1. Метод численного решения нелинейных уравнений

1.1. Отделение корней

Пусть $f(x)=0$ некоторое уравнение. Число ξ называется корнем или решением уравнения, если оно, будучи подставлено в уравнение, обращает его в равенство, т.е. $f(\xi)=0$. Число ξ называется нулём функции $y=f(x)$.

Нахождение действительных корней с определённой точностью можно разбить на два этапа:

1). Отделение корней, т.е. установление промежутков в которых содержится один корень уравнения;

2). Вычисление корня, принадлежащего выбранному промежутку, с заданной точностью.

Известно, что если функция $f(x)$ непрерывна и принимает на концах отрезка $[a, b]$ значение разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$, то внутри этого промежутка найдется нуль функции.

Отделение корней можно осуществить различными способами.

1. Составляют таблицу значений функции $y=f(x)$ на определённом промежутке изменения аргумента x, и если окажется, что для соседних значений аргументов, значения функции имеют разные знаки, то нуль функции находиться между ними.
2. Уравнение $f(x)=0$ заменяют равносильными $\varphi(x)=\psi(x)$. Строят графики функции $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$, искомый корень является абсциссой точки пересечения этих графиков.
3. Строят график функции $y=f(x)$ на промежутке изменения x; тогда абсциссой ξ точки пересечения графика с осью $0x$ - нуль функции; т.е. $f(\xi)=0$.

Пример. Выяснить сколько корней имеет уравнение $4-e^x-2x^2=0$ и найти промежутки, в которых находятся эти корни.

Решение. Рассмотрим три функции

$f(x)=4-e^x-2x^2$; $\varphi(x)=4-x^2$; $\psi(x)=e^x$. Уравнение $f(x)=0$ эквивалентно уравнению $\varphi(x)=\psi(x)$. Отделим его корни двумя способами.

Способ 1. Составляем таблицу функций $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ на промежутке $(-3{,}0;\ 1{,}0)$ с шагом измерения x равным 1,

x	$f(x)$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
-3,0	-14,05	-14,00	0,05
-2,0	-4,14	-4,00	0,14
-1,0	1,63	2,00	0,37
0,0	3,00	4,00	1,00
1,0	-0,72	2,00	2,72

Из таблицы видно, что у функции $f(x)$ существуют корни уравнения на отрезках $(-2, -1)$ и $(0, 1)$, так как значения функции на концах отрезка имеют разные знаки.

Способ 2. Графики функции $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ пересекаются в двух точках, абсциссы, которых ξ_1 и ξ_2 являются решениями уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ заключёнными в указанных промежутках (рис. 3).

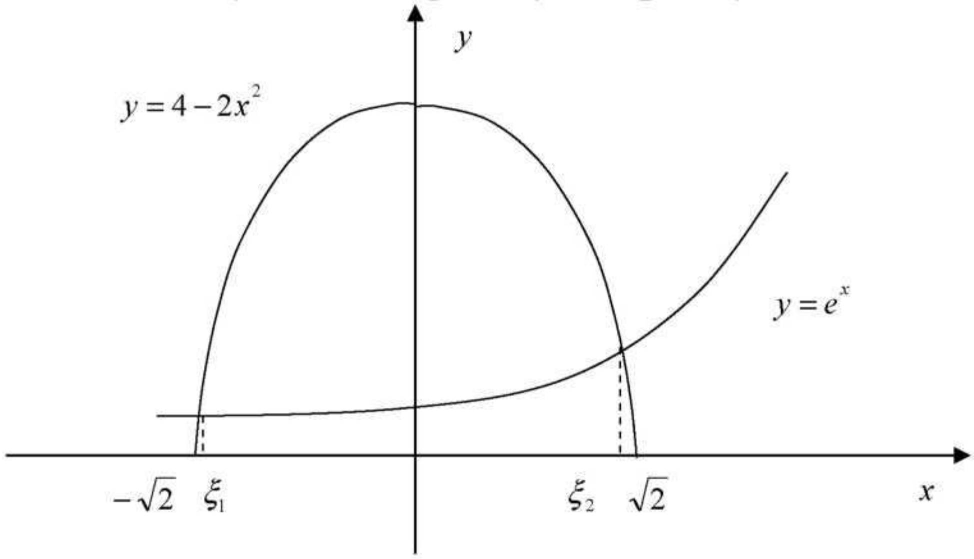

Рис. 3

1.2 Метод половинного деления отрезка для уравнения f(x) = O

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \tag{3.2.1}$$

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$ (рис. 4).

