1 семестр

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лекция 1. Предел функции в точке и при $x \to \pm\infty$. Односторонние пределы. Действия над пределами. Бесконечно малые функции, таблица эквивалентных бесконечно малых и ее применение при вычислении пределов функций

1.1. *Обозначения*

Множества (любой природы) обозначаются большими латинскими буквами $(A, B, ...)$, а их элементы – малыми латинскими буквами $(a, b, x, y, ...)$. Большими латинскими буквами обозначаются также высказывания (например, $A \equiv \{$число $m \cdot (m+1) \cdot (m+2)$ делится на $3\}$). Везде ниже вводятся следующие обозначения:

$\forall$ – “всякий”, “каждый”, “ для всякого”,“для каждого”,

$\exists$ – “существует”, “найдется хотя бы один”,

$\in$ – “принадлежит”, $\notin$ – “не принадлежит”,

$\Rightarrow$ – “следует из”, “вытекает из”,

$\Leftrightarrow$ – “эквивалентно”, “необходимо и достаточно”, “тогда и только тогда”,

$\subset$ – “входит в”, “содержится в”

$\equiv$ или $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ – “по определению” (в тексте слово “если”)

$\wedge$ – логическое “**И**”, $\vee$ – логическое “**ИЛИ**”,

$A \cup B$ – объединение множеств A и B, $A \cap B$ – пересечение множеств A и B,

$A \backslash B$ – разность множеств A и B, $\bar{A}$ – дополнение A (если A – высказывание, то $\bar{A}$ – отрицание высказывания A).

Через $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ обозначаются множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел соответственно $(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$.

1.2. Модуль (абсолютная величина) действительного числа

Модуль числа a определяется следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} +a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля:

1. $(|x| \geq +x) \wedge (|x| \geq -x)$; **2.** $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$; **3.** $|x| \geq a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x \geq +a) \vee (x \leq -a)$;

4. $|x+y| \leq |x| + |y|$; **5.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; **6.** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$;

7. $|x^\alpha| = |x|^\alpha$;

8. $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

1.3. Понятие функции

Пусть даны два множества A и B.

Определение 1.1. *Говорят, что на множестве A задана функция $y = f(x)$, отображающая множество A в множество B (пишут $y = f(x) : A \to$ если каждому элементу $x \in A$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in B$ по закону $y = f(x)$. При этом x называется аргументом функции $y = f(x)$, а y – значением этой функции (при указанном значении аргумента x). Множество A называется* ***областью определения*** *функции $f(x)$ (обозначение: $A = D(f)$), а множество $E(f) = \{y \in B / \exists x \in A : \ y = f(x)\}$ называется* ***множеством значений этой функции***.

Чаще всего функцию задают двумя способами: а) *табличный способ* (здесь для каждого аргумента x указывается соответствующий y) и б*) аналитический способ* (формулой; например $y = \sqrt{\sin(\log_2 x)}$). При аналитическом задании функции $y = f(x)$ в качестве области определения обычно берут *естественную область определения*, т.е. множество $D(f) = \{x$: выражение $f(x)$ имеет смысл$\}$. Например, $D\left(\sqrt{\log_2 x}\right) = \{x : \ x \geq 1\}$. Будет также использоваться обозначение $f(G)$ для множества всех значений $f(x)$, когда x пробегает подмножество $G \subset D(f)$.

1.4. Предел функции

Сначала дадим понятие предела функции в конечной точке $x = x_0 \neq \infty$. Различают *проколотую* δ*-окрестность* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *точки* $x = x_0$, которая определяется как симметричный интервал $(x_0-\delta, x_0+ + \delta)$ с выброшенной точкой x_0 :

$$\dot{U}_{x_0}(\delta) \equiv \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

и просто δ*-окрестность* $U_{x_0}(\delta)$ точки $x = x_0$, совпадающую с указанным интервалом:

$$U_{x_0}(\delta) \equiv \{x : |x - x_0| < \delta\} \equiv (x_0 - \delta, x_0 - \delta).$$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}$ точки x_0 (в самой точке x_0 функция может быть определена или нет; её значение в точке x_0 не существенно).

