2. Численное интегрирование

К вычислению определённого интеграла сводятся многие практические задачи, такие, как вычисления площадей фигур, объёмов тел, работы некоторой силы и др.

В случаях, когда подынтегральная функция $f(x)$ задана в аналитическом виде, определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница, то есть через значение первообразной $F(x)$

$$\int_a^b f(x)d_x = F(b) - F(a).$$

Однако на практике этот способ вычислений определённого интеграла используется редко, поскольку не каждая функция $f(x)$ имеет первообразную, которая выражается через элементарные функции. Когда же $f(x)$ задана таблицей, этот метод вообще не применим. В таких случаях применяются методы численного интегрирования.

Вычислительный алгоритм строится следующим образом. Отрезок интегрирования $[a, b]$ разбивается на n равных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2...n$ длинной $h = \frac{(b-a)}{n}$, а интеграл $\int_a^b f(x)d_x$ заменяется суммой частичных интегралов

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx .$$

Затем подынтегральная функция $f(x)$ на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ заменяется некоторым интерполяционным полиномом невысокой степени m $L_{m,i}(x)$ и вычисляется интеграл $\int_{x_a}^{x_i} L_{m,i}(x)dx$. В результате получается приближенное значение интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k).$$

Эта формула называется квадратурной, точки x_k - узлами, а числа c_k - коэффициентами этой формулы. Погрешность квадратурной формулы определяется из выражения

$$R_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k).$$

В зависимости от выбора интеграционного полинома $L_{m,i}(x)$ получаются различные квадратурные формулы.

2.1. Формула прямоугольников

В этом методе функция $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ заменяется полиномом нулевой степени. $L_{0,i}(x) = f(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. В результате получается приближённое значение интеграла на частичном отрезке $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)dx = f(\xi_i)h$ так как $f(\xi_i) = const$, $h = x_i - x_{i-1}$.

Полное значение интеграла вычисляется посредством интегральной суммы

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)h .$$

В зависимости от выбора точки ξ, получаются различные формулы прямоугольников.

Если принять $\xi_i = x_{i-1/2}$, то есть равной координате середине отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, то получается более точная квадратурная формула на частичном отрезке

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f\left(x_{i-1/2}\right)h ,$$

и на полном отрезке $[a, b]$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_{i+1/2}\right)\Delta x = \left(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{n-1/2}\right)h ,$$

где $y_i = f(x_i)$. Эта формула обычно называется формулой **метода средних**.

2.2. Формула трапеций

Заменяя в частичном интеграле $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ функцию линейным полиномом

$$L_{1,i} = -\frac{x - x_i}{h} f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{h} f(x_i) = -\frac{x - x_i}{h} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h} y_i ,$$

получаем формулу трапеции на частичном отрезке

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{x - x_{i-1}}{h} y_i - \frac{x - x_i}{h} y_{i-1}\right] dx = \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i).$$

Общая формула трапеции получается суммированием частичных интегралов.

$$\int\limits_{b}^{a} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i) = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 ... + y_n).$$

Формулу трапеции можно получить так же из геометрических соображений. В этом случаи точки ординат $y_0, y_1, ... y_n$ соединяем хордами, заменяя на каждом элементарном отрезке подынтегральную функцию $f(x)$ линейным полиномом $y = kx + d$. В результате непрерывная кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ заменяется ломаной линией, состоящей из отдельных хорд, а определённый интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ заменяется суммой площадей получавшихся трапеций (рис.7).

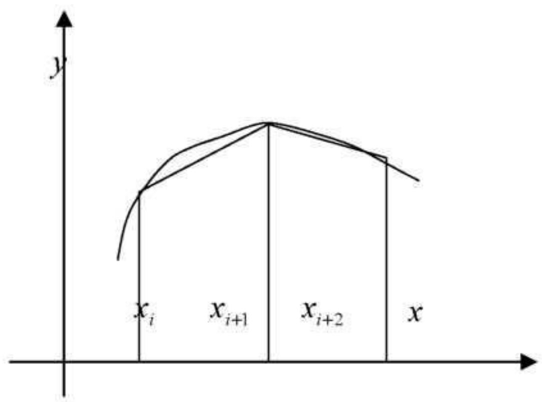

Рис. 7

Площадь отдельной трапеции равна произведению полусуммы основания на высоту $\Delta S_i = (y_{i-1} + y_i)\frac{h}{2}$, где $i = 1, 2 ... n$, $h = x_i - x_{i-1}$, а определённый интервал будет равен

$$\int\limits_{b}^{a} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 ... + y_n)$$

2.3. Формула Симпсона

Аппроксимируя в частичном интеграле функцию $f(x)$ квадратичным полиномом $L_{2,i}(x)$, получаем так называемую формулу Симпсона для частичного интеграла. Поскольку квадратичный полином однозначно определяется координатами трёх точек (x_k, y_k), $(k = i-1, i, i+1)$, то частичный отрезок интерполирования и интегрирования должен состоять из двух элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$, то есть быть двойным, а число $h = \frac{b-a}{n}$ чётным $(h = x_i - x_{i-1})$. Тогда полином Лагранжа второй степени имеет вид

$$L_{2,i} = \frac{1}{2h^2}[(x - x_i)(x - x_{i+1})f(x_{i-1}) - 2(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})f(x_i) + (x - x_i)(x - x_{i+1})f(x_{i-1})];$$

