ДИНАМИКА

Задание Д 1

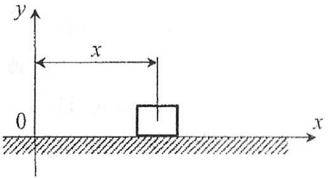

Рис. 2.9. К заданию Д 1

Материальная точка массой $m = 1$ кг начинает движение по горизонтальной поверхности из положения $x = 0$ (рис. 2.9) после сообщения ей начальной скорости V_0. Ее движению препятствует сила $R = k_1 V$ или $R = k_2 V^2$, а также сила трения скольжения $F_{тр} = fmg$, где f – коэффициент трения скольжения.

Определить, как будет изменяться с течением времени величина скорости точки, а также ее координата x.

Таблица 2.5

Условия задания Д 1

№ варианта	V_0, м/с	k_1, кг/с	k_2, кг/м	f
1	3,0	1	0	0,02
2	3,5	0	3	0
3	4,0	2	0	0,03
4	4,5	0	4	0
5	5,0	3	0	0,04
6	5,5	0	5	0
7	6,0	4	0	0,05
8	6,5	0	6	0
9	7,0	5	0	0,06
10	7,5	0	7	0
11	8,0	6	0	0,07
12	8,5	0	8	0
13	9,0	7	0	0,08
14	9,5	0	9	0
15	10,0	8	0	0,1
16	9,5	1	0	0,01
17	9,0	0	2	0
18	8,5	2	0	0,03
19	8,0	0	3	0
20	7,5	4	0	0,04

Пример выполнения задания Д 1

Материальная точка массой $m = 2$ кг начинает движение по горизонтальной поверхности из положения $x = 0$ (рис. 2.10) после сообщения ей начальной скорости $V_0 = 5$ м/с. К ней приложена постоянная по модулю и направленная вдоль оси Ox сила $Q = 10$ Н. Движению точки препятствует сила $R = k_1 V$, где $k_1 = 5$ кг/с.

Определить, как будет изменяться с течением времени величина скорости точки, а также ее координата x.

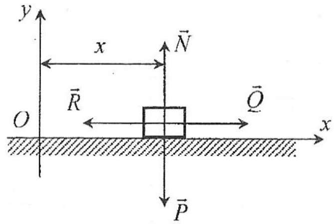

Рис. 2.10. К примеру выполнения задания Д 1

Решаем вторую задачу динамики материальной точки.

Изобразив материальную точку в произвольном положении (при $x > 0$), приложим к ней соответствующие силы (рис. 2.10).

Основное уравнение динамики точки

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{Q}, \qquad (2.15)$$

где $\vec{a}$ – ускорение точки, $\vec{P}$ и $\vec{N}$ – сила тяжести и реакция поверхности.

Спроектируем уравнение (2.15) на ось Ox.

$$ma_x = Q - R. \qquad (2.16)$$

Здесь a_x – проекция ускорения на ось Ox. Ее можно представить следующим образом

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dV}{dt},$$

где V_x – проекция скорости точки на ось Ox.

Уравнение (2.16) представим в виде

$$m\frac{dV}{dt} = Q - k_1 V.$$

Разделяем переменные

$$\frac{dV}{Q-k_1V}=\frac{dt}{m} \text{ или } \frac{dV}{V-Q/k_1}=-\frac{k_1}{m}dt.$$

Интегрируя, получим

$$\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V-Q/k_1}=-\frac{k_1}{m}\int_0^t dt,\ \ \ln\left|V-\frac{Q}{k_1}\right|\Bigg|_{V_0}^{V}=-\frac{k_1}{m}t\Bigg|_0^t.$$

Подставляем пределы интегрирования

$$\ln\frac{V-Q/k_1}{V_0-Q/k_1}=-\frac{k_1}{m}t.$$

После потенцирования получим искомую зависимость скорости от времени

$$V=\frac{Q}{k_1}+\left(V_0-\frac{Q}{k_1}\right)\cdot e^{-\frac{k_1t}{m}}. \qquad (2.17)$$

Зная, что $V=\dfrac{dx}{dt}$, получим

$$\frac{dx}{dt}=\frac{Q}{k_1}+\left(V_0-\frac{Q}{k_1}\right)\cdot e^{-\frac{k_1t}{m}}.$$

Разделяем переменные:

$$dx=\left[\frac{Q}{k_1}+\left(V_0-\frac{Q}{k_1}\right)\cdot e^{-\frac{k_1t}{m}}\right]dt.$$

