3. Методы численного решения системы линейных алгебраических уравнений

3.1. Метод Гаусса

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных) сначала поясним на примере. Пусть требуется решить систему уравнений

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \qquad (6.1.1)$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = -4$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 4.$$

Исключим сначала неизвестное x_1 из второго и третьего уравнения системы (6.1.1), используя первое уравнение. Уравнение, с помощью которого преобразуют остальные уравнения, называют **разрешающим уравнением**, а коэффициент этого уравнения при неизвестном, исключаемом из остальных уравнений, **- разрешающим (или главным) элементом**. В данном примере первое уравнение (или первая строка) – разрешающие, а коэффициент 5 при x_1 в этом уравнении – разрешающий элемент.

Разделим первое (разрешающие) уравнение на 5 и вычтем преобразованное первое уравнение из второго и третьего уравнений системы (6.1.1). В результате получим систему, в которой неизвестное x_1 исключено из второго и третьего уравнений.

$$x_1 - \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 = \frac{8}{5}$$

$$\frac{21}{5}x_2 - \frac{7}{5}x_3 = -\frac{28}{5}$$

$$\frac{6}{5}x_2 + \frac{18}{5}x_3 = \frac{12}{5}.$$

Теперь второе уравнение будет разрешающим с разрешающим элементом $\frac{21}{5}$. Разделим второе уравнение на $\frac{21}{5}$ и вычтем преобразованное уравнение, умноженное на $\frac{6}{5}$, из третьего уравнения, исключая неизвестное x_2. Получим систему

$$x_1 - \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 = \frac{8}{5}$$

$$x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{4}{3}$$

$$x_3 = 1.$$

Проведённую последовательность преобразований данной системы называют **прямым ходом** в методе Гаусса. **Обратный ход** – это последовательное исключение неизвестных x_3 и x_2 из второго и первого уравнения.

Умножим третье уравнение на $\left(-\frac{1}{3}\right)$ и вычтем его из второго, затем умножим это же третье уравнение на $\frac{2}{5}$ и вычтем его из первого. Получим

$$
\begin{aligned}
x_1 - \frac{1}{5}x_2 &= \frac{6}{5} \\
x_2 &= -1 \\
x_3 &= 1 .
\end{aligned}
$$

Далее умножим второе уравнение на $\left(-\frac{1}{5}\right)$ и, используя это уравнение, исключим неизвестное x_2 из первого уравнения. Окончательно получаем решение системы

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad &= 1 \\
x_2 &= -1 \\
x_3 &= 1 .
\end{aligned}
\tag{6.1.2}
$$

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
\tag{6.1.3}
$$

Решением системы (6.1.3) называется упорядоченное множество чисел $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{bmatrix}$, если $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, $x_n = \xi_n$ превращает уравнение (6.1.3) в равенства. Решения системы представляют собой n-мерный вектор, который обозначим через $\mathbf{o}$.

Рассмотрим общую схему метода Гаусса для систем имеющих единственное решение.

Предположим, что $a_{11} \neq 0$. В противном случае можно поменять первое уравнение с уравнением, в котором коэффициент при неизвестном x_1 отличен от нуля. Разделим первое уравнение системы (6.1.3) на a_{11}.

Оно $x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}$, (6.1.4)

где $a_{ij} = a_{ij}/a_{11}$, $b_1^{(1)} = b_1/a_{11}$.

Умножим разрешающие уравнение (6.1.4) на a_{21} и вычтем полученное уравнение из второго уравнения системы (6.1.3). Аналогично преобразуем остальные уравнения. В результате этих операций система запишется так:

$$
\begin{aligned}
x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n &= b_2^{(1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n2}^{(1)} x_2 + a_{n3}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)} x_n &= b_n^{(1)},
\end{aligned}
\qquad (6.1.5)
$$

где $a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - a_{1j}^{(1)}$, $a_{3j}^{(1)} = a_{3j} - a_{1j}^{(1)} a_{31} \ldots$
$a_{nj}^{(1)} = a_{nj} - a_{1j}^{(1)} a_{n1}$; $b_j^{(1)} = b_j - b_1^{(1)} a_{j1} \quad (j = 2,3 \ldots n)$.

