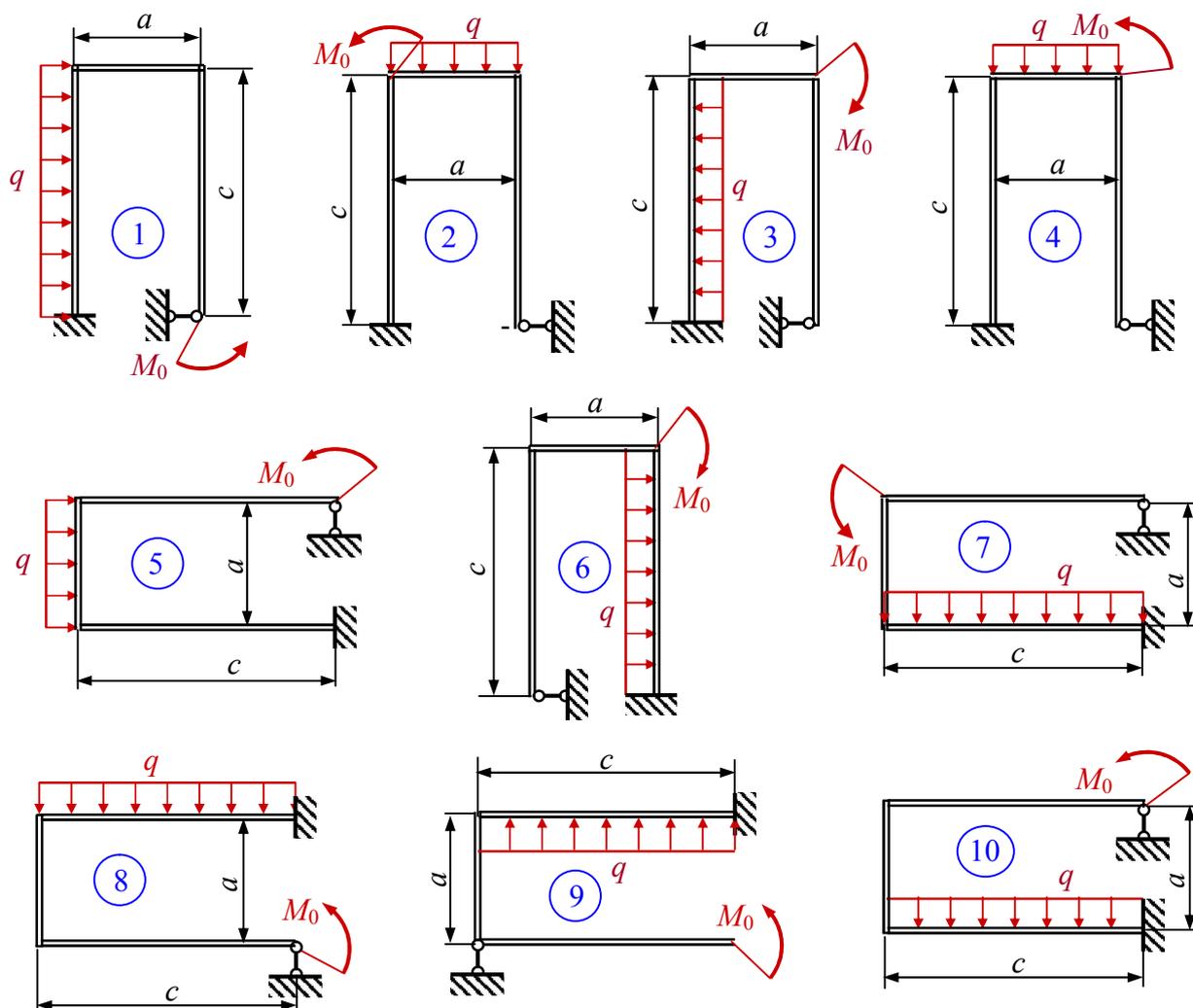


Рис. 12.5

Порядок решения задачи.

1. Определить порядок статической неопределимости. Составить систему канонических уравнений метода сил.
2. Выбрать лишнюю неизвестную. Изобразить системы эквивалентную, грузовую и единичную.
3. Найти внутренние усилия в грузовой и единичной системах. Вычислить грузовое и единичное перемещения и найти лишнюю неизвестную.
4. Определить внутренние усилия в эквивалентной системе. Построив эпюры изгибающих моментов, найти положение опасного сечения.
5. Из условия прочности при изгибе подобрать профиль двутавра.

## Динамическое действие нагрузки

**Задача 8.** На упругую систему (рис. 12.6) двутаврового поперечного сечения с высоты  $h = 10$  см падает груз  $Q$  массой  $m = 50$  кг. Сопоставить наибольшие статические и динамические напряжения в поперечном сечении и прогибы под грузом. Массу упругой системы не учитывать.

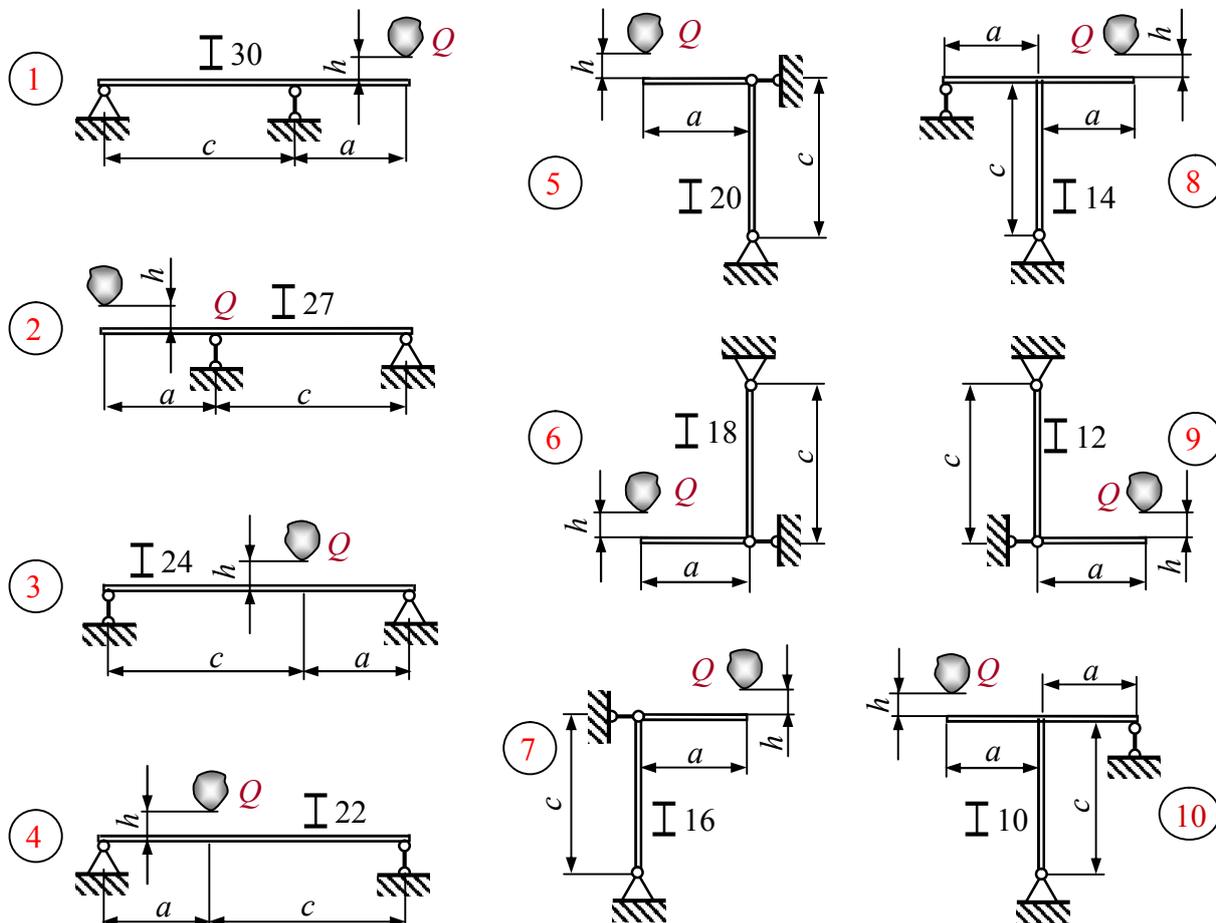


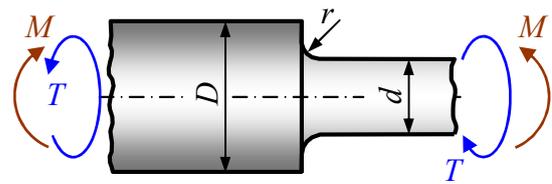
Рис. 12.6

Порядок решения задачи.

1. Определить реакции опор.
2. Найти внутренние усилия в заданной системе в случае статического приложения нагрузки  $Q$ , построить эпюры изгибающего момента, найти положение опасного сечения.
3. Вычислить напряжение при статическом приложении нагрузки.
4. Определить перемещение сечения в точке соударения от статического приложения нагрузки.
5. Вычислить динамический коэффициент.
6. Определить динамические напряжение и перемещение.
7. Сопоставить напряжение и перемещение при ударном действии нагрузки со статическими.

## Циклическое действие нагрузки

**Задача 9.** Определить коэффициент запаса усталостной прочности участка стального ступенчатого вала, испытывающего переменный изгиб с кручением. Нормальные напряжения  $\sigma$  от изгиба изменяются по симметричному  $R_\sigma = -1$  циклу, а касательные напряжения  $\tau$  от кручения – по отнулевому  $R_\tau = 0$ .



Данные к задаче 9

Таблица 12.3

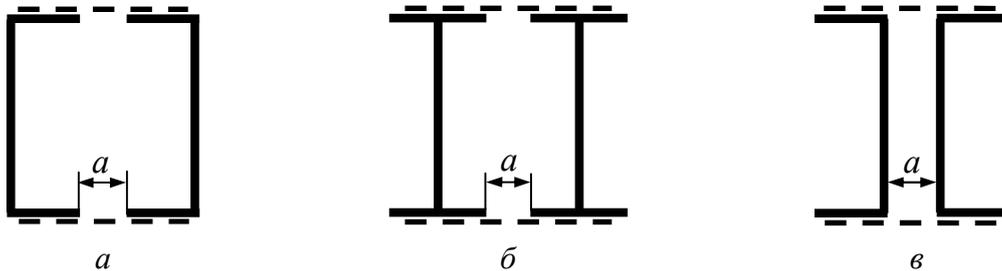
Вар.	$D$ , мм	$d$ , мм	$r$ , мм	Материал	$\sigma_{в}$ , МПа	$\sigma_a$ , МПа	$\tau_{max}$ , МПа	Обработка поверхности
1	56	28	2	30Х	900	55	30	Чист. точение
2	60	30	2	Сталь 30	500	42	38	Полирование
3	64	32	2	35Х	950	58	32	Черн. точение
4	70	35	3	15Х	700	45	36	Чист. точение
5	76	38	4	20Х	800	48	35	Шлифование
6	80	40	5	15ХР	750	38	40	Черн. точение
7	82	42	6	Сталь 40	580	42	32	Чист. точение
8	90	45	8	38ХА	950	52	60	Полирование
9	100	50	10	15ХФ	750	46	28	Черн. точение
10	104	52	12	40Х	1000	70	50	Полирование
11	56	28	2	20ХФ	800	68	36	Черн. точение
12	60	30	2	18ХГТ	1100	70	38	Шлифование
13	64	32	2	20ХН	800	45	32	Чист. точение
14	70	35	3	18ХГН	850	42	30	Шлифование
15	76	38	3	Сталь 50	640	40	28	Полирование
16	80	40	3	12ХН3А	950	50	36	Шлифование
17	84	42	5	40ХР	1000	65	55	Полирование
18	90	45	5	20ХН2	800	38	52	Черн. точение
19	100	50	8	15ГС	630	32	28	Шлифование
20	104	52	8	14ХГСН	520	48	26	Чист. точение
21	56	28	3	Сталь 45	610	35	25	Черн. точение
22	60	30	3	15ГС	630	80	50	Полирование
23	64	32	3	20ХФ	850	85	45	Чист. точение
24	76	38	4	35Х	720	90	40	Полирование
25	70	35	5	30ХН	740	50	30	Шлифование
26	80	40	5	15Г2С	480	30	25	Черн. точение
27	42	42	5	30ХГ2С	900	35	40	Шлифование
28	90	45	8	Сталь 60	690	30	35	Чист. точение
29	100	50	10	20ХФ	850	40	30	Полирование
30	104	52	12	35Х	700	30	28	Шлифование

## Расчет на устойчивость центрально сжатой составной колонны

**Задача 10.** На колонну, состоящую из двух стальных прокатных профилей, связанных между собой по длине соединительными планками (рис. 12.7, *а*, *б* или *в*), действует сила  $F$ . Требуется выполнить следующее.

- Подобрать номер прокатного профиля.
- Определить расстояние  $a$  между профилями.
- Найти расстояние между соединительными планками.
- Вычислить допустимую нагрузку на спроектированную колонну при всех возможных способах закрепления ее концов.

Исходные данные для расчета выбирать из табл. 12.4



Порядок решения задачи.

1. Из условия устойчивости при продольном изгибе определить требуемую общую (суммарную) площадь поперечного сечения колонны.
2. Вычислив площадь одной ветви колонны, из таблиц сортамента подобрать номер прокатного профиля, определить радиус инерции относительно материальной оси колонны.
3. Вычислить гибкость колонны и соответствующий ей коэффициент уменьшения основного допустимого напряжения.
4. Сопоставить действительное напряжение в колонне с допустимым напряжением на устойчивость. В случае необходимости выполнить следующий цикл итераций, начиная с пункта 1.
5. Задавая значение гибкости ветви колонны на отрезке между соединительными планками, найти расстояние  $\ell_{пан}$  между ними.
6. Из условия равенства гибкостей колонны относительно материальной и свободной осей определить расстояние  $a$  между профилями.
7. Определить несущую способность спроектированной колонны при изменении способов закрепления ее концов.