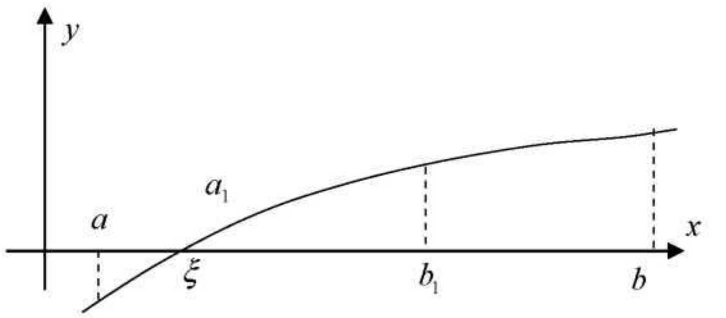

Рис. 4

Для вычисления корня уравнения (3.2.1)найдём середину отрезка $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Если $f(x_1) \neq 0$, то для продолжения вычисления выберем ту из частей отрезка .$[a, x_1]$ или $[x_1, b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Концы нового отрезка обозначим через a_1 и b_1. Новый отрезок снова делим пополам и проводим вычисления по разобранной схеме и т.д. В результате получаем либо точный корень уравнения (1) на каком-то этапе, либо последовательность вложенных отрезков, $[a, b], [a_1, b_1], \ldots [a_n, b_n] \ldots$ таких, что

$$f(a_n)f(b_n) < 0 \quad n = (1, 2 \ldots) \tag{3.2.2}$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a). \tag{3.2.3}$$

Число ξ - общий предел последовательностей (a_n) и (b_n) является корнем уравнения $f(x) = 0$.

Оценку погрешности решения на n-м шаге вычислений можно получить из (3.2.3) в виде

$$0 \le \xi - a_n \le \frac{1}{2^n}(b-a) = b_n - a_n. \tag{3.2.4}$$

Здесь $a_n \approx \xi$ с точность ε, не превышающей величины $\frac{1}{2^n}(b-a)$.

Пример. Методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ найти корень уравнения $4 - e^x - 2x^2 = 0 \quad (x > 0)$.

Решение. Раньше было установлено, что искомый корень ξ принадлежит отрезку $[0, 1]$. На каждом шаге вычислений значение корня принимаем равным $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ с погрешностью $d_n = b_n - a_n$. Будем производить вычисления и выбирать последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, используя условие $f(a_n)f(b_n) < 0$, имеем

$$[a, b] = [0, 1], \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = 0{,}5.$$

Так как $f(a) = 3, \quad f(x_1) = 1{,}8513$ и $f(a)f(x_1) > 0$, то полагаем $a_1 = x_1 = 0{,}5$, $b_1 = b = 1; \quad d_1 = b_1 - a_1 = 0{,}5$. Тогда $[a_1\ b_1] = [0{,}5, 1], \quad x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75$.
Здесь $f(a_1) = 1{,}8513, \quad f(x_2) = 0{,}758, \quad f(a_1)f(x_2) > 0$, следовательно
$a_2 = x_2 = 0{,}75, \quad b_2 = b_1 = 1, \quad d_2 = b_2 - a_2 = 0{,}25$. Тогда
$[a_2, b_2] = [0{,}75, 1], \quad x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 0{,}875, \quad d_3 = 0{,}125$.

Производя вычисление далее или составив программу можно убедиться, что заданная точность достигается на 7-ом шаге.

$x_7 = 0{,}8828125$ с погрешностью $d_7 = 0{,}0078125 < \varepsilon = 0{,}01$.