Естественно, что если какой либо из коэффициентов a_{j1} окажется равным нулю, то j-е уравнение системы (6.1.3) войдёт в систему (6.1.5) без изменений, т.е. $a_{nj}^{(1)} = a_{nj}$, $b_j^{(1)} = b_j \quad (j = 2,3 \ldots n)$.

Теперь оставив без изменения первое уравнение системы (6.1.5) можно сделать второе уравнение разрешающим и применить описанную процедуру к системе из $n-1$ уравнений, исключив неизвестное x_2 из третьего и последующих уравнений. Получим систему вида

$$
\begin{aligned}
x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)}, \\
x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)}, \\
a_{33}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)} x_n &= b_3^{(2)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n3}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)} x_n &= b_n^{(2)},
\end{aligned}
$$

где $a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$, $b_2^{(2)} = b_2^{(1)} / a_{22}^{(1)}$; $a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - a_{2j}^{(2)} a_{32}^{(1)} \ldots$ $a_{nj}^{(2)} = a_{nj}^{(1)} - a_{n-1j}^{(2)} a_{n2}^{(1)}$,
$b_j^{(2)} = b_j^{(1)} - b_2^{(2)} a_{j2}^{(1)} \quad (j = 3,4 \ldots n)$.

Продолжая аналогичные вычисления, приведём систему (6.1.3) к эквивалентной системе

$$
\begin{aligned}
x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)}, \\
x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)}, \\
x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)} x_n &= b_3^{(2)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= b_n^{(n)},
\end{aligned}
\qquad (6.1.6)
$$

в которой матрица из коэффициентов имеет треугольный вид.

На этом заканчивается прямой ход решения системы линейных уравнений методом Гаусса.

При обратном ходе происходит последовательное исключение неизвестных x_n, начиная с $(n-1)$-го уравнения и заканчивая первым. Получаем

$$x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1,n-1}^{(1)} x_{n-1} = b_1^{(1.1)},$$
$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2,n-1}^{(2)} x_{n-1} = b_2^{(2.1)}, \qquad (6.1.7)$$
$$x_3 + \ldots + a_{3,n-1}^{(2)} x_{n-1} = b_3^{(3.1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1.1)},$$
$$x_n = b_n^{(n)},$$

Затем исключаем неизвестное x_{n-2} из уравнений с номером j $(j = n-2,\ldots 1)$ и т.д. Приходим к системе, аналогичной (6.1.2). Вычисления заканчиваются решением системы, имеющий вид

$$x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = b_1^{(1.n-1)},$$
$$x_{n-j} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = b_{n-j}^{(j.n-j)},$$
$$x_{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots = b_{n-2}^{(2.n-2)},$$
$$x_{n-1} \ldots\ldots\ldots = b_{n-1}^{(1.n-1)},$$
$$x_n \ldots\ldots = b_n^{(n)}.$$

Для уменьшения погрешности вычислений существуют различные модификации метода Гаусса. Одна из модификаций состоит в следующем: в начале первого шага прямого хода среди коэффициентов a_{j1} при x_1 находят наибольший по модулю. Предположим, что это a_{j1}. После этого в исходной системе (6.1.3), первое уравнение ставят на место j-го, а j-е на место первого. Далее вычисления проводятся в описанной далее последовательности.

В начале второго шага прямого хода максимальный по модулю коэффициент выбирают среди коэффициентов a_{i2} $(i = 2,3\ldots n)$ при неизвестном x_2. Снова возможна соответствующая перестановка и исключение неизвестного x_2 и т.д.

Заметим:

1) если число преобразованных уравнений системы меньше числа неизвестных (это происходит, если в процессе преобразования получается тождество $0 = 0$) - тогда система имеет бесконечное множество решений;

2) все коэффициенты при неизвестном в каком – либо уравнении равны нулю, в то время как свободный член уравнения отличен от нуля – тогда система не имеет решений.