## Данные к задаче 10

## Таблица 12.4

Вар.	Схема по рис. 12.7	$F$ , кН	$\omega$	$\ell$ , м	Марка стали	$[\sigma]$ , МПа
1	<i>a</i>	200	1	3,1	Ст4	140
2	<i>б</i>	220	2	3,4	Ст3	125
3	<i>в</i>	240	1	2,9	Ст5	165
4	<i>a</i>	260	0,7	3,3	Ст2	115
5	<i>б</i>	280	2	3,5	Ст4	140
6	<i>в</i>	300	2	2,9	Ст6	195
7	<i>a</i>	320	1	3,1	Ст5	165
8	<i>б</i>	340	1	3,6	Ст3	125
9	<i>в</i>	360	0,7	3,9	Ст4	140
10	<i>a</i>	380	0,5	3,7	Ст2	115
11	<i>б</i>	400	1	3,8	Ст2	115
12	<i>в</i>	420	2	3,1	Ст6	195
13	<i>a</i>	440	1	3,0	Ст5	165
14	<i>б</i>	460	1	3,9	Ст3	125
15	<i>в</i>	480	0,7	4,2	Ст4	140
16	<i>a</i>	500	0,5	5,2	Ст3	125
17	<i>б</i>	520	0,7	4,2	Ст4	140
18	<i>в</i>	540	1	2,7	Ст4	140
19	<i>a</i>	560	0,7	4,3	Ст3	125
20	<i>б</i>	580	0,5	4,5	Ст6	195
21	<i>в</i>	600	0,5	5,9	Ст2	115
22	<i>a</i>	620	2	2,8	Ст5	165
23	<i>б</i>	640	0,5	5,9	Ст3	125
24	<i>в</i>	660	1	4,2	Ст4	140
25	<i>a</i>	680	0,7	4,8	Ст5	165
26	<i>б</i>	700	0,7	5,2	Ст4	140
27	<i>в</i>	720	0,5	5,8	Ст4	140
28	<i>a</i>	740	1	4,6	Ст3	125
29	<i>б</i>	760	1	4,1	Ст5	165
30	<i>в</i>	780	0,7	6,4	Ст2	115

**ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

**Задача № 1.** Ступенчатый брус из стали Ст4 ( $[\sigma_p] = 140$  МПа) нагружен, как показано на рис. П.1.1, а. Из условия прочности подобрать размеры поперечного сечения. Построить эпюру перемещения сечений.

Дано:

$$F_1 = 28 \text{ кН}; \quad F_2 = 15 \text{ кН}; \quad F_3 = 22 \text{ кН};$$

$$a = 0,6 \text{ м}; \quad b = 0,8 \text{ м}; \quad c = 1,1 \text{ м}.$$

**Решение**

**I. Определение внутренних усилий и напряжений.** В защемлении возникает опорная реакция  $R$  (рис. П.1.1, а), вычислять которую нет необходимости, поскольку внутренние усилия станем определять, рассматривая брус со свободного конца. Методом сечений находим внутренние усилия на каждом из участков, проецируя силы на продольную ось бруса (см. пример 2.2). Строим эпюру внутренних усилий (рис. П.1.1, б).

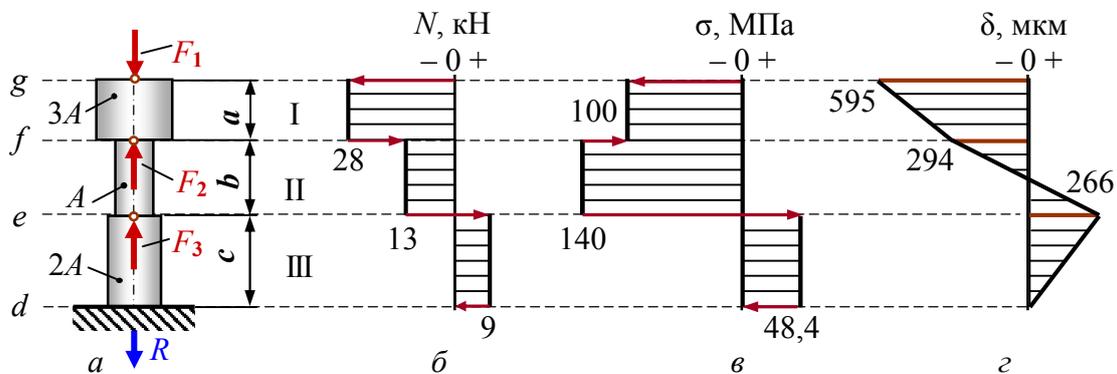


Рис. П.1.1

$$N_I = -F_1 = -28 \text{ кН}; \quad \sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = \frac{-28}{3A} = -9,33 \frac{\text{кН}}{A};$$

$$N_{II} = -F_1 + F_2 = -28 + 15 = -13 \text{ кН}; \quad \sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{-13}{A} = -13 \frac{\text{кН}}{A};$$

$$N_{III} = -F_1 + F_2 + F_3 = -28 + 15 + 22 = 9 \text{ кН}; \quad \sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{9}{2A} = 4,5 \frac{\text{кН}}{A}.$$

**Проверка.** Сечениям, к которым приложена сосредоточенная сила, на эпюре  $N$  соответствуют скачки на величину приложенной силы и в направлении ее действия:

Сечение  $g$ :  $\Delta N_g = (N_I - 0) = (-28 - 0) = -28 \text{ кН} = F_1$  (скачок в минус).

Сечение  $f$ :  $\Delta N_f = (N_{II} - N_I) = (-13 - (-28)) = 15 \text{ кН} = F_2$  (скачок в плюс).

Сечение  $e$ :  $\Delta N_e = (N_{III} - N_{II}) = (9 - (-13)) = 22 \text{ кН} = F_3$  (скачок в плюс).

Определив напряжения, приходим к выводу, что опасным является участок II. Знак напряжения в расчетах на прочность элементов из пластичных материалов роли не играет, поскольку они сопротивляются растягивающим и сжимающим нагрузкам одинаково.

**II. Проектный расчет.** Из условия прочности при растяжении находим требуемое значение площади поперечного сечения

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]; \Rightarrow A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{13 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^6} = 9,286 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

Допускаемое напряжение назначено согласно рекомендациям табл. П.2.4.

Вычислив фактические напряжения на каждом из участков, строим эпюру напряжений (рис. П.1.1, в).

$$A_I = 3A = 3 \cdot 0,929 = 2,787 \text{ см}^2; \quad \sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = \frac{-28000}{2,787 \cdot 10^{-4}} = -100,4 \text{ МПа};$$

$$A_{II} = A = 0,929 \text{ см}^2; \quad \sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{-13000}{0,929 \cdot 10^{-4}} = -140 \text{ МПа};$$

$$A_{III} = 2A = 2 \cdot 0,929 = 1,858 \text{ см}^2; \quad \sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{9000}{1,858 \cdot 10^{-4}} = 48,4 \text{ МПа}.$$

**III. Деформации бруса.** Удлинения каждого из участков определим, используя закон Гука при растяжении:

$$\Delta l_I = \frac{N_I \cdot a}{E \cdot A_I} = \frac{-28 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,787 \cdot 10^{-4}} = -3,01 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{II} \cdot b}{E \cdot A_{II}} = \frac{-13 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,929 \cdot 10^{-4}} = -5,60 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{III} \cdot c}{E \cdot A_{III}} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,858 \cdot 10^{-4}} = 2,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Для построения эпюры перемещения сечений начало отсчета выберем в сечении  $d$ , поскольку оно неподвижно (защемлено).

$$\delta_d = 0;$$

$$\delta_e = \Delta l_{III} = 266 \text{ мкм};$$

$$\delta_f = \Delta l_{III} + \Delta l_{II} = 266 - 560 = -294 \text{ мкм};$$

$$\delta_g = \Delta l_{III} + \Delta l_{II} + \Delta l_I = 266 - 560 - 301 = -595 \text{ мкм}.$$

Строим эпюру перемещения сечений (рис. П.1.1, з).

**Вывод.** Найдено положение опасного участка в ступенчатом брус. Из условия прочности подобрана площадь поперечного сечения опасного участка. Исходя из заданного соотношения площадей, вычислены площади поперечных сечений остальных участков. Рассчитаны деформации каждого из участков, построена эпюра перемещений сечений; полная длина бруса уменьшилась на 0,595 мм.

**Задача № 2.** К ступенчатому валу из стали Ст5 ( $[\tau_{кр}] = 125 \text{ МПа}$ ) с отношением диаметров  $D/d = 2$  приложены вращающие моменты, как показано на рисунке П.1.2, а. Из условия прочности при кручении определить диаметры вала. Построить эпюру углов закручивания.

Дано:

$$\begin{aligned} M_1 &= 15 \text{ кН}; & a &= 0,6 \text{ м}; \\ M_2 &= 22 \text{ кН}; & b &= 0,8 \text{ м}; \\ M_3 &= 28 \text{ кН}; & c &= 1,1 \text{ м}; \\ & & e &= 1,2 \text{ м}. \end{aligned}$$

### Решение

**I. Определение внутренних усилий и напряжений.** В защемлении возникает опорный момент  $M$  (рис. П.1.2, а), вычислять который нет необходимости, поскольку внутренние усилия станем определять, рассматривая брус со свободного конца. Методом сечений находим внутренние усилия на каждом из участков, составляя сумму моментов относительно продольной оси бруса (см. подразд. 5.1). Строим эпюру внутренних усилий (рис. П.1.2, б).

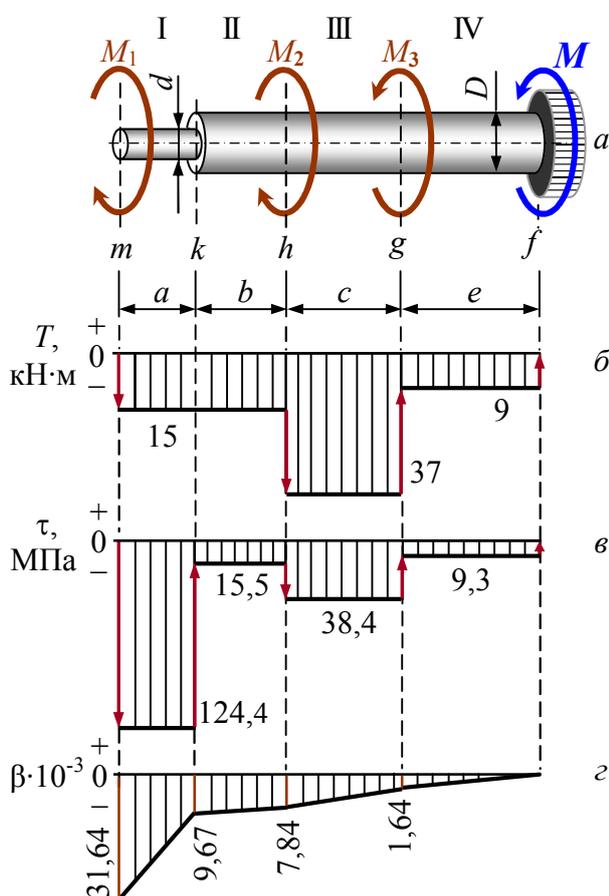


Рис. П.1.2

$$T_{\text{I}} = -M_1 = -15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_{\text{II}} = -M_1 = -15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_{\text{III}} = -M_1 - M_2 = -15 - 22 = -37 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_{\text{IV}} = -M_1 - M_2 + M_3 = -15 - 22 + 28 = -9 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\tau_{\text{I}} = \frac{T_{\text{I}}}{W_{\text{I}}} = \frac{-15 \cdot 16}{\pi \cdot d^3} = -240 \frac{\text{кН}\cdot\text{м}}{\pi d^3};$$

$$\tau_{\text{II}} = \frac{T_{\text{II}}}{W_{\text{II}}} = \frac{-15 \cdot 16}{\pi (2d)^3} = -30 \frac{\text{кН}\cdot\text{м}}{\pi d^3};$$

$$\tau_{\text{III}} = \frac{T_{\text{III}}}{W_{\text{III}}} = \frac{-37 \cdot 16}{\pi (2d)^3} = -74 \frac{\text{кН}\cdot\text{м}}{\pi d^3};$$

$$\tau_{\text{IV}} = \frac{T_{\text{IV}}}{W_{\text{IV}}} = \frac{-9 \cdot 16}{\pi (2d)^3} = -18 \frac{\text{кН}\cdot\text{м}}{\pi d^3}.$$

**Проверка.** Сечениям, к которым приложена пара сила, на эпюре  $T$  соответствуют скачки на величину

приложенного момента и в направлении его действия.

$$\text{Сечение } m: \Delta T_m = (T_{\text{I}} - 0) = (-15 - 0) = -15 \text{ кН} = M_1 \quad (\text{скачок в минус}).$$

$$\text{Сечение } h: \Delta T_h = (T_{\text{II}} - T_{\text{I}}) = (-37 - (-15)) = -22 \text{ кН} = M_2 \quad (\text{скачок в минус}).$$

$$\text{Сечение } g: \Delta T_g = (T_{\text{III}} - T_{\text{II}}) = (-37 - (-9)) = -28 \text{ кН} = M_3 \quad (\text{скачок в плюс}).$$

Определив касательные напряжения, приходим к выводу, что опасным является участок I. *Знак напряжения* в расчетах на прочность элементов из пластичных материалов *роли не играет*.

**II. Проектный расчет.** Из условия прочности при кручении находим требуемое значение полярного момента сопротивления сечения

$$\tau = \frac{T}{W_p} \leq [\tau]; \Rightarrow W_p \geq \frac{T}{[\tau]} = \frac{15 \cdot 10^3}{125 \cdot 10^6} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Поскольку  $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$ , то  $d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,0849 \text{ м}.$

Принимаем полученное значение диаметра вала, округлив до стандартного значения:  $d = 85 \text{ мм}$ ,  $D = 170 \text{ мм}$ . Допускаемое напряжение для стали Ст5 при кручении назначено согласно рекомендациям табл. П.2.4.