Задания для контрольной работы

Методом половинного деление найти решение уравнения с точностью до $\varepsilon = 10^{-2}$

1. $e^x - x - 2 = 0$
2. $x^4 - 3x - 20 = 0$
3. $x^2 - \cos x = 0$
4. $x^2 + \ln x = 0$
5. $\frac{1}{1+x^2} - \ln x = 0$
6. $\frac{x}{2+x} - \ln x = 0$
7. $x + e^x = 0$
8. $x^3 + 2x - 7 = 0$

1.3 Метод итерации

Пусть требуется решить уравнение

$$x = g(x), \tag{3.3.1}$$

где правая часть уравнения – непрерывная на отрезке $[a,\, b]$ функция $g(x)$.

Суть метода итерации (метода последовательных приближений) состоит в следующем. Начиная с произвольной точки $x^{(0)}$, принадлежащей отрезку $[a,\, b]$ последовательно получаем.

$x^{(1)} = g\left(x^{(0)}\right)$, (первое приближение)

$x^{(2)} = g\left(x^{(1)}\right)$, (второе приближение)

…………… …

$x^{(k+1)} = g\left(x^{(k)}\right)$ ($(k+1)$-е приближение)

Последовательность $x^{(0)}, x^{(1)} \ldots x^{(k)}$ называется последовательностью итерации для уравнения (3.3.1) и начальной точкой $x^{(0)}$. Если все точки принадлежат отрезку $[a,\, b]$ и существует предел $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$, то перейдя к пределу в равенстве $x^{(k+1)} = g\left(x^k\right)$ $(k = 0, 1, 2\ldots)$ получим $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty} g\left(x^{(k)}\right)$, т.е. $\xi = g(\xi)$.

Достаточные условия сходимости последовательности итерации содержится в следующей теореме.

Теорема. Пусть функция $g(x)$ имеет на отрезке $[a,\, b]$ непрерывную производную и выполнены два условия:

1) $|g'(x)| \le g < 1$ при $x \in [a, b]$;
2) значение функции $y = g(x)$ принадлежит отрезку $[a, b]$ для любого $x \in [a, b]$.

Тогда при любом выборе начального приближения $x^{(0)} \in [a, b]$ процесс итерации сходится к единственному корню ξ уравнения (1) на отрезке $[a, b]$.

Оценка погрешности k-ого приближения $x^{(k)}$ к корню ξ такова:

$$\left|\xi - x^{(k)}\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right|, \text{ где } q = \max_{a \le x \le b}|g'(x)|.$$

Укажем теперь один из способов преобразования уравнения $y = f(x) = 0$ к виду $x = g(x)$, допускающему применение метода итерации, сходящихся к решению ξ.

Для любого числа $\lambda \ne 0$ уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $x = g(x)$, где $g(x) = x + \lambda f(x)$. Предположим, что $f'(x) > 0$ и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Пусть $M = \max\limits_{[a, b]} f'(x)$, $m = \min\limits_{[a, b]} f'(x)$, положим $\lambda = -\frac{1}{M}$, $q = 1 - \frac{m}{M}$ и рассмотрим функцию $g(x) = x - \frac{1}{M} f(x)$.

Для этой функции выполняются достаточные условия сходимости метода итерации решения уравнения $f(x) = 0$. В частности, условие 1 теоремы следует из неравенств

$$0 < m \le f'(x) \le M \quad 0 \le g'(x) = 1 - \frac{1}{M} f'(x) \le 1 - \frac{m}{M} = q < 1 \ \forall x \in [a, b].$$

Замечание 1. Если окажется, что производная $f'(x)$ отрицательна на отрезке $[a, b]$, то уравнение $f(x) = 0$ можно заменить на равносильное уравнение $-f(x) = 0$ и использовать указанное преобразование.

Замечание 2. Если вычисление точного значение числа $M = \max\limits_{[a, b]} |f'(x)|$ затруднительно, то можно заменить его произвольным числом $M_1 > M$. Однако, при большом M_1, число $q = 1 - \frac{m}{M_1}$ ближе к единице и процесс итерации сходится медленнее.