Интегрируя, получим

$$\int_0^x dx=\int_0^t\left[\frac{Q}{k_1}+\left(V_0-\frac{Q}{k_1}\right)\cdot e^{-\frac{k_1t}{m}}\right]dt,\ \ x\Big|_0^x=\frac{Q}{k_1}t\Bigg|_0^t-\frac{m}{k_1}\left(V_0-\frac{Q}{k_1}\right)\cdot e^{-\frac{k_1t}{m}}\Bigg|_0^t.$$

После подстановки пределов искомое кинематическое уравнение движения материальной точки имеет вид

$$x=\frac{Q}{k_1}t+\left(V_0-\frac{Q}{k_1}\right)\cdot\left(1-e^{-\frac{k_1t}{m}}\right). \qquad (2.18)$$

Преобразуем выражения (2.17) и (2.18), подставляя числовые значения:

$$V = 2 + 3e^{-2,5t} \text{ (м/с)},$$

$$x = 2t + 1{,}2\left(1 - e^{-2,5t}\right) \text{ (м)}.$$

Задание Д 2

Механическая система (рис. 2.11) начинает движение из состояния покоя. Она включает цилиндрический каток F радиуса $R_F = 0{,}7$ м, массой $m_F = 25$ кг и моментом инерции относительно центральной оси $J_{CF} = 6$ кг·м^2, скатывающийся по наклонной плоскости; шкив E радиуса $r_E = 0{,}4$ м, массой $m_E = 3$ кг и моментом инерции относительно оси вращения $J_{ZE} = 0{,}5$ кг·м^2; груз D массой $m_D = 1{,}5$ кг; шкив B радиуса $r_B = 0{,}6$ кг, массой $m_B = 2$ кг и моментом инерции относительно оси вращения $J_{ZB} = 0{,}8$ кг·м^2; груз A массой $m_A = 1$ кг. Грузы A и D, а также каток F движутся по шероховатым поверхностям (коэффициент трения скольжения f, трения качения – k). К шкивам E и B приложены пары сил сопротивления с моментами M_{CE} и M_{CB}.

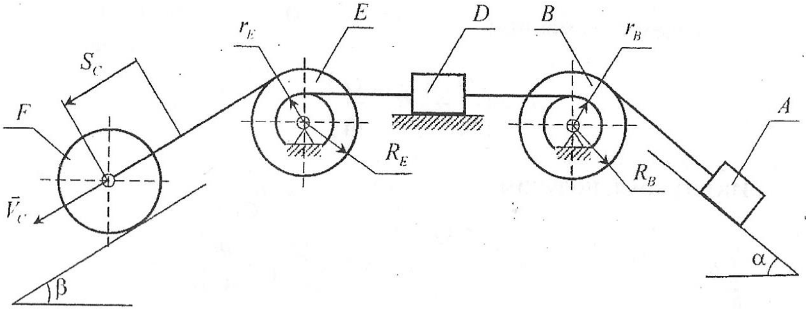

Рис. 2.11. К условию задания Д 2

Определить параметр, указанный в столбце «Найти» табл. 2.6, после перемещения центра катка F на расстояние S_C.

Там V_C – скорость центра масс катка F; ω_E и ω_B – угловые скорости шкивов E и B; V_A и V_D – скорости грузов A и D. Если $f = 0$, то пренебречь трением скольжения грузов A и D. Если $k = 0$, то пренебречь трением качения катка F.

Таблица 2.6

Условия задания Д 2

№ вар.	f	k, м	S_C, м	α, рад	β, рад	R_B / r_B	R_E / r_E	M_{CB}, Нм	M_{CE}, Нм	Найти
1	0	0,002	1	$\pi/4$	$\pi/3$	2	3	0	0,1	V_C
2	0,01	0,001	2	$\pi/3$	$\pi/6$	3	2	0,1	0	ω_E
3	0,02	0,003	3	$\pi/6$	$\pi/4$	4	2	0	0,2	V_D
4	0,03	0	4	$\pi/4$	$\pi/3$	2	4	0,2	0	ω_B
5	0	0,002	5	$\pi/3$	$\pi/6$	5	2	0	0,3	V_A
6	0,01	0,001	1	$\pi/6$	$\pi/4$	2	5	0,3	0	V_C
7	0,02	0	2	$\pi/4$	$\pi/3$	5	3	0	0,1	ω_E
8	0,03	0,003	3	$\pi/3$	$\pi/6$	3	5	0,1	0	V_D
9	0,05	0,004	4	$\pi/6$	$\pi/4$	4	3	0	0,2	ω_B
10	0	0,002	5	$\pi/4$	$\pi/3$	3	4	0,2	0	V_A
11	0,01	0	1	$\pi/3$	$\pi/6$	2	2	0	0,3	V_C
12	0,02	0,002	2	$\pi/6$	$\pi/4$	6	3	0,3	0	ω_E
13	0,03	0,001	3	$\pi/4$	$\pi/3$	6	2	0	0,3	V_D
14	0,04	0,003	4	$\pi/3$	$\pi/6$	2	4	0,2	0	ω_B
15	0	0,004	5	$\pi/6$	$\pi/4$	2	3	0	0,2	V_A
16	0,01	0,003	4	$\pi/4$	$\pi/3$	2	3	0	0,1	V_C
17	0,02	0,004	3	$\pi/3$	$\pi/6$	3	2	0,1	0	ω_E
18	0,03	0	2	$\pi/6$	$\pi/4$	4	3	0	0,2	V_D
19	0	0,002	1	$\pi/4$	$\pi/3$	2	2	0,2	0	ω_B
20	0,04	0,008	2	$\pi/4$	$\pi/4$	3	4	0	0,3	V_A