Вычислив фактические напряжения на каждом из участков, строим эпюру напряжений (рис. П.1.2, в).

$$W_{pI} = \frac{\pi \cdot 85^3}{16} = 120,6 \cdot 10^3 \text{ мм}^3; \quad \tau_I = \frac{T_I}{W_{pI}} = \frac{-15000}{120,6 \cdot 10^{-6}} = -124,4 \text{ МПа}.$$

$$W_{pII} = \frac{\pi \cdot 170^3}{16} = 964,7 \cdot 10^3 \text{ мм}^3; \quad \tau_{II} = \frac{T_{II}}{W_{pII}} = \frac{-15000}{964,7 \cdot 10^{-6}} = -15,5 \text{ МПа}.$$

$$W_{pIII} = \frac{\pi \cdot 170^3}{16} = 964,7 \cdot 10^3 \text{ мм}^3; \quad \tau_{III} = \frac{T_{III}}{W_{pIII}} = \frac{-37000}{964,7 \cdot 10^{-6}} = -38,4 \text{ МПа}.$$

$$W_{pIV} = \frac{\pi \cdot 170^3}{16} = 964,7 \cdot 10^3 \text{ мм}^3; \quad \tau_{IV} = \frac{T_{IV}}{W_{pIV}} = \frac{-9000}{964,7 \cdot 10^{-6}} = -9,3 \text{ МПа}.$$

**III. Деформации вала.** Угол закручивания каждого из участков определим, используя закон Гука при кручении, вычислив предварительно полярные моменты инерции. Для участков II, III и IV они одинаковы.

$$I_{pI} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,085^4}{32} = 5,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4; \quad I_{pII} = \frac{\pi \cdot (2d)^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,17^4}{32} = 82,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

$$\varphi_I = \frac{T_I \cdot a}{G \cdot I_{pI}} = \frac{-15 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 5,12 \cdot 10^{-6}} = -0,02197;$$

$$\varphi_{II} = \frac{T_{II} \cdot b}{G \cdot I_{pII}} = \frac{-15 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^{10} \cdot 82,0 \cdot 10^{-6}} = -0,00183;$$

$$\varphi_{III} = \frac{T_{III} \cdot c}{G \cdot I_{pIII}} = \frac{-37 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 82,0 \cdot 10^{-6}} = -0,00620;$$

$$\varphi_{IV} = \frac{T_{IV} \cdot e}{G \cdot I_{pIV}} = \frac{-9 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 82,0 \cdot 10^{-6}} = -0,00164.$$

Здесь  $G = 80$  ГПа – модуль касательной упругости.

Для построения эпюры перемещения сечений начало отсчета выберем в сечении  $f$ , поскольку оно неподвижно (защемлено):

$$\beta_f = 0;$$

$$\beta_g = \varphi_{IV} = -1,64 \cdot 10^{-3};$$

$$\beta_h = \varphi_{IV} + \varphi_{III} = (-1,64 - 6,20) \cdot 10^{-3} = -7,84 \cdot 10^{-3};$$

$$\beta_k = \varphi_{IV} + \varphi_{III} + \varphi_{II} = (-1,64 - 6,20 - 1,83) \cdot 10^{-3} = -9,67 \cdot 10^{-3};$$

$$\beta_m = \varphi_{IV} + \varphi_{III} + \varphi_{II} + \varphi_I = (-1,64 - 6,20 - 1,83 - 21,97) \cdot 10^{-3} = -31,64 \cdot 10^{-3}.$$

Строим эпюру углов закручивания сечений (рис. П.1.2,  $z$ ).

**Вывод.** Найдено положение опасного участка в ступенчатом вале. Из условия прочности подобран диаметр вала опасного сечения. Исходя из заданного соотношения диаметров, вычислены размеры поперечных сечений остальных участков. Рассчитаны деформации каждого из участков, построена эпюра углов закручивания сечений; крайнее левое сечение вала повернулось относительно защемления на угол  $0,03164$  радиана.

**Задача № 3.** Для балки из стали Ст3 ( $[\sigma_{из}] = 150$  МПа), схема которой представлена на рис. П.1.3, а, подобрать поперечное сечение в нескольких вариантах исполнения: двутавровое, прямоугольное с отношением высоты к ширине  $h/b = 1,5$ , круглое и трубчатое с отношением  $d/D = 0,8$ . Варианты исполнения сопоставить по металлоемкости. Выполнить проверку прочности по касательным напряжениям.

Дано:

$$M_0 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad q = 24 \text{ кН/м}; \\ a = 0,9 \text{ м}; \quad c = 0,6 \text{ м}.$$

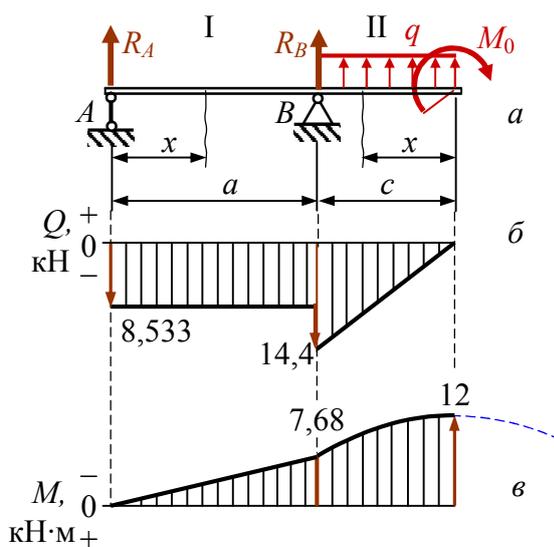


Рис. П.1.3

### Решение

**I. Определение опорных реакций**  
Шарнирно-подвижная опора  $A$  накладывает одну связь, имеет одну реакцию  $R_A$ . Шарнирно-неподвижная опора  $B$  накладывает две связи, имеет две составляющие реакции: горизонтальную и вертикальную. Согласно условию задачи в горизонтальном направлении нагрузки отсутствуют. Следовательно, горизонтальная реакция равна нулю, поэтому нет необходимости в ее изображении.

$$\sum M_A = 0; \quad -M_0 + q \cdot c(a + c/2) + R_B \cdot a = 0,$$

$$\text{откуда } R_B = \frac{M_0 - qc(a + c/2)}{a} = \frac{12 - 24 \cdot 0,6(0,9 + 0,6/2)}{0,9} = -5,867 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -M_0 + q \cdot c(c/2) - R_A \cdot a = 0,$$

$$\text{откуда } R_A = \frac{-M_0 + qc^2/2}{a} = \frac{-12 + 24 \cdot 0,6^2/2}{0,9} = -8,533 \text{ кН.}$$

Проверка найденных реакций:

$$\sum y = 0; \quad R_A + R_B + qc = 0;$$

Реакции найдены верно.

$$-8,533 - 5,867 + 24 \cdot 0,6 = 0.$$

Фактическое направление опорных реакций обратно показанному на рис. П.1.3, а, так как значения реакций оказались со знаком минус.

## II. Определение внутренних усилий

Удобно на первом участке рассматривать равновесие левой, а на втором – правой отсеченной части балки.

I участок;  $0 \leq x \leq a$ ;

$Q_{(x)} = R_A = -8,533$  кН – величина постоянная.

$M_{(x)} = R_A \cdot x$  – уравнение прямой линии;

$M_{x=0} = 0$ ;

$M_{x=a} = R_A \cdot a = -8,533 \cdot 0,9 = -7,68$  кН·м.

II участок;  $0 \leq x \leq c$ ;

$Q_{(x)} = -q \cdot x$  – уравнение прямой линии;

$Q_{x=0} = 0$ ;

$Q_{x=c} = -q \cdot c = -24 \cdot 0,6 = -14,4$  кН.

$M_{(x)} = -M_0 + qx \frac{x}{2}$  – уравнение параболы;

$M_{x=0} = -M_0 = -12$  кН·м;

$M_{x=c} = -M_0 + \frac{q}{2}c^2 = -12 + \frac{24}{2}0,6^2 = -7,68$  кН·м.

Приравняв первую производную функции момента по абсциссе, находим экстремум этой функции:

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = qx; \quad \frac{dM_{(x)}}{dx} = 0; \quad qx = 0 \Rightarrow x_{\text{экстр}} = 0.$$

В этом сечении находится вершина параболы.

Строим эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. П.1.3, б и в) и выполняем проверку правильности их построения:

– на участках, свободных от распределенной нагрузки, эпюра  $Q$  параллельна базисной линии, а эпюра моментов – наклонная прямая;

– на участках, где равномерная распределенная нагрузка действует, эпюра  $Q$  – наклонная прямая, а эпюра моментов ограничена параболой, выпуклость которой совпадает с направлением распределенной нагрузки;

- на участках, где  $Q$  отрицательна, значения  $M$  убывают;
- в сечениях, где приложены сосредоточенные силы (в конкретном случае реакции в опорах), на эпюре  $Q$  скачки в направлении этих сил и на их величину, а на эпюре  $M$  – изломы в направлении действия этих сил;
- в том сечении, где приложен момент на эпюре  $M$  ему соответствует скачок на величину приложенного момента и в направлении его действия.

Из эпюры моментов следует, что опасным является крайнее правое сечение, где момент принимает значение  $M_{\max} = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

### III. Проектный расчет

Из условия прочности при изгибе (формула (7.11)) находим требуемое значение момента сопротивления, ориентируясь на рекомендуемые значения допускаемого напряжения  $[\sigma_{\text{из}}] = 150 \text{ МПа}$ , взятого из табл. П.2.5

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma_{\text{из}}]; \quad \Rightarrow \quad W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma_{\text{из}}]} = \frac{12 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Форма сечения	Момент сопротивления	Размер
Двутавр	$W_z \geq 80 \text{ см}^3$ по таблице сортамента	
Прямоугольник с отношением $h/b = 1,5$	$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b(1,5b)^2}{6} = 0,375b^3$	$b \geq \sqrt[3]{\frac{W_z}{0,375}}$
Круг	$W_z = \frac{\pi}{32} D^3 = 0,0982D^3$	$D \geq \sqrt[3]{\frac{W_z}{0,0982}}$
Кольцо с отношением $d/D = 0,8$	$W_z = \frac{\pi}{32} D^3 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = 0,0579D^3$	$D \geq \sqrt[3]{\frac{W_z}{0,0579}}$

Найденному значению момента сопротивления соответствуют следующие размеры поперечных сечений:

Форма сечения	Требуемые размеры	Принятые размеры, см	Площадь $A$ , $\text{см}^2$
Двутавр	$W_z = 81,7 \text{ см}^3$	№ 14	17,4
Прямоугольник	$b \geq \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^{-5}}{0,375}} = 0,0598 \text{ м}$	$b = 6$ $h = 9$	$b \times h$ $6 \times 9 = 45$
Круг	$D \geq \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^{-5}}{0,0982}} = 0,0934 \text{ м}$	$D = 9,5$	$\pi/4 D^2$ $(\pi/4) \cdot 9,5^2 = 70,9$
Кольцо	$D \geq \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^{-5}}{0,0579}} = 0,111 \text{ м}$	$D = 11,5$ $d = 9,2$ $t = 1,15$	$\pi/4 D^2 (1 - 0,8^2)$ $(\pi/4) \cdot 11,5^2 (0,36) = 37,4$

Требуемые размеры округлены в соответствии с ГОСТ 6636–69 (табл. П.2.2) и занесены в третий столбец. Здесь  $d$  – внутренний диаметр полого сечения, а  $t$  – толщина его стенки. Металлоемкость балки определяется ее объемом, то есть произведением длины на площадь поперечного сечения. Поскольку длины балок одинаковы, сопоставим площади поперечных сечений различных форм с двутавровым:

$$\frac{A_{\text{круга}}}{A_{\text{двут}}}} = \frac{70,9}{17,4} = 4,07; \quad \frac{A_{\text{пря́м}}}{A_{\text{двут}}}} = \frac{45}{17,4} = 2,59; \quad \frac{A_{\text{кольца}}}{A_{\text{двут}}}} = \frac{37,4}{17,4} = 2,15.$$

Самое неэкономичное сечение – круг.

#### IV. Распределение напряжений по высоте поперечного сечения

Опасным для заданной схемы нагружения является крайнее правое сечение с максимальным изгибающим моментом. Однако поперечная сила в этом сечении равна нулю (см. рис. П.1.3, б и в). На примере одного из рассматриваемых сечений (прямоугольного) на рис. П.1.4 показаны эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по высоте поперечного сечения в фактически разных по длине балки местах: эпюра  $\sigma$  в крайнем правом сечении, а эпюра  $\tau$  – в сечении над опорой В.

1. *Нормальные напряжения* в произвольной точке поперечного сечения определяют по формуле (7.9)

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y,$$

где  $M_z$  – изгибающий момент;  $I_z$  – момент инерции.

Переменным параметром в формуле является  $y$  – ордината точки поперечного сечения. Зависимость напряжения от ординаты точки – линейная, поскольку переменная  $y$  в первой степени. Максимальные напряжения  $\sigma_{\max}$  в точках, наиболее удаленных от центральной оси (рис. П.1.4, б). В симметричных сечениях (круг, прямоугольник, двутавр и др.) напряжения равны по величине, но противоположны по знаку.

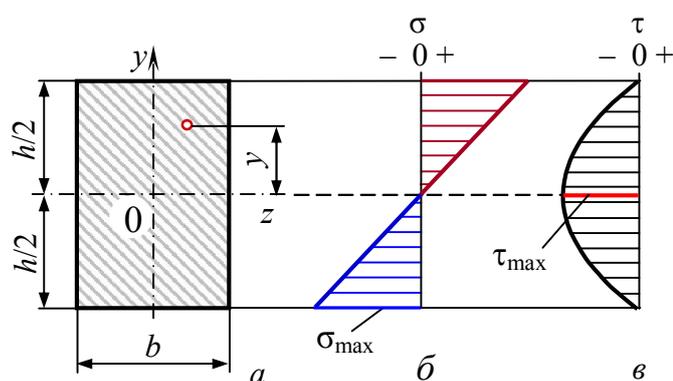


Рис. П.1.4

Знак напряжения зависит как от знака изгибающего момента, так и от положения рассматриваемой точки относительно оси  $z$ . Изгибающий момент в опасном сечении отрицателен (см. рис. П.1.3, в), изогнутая ось балки выпукла вверх, верхняя часть растянута (знак напряжения положительный), нижняя часть балки сжата.

2. Касательные напряжения в произвольной точке вычисляют по формуле (7.12)

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S'_z}{b \cdot I_z},$$

где  $Q_y$  – поперечная сила;  $b$  – ширина сечения на уровне той точки, в которой вычисляют напряжение;  $I_z$  – момент инерции.

Переменным параметром в формуле является  $S'_z$  – статический момент отсеченной части площади; зависит от ординаты  $y$  во второй степени. Поэтому касательные напряжения описываются уравнением параболы. Поперечная сила во всех сечениях балки отрицательна (см. рис. П.1.3, б); она определяет знак касательных напряжений (рис. П.1.4, в).