Задания для контрольной работы

Методом Гаусса решить системы линейных алгебраических уравнений. Сравнить с точным решением.

1. $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ -3 & 2 & 10\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}11\\ 4\\ 6\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 3\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}-5\\ 5\\ 1\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -2 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}-1\\ 5\\ -3\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}6\\ 9\\ 4\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}-2\\ -4\\ 2\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$

8. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -5\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ -3 & 2 & 10\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}11\\ 4\\ 6\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$

3.2 Метод итерации

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$A\mathbf{x}=b.$$

Если все диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0$, то эту систему можно представить в приведённом виде:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n + \beta_1\\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n + \beta_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n + \beta_n
\end{aligned}, \qquad (6.2.1)$$

где $\beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$, $a_{ij} = \begin{cases} 0, & если \quad i = j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & если \quad i \neq j \end{cases}$.

Введём обозначения

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

и перепишем систему в виде одного матричного уравнения

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathrm{B}, \tag{6.2.2}$$

Последовательные приближения (итерации) найдём следующим образом. Возьмём в качестве начального приближения $x^{(0)}$ вектор $\boldsymbol{\beta}$ и подставим его в правую часть уравнения (6.2.2); получим $x^{(1)}$. Продолжая аналогичные вычисления, придём к векторной последовательности приближений

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(0)} + \mathrm{B} \text{ - 1- приближение} \\ &\mathbf{x}^{(2)} = A\mathbf{x}^{(1)} + \mathrm{B} \text{ - 2- приближение} \\ &\mathbf{x}^{(k+1)} = A\mathbf{x}^{(k)} + \mathrm{B} \text{ - } (k+1) \text{- приближение} \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Если существует предел ξ последовательности векторов $x^{(k)}$, то переходя к пределу при $k \to \infty$ убеждаемся, что ξ является решением (6.2.2). Достаточным условием сходимости итерации к решению содержит следующая теорема.

Теорема. **Если какая-либо норма матрицы меньше единицы: , то уравнение (6.2.2) имеет единственное решение ξ, к которому стремится последовательность итерации при любом выборе начального положения $x^{(0)}$.**

В расчётах полагают $\mathbf{x}^{(0)} = \mathrm{B}$. Погрешность приближённого решения на k-м шаге оценивают неравенством

$$\left\| \xi - x^{(k)} \right\| \le \frac{\|A\|^{k+1}}{1 - \|A\|} \|\beta\|.$$

Из этого неравенства можно получить оценку числа итерации k, необходимых для обеспечения заданной точности ε.

Отклонение приближения $x^{(k)}$ от решения ξ по норме не будет превышать ε, если

$$\left\| \xi - x^{(k)} \right\| \le \frac{\|A\|}{1 - \|A\|} \left\| x^{(k)} - x^{(k-)} \right\| \le \frac{\|A\|^{k+1}}{1 - \|A\|} \|\beta\| < \varepsilon \tag{6.3.4}$$

Обычно используют условия в форме

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-)} \right\| \le \frac{\|A\|}{1-\|A\|} \cdot \varepsilon$$

позволяющее применять приближение $x^{(k)}$ в качестве решения с точностью ε

Пример. Найти решение системы уравнений.

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$$
$$x_1 + 4x_2 - x_3 = -4$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 4$$

Методом итерации с точностью 10^{-2}.