Пример выполнения задания Д 2

Механическая система (рис. 2.12) начинает движение из состояния покоя. Она включает цилиндрический каток F радиуса $R_F = 0{,}6$ м, массой $m_F = 10$ кг и моментом инерции относительно центральной оси $J_{CF} = 6$ кг·м^2, скатывающийся по наклонной плоскости; шкив E радиуса $r_E = 0{,}2$ м, массой $m_E = 2$ кг и моментом инерции относительно оси вращения $J_{ZE} = 0{,}2$ кг·м^2; груз A массой $m_A = 1$ кг. Груз A и каток F движутся по шероховатым поверхностям (коэффициент трения скольжения $f = 0{,}02$; трения качения – $k = 0{,}002$ м). К шкиву E приложена пара сил сопротивления с моментом $M_{CE} = 0{,}1$ кН.

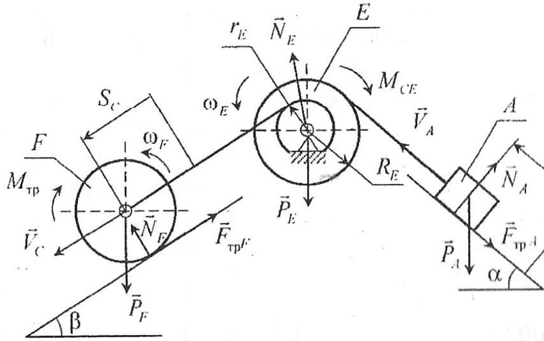

Рис. 2.12. К примеру выполнения задания Д 2

Определить скорость V_C центра масс катка F после того, как эта точка пройдет по наклонной плоскости путь $S_C = 2$ м. Считать, что $\alpha = \pi/4$ рад; $\beta = \pi/3$ рад; $R_E / r_E = 3$.

Поскольку требуется установить связь между скоростью точки C цилиндра и ее перемещением, то применим к механической системе теорему об изменении кинетической энергии.

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i^e, \tag{2.19}$$

где T_1, T_2 – кинетическая энергия системы в начальный и конечный моменты времени (по условию примера $T_1 = 0$); $\sum_{i=1}^{n} A_i^e$ – сумма работ внешних сил системы на ее перемещении.

Определим кинетическую энергию системы T_2 (рис. 2.12) и выразим ее через V_C.

$$T_2 = T_F + T_E + T_A,$$

где T_F, T_E, T_A – кинетическая энергия тел F, E, A соответственно.

Так как цилиндр F совершает плоское движение, то

$$T_F = \frac{1}{2} m_F V_C^2 + \frac{1}{2} J_{CF} \omega_F^2,$$

где ω_F – угловая скорость цилиндра.

По методу мгновенного центра скоростей $\omega_F = V_C / R_F$, где R_F – радиус катка F. Тогда

$$T_F = \frac{1}{2} m_F V_C^2 + \frac{1}{2} J_{CF} \frac{V_C^2}{R_F^2} = \frac{V_C^2}{2}\left(m_F + \frac{J_{CF}}{R_F^2} \right).$$

Так как шкив E вращается вокруг неподвижной оси, то

$$T_E = \frac{1}{2} J_{ZE} \omega_E^2,$$

где ω_E – угловая скорость шкива, причем $\omega_E = V_C / r_E$. Тогда

$$T_E = \frac{1}{2} J_{ZE} \frac{V_C^2}{r_E^2}.$$

Так как груз A движется поступательно, то

$$T_A = \frac{1}{2} m_A V_A^2,$$

где V_A – скорость груза.