На основе приведенной формулы для некоторых часто применяемых сечений найдены выражения, по которым вычисляют максимальные касательные напряжения и выполняют проверку прочности, сопоставляя их с допускаемыми касательными напряжениями. Для стали Ст3 согласно рекомендациям, приведенным в табл. П.2.5,  $[\tau] = 75$  МПа.

Форма сечения	Максимальные касательные напряжения	$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}}$
Двутавр	$\tau_{\max} = \frac{Q S'_{\max}}{d I_z} = \frac{14,4 \cdot 10^3 \cdot 46,8 \cdot 10^{-6}}{0,0049 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 24,0$ МПа	$\frac{150}{24} = 6,25$
Прямоугольник	$\tau_{\max} = \frac{3 Q}{2 A} = \frac{3 \cdot 14,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 45 \cdot 10^{-4}} = 4,8$ МПа	$\frac{150}{4,8} = 31,2$
Круг	$\tau_{\max} = \frac{4 Q}{3 A} = \frac{4 \cdot 14,4 \cdot 10^3}{3 \cdot 70,9 \cdot 10^{-4}} = 2,63$ МПа	$\frac{150}{2,63} = 57$
Кольцо	$\tau_{\max} = \frac{2Q}{\pi d_0 t} = \frac{2 \cdot 14,4 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,1035 \cdot 0,0115} = 7,70$ МПа	$\frac{150}{7,70} = 19,5$

Здесь  $d_0$  – средний диаметр трубчатого сечения, а  $t$  – его толщина.

Прочность по касательным напряжениям обеспечена с большим запасом. Тем самым подтверждается положение о том, что при расчете на прочность длинных балок ( $\ell > 5h$ ) влиянием поперечных сил можно пренебречь (см подразд. 7.6).

### Выводы

– Из условия прочности найдены размеры поперечных сечений балок различных вариантов исполнения. Размеры округлены до стандартных значений.

– Сопоставлены металлоемкости балок, имеющих различные формы поперечных сечений. По сравнению с двутавровым сечением самым неэкономичным является круг.

**Задача № 4.** Консольная балка нагружена силами, лежащими в плоскости  $P-P$ , наклоненной под углом  $\alpha = 10^\circ$  к главной плоскости инерции. Подобрать размер двутаврового поперечного сечения. Сопоставить напряжения в поперечных сечениях балки при косом и плоском изгибах. Материал – сталь Стб с допусκαемым напряжением  $[\sigma_{из}] = 230$  МПа. Дано:  $F = 1,2$  кН;  $q = 11$  кН/м;  $a = 0,8$  м;  $c = 1,3$  м.

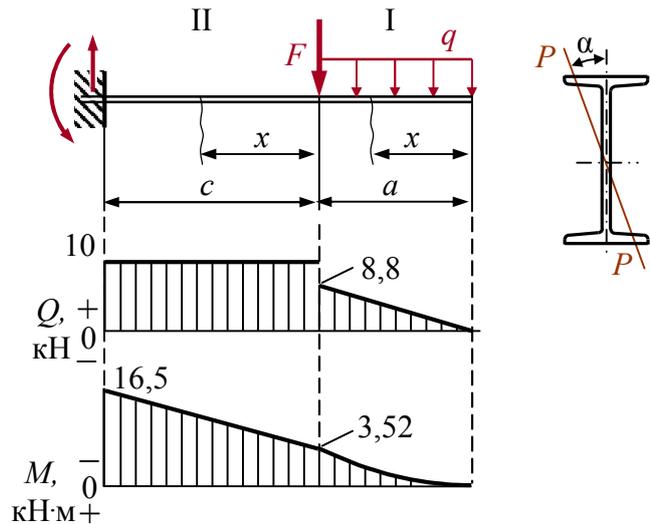


Рис. П. 1.5

### Решение

#### Определение внутренних усилий. Поиск опасного сечения

В опоре – защемлении возникают две опорных реакции, однако, если рассматривать внутренние усилия со свободного конца, определять реакции нет необходимости.

I участок:  $0 \leq x \leq a$

$$Q_{(x)} = qx; \quad Q_{x=0} = 0; \quad Q_{x=a} = qa = 11 \cdot 0,8 = 8,8 \text{ кН.}$$

$$M_{(x)} = -qx \frac{x}{2}; \quad M_{x=0} = 0; \quad M_{x=a} = -\frac{q}{2}a^2 = -\frac{11}{2}0,8^2 = -3,52 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

II участок:  $0 \leq x \leq c$

$$Q_{(x)} = qa + F = 11 \cdot 0,8 + 1,2 = 10 \text{ кН;}$$

$$M_{(x)} = -qa \left( \frac{a}{2} + x \right) - F \cdot x; \quad M_{x=0} = -\frac{q}{2}a^2;$$

$$M_{x=c} = -11 \cdot 0,8 \cdot 1,7 - 1,2 \cdot 1,3 = -16,5 \text{ кН}\cdot\text{м,}$$

Опасное сечение в защемлении, где действует  $M_{\max} = -16,5$  кН·м.

#### Проектный расчет

Из условия прочности при косом изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \left( \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right) \leq [\sigma]$$

находим требуемый момент сопротивления, назначив в первом приближении отношение  $W_z/W_y = 10$

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \left( \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right) = \frac{16,5 \cdot 10^3}{230 \cdot 10^6} (0,985 + 10 \cdot 0,174) = 1,957 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Принимаем двутавр № 20а:  $W_z = 203 \text{ см}^3$ ;  $W_y = 28,2 \text{ см}^3$ .

### Проверочные расчеты

а) по условию прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{|-16,5 \cdot 10^3|}{203 \cdot 10^{-6}} \left( 0,985 + \frac{203}{28,2} 0,174 \right) = 182 \text{ МПа.}$$

Недогрузка (*underload*)  $unl = \frac{230 - 182}{230} 100 = 20,8 \%$ .

Следующая проба – двутавр № 18а:  $W_z = 159 \text{ см}^3$ ;  $W_y = 22,8 \text{ см}^3$ .

$$\sigma_{\max} = \frac{|-16,5 \cdot 10^3|}{159 \cdot 10^{-6}} \left( 0,985 + \frac{159}{22,8} 0,174 \right) = 228 \text{ МПа.}$$

Недогрузка при сопоставлении с  $[\sigma] = 230 \text{ МПа}$  менее 1 %. Принимаем двутавр № 18а.

б) в опасных точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии, положение которой найдем по формуле

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1430}{114} \operatorname{tg} 10^\circ = -2,212; \Rightarrow \beta = -65,7^\circ.$$

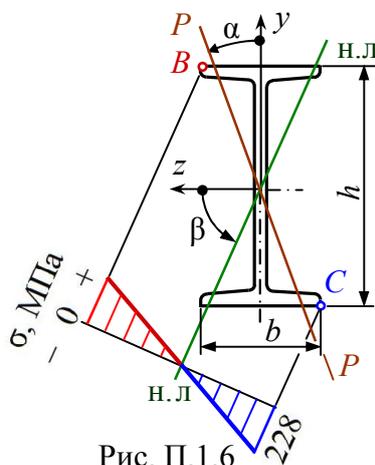


Рис. П.1.6

Направление координатных осей выбираем так, чтобы в первом квадранте координатной системы  $z0y$  изгибающий момент вызывал растягивающие напряжения (рис. П.1.6). Опасными являются точки  $B$  и  $C$ , напряжения в которых равны по модулю, но противоположны по знаку. Напряжение в точке  $B$ :  $z_B = b/2 = 10/2 = 5 \text{ см}$ ;  $y_B = h/2 = 18/2 = 9 \text{ см}$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= M \left( \frac{y_B \cdot \cos \alpha}{I_z} + \frac{z_B \cdot \sin \alpha}{I_y} \right) = \\ &= 16500 \left( \frac{0,09 \cdot \cos 10^\circ}{1430 \cdot 10^{-8}} + \frac{0,05 \cdot \sin 10^\circ}{114 \cdot 10^{-8}} \right) = 228 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Результаты проверки совпали.

Сопоставление напряжений при косом и плоском ( $\alpha = 0$ ) изгибах:

$$\frac{\sigma_{\max}^{\text{кос}}}{\sigma_{\max}^{\text{пл}}} = \frac{\frac{M_{\max}}{W_z} \left( \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right)}{\frac{M_{\max}}{W_z}} = \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha = 0,985 + \frac{159}{22,8} 0,174 = 2,20.$$

**Вывод:** напряжения при косом изгибе больше, чем при плоском изгибе в 2,2 раза. Косой изгиб опаснее плоского.

**Задача № 5.** Короткий брус прямоугольного сечения размером  $b \times h = 4 \times 6$  см, выполненный из серого чугуна СЧ30, нагружен сжимающей сосредоточенной силой  $F = 18$  кН, направленной параллельно его геометрической оси. Центр давления  $P$  расположен на расстоянии  $m = 0,5$  см и  $n = 1$  см от угла. Выполнить проверочный расчет бруса. Сравнить напряжения при осевом и внецентренном нагружениях. Определить допускаемую нагрузку на брус.

**Решение.** Выпишем из таблицы П.2.5 характеристики прочности материала бруса и определим допускаемые напряжения, назначив коэффициент запаса прочности  $[n_B] = 3$  (см. подразд. 2.4).

$\sigma_{\text{вп}} = 300$ МПа; $\sigma_{\text{вс}} = 1150$ МПа
$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{\text{вп}}}{[n_B]} = \frac{300}{3} = 100$ МПа
$[\sigma_c] = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{[n_B]} = \frac{1150}{3} = 383$ МПа

**Проверочный расчет.** В соответствии с рекомендациями (подразд. 8.2) направление осей координат выбираем так, чтобы полюс  $P$  находился в первом квадранте (рис. П.1.7). Для вычисления напряжений в произвольной точке сечения по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_P y}{i_z^2} + \frac{z_P z}{i_y^2} \right)$$

найдем координаты полюса  $P$  (центра давления)

$$z_P = b/2 - m = 4/2 - 0,5 = 1,5 \text{ см}; \quad y_P = h/2 - n = 6/2 - 1 = 2 \text{ см}$$

и квадраты радиусов инерции

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{bh^3}{12bh} \cdot \frac{1}{12} = \frac{h^2}{12} = \frac{6^2}{12} = 3 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{b^3h}{12bh} \cdot \frac{1}{12} = \frac{b^2}{12} = \frac{4^2}{12} = 1,333 \text{ см}^2.$$

Опасные точки в сечении найдем, построив нейтральную линию, предварительно вычислив отрезки, отсекаемые ею на осях координат

$$y_{\text{н.л.}} = -\frac{i_z^2}{y_P} = -\frac{3}{2} = -1,5 \text{ см}; \quad z_{\text{н.л.}} = -\frac{i_y^2}{z_P} = -\frac{1,333}{1,5} = -0,889 \text{ см}.$$

Откладываем отрезки  $y_{\text{н.л.}}$ ,  $z_{\text{н.л.}}$  на осях координат и проводим нейтральную линию н.л. Опасными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной линии:  $S$ , в которой возникают сжимающие (*stress*) напряже-

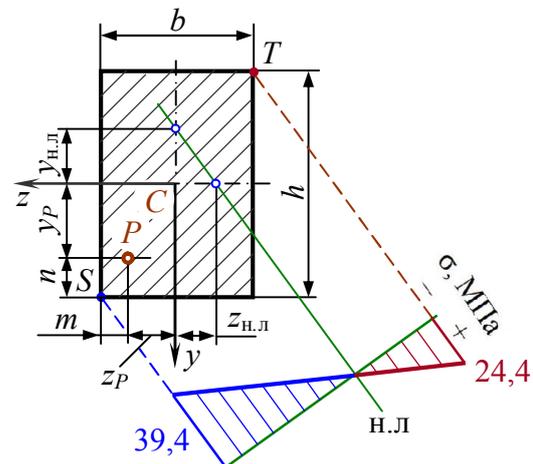


Рис. П.1.7

ния и  $T$  по другую сторону от нейтральной линии, где действуют растягивающие (*tension*) напряжения. Координаты точки  $S$ :  $z_S = b/2 = 4/2 = 2$  см;  $y_S = h/2 = 6/2 = 3$  см. Координаты точки  $T$ :  $z_T = -b/2 = -4/2 = -2$  см;  $y_T = -h/2 = -6/2 = -3$  см.

Напряжения в опасных точках

$$\sigma_S = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_P y_S}{i_z^2} + \frac{z_P z_S}{i_y^2} \right) = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{2 \cdot 3}{3} + \frac{1,5 \cdot 2}{1,333} \right);$$

$$\sigma_S = \frac{F}{A} 5,25 = \frac{-18000}{0,04 \cdot 0,06} 5,25 = -39,38 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_T = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_P y_T}{i_z^2} + \frac{z_P z_T}{i_y^2} \right) = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{2(-3)}{3} + \frac{1,5(-2)}{1,333} \right);$$

$$\sigma_T = -\frac{F}{A} 3,25 = -\frac{-18000}{0,04 \cdot 0,06} 3,25 = 24,38 \text{ МПа.}$$

Нагрузка  $F$  сжимающая, ее числовое значение подставляли со знаком (-). Напряжения при внецентренном нагружении превышают напряжения при осевом нагружении в 3,25 – 5,25 раз.

Определяем фактические запасы прочности по сжимающим и растягивающим напряжениям по отношению к пределам прочности чугуна СЧ30 и сравниваем их с рекомендуемыми для хрупких материалов  $[n_b] = 3-5$ .

$$n_S = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{\sigma_S} = \frac{1150}{|-39,38|} = 29,2. \text{ Запас прочности избыточен.}$$

$$n_T = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_T} = \frac{300}{24,38} = 12,3. \text{ Запас прочности избыточен.}$$

**Определение несущей способности.** Используя полученные на предыдущем этапе зависимости, запишем условия прочности в опасных точках сечения, откуда найдем допускаемые значения силы

$$\sigma_S = \frac{F}{A} 5,25 \leq [\sigma_c], \Rightarrow [F] \leq \frac{A \cdot [\sigma_c]}{5,25} = \frac{0,04 \cdot 0,06 \cdot 383 \cdot 10^6}{5,25} = 175 \text{ кН.}$$

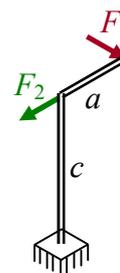
$$\sigma_T = \frac{F}{A} 3,25 \leq [\sigma_p], \Rightarrow [F] \leq \frac{A \cdot [\sigma_p]}{3,25} = \frac{0,04 \cdot 0,06 \cdot 100 \cdot 10^6}{3,25} = 73,8 \text{ кН.}$$

Из двух значений допускаемой нагрузки выбираем меньшее, удовлетворяющее обоим значениям.