а частичный интеграл

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_{2,i}(x)dx = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}).$$

Это формула Симпсона или формула параболы для двойного отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Общая формула Симпсона для интегрирования по всему отрезку $[a, b]$ имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1,3,5}^{n-1} \frac{4}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n].$$

Приведём оценки погрешностей квадратурных формул в том случае, когда подынтегральная функция имеет непрерывную производную второго порядка:

для формулы прямоугольников

$$R(h) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

для формулы трапеции

$$R(h) = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

для формулы Симпсона

$$R(h) = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{a \le x \le b} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Пример. Найти приближённые значения интеграла $\int_0^1 e^{x^2} dx$ с помощью квадратичных формул прямоугольников, трапеции и Симпсона, если отрезок интегрирования $[0,1]$ разбит на $n = 2,\ 4,\ 10$ равных частей. Оценить величину погрешности полученных результатов в каждом случае.

Решение. Обозначим через ε погрешность результата интегрирования по квадратурным формулам. Найдём производные $f(x) = e^{x^2}$ до четвёртого порядка включительно и максимальные абсолютные значения производных второго и четвёртого порядков на отрезке $[0,1]$:

$$f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad f''(x) = 2e^{x^2}\left(1 + 2x^2\right), \quad f'''(x) = 4xe^{x^2}\left(3 + 2x^2\right),$$

$$f^{(4)}(x) = 4e^{x^2}\left(3 + 12x^2 + 4x^4\right), \quad \max_{0<x<1} |f''(x)| = 6e,$$

$$\max_{0<x<1}\left|f^{(4)}(x)\right| = 76e\,.$$

При $n = 4$ получим следующие оценки величины погрешности результатов:

$$\varepsilon_{|прям} = \frac{(b-a)^3}{244^2}\max_{0\le x\le 1}\left|f''(x)\right| = \frac{e}{64} \sim 0{,}0425$$

$$\varepsilon_{трап} = 2\varepsilon_{прям} \sim 0{,}085 \qquad \varepsilon_{парab} = \frac{76e}{2880\cdot 256} \sim 0{,}00056$$

Результат вычислений по квадратурным формулам прямоугольников, трапеции и Симпсона для различных чисел разбиений и погрешности этих результатов сведены в таблицу

Квадратурная формула	$n=2$		$n=4$		$n=10$	
	$Y(2)$	ε	$Y(4)$	ε	$Y(10)$	ε
Прямоугольников	1,40977	0,1699	1,44875	0,0425	1,46039	0,8068
Трапеций	1,57158	0,3398	1,49058	0,085	1,46717	0,0136
Симпсона	1,46371	0,0045	1,46272	0,0003	1,46265	10^{-5}

Задания для контрольной работы

Вычислить заданные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, если отрезок интегрирования разбит на $n = 2$ и $n = 4$ равные части. Оценить погрешность результата и сравнить приближённые значения интеграла с точными.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad \left(\Im = \frac{\pi}{4} \sim 0{,}785\right)$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad \left(\Im = \ln 2 \sim 0{,}693\right)$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin 4x\; dx \quad (\Im = 0{,}5)$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \left(\Im = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \sim 0{,}881\right)$

5. $\displaystyle\int_1^e \ln x\; dx \quad (\Im = 1)$

6. $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)dx \quad (\Im = 2\ln 2 - 1 \sim 0{,}386)$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\; dx \quad \left(\Im = \frac{\pi}{2} - 1 \sim 0{,}571\right)$

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} \quad \left(\Im = arctge - \frac{\pi}{4} \sim 0{,}433\right)$

9. $\int\limits_0^{\pi} \cos^3 x \; dx \quad (\Im = 0)$

10. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{d_x}{\cos x} \quad \left(\Im = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \sim 0{,}881\right)$

11. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} \quad (\Im = 1)$

12. $\int\limits_0^{1} arctgx \; dx \quad \left(\Im = \frac{1}{4}(\pi - 2\ln 2) \sim 0{,}438\right)$

13. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{1+e^x} \quad (\Im \approx 0{,}38)$

14. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \arcsin x \; d_x \quad \left(\Im = \frac{\sqrt{2}}{8}(\pi+4) - 1 \sim 0{,}26\right)$

15. $\int\limits_0^{\pi/4} tgx \; dx \quad \left(\Im = \frac{1}{2}\ln 2 \sim 0{,}346\right)$

16. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} ctgx \; dx \quad \left(\Im = \frac{1}{2}\ln 2 \sim 0{,}346\right)$

17. $\int\limits_0^{1} xe^x \; dx \quad (\Im = 1)$

18. $\int\limits_0^{1} \sqrt{1+x} \; dx \quad \left(\Im = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \sim 1{,}22\right)$