Замечание 3. При нахождении корня $f(x) = 0$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$ или при оценки погрешности k-ого приближения можно, не вычисляя точного значения числа $q = \max\limits_{[a, b]} |g'(x)|$, ограничится следующей практической рекомендацией:

$$\left|\xi - x^{(k)}\right| \le \begin{cases} \left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| \le \varepsilon \text{ при } 0<q\le 1/2 \\ 10\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| \le \varepsilon \text{ при } 1/2<q<1 \end{cases}.$$

Пример 1. Решить с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ уравнение $2x - \cos x = 0$.

Решение. Для отделения корней представим уравнение в виде $x = \frac{1}{2}\cos x$.

Построив графики $y = x$, $y = \frac{1}{2}\cos x$ видим, что корень уравнения содержится внутри отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 5).

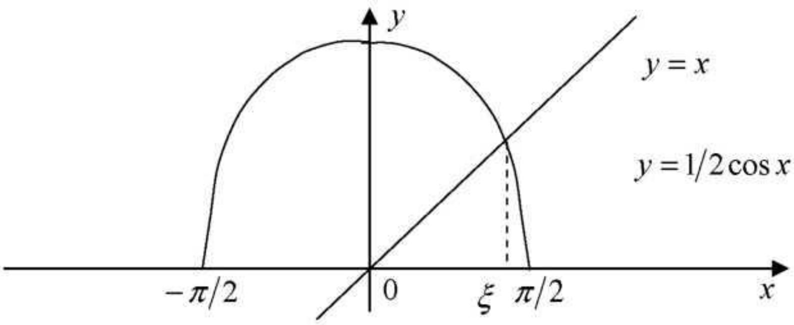

Рис. 5

Здесь $f(x) = 2x - \cos x$; $f'(x) = 2 - \sin x > 0$; $M = \max\limits_{D\le x\le \pi/2}\left|f'(x)\right| = 2$;

$\lambda = -\frac{1}{M} = -\frac{1}{2}$, и $g(x) = x + \lambda f(x) = x - \frac{1}{2}(2x - \cos x) = \frac{1}{2}\cos x$.

Положим $x^{(0)} = 0{,}5$. Последовательные приближения найдём по формулам

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\cos x^{(k)} \quad k = 0, 1, 2...$$

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}\cos x^{0} = \frac{1}{2}\cos 0{,}5 = 0{,}43879128,$$

$$x^{(2)} = \frac{1}{2}\cos x^{(1)} = \frac{1}{2}\cos 0{,}43879128 = 0{,}45263292,$$

$$x^{(3)} = \frac{1}{2}\cos x^{(2)} = \frac{1}{2}\cos 0{,}45263292 = 0{,}44964938,$$

$$x^{(4)} = \frac{1}{2}\cos x^{(3)} = 0{,}45029978.$$

Для оценки погрешности четвёртого приближения воспользуемся неравенством (замечание 3). Так как $q = \max\limits_{0\le x\le \pi/2}\left|g'(x)\right| = \frac{1}{2}\max\limits_{0\le x\le \pi/2}\left|\sin x\right| = \frac{1}{2}$, то $\left|\xi - x^{(4)}\right| \le \left|x^{(4)} - x^{(3)}\right| = 0{,}0006504 < \varepsilon = 10^{-3}$. Следовательно, $\xi \sim x^{(4)} = 0{,}450$ с точностью 10^{-3}.

Пример 2. Решить с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$

$$x + \ln x = 0 .$$

Представим уравнение в виде $-x = \ln x$. Построив графики функций $y = -x$ и $x = \ln x$ (рис. 6) заключаем, что уравнение имеет единственный корень на отрезке $[0{,}5,\ 1]$.

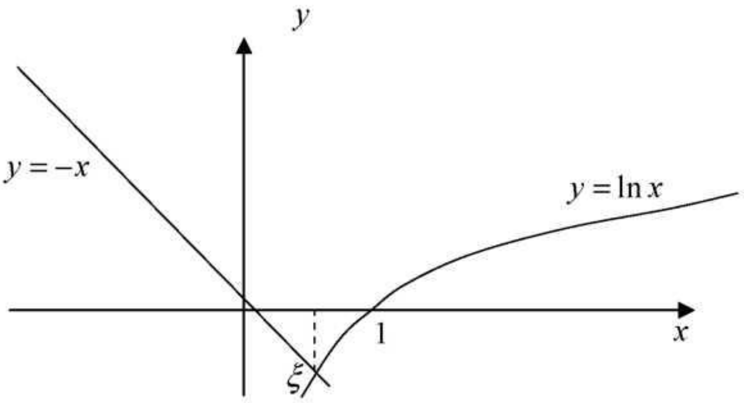

Рис. 6

Вычислим

$$m = \min_{[0,5,\ 1]} f'(x) = \min_{[0,5,\ 1]}\left[1 + \frac{1}{x}\right] = 2,$$