**Выводы.** Выполнен поверочный расчет короткого чугунного бруса при внецентренном приложении к нему сжимающей нагрузки. Запас прочности избыточен. В случае центрального приложения силы, возникающие напряжения будут в 5,25 раз меньше; внецентренное приложение силы опаснее центрального. Найдено значение допускаемой нагрузки – 73,8 кН.

**Задача № 6.** Для бруса из стали Ст4 определить внутренние усилия на каждом участке. Построить эпюры внутренних усилий (значения усилий в буквенном выражении), определить положения опасных сечений. Выполнить подбор размеров поперечных сечений; найденные размеры сечений округлить согласно ГОСТ 6636–69.

$F_1 = 12 \text{ кН}$	$F_2 = 18 \text{ кН}$
$a = 0,5 \text{ м}$	$c = 0,8 \text{ м}$
Сталь Ст4	$[\sigma_p] = 140 \text{ МПа}$
	$[\sigma_{из}] = 170 \text{ МПа}$



Выполнить подбор размеров поперечных сечений; найденные размеры сечений округлить согласно ГОСТ 6636–69.

### Решение

#### I. Определение внутренних усилий

В общем случае нагружения пространственного бруса в защемлении возникает шесть опорных реакций: три силы и три момента. Если определять внутренние усилия со свободного конца бруса, то нет необходимости в нахождении опорных реакций. Пронумеруем участки римскими цифрами I и II (рис. П.1.8, а). В произвольном сечении  $x$  каждого участка **Р**ассечем брус на две части. **О**тбросив ту из частей, где находится защемление, **З**аменяем ее действие внутренними усилиями, **У**равновешивающими действие отброшенной части.

Для длинных балок ( $\ell > 5h$ ) влиянием поперечных сил  $Q_z$ ,  $Q_y$ , а также продольной силой  $N$ , обычно пренебрегают, поскольку касательные напряжения  $\tau$  от  $Q$  и нормальные напряжения  $\sigma$  от  $N$  на порядок меньше касательных и нормальных напряжений от моментов  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  (см. примеры 7.5 и 8.7).

Поместим в сечение прямоугольную систему координат  $xuz$ . Знаки внутренних усилий  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  и моментов от внешних нагрузок устанавливаем согласно правилу теоретической механики: *момент считают положительным, если он стремится повернуть рассматриваемую систему против хода часовой стрелки при взгляде на нее со стороны положительного направления оси.*

Запишем уравнения равновесия, в которые входят как внешние нагрузки, так и внутренние усилия.

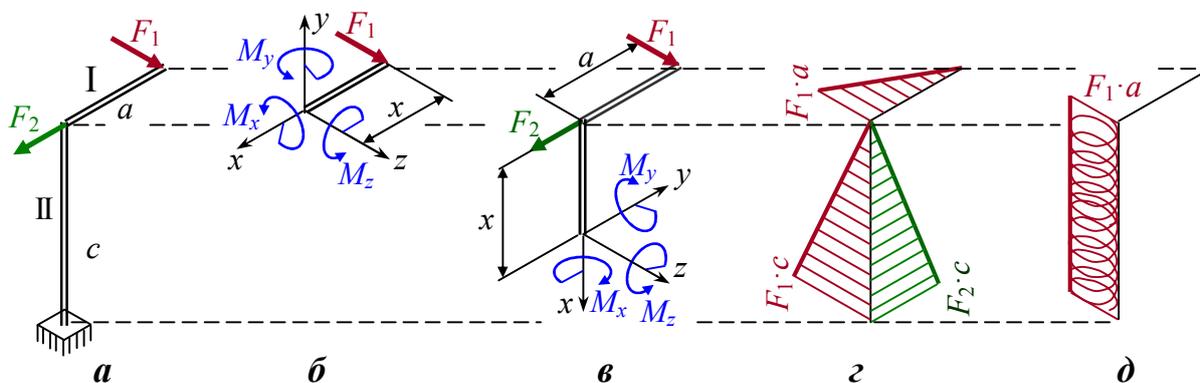


Рис. П.1.8

$$\begin{aligned} \text{I участок: } 0 \leq x \leq a. \quad \sum M_x = 0; \quad M_x = T = 0; \\ (\text{рис. П.1.8, б}) \quad \sum M_y = 0; \quad M_y - F_1 \cdot x = 0; \quad \Rightarrow \quad M_y = F_1 \cdot x; \\ \sum M_z = 0; \quad M_z = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II участок: } 0 \leq x \leq c. \quad \sum M_x = 0; \quad M_x + F_1 \cdot a = 0; \quad \Rightarrow \quad M_x = T = -F_1 \cdot a; \\ (\text{рис. П.1.8, в}) \quad \sum M_y = 0; \quad M_y + F_1 \cdot x = 0; \quad \Rightarrow \quad M_y = -F_1 \cdot x; \\ \sum M_z = 0; \quad M_z + F_2 \cdot x = 0; \quad \Rightarrow \quad M_z = -F_2 \cdot x. \end{aligned}$$

Найденные значения внутренних усилий используем для построения эпюр крутящего и изгибающих моментов.

## II. Построение эпюр внутренних усилий

Каждую из эпюр строим на своих базисных линиях. Эпюры изгибающих моментов строим в плоскости их действия на растянутых волокнах бруса (рис. П.1.8, г, д).

Сопоставив эпюры внутренних усилий, можно заключить, что опасными являются следующие сечения:

участок I – при  $x = a$ , плоский изгиб;

участок II – при  $x = c$ , совместное действие изгиба в двух плоскостях и кручение.

## III. Проектный расчет

Для использования условия прочности на первом участке потребуется допустимое напряжение на изгиб. На втором участке ломаного бруса имеет место совместное действие изгиба и кручения. В этом случае эквивалентное напряжение, найденное по теориям прочности, сопоставляют с допустимым, определенным при растяжении. Поэтому, воспользовавшись табл. П.2.4, выпишем и будем использовать рекомендуемые значения допустимых напряжений для стали Ст4 как при изгибе  $[\sigma_{из}] = 170$  МПа (на участке I), так и при растяжении  $[\sigma_p] = 140$  МПа (на участке II). В расчетах на прочность конструкций из пластичных материалов знаки моментов роли не играют.

### Участок I

Из условия прочности при плоском изгибе определяем требуемое значение момента сопротивления

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma_{из}] \quad \Rightarrow \quad W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma_{из}]} = \frac{F_1 \cdot a}{[\sigma_{из}]} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{170 \cdot 10^6} = 3,53 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Момент сопротивления круглого сплошного сечения

$$W_y = W_z = W_{oc} = \frac{\pi d^3}{32}, \quad \text{откуда} \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} W_{oc}} = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} 3,53 \cdot 10^{-5}} = 0,0711 \text{ м}.$$

Округлив размер до ближайшего стандартного значения (табл. П.2.3), принимаем  $d = 71$  мм. Оценим величину перегрузки (*overload*). Действительное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{ос}}} = \frac{12000 \cdot 0,5 \cdot 32}{\pi \cdot 0,071^3} = 170,7 \text{ МПа} .$$

$$\text{Перегрузка } ovl = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100 = \frac{170,7 - 170}{170} 100 = 0,41\% \text{ допустима.}$$

### Участок II

Опасным является сечение в конце участка, в защемлении. Определим приведенный момент по III теории прочности

$$\begin{aligned} M_{\text{прив,III}} &= \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} = \sqrt{(F_1 \cdot c)^2 + (F_2 \cdot c)^2 + (F_1 \cdot a)^2} = \\ &= \sqrt{(12 \cdot 0,8)^2 + (18 \cdot 0,8)^2 + (12 \cdot 0,5)^2} = 11,94 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Из условия прочности при совместном действии изгиба и кручения

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma_p]$$

требуемое значение диаметра

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{прив}}}{\pi[\sigma_p]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 11,94 \cdot 10^3}{\pi \cdot 140 \cdot 10^6}} = 0,954 \text{ м}.$$

Округлив до стандартного (табл. П.2.3) значения, принимаем  $D = 95$  мм.

Проверочный расчет. Действительное напряжение

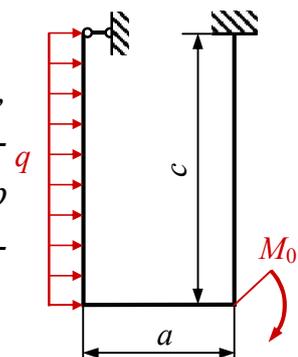
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_{\text{ос}}} = \frac{11940 \cdot 32}{\pi \cdot 0,095^3} = 141,8 \text{ МПа} .$$

$$\text{Перегрузка } ovl = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100 = \frac{141,8 - 140}{140} 100 = 1,29\% \text{ допустима.}$$

**Вывод.** Из условий прочности подобраны размеры поперечных сечений ломаного бруса при различных сочетаниях внутренних усилий. Размеры округлены в соответствие со стандартом. Диаметр бруса на I участке 71 мм, а на II участке – 95 мм.

Дано:  
 $M_0 = 50 \text{ кН}\cdot\text{м};$   
 $q = 18 \text{ кН/м};$   
 $a = 1,5 \text{ м};$   
 $c = 2,3 \text{ м};$   
 Сталь Ст3  
 $[\sigma] = 150 \text{ МПа}.$

**Задача № 7.** Для конструкции, расчетная схема которой показана на рис., подобрать размер поперечного сечения двутаврового профиля.



**Решение.** В заданной системе число связей (ЧС) четыре, три из которых наложены защемлением и одна – шарнирной подвижной опорой. Независимых уравнений равновесия (НУР) для плоской системы возможны лишь три, следовательно ее статическая неопределимость первого порядка

$$СН = ЧС - НУР = 4 - 3 = 1.$$

1. Для раскрытия статической неопределимости используем одно каноническое уравнение метода сил с одним неизвестным

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Из четырех неизвестных опорных реакций в качестве лишней целесообразно выбрать реакцию в шарнирной подвижной опоре. В эквивалентной системе (рис. П.1.9, а), имеющей три необходимые связи в защемлении  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$ ,  $M_B$ , вместо опоры в сечении А приложим ее реакцию  $R_A = X_1$ . Определим внутренние усилия в основной (грузовой) и единичной системах (рис. П.1.9, б, в). Правило знаков: изгибающий момент считаем положительным, если на внешней стороны рамы возникают растягивающие напряжения.

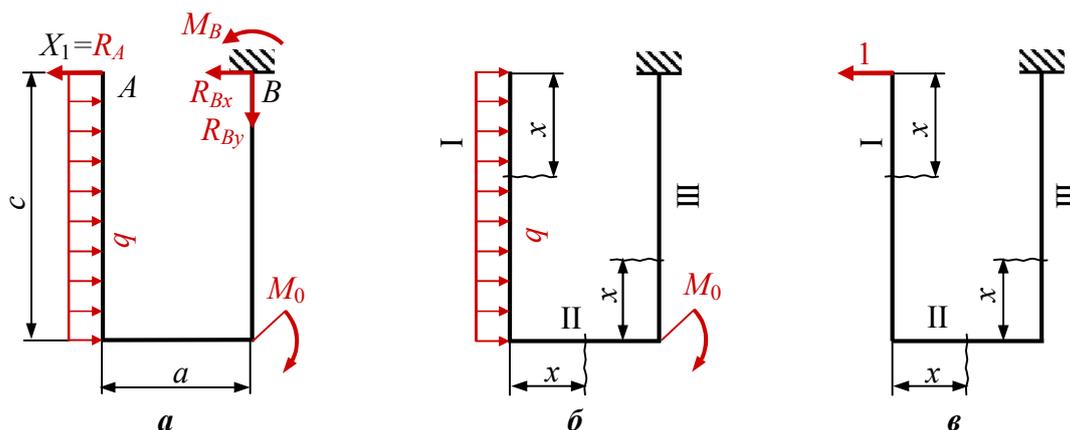


Рис. П.1.9

І участок:  $0 \leq x \leq a$

$$M_P = qx \frac{x}{2}; \quad M_1 = -1 \cdot x.$$

ІІ участок:  $0 \leq x \leq b$

$$M_P = \frac{qa^2}{2}; \quad M_1 = -1 \cdot a.$$

ІІІ участок:  $0 \leq x \leq a$

$$M_P = qa \left( \frac{a}{2} - x \right) + M_0; \quad M_1 = -1 \cdot (a - x).$$

### Грузовое перемещение

$$\begin{aligned}
 EI \cdot \Delta_{1P} &= \sum_{\ell} \int M_P M_1 dx = \\
 &= \int_0^a q \frac{x^2}{2} (-1 \cdot x) dx - \frac{qa^2 a}{2} \int_0^b dx - \int_0^a \left[ qa \left( \frac{a}{2} - x \right) + M_0 \right] (a-x) dx = \\
 &= -\frac{5qa^4}{24} - \frac{qa^3 b}{2} - \frac{M_0 a^2}{2} = -\frac{5 \cdot 18 \cdot 2,6^4}{24} - \frac{18 \cdot 2,6^3 \cdot 1,5}{2} - \frac{50 \cdot 2,6^2}{2} = -578 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.
 \end{aligned}$$

Знак перемещения  $\Delta_{1P}$  отрицательный, следовательно направление перемещения сечения  $A$  не совпадает с направлением единичной силы.

### Единичное перемещение

$$\begin{aligned}
 EI \cdot \delta_{11} &= \sum_{\ell} \int M_1 \cdot M_1 dx = \int_0^a (-x)^2 dx + \int_0^b (-a)^2 dx + \int_0^a (a-x)^2 dx = \\
 &= \frac{a^3}{3} + a^2 b + \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3 + a^2 b = \frac{2}{3} 2,6^3 + 2,6^2 \cdot 1,5 = 21,9 \text{ м}^3.
 \end{aligned}$$

$$\text{Лишняя неизвестная } X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-578}{21,9} = 26,4 \text{ кН}.$$

Знак (+) указывает на то, что направление действия реакции  $R_A = X_1$  совпадает с показанным в эквивалентной системе на рис. П.1.9,  $a$ .