Скорость V_A имеют точки шкива E, отстоящие от его оси вращения на расстоянии R_E, поэтому

$$V_A = \omega_E R_E = \frac{R_E}{r_E} V_C. \qquad (2.20)$$

Тогда

$$T_A = \frac{1}{2} m_A \frac{R_E^2}{r_E^2} V_C^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T_2 = \frac{1}{2}\left[\left(m_F + \frac{J_{CF}}{R_F^2}\right) + \frac{J_{ZE}}{r_E^2} + m_A \frac{R_E^2}{r_E^2}\right] \cdot V_C^2. \qquad (2.21)$$

Определим сумму работ внешних сил системы, выразив ее через S_C.

Изобразим внешние силы системы (рис. 2.12).

Здесь $\vec{P}_A$, $\vec{P}_E$, $\vec{P}_F$ – силы тяжести тел системы; $\vec{N}_A$, $\vec{N}_F$, $\vec{N}_E$ – нормальные реакции наклонных плоскостей и оси шкива; $\vec{F}_{\text{тр}A}$, $\vec{F}_{\text{тр}F}$ – силы трения скольжения; $M_{\text{тр}}$, M_{CE} – моменты пар сил трения качения и сил сопротивления.

Оценим работы сил и пар сил.

$$A(P_F) = P_F S_C \cdot \sin\beta = m_F g S_C \cdot \sin\beta,$$

$$A(M_{\text{тр}}) = -\frac{k}{R_F} N_F S_C = -\frac{k}{R_F} m_F g S_C \cdot \cos\beta,$$

$$A(M_{CE}) = -M_{CE}\varphi_E.$$

Здесь $\varphi_E = S_C / r_E$ – угол поворота шкива E. Тогда

$$A(M_{CE}) = -\frac{M_{CE}}{r_E} S_C,$$

$$A(P_A) = -m_A g S_A \cdot \sin\alpha,$$

где S_A – перемещение груза A вдоль наклонной плоскости.

Из формулы (2.20) следует, что

$\dfrac{V_A}{V_C} = \dfrac{R_E}{r_E} = \text{const}$, поэтому $\dfrac{V_A}{V_C} = \dfrac{S_A}{S_C}$, т. е. $S_A = \dfrac{R_E}{r_E} S_C$.

Тогда

$$A(P_A) = -m_A g \frac{R_E}{r_E} S_C \cdot \sin\alpha,$$

$$A(F_{\text{тр}A}) = -fN_A S_A = -f m_A g \frac{R_E}{r_E} S_C \cdot \cos\alpha.$$

Силы $\vec{P}_E$, $\vec{N}_E$, $\vec{F}_{\text{тр}F}$ работы не совершают, т. к. они приложены в неподвижных точках. Сила $\vec{N}_A$ перпендикулярна перемещению точки ее приложения, ее работа также равна нулю.

Сумма работ внешних сил

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^e = \left(m_F g \sin\beta - \frac{k}{R_F} m_F g \cos\beta - m_A g \frac{R_E}{r_E} \sin\alpha - f m_A g \frac{R_E}{r_E} \cos\alpha \right) \cdot S_C \quad (2.22)$$

По формуле (2.19)

$$\frac{1}{2}\left[\left(m_F + \frac{J_{CF}}{R_F^2} \right) + \frac{J_{ZE}}{r_E^2} + m_A \frac{R_E^2}{r_E^2} \right] \cdot V_C^2 =$$

$$= \left(m_F g \left(\sin\beta - \frac{k}{R_F} \cos\beta \right) - \frac{M_{CE}}{r_E} - m_A g \frac{R_E}{r_E} (\sin\alpha + f\cos\alpha) \right) \cdot S_C.$$

Отсюда

$$V_C = \sqrt{\frac{2\left(m_F g \left(\sin\beta - \frac{k}{R_F} \cos\beta \right) - \frac{M_{CE}}{r_E} - m_A g \frac{R_E}{r_E} (\sin\alpha + f\cos\alpha) \right) \cdot S_C}{m_F + \frac{J_{CF}}{R_F^2} + \frac{J_{ZE}}{r_E^2} + m_A \frac{R_E^2}{r_E^2}}}.$$

Подставляем числовые значения:

$$V_C = \sqrt{\frac{2\left(10 \cdot 9{,}8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{0{,}002}{0{,}6} \cdot \frac{1}{2} \right) - \frac{0{,}1}{0{,}2} - 1 \cdot 9{,}8 \cdot 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}02 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \cdot 2}{10 + \frac{2}{0{,}6^2} + \frac{0{,}2}{0{,}2^2} + 1 \cdot 9}} = 2{,}93\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$