Решение. Приведём систему к виду (6.2.2)

$$x_1 = 0 \cdot x_1 + 0{,}2x_2 - 0{,}4x_3 + 1{,}6$$
$$x_2 = -0{,}25x_1 + 0x_2 - 0{,}25x_3 - 1$$
$$x_3 = -0{,}25x_1 - 0{,}25x_2 + 0x_3 + 1$$

Теперь запишем последовательность итерации $(k = 0{,}1{,}2...)$

$$x_1^{(k+1)} = 0x_1^{(k)} + 0{,}2x_2^{(k)} - 0{,}4x_3^{(k)} + 1{,}6$$
$$x_2^{(k+1)} = -0{,}25x_1^{(k)} + 0x_2^{(k)} + 0{,}25x_3^{(k)} - 1$$
$$x_3^{(k+1)} = -0{,}25x_1^{(k)} - 0{,}25x_2^{(k)} + 0x_3^{(k)} + 1$$

Для приведённой матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 0 \; 0{,}2 \; -0{,}4 \\ -0{,}25 \; 0 \; 0{,}25 \\ -0{,}25 \; -0{,}25 \; 0 \end{vmatrix}$$

достаточные условия сходимости процесс итераций выполняется по сходимости m - норме, поскольку

$$\|A\|_m = \max_{1 \le i \le 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{0{,}6; 0{,}5; 0{,}5\} = 0{,}6 < 1 .$$

В качестве начального приближения возьмём вектор-столбец свободных членов приведённой системы: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 1{,}6 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$.

Число итераций для достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-2}$ определим из неравенства $\frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|}\|\mathrm{B}\| \le \varepsilon$, которое перепишем так $k \ge \frac{-2 + \ell g 0{,}25}{\ell g 0{,}6} - 1 \sim 11$.

Здесь учтено, что $\|A\|_m = 0{,}6$, $\|\mathrm{B}\|_m = \left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\|_m = 1{,}6$. Вычислим теперь три последовательных приближения по формулам (6.2.3) и оценим погрешность каждого результата, используя равенство (6.2.4).

Найдём первое приближение.

$$x_1^{(1)} = 0,2(-1) - 0,4 + 1,6 = 1$$

$$x_2^{(1)} = -0,25 \cdot 1,6 + 0,25 - 1 = -1,15$$

$$x_3^{(1)} = -0,25 \cdot 1,6 - 0,25(-1) + 1 = 0,85$$

$$\left\| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \right\|_m = \max(0,6; 0,15; 0,15) = 0,6 .$$

Следовательно, $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,15 \\ 0,85 \end{bmatrix}$ даёт значение корня с погрешностью не превышающей величины $\dfrac{\|A\|_m}{1 - \|A\|_m} \left\| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \right\|_m = \dfrac{0,6}{1 - 0,6} \cdot 0,6 = 0,9$.

Далее последовательно находим

$$x_1^{(2)} = 0,2(-1,15) - 0,4 \cdot 0,85 + 1,6 = 1,03$$

$$x_2^{(2)} = -0,25 \cdot 1 + 0,25 \cdot 0,85 - 1 = -1,0375$$

$$x_3^{(3)} = -0,25 \cdot 1 - 0,25(-1,15) + 1 = 1,0375$$

$$\left\| \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \right\|_m = \max(0,3; 0,1125; 0,1875) = 0,1875$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ -1,0375 \\ 1,0375 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\|A\|_m}{1 - \|A\|_m} \left\| \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \right\| = \frac{0,6}{1 - 0,6} 0,1875 = 0,28125$$

$$x_1^{(3)} = 0,2(-1,0375) - 0,4 \cdot 1,0375 + 1,6 = 0,9775$$

$$x_2^{(3)} = -0,25 \cdot 1,03 + 0,25 \cdot 1,0375 - 1 = -0,998125$$

$$x_3^{(3)} = -0,25 \cdot 1,03 - 0,25(-1,0375) + 1 = 1,001875$$

$$\left\| \mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)} \right\|_m = \max(0,0525; 0,039375; 0,035625) = 0,0525$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{vmatrix} 0,9775 \\ -0,998125 \\ 1,001875 \end{vmatrix} \qquad \frac{\|A\|_m}{1 - \|A\|_m} \left\| \mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)} \right\|_m = \frac{0,6}{1 - 0,6} 0,05 = 0,075 .$$

Точное решение $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Можно показать, что заданная точность достигается за пять шагов.