2. *Внутренние усилия в эквивалентной системе* удобно определять, используя принцип суперпозиции путем сложения усилий в грузовой системе с усилиями в единичной системе, умноженными на лишнюю неизвестную  $X_1$  (только что найденную)

$$M = M_P + M_1 X_1.$$

I участок:  $0 \leq x \leq a$

$$M_{(x)} = qx \frac{x}{2} - x \cdot X_1; \quad M_{x=0} = 0;$$

$$M_{x=a} = q \frac{a^2}{2} - a \cdot X_1 = 18 \frac{2,6^2}{2} - 2,6 \cdot 26,4 = -7,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

II участок:  $0 \leq x \leq b$

$$M_{(x)} = \frac{qa^2}{2} - a \cdot X_1 = \frac{18 \cdot 2,6^2}{2} - 2,6 \cdot 26,4 = -7,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

III участок:  $0 \leq x \leq a$

$$M_{(x)} = qa \left( \frac{a}{2} - x \right) + M_0 - (a-x) \cdot X_1;$$

$$M_{x=0} = \frac{qa^2}{2} + M_0 - a \cdot X_1 = \frac{18 \cdot 2,6^2}{2} + 50 - 2,6 \cdot 26,4 = 42,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x=a} = -\frac{qa^2}{2} + M_0 = -\frac{18 \cdot 2,6^2}{2} + 50 = -10,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра моментов на участке I описана уравнением параболы. Находим положение экстремума, используя первую производную момента по абсциссе  $x$ , и величину момента в этом сечении:

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = \frac{d(qx^2/2 - x \cdot X_1)}{dx} = qx - X_1;$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = 0; \quad qx - X_1 = 0 \Rightarrow x_{\text{экстр}} = \frac{X_1}{q} = \frac{26,4}{18} = 1,47 \text{ м}.$$

$$M_{x=1,47} = \frac{18}{2} 1,47^2 - 1,47 \cdot 26,4 = -19,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

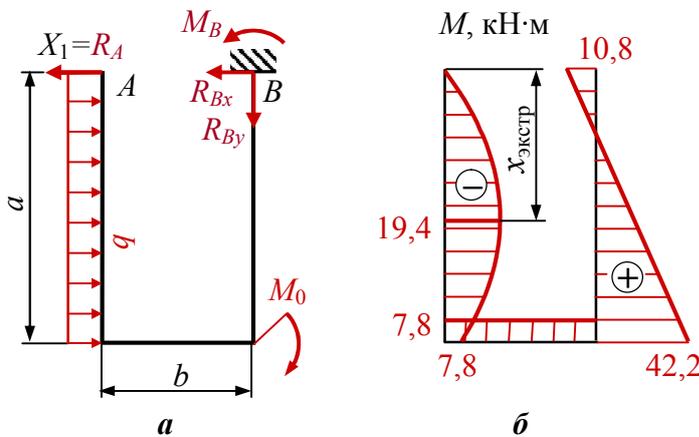


Рис. П.1.10

Строим эпюру изгибающих моментов со стороны растянутых волокон.

Опасным является сечение в начале III участка, где значение момента достигает  $M_{\text{max}} = 42,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

3. *Подбор размеров поперечного сечения.*

Из условия прочности при изгибе

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_z} \leq [\sigma]$$

находим требуемое значение момента сопротивления бруса

$$W_z \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{42,2 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 2,81 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Из таблицы П.2.1 выбираем двутавр № 24, для которого  $W_z = 289 \text{ см}^3$ .

**Вывод.** Раскрыта статическая неопределимость плоской рамы. Подобран размер двутаврового поперечного сечения.

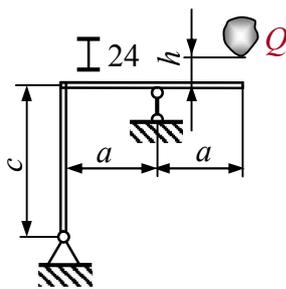


Рис. П.1.11

**Задача № 8.** На упругую систему (рис. П.1.11), выполненную из двутавра № 24, с высоты  $h = 10 \text{ см}$  падает груз  $Q$  массой  $m = 20 \text{ кг}$ . Проверить прочность системы. Сопоставить наибольшие статические и динамические напряжения в поперечном сечении и прогибы под грузом. Массу упругой системы не учитывать.

Дано:  $m = 20$  кг;  $h = 0,1$  м;  $a = 1,3$  м;  $c = 1,9$  м;  
Сталь Ст3,  $[\sigma_{изг}] = 150$  МПа.

**Решение.** 1. Определение опорных реакций (рис. П.1.12, а)

$$\sum M_B = 0; \quad R_C \cdot a - Q \cdot 2a = 0; \quad \Rightarrow \quad R_C = 2Q.$$

$$\sum M_C = 0; \quad -R_B \cdot a - Q \cdot a = 0; \quad \Rightarrow \quad R_B = -Q.$$

В опоре  $B$  горизонтальная реакция отсутствует, поскольку в горизонтальном направлении силы не приложены.

2. Определение внутренних усилий от внешней нагрузки

I участок:  $0 \leq x \leq a$

$$M_P = -Q \cdot x;$$

$$M_{x=0} = 0; \quad M_{x=a} = -Qa.$$

II участок:  $0 \leq x \leq a$

$$M_P = R_B \cdot x = -Q \cdot x;$$

$$M_{x=0} = 0; \quad M_{x=a} = -Qa.$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. П.1.12, б). Опасным является сечение над опорой  $C$ , где момент принимает значение

$$M_{\max} = Q \cdot a = m \cdot g \cdot a = 20 \cdot 9,81 \cdot 1,3 = 255 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3. Напряжение при статическом приложении нагрузки

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{255}{289 \cdot 10^{-6}} = 0,883 \text{ МПа}.$$

4. Статическое перемещение сечения в точке соударения определяем методом Максвелла-Мора. Рисуем фиктивную систему и прикладываем единичную силу в точку соударения (рис. П.1.12, в). Определяем опорные реакции

$$\sum M_B = 0; \quad R'_C \cdot a - 1 \cdot 2a = 0; \quad \Rightarrow \quad R'_C = 2.$$

$$\sum M_C = 0; \quad -R'_B \cdot a - 1 \cdot a = 0; \quad \Rightarrow \quad R'_B = -1.$$

Внутренние усилия в фиктивной системе от единичной силы

I участок;  $0 \leq x \leq a$

$$M_1 = -1 \cdot x;$$

II участок;  $0 \leq x \leq a$

$$M_1 = R'_B \cdot x = -1 \cdot x;$$

Статическое перемещение

$$EI \cdot \delta_{ст} = \sum \int_{\ell} M_P \cdot M_1 \, dx = \int_0^a M_P \cdot M_1 \, dx + \int_0^a M_P \cdot M_1 \, dx.$$

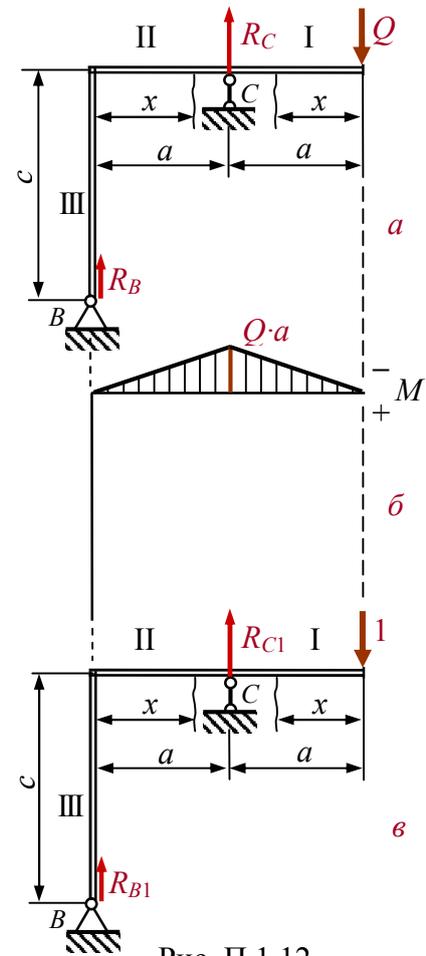


Рис. П.1.12

$$\delta_{ст} = \frac{1}{EI} 2 \int_0^a (-Qx)(-1x) dx = \frac{2Qa^3}{3EI} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 9,81 \cdot 1,3^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 4,15 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

5. Динамический коэффициент вычисляем по формуле (10.5)

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{4,15 \cdot 10^{-5}}} = 70,4.$$

6. Динамическое напряжение

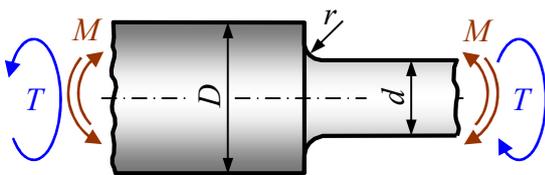
$$\sigma_{дин} = K_{дин} \cdot \sigma_{ст} = 70,4 \cdot 0,833 = 58,7 \text{ МПа,}$$

что меньше допускаемого  $[\sigma_{изг}] = 150 \text{ МПа}$ .

Динамическое перемещение точки соударения

$$\delta_{дин} = K_{дин} \cdot \delta_{ст} = 70,4 \cdot 4,15 \cdot 10^{-5} = 0,00292 \text{ м.}$$

**Выводы.** При ударном действии нагрузки динамические напряжения и перемещение возросли по сравнению со статическими в 70 раз. При заданной высоте падения груза и его массе прочность конструкции обеспечена.



**Задача № 9.** Определить коэффициент запаса усталостной прочности участка стального ступенчатого вала, испытывающего переменный изгиб с кручением. Нормальные напряжения  $\sigma$  от изгиба изменяются по симметричному  $R_\sigma = -1$  циклу, а касательные напряжения  $\tau$  от кручения – по отнулевому  $R_\sigma = 0$  циклу.

**Решение.** 1. Выписываем данные из таблицы, выполняем рисунок в масштабе и вычерчиваем графики изменения во времени нормальных и касательных напряжений  $\sigma = \sigma(t)$ ,  $\tau = \tau(t)$  (рис. П1.12).

$D$ , мм	$d$ , мм	$r$ , мм	Материал	$\sigma_B$ , МПа	$\sigma_a$ , МПа	$\tau_{max}$ , МПа	Обработка
72	36	10	20ХФ	850	66	48	Шлифование

2. По эмпирическим зависимостям (10.9), (10.10) определяем примерные значения предела выносливости при симметричном цикле изгиба

$$\sigma_{-1} \approx 0,43 \cdot \sigma_B = 0,43 \cdot 850 = 366 \text{ МПа,}$$

предела прочности при кручении

$$\tau_B \approx 0,6 \cdot \sigma_B = 0,6 \cdot 850 = 510 \text{ МПа,}$$

предела выносливости при симметричном цикле кручения

$$\tau_{-1} \approx 0,55 \cdot \sigma_{-1} = 0,55 \cdot 366 = 201 \text{ МПа.}$$

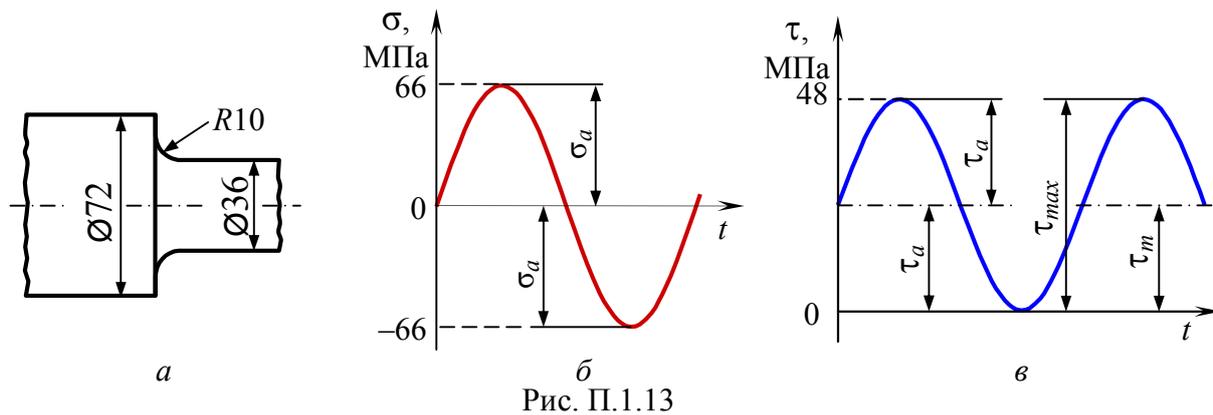


Рис. П.1.13

3. Вычисляем амплитудные и средние значения нормальных и касательных напряжений. При симметричном цикле изменения нормальных напряжений: амплитуда  $\sigma_a = 66$  МПа; среднее напряжение  $\sigma_m = 0$ .

При отнулевом цикле изменения касательных напряжений

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{48 - 0}{2} = 24 \text{ МПа. } \tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{22 + 0}{2} = 24 \text{ МПа.}$$

4. По номограммам (рис. П.1.14 – П.1.17) в зависимости от отношения размеров  $r/d = 10/36 = 0,278$  находим значения масштабного коэффициента  $\varepsilon_m = 0,67$ , коэффициента качества поверхности  $\varepsilon_{\Pi} = 0,89$ , эффективных коэффициентов концентрации напряжений при изгибе  $K_{\sigma} = 1,3$  и при кручении  $K_{\tau} = 1,12$ .