$$M = \max_{[0,5,\ 1]} f'(x) = \max_{[0,5,\ 1]}\left[1 + \frac{1}{x}\right] = 3, \quad q = 1 - \frac{m}{M} = \frac{1}{3}.$$

Преобразуем исходное уравнение:

$$g(x) = x - \frac{1}{M} f(x) = x - \frac{1}{3}(x + \ln x) = \frac{1}{3}(2x - \ln x).$$

Таким образом последовательность итераций определяется из соотношений

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(2x^{(k)} - \ln x^{(k)}\right) \quad (k = 0,\ 1,\ 2 \ldots).$$

Пусть $x^{(0)} = 0{,}75$ оценку погрешности будем определять расстоянием $d_k = \left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right|$. Производя вычисления, последовательно находим:

$$x^{(1)} = \frac{1}{3}\left(2x^{(0)} - \ln x^{(0)}\right) = 0{,}59589402;\ d_1 = 0{,}1541106,$$

$$x^{(2)} = 0{,}56982683; \qquad d_2 = 0{,}0260672,$$

$$x^{(3)} = 0{,}5673588;\ \ d_3 = 0{,}00246805,$$

$x^{(4)} = 0{,}56716032$.

Оценку погрешности четвёртого приближения получим из неравенства $\left|\xi - x^{(4)}\right| \le d_4 = \left|x^{(4)} - x^{(3)}\right| = 0{,}00019848 < \varepsilon = 10^{-3}$, следовательно $\xi \sim x^{(4)} = 0{,}567$.

Пример 3. Решить методом итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ уравнение $4 - e^x - 2x^2 = 0 \quad (x > 0)$.

Решение. Корень уравнения принадлежит отрезку $[0, 1]$. Здесь $f'(x) = -e^x - 4x < 0$ при $x \in [0, 1]$ и является монотонной функцией, модуль которой достигает максимального значения на концах отрезка:

$$M = \max_{[0,\,1]} |f'(x)| = e + 4 \approx 7; \qquad m = \min_{[0,\,1]} |f'(x)| = 1; \qquad q \approx 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

Т.к. в этом примере $f'(x)$ отрицательно на отрезке, то, преобразуя к $g(x)$ воспользуемся замечанием 1.

$$-f(x) = -4 + e^x + 2x^2; \quad g(x) = x - \frac{1}{M}(-f(x)),$$

$$g(x) = x - \frac{1}{7}\left(-4 + e^x + 2x^2\right) = x + \frac{1}{7}\left(4 - e^x - 2x^2\right).$$

Последовательность вычислений определяется формулами

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{1}{7}\left(4 - e^{x^{(k)}} - 2\left(x^{(k)}\right)^2\right) \quad k = 0, 1, 2\ldots$$

Для оценки погрешности k-ого приближения здесь используем неравенство $\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| < \frac{\varepsilon}{10}$.

Непосредственно можно убедиться, что если положить $x^{(0)} = 0{,}5$, то последнее неравенство будет выполняться с 5-й итерацей. Следовательно, $\xi \sim x^{(5)} = 0{,}887 \quad \left(\varepsilon = 10^{-2}\right)$.

Задания для контрольной работы

Методом итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ решить уравнения 1-8.

1. $e^x - x - 2 = 0$
2. $x^4 - 3x - 20 = 0$
3. $x^2 - \cos x = 0$
4. $x^2 + \ln x = 0$
5. $\frac{1}{1 + x^2} - \ln x = 0$
6. $\frac{x}{2 + x} - \ln x = 0$
7. $x + e^x = 0$
8. $x^3 + 2x - 7 = 0$