5. Определяем частные коэффициенты запаса прочности (формулы (10.11))

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_m \cdot \varepsilon_{\Pi}} \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \sigma_m} = \frac{366}{\frac{1,33}{0,67 \cdot 0,89} 66 + \frac{366}{850} \cdot 0} = 2,49;$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}}{\varepsilon_m \cdot \varepsilon_{\Pi}} \tau_a + \frac{\tau_{-1}}{\tau_B} \tau_m} = \frac{201}{\frac{1,12}{0,67 \cdot 0,89} 24 + \frac{201}{510} 24} = 3,69.$$

6. Общий коэффициент запаса прочности (формула (10.12))

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2,49 \cdot 3,69}{\sqrt{2,49^2 + 3,69^2}} = 2,06.$$

**Вывод.** Прочность участка вала обеспечена.

**Выбор коэффициентов для расчета усталостной прочности**

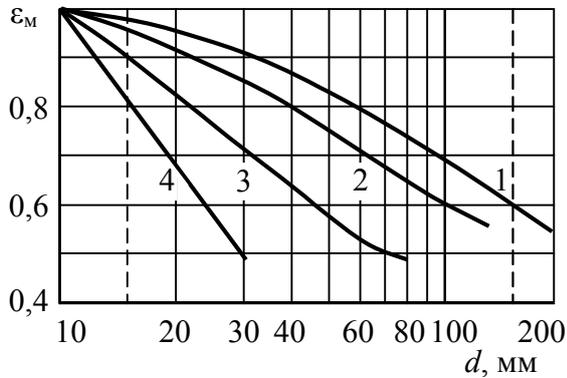


Рис. П.1.14. Зависимость масштабного коэффициента от материала детали: 1 – углеродистая сталь при отсутствии концентратора; 2 – легированная сталь при отсутствии концентратора и углеродистая сталь при наличии концентратора; 3 – легированная сталь при наличии концентратора; 4 – любая сталь при большой концентрации напряжений

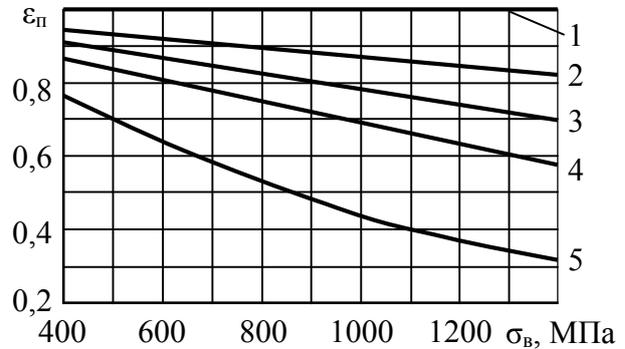


Рис. П.1.15. Зависимость коэффициента качества поверхности от предела прочности материала детали: 1 – полирование; 2 – шлифование; 3 – чистовое точение; 4 – черновое точение; 5 – наличие окалины

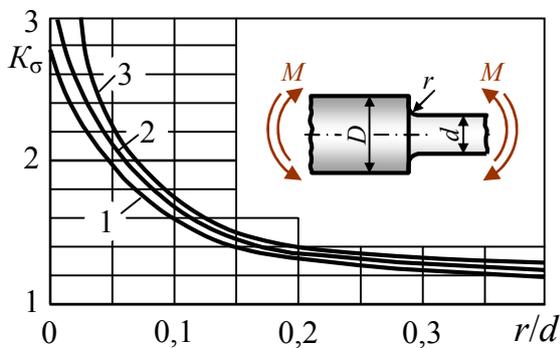


Рис. П.1.16. Эффективные коэффициенты концентрации при изгибе для ступенчатых валов с отношением  $D/d = 2$  в зависимости от предела прочности материала: 1 –  $\sigma_B = 500$  МПа; 2 –  $\sigma_B = 800$  МПа; 3 –  $\sigma_B = 1200$  МПа

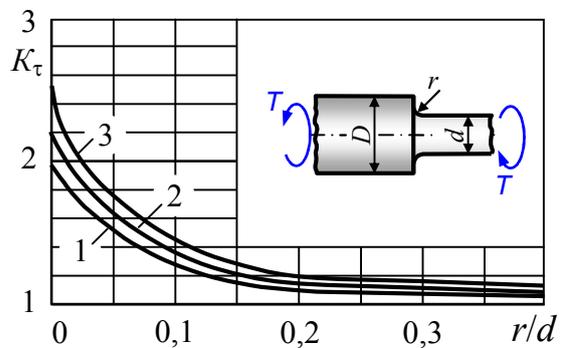


Рис. П.1.17. Эффективные коэффициенты концентрации при кручении для ступенчатых валов с отношением  $D/d = 2$  в зависимости от предела прочности материала: 1 –  $\sigma_B = 500$  МПа; 2 –  $\sigma_B = 800$  МПа; 3 –  $\sigma_B = 1200$  МПа

**Пример 10.** На колонну длиной  $\ell$  (рис. П.1.18), состоящую из двух швеллеров, связанных между собой соединительными планками, действует сила  $F$ . Длина  $\ell = 4,1$  м.  $F = 450$  кН. Материал колонны – сталь Ст5 с допустимым напряжением  $[\sigma] = 165$  МПа (табл. П.2.5).

1. Подобрать номер прокатного профиля.
2. Определить расстояние между профилями.
3. Найти расстояние между соединительными планками.
4. Вычислить допустимую нагрузку на спроектированную колонну при всех возможных способах закрепления ее концов.

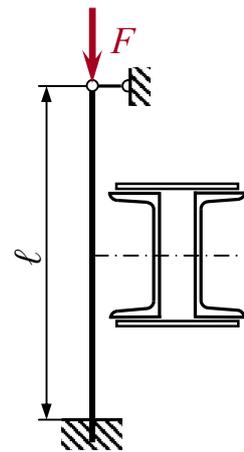


Рис. П.1.18

### Решение

**I. Подбор сечения** выполняют, используя условие прочности при продольном изгибе

$$\sigma_y = \frac{F}{A_{\text{кол}}} \leq [\sigma_y], \quad \text{где} \quad [\sigma_y] = [\sigma] \cdot \varphi.$$

Неизвестное значение коэффициента  $\varphi$  снижения основных допустимых напряжений находят методом итераций, который, как правило, состоит из нескольких циклов. В каждом цикле производится уточнение коэффициента  $\varphi$ , который на начальном этапе назначают произвольно, например, как среднее арифметическое между максимальным и минимальным табличными значениями.

#### Первый цикл итерации

1. В качестве начального приближения примем  $\varphi_0 = 0,7$ .
2. Находим площади сечений всей колонны и одной ветви

$$A_{\text{кол}} \geq \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi_0} = \frac{450 \cdot 10^3}{165 \cdot 10^6 \cdot 0,7} = 0,00390 \text{ м}^2.$$

$$A = A_{\text{кол}} / 2 = 39 / 2 = 19,5 \text{ см}^2.$$

3. Выбираем прокатный профиль – швеллер № 16а (табл. П.2.2)

Момент инерции и радиус инерции колонны относительно материальной (параллельной планкам) оси не зависят от расстояния  $a$  между профилями (рис. П.1.19), поэтому считаем  $I_{\min} = I_z$ ,  $i_{\min} = i_z$ .

$$A = 19,5 \text{ см}^2; \quad i_{\min \text{ кол}} = i_{z \text{ кол}} = i_z = 6,49 \text{ см}$$

4. Находим гибкость колонны

$$\lambda_{z \text{ кол}} = \frac{\omega \cdot \ell}{i_z} = \frac{0,7 \cdot 410}{6,49} = 44,2.$$

5. Вычисляем коэффициент  $\varphi$  методом интерполяции (табл. П.2.7):

$$\begin{array}{l} \text{при } \lambda = 50 \quad \varphi = 0,86; \\ \text{при } \lambda = 40 \quad \varphi = 0,90; \\ \text{при } \Delta\lambda = 10 \quad \Delta\varphi = -0,04. \end{array} \quad \varphi_1 = 0,90 - \frac{0,04}{10} 4,2 = 0,883.$$

6. Проверяем условие прочности. Действительное напряжение

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{кол}}} = \frac{450\,000}{2 \cdot 19,5 \cdot 10^{-4}} = 115 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = [\sigma] \cdot \varphi_1 = 165 \cdot 0,883 = 146 \text{ МПа}.$$

Условие  $\sigma \leq [\sigma_y]$  выполняется, но недогрузка слишком велика.

### Второй цикл итерации

1. Коэффициент  $\varphi$  снижения основных допускаемых напряжений

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} = \frac{0,7 + 0,883}{2} = 0,792.$$

2. Находим площади сечений всей колонны и одной ветви

$$A_{\text{кол}} = \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi_2} = \frac{450\,000}{165 \cdot 10^6 \cdot 0,792} = 0,00344 \text{ м}^2.$$

$$A = \frac{A_{\text{кол}}}{2} = \frac{34,4}{2} = 17,2 \text{ см}^2.$$

3. Выбираем прокатный профиль – швеллер № 14а (табл. П.2.2)

$$A = 17,0 \text{ см}^2; \quad i_z = 5,66 \text{ см}.$$

4. Находим гибкость колонны

$$\lambda_{z \text{ кол}} = \frac{\omega \cdot \ell}{i_z} = \frac{0,7 \cdot 410}{5,66} = 50,7.$$

5. Вычисляем коэффициент  $\varphi$  методом интерполяции:

$$\begin{array}{l} \text{при } \lambda = 60 \quad \varphi = 0,81; \\ \text{при } \lambda = 50 \quad \varphi = 0,86; \\ \text{при } \Delta\lambda = 10 \quad \Delta\varphi = -0,05. \end{array} \quad \varphi_3 = 0,86 - \frac{0,05}{10} 0,7 = 0,857.$$

6. Проверяем условие прочности. Действительное напряжение

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{кол}}} = \frac{450\,000}{2 \cdot 17,0 \cdot 10^{-4}} = 132 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi_3 \cdot [\sigma] = 0,857 \cdot 165 = 141 \text{ МПа}.$$

Колонна недогружена на

$$\frac{[\sigma_y] - \sigma}{[\sigma_y]} 100 = \frac{141 - 132}{141} 100 = 6,38 \%.$$

### Третий цикл итерации

1. Коэффициент  $\varphi$  снижения основных допускаемых напряжений

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} = \frac{0,792 + 0,857}{2} = 0,824.$$

2. Находим площади сечений всей колонны и одной ветви

$$A_{\text{кол}} = \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi_4} = \frac{450\,000}{165 \cdot 10^6 \cdot 0,824} = 0,00331 \text{ м}^2.$$

$$A = \frac{A_{\text{кол}}}{2} = \frac{33,1}{2} = 16,5 \text{ см}^2.$$

3. Выбираем прокатный профиль – швеллер № 14 (табл. П.2.2)

$$A = 15,6 \text{ см}^2; \quad i_z = 5,60 \text{ см}.$$

4. Находим гибкость колонны

$$\lambda_{z \text{ кол}} = \frac{\omega \cdot \ell}{i_z} = \frac{0,7 \cdot 410}{5,60} = 51,25.$$

5. Вычисляем коэффициент  $\varphi$  методом интерполяции:

$$\text{при } \lambda = 60 \quad \varphi = 0,81;$$

$$\text{при } \lambda = 50 \quad \varphi = 0,86;$$

$$\text{при } \Delta\lambda = 10 \quad \Delta\varphi = -0,05.$$

$$\varphi_5 = 0,86 - \frac{0,05}{10} \cdot 1,25 = 0,854.$$

6. Проверяем условие прочности. Действительное напряжение

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{кол}}} = \frac{450\,000}{2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4}} = 144 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi_5 \cdot [\sigma] = 0,854 \cdot 165 = 140 \text{ МПа}.$$

Колонна перегружена на

$$\frac{\sigma - [\sigma_y]}{[\sigma_y]} 100 = \frac{144 - 140}{140} 100 = 2,85 \text{ \%}.$$

Величина перегрузки менее 5 % допускается. Выходим из циклов итерации и, подводя итоги, занесем промежуточные результаты в табл. П.1.1.

Изменение параметров расчетных формул в процессе итерации при подборе размеров поперечного сечения

Таблица П.1.1

$n$	$\varphi_i$	№	$A, \text{ см}^2$	$i_z, \text{ см}$	$\lambda$	$\varphi_{i+1}$	$\sigma_y, \text{ МПа}$	$[\sigma_y], \text{ МПа}$	Недогр., %
1	0,7	16а	19,5	6,49	44,2	0,883	115	146	21,2
2	0,792	14а	17,0	5,66	50,7	0,857	132	141	6,38
3	0,824	14	15,6	5,60	51,3	0,854	144	140	-2,85

Окончательно принимаем швеллер № 14 и выпишем из таблицы П.2.2 сортамента прокатного профиля дополнительные данные для него

$$I_z = 491 \text{ см}^4; \quad I_y = 45,4 \text{ см}^4; \quad i_y = 1,70 \text{ см}; \quad b = 5,8 \text{ см}; \quad z_0 = 1,67 \text{ см}.$$

## II. Определение расстояния между соединительными планками

В соответствии с формулой (11.14) принимаем  $\lambda_{\text{пан}} = 30 - 40$  и определяем требуемую длину панели (рис. П.1.20)

$$\ell_{\text{пан}} = (30 - 40) \cdot i_{\text{min}} = (30 - 40) \cdot i_y = (30 - 40) \cdot 1,70 = (51 - 68) \text{ см.}$$

При этом необходимое количество панелей

$$n = \frac{\ell}{\ell_{\text{пан}}} = \frac{410}{(51 - 68)} = 6,03 - 8,04.$$

Принимаем число панелей равное  $n = 7$ , тогда расстояние между планками

$$\ell_{\text{пан}} = \frac{\ell}{n} = \frac{410}{7} = 58,6 \text{ см.}$$

Общее количество планок – 14, по семь с каждой стороны.

## III. Определение расстояния между швеллерами

Найдем прежде гибкость панели на участке между планками

$$\lambda_{y \text{ пан}} = \frac{\omega_{\text{пан}} \cdot \ell_{\text{пан}}}{i_y} = \frac{1 \cdot 58,6}{1,70} = 34,5.$$

Определим коэффициент, учитывающий немонолитность колонны

$$m = \frac{1}{1 - \left( \frac{\lambda_{y \text{ пан}}}{\lambda_{z \text{ кол}}} \right)^2} = \frac{1}{1 - \left( \frac{34,5}{51,25} \right)^2} = 1,82.$$

Значение момента инерции относительно свободной оси  $y_{\text{кол}}$  для выполнения условия равноустойчивости колонны относительно осей  $y$  и  $z$

$$I_{y \text{ кол}} = m \cdot I_z = 1,82 \cdot 491 \cdot 2 = 1792 \text{ см}^4.$$

Момент инерции колонны относительно свободной оси  $y_{\text{кол}}$  через расстояние  $a$  между швеллерами (рис. П.1.19)

$$I_{y \text{ кол}} = 2 \left[ I_y + c^2 \cdot A \right] = 2 \left[ I_y + \left( \frac{a}{2} + z_0 \right)^2 A \right],$$

откуда

$$a = 2 \left( \sqrt{\frac{I_{y \text{ кол}}}{2A} - \frac{I_y}{A}} - z_0 \right) = 2 \left( \sqrt{\frac{1792}{2 \cdot 15,6} - \frac{45,4}{15,6}} - 1,67 \right) = 11,4 \text{ см.}$$

## IV. Определение допускаемой нагрузки на колонну при всех возможных способах закрепления ее концов

1) *Один конец колонны заделан, другой – свободен* (рис. П.1.21, а).

При таком закреплении колонны  $\omega = 2$  и гибкость колонны

$$\lambda = \frac{\omega \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 410}{5,60} = 146.$$

Определяем коэффициент  $\varphi$  по табл. П.2.7 для стали Ст5:

$$\begin{array}{l} \text{при } \lambda = 150 \quad \varphi = 0,26; \\ \text{при } \lambda = 140 \quad \varphi = 0,29; \\ \text{при } \Delta\lambda = 10 \quad \Delta\varphi = -0,03. \end{array} \quad \varphi = 0,29 - \frac{0,03}{10} 6 = 0,272.$$

Допускаемая нагрузка на колонну

$$[F] = \varphi \cdot [\sigma] \cdot A_{\text{кол}} = 0,272 \cdot 165 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4} = 140\,000 \text{ Н.}$$

2) **Оба конца имеют шарнирные крепления** (рис. П.1.21, б).

В этом случае крепления колонны  $\omega = 1$ . Гибкость колонны равна

$$\lambda = \frac{\omega \ell}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 410}{5,60} = 73,2.$$

Коэффициент  $\varphi$  снижения основных допускаемых напряжений:

$$\begin{array}{l} \text{при } \lambda = 80 \quad \varphi = 0,70; \\ \text{при } \lambda = 70 \quad \varphi = 0,76; \\ \text{при } \Delta\lambda = 10 \quad \Delta\varphi = -0,06. \end{array} \quad \varphi = 0,76 - \frac{0,06}{10} 3,2 = 0,741.$$

Допускаемая нагрузка на колонну равна

$$[F] = \varphi \cdot [\sigma] \cdot A_{\text{кол}} = 0,741 \cdot 165 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4} = 381\,500 \text{ Н.}$$

3) **Один конец колонны зашпелен, другой закреплен шарнирно** (рис. П.1.21, в). В этом случае  $\omega = 0,7$ . Гибкость  $\lambda$  колонны и коэффициент  $\varphi$  определяли ранее (см. этапы 4 и 5 последнего цикла итераций)

$$\lambda = 51,25; \quad \varphi = 0,854.$$

Допускаемая нагрузка равна

$$[F] = \varphi \cdot [\sigma] \cdot A_{\text{кол}} = 0,854 \cdot 165 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4} = 439\,600 \text{ Н.}$$

4) **Оба конца колонны зашпелены** (рис. П.1.21, г).

Коэффициент приведенной длины  $\omega = 0,5$ . Гибкость колонны

$$\lambda = \frac{\omega \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 410}{5,60} = 36,6.$$

Коэффициент  $\varphi$  снижения основных допускаемых напряжений

$$\begin{array}{l} \text{При } \lambda = 30, \quad \varphi = 0,92; \\ \text{При } \lambda = 40, \quad \varphi = 0,90. \\ \text{При } \lambda = 36,6 \quad \varphi = 0,92 - 6,6 \cdot 0,002 = 0,907. \end{array}$$

Допускаемая нагрузка на колонну равна

$$[F] = \varphi \cdot [\sigma] \cdot A_{\text{кол}} = 0,907 \cdot 165 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4} = 466\,800 \text{ Н.}$$

Результаты расчета представлены в таблице П1.2

Влияние условий закрепления концов стержня  
на несущую способность составной колонны

Таблица П.1.2

Коэффициент приведенной длины $\omega$	2	1	0,7	0,5
Допускаемая нагрузка $[F]$ , кН	140	381	440	467

**Выводы.** Из условия устойчивости при продольном изгибе выполнен проектный расчет колонны, состоящей из двух швеллеров. Требуется профиль № 14.

Найдено расстояние ( $a = 11,4$  см) между профилями, обеспечивающее равную устойчивость колонны относительно материальной и сквозной осей.

Определено количество соединительных планок, всего 14, по семь с каждой стороны.

Вычислены допускаемые нагрузки на спроектированную колонну при всех возможных способах закрепления ее концов. Максимальная нагрузка отличается от минимальной в 3,3 раза.

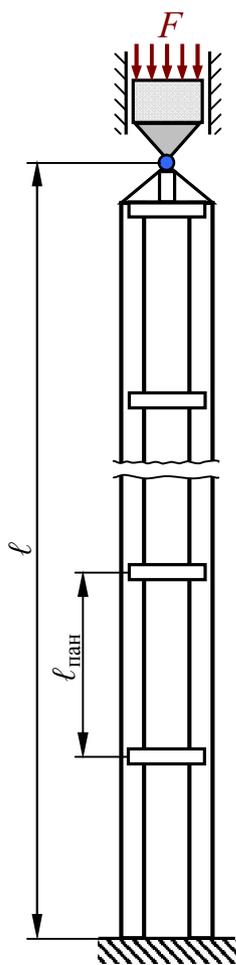


Рис. П.1.20

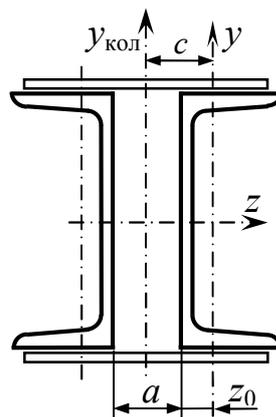


Рис. П.1.19

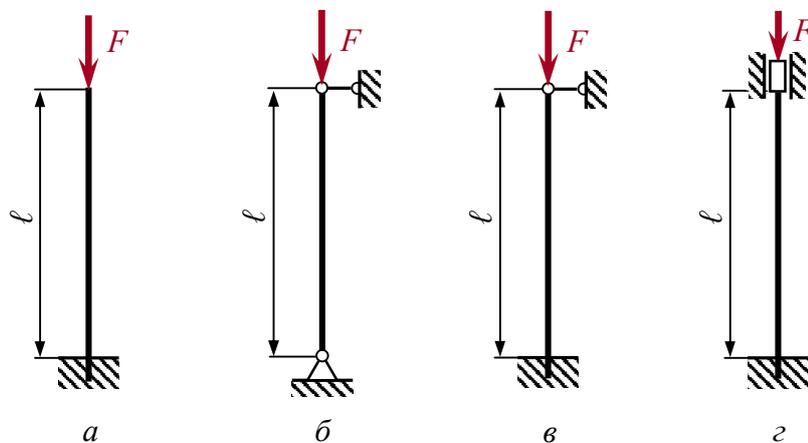
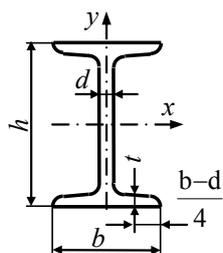


Рис. П.1.21

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица П.2.1



**Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ 8239–89)**

$A$  – площадь поперечного сечения;  $S$  – статический момент полусечения;

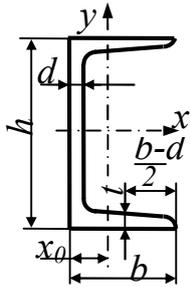
$I$  – момент инерции;  $i$  – радиус инерции;

$W$  – момент сопротивления;

$m$  – масса одного погонного метра.

№ проф	$h$ , мм	$b$ , мм	$d$ , мм	$t$ , мм	$A$ , см <sup>2</sup>	$m$ , кг	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_{x_3}$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_{x_3}$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_{y_3}$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,3	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,0	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,7	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,0	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,4	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,9	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	33,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,5	39,2	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,0	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Таблица П.2.2

**Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240-89)**

$A$  – площадь поперечного сечения;

$I$  – момент инерции;

$W$  – момент сопротивления;

$m$  – масса одного погонного метра.

$S$  – статический момент полусечения;

$i$  – радиус инерции;

№	$h$ , мм	$b$ , мм	$d$ , мм	$t$ , мм	$A$ , см <sup>2</sup>	$m$ , кг	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_{x_2}$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_{x_2}$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_{y_2}$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$x_0$ , см
5	50	32	4,4	7,0	6,16	4,84	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,945	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	45	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	13,3	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,3	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	19,8	1670	167	8,15	95,9	139	21,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	22,6	2330	212	8,90	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	25,8	3180	265	9,84	151	245	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	31,8	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10200	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

## Нормальные линейные размеры (выписка из ГОСТ 6636–69)

Ряды									
<i>Ra5</i>	<i>Ra10</i>	<i>Ra20</i>	<i>Ra40</i>	<i>Ra5</i>	<i>Ra10</i>	<i>Ra20</i>	<i>Ra40</i>		
1,0	1,0	1,0	1,0	4,0	4,0	4,0	4,0		
			1,05				4,2		
			1,1				4,5		
		1,15	4,8						
		1,2	5,0						
	1,2	1,2	1,2		1,2	5,0	5,0	5,0	5,0
					1,3				5,3
					1,4				5,6
					1,4				5,6
					1,5				6,0
1,6	1,6	1,6	1,6	6,3	6,3	6,3	6,3		
			1,7				6,7		
			1,8				7,1		
		1,8	7,1						
		1,9	7,5						
	2,0	2,0	2,0		2,0	8,0	8,0	8,0	8,0
					2,1				8,5
					2,2				9,0
					2,2				9,0
					2,4				9,5
2,5	2,5	2,5	2,5	<p><b>Примечания:</b></p> <p>1. Размеры, кратные приведенным в таблице, получаются умножением на 0,01; 0,1; 10; 100.</p> <p>2. При выборе размеров предпочтение следует отдавать числам из рядов с более крупной градацией (<i>Ra5</i> – <i>Ra10</i>).</p>					
			2,6						
			2,8						
	3,2	3,2	2,8						
			3,0						
			3,2						
			3,4						
	3,2	3,2	3,6						
			3,6						
			3,8						

Таблица П.2.4

**Механические свойства сталей углеродистых качественных**  
(выписка из ГОСТ 1050-88)

Марка	$\sigma_{0.2}$ , МПа	$\sigma_B$ , МПа	$\delta$ , %	$\psi$ , %
10	210	340-420	31	55
20	250	420-500	25	55
30	300	500-600	21	50
40	340	580-700	19	45
45	360	610-750	16	40
50	380	640-800	14	40
60	410	690-900	12	35

Модули упругости:  $E = 190\text{--}210$  ГПа;  $G = 79\text{--}81$  ГПа

Таблица П.2.5

**Допускаемые напряжения при статической нагрузке**  
**для углеродистых сталей обыкновенного качества**  
**в горячекатаном состоянии \***

Марка стали	Допускаемые напряжения, МПа при				
	растяжении [ $\sigma_p$ ]	изгибе [ $\sigma_{из}$ ]	кручении [ $\tau_{кр}$ ]	срезе [ $\tau_{ср}$ ]	смятии [ $\sigma_{см}$ ]
Ст2	115	140	85	70	175
Ст3	125	150	95	75	190
Ст4	140	170	105	85	210
Ст5	165	200	125	100	250
Ст6	195	230	145	115	290

\* Горский А. И., Иванов-Емин Е. Б., Кареновский А. И. Определение допускаемых напряжений при расчетах на прочность. М.: НИИмаш, 1974.

Таблица П.2.6

**Механические свойства чугунов с пластинчатым графитом**  
(выписка из ГОСТ 1412-85)

Марка чугуна	Пределы прочности, (МПа) при		
	растяжении $\sigma_{вр}$	изгибе $\sigma_{ви}$	сжатии $\sigma_{вс}$
СЧ 10	100	260	480
СЧ 15	150	320	650
СЧ 20	200	380	820
СЧ 25	250	440	980
СЧ 30	300	500	1150
СЧ 35	350	560	1320

Модули упругости:  $E = 115\text{--}125$  ГПа;  $G = 45$  ГПа

Таблица П.2.7

**Коэффициент  $\varphi$  снижения основных допускаемых напряжений**

$\lambda$	Ст 2, 3, 4	Ст5, Ст6	Древе- сина	$\lambda$	Ст 2, 3, 4	Ст5, Ст6	Древе- сина
0	1,00	1,00	1,00	110	0,52	0,43	0,25
10	0,99	0,98	0,99	120	0,45	0,37	0,21
20	0,97	0,95	0,97	130	0,39	0,32	0,18
30	0,95	0,92	0,93	140	0,34	0,29	0,16
40	0,92	0,90	0,87	150	0,30	0,26	0,14
50	0,89	0,86	0,80	160	0,27	0,23	0,12
60	0,85	0,81	0,71	170	0,24	0,21	0,11
70	0,81	0,76	0,60	180	0,22	0,19	0,10
80	0,76	0,70	0,48	190	0,20	0,17	0,09
90	0,69	0,62	0,38	200	0,19	0,16	0,08
100	0,60	0,51	0,31	210	0,17	0,14	–

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов : учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высш. шк., 2003. – 560 с.
2. *Горшков, А. Г.* Сопротивление материалов : учеб. пособие / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
3. Сопротивление материалов : учеб пособие / Н. А. Костенко [и др]. – М.: Высш. шк., 2004. – 430 с.
4. *Подскребко, М. Д.* Сопротивление материалов : учеб. / М. Д. Подскребко. – Минск : Высш. шк., 2007. – 797 с.
5. *Беляев, Н. М.* Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 607 с.

Учебное издание

Алексей Николаевич **Савкин**

Валентин Иванович **Водопьянов**

Олег Викторович **Кондратьев**

**ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ  
ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ**

*Учебное пособие*

Редактор А. К. Саютина

Темплан 2014 г. Поз. № 133у. Подписано в печать 03. 04. 2014.

Формат 60×84 1/16. Гарнитура Times New Roman. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,25

Уч.-изд. л. 14,4. Тираж 120 экз. Заказ

Волгоградский государственный технический университет.  
400005 Волгоград, просп. В. И. Ленина, 28, корп. 1.

Отпечатано в типографии ИУНЛ  
Волгоградского государственного технического университета  
400005 Волгоград, просп. В. И. Ленина, 28, корп. 7