Определение 1.2. Говорят, что число P является пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ (зависящее, вообще говоря, от ε) такое, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < 0$, будет иметь место неравенство $|f(x) - P| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P$ и читают: “ предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен P”.

Это определение записывают кратко так:

$$\begin{aligned} &(\lim_{x\to x_0} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \\ &(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Отметим, что в этом определении не фигурирует значение функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (x стремится к x_0, но $x \neq x_0$, так как $0 < < |x-x_0|$). Это означает, что предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P$ не зависит от того, каким является значение функции $f(x)$, в точке $x = x_0$. Например, функции

$$f_1(x) = x^2,\ \ f_2\left(x\right) = \left\{ \begin{array}{c} x^2, x \neq 0, \\ 100, x = 0, \end{array} \right. \ \ f_3\left(x\right) = \left\{ \begin{array}{c} x^2, x \neq 0, \\ \text{не определена, если}\, x = 0 \end{array} \right.$$

имеют один и тот же предел $P = 0$ в точке $x = 0$.

Геометрически высказывание (1.1) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что кривая $y = f(x)$ при всех $x \in \in \dot{U}_{x_0}(\delta)$ лежит внутри полосы $(P - \varepsilon < y < P + \varepsilon)$. Если эта ситуация будет иметь место для произвольного интервала $(P-\varepsilon, P+\varepsilon)$ (или, что то же самое, для произвольного $\varepsilon > 0$), то число P будет пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$. Если же существует интервал $(P-\varepsilon, P+\varepsilon)$ такой, что в любой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ точки $x = x_0$ найдется абсцисса x, для которой $f(x) \notin (P - \varepsilon, P + \varepsilon)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq P$. Геометрические соображения часто используют при доказательстве существования пределов для конкретных функций.

Теорема 1.1. *Если существует (конечный) предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = = P$, *то он единственен, а сама функция f(x) является ограниченной при* $x \to x_0$, т.е.

существуют постоянные $M > 0, \delta > 0$ ***такие, что для всех*** x ***из проколотой окрестности*** $\dot{U}_{x_0}(\delta) \equiv \{x : 0 < |x - - x_0| < \delta\}$ ***точки*** x_0 ***имеет место неравенство*** $|f(x)| \leq M$.

Замечание 1.1. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию, выделенному жирным шрифтом, то ее называют функцией *класса* $O(1)\,(x \to x_0)$ *и пишут* $f(x) = O(1)\,(x \to x_0)$. Функции класса $O(1)\,(x \to x_0)$ обладают следующими очевидными свойствами.

Теорема 1.2. *Если* $f(x) = O(1)(x \to x_0)$ *и* $g(x) = O(1)(x \to x_0)$, *то* $f(x) \pm g(x) = O(1)(x \to x_0), f(x) \cdot g(x) = O(1)(x \to x_0)$.

1.5. Бесконечно малые функции и их свойства

Определение 1.3. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией в точке* $x = x_0$ *или функцией класса* $o(1)\,(x \to x_0)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. При этом пишут $\alpha(x) = o(1)\,(x \to x_0)$.

Таким образом, $\alpha(x) = o(1)\,(x \to x_0) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall x)\,(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon)$.

Например, функция $\alpha(x) = (1 - x)^2 = o(1)\,(x \to 1)$, а функции $\cos(1/x), x+1, \ln(x + 2)$ не являются функциями класса $o(1)\,(x \to 0)$.

Теорема 1.3. *Имеют место следующие свойства класса* $o(1)\,(x \to 0)$:

1^0) *Если* $\alpha(x) = o(1)\,(x \to x_0)$, то $\alpha(x) = O(1)\,(x \to x_0)$, т.е. $o(1) \subset O(1)\,(x \to x_0)$;

2^0) $o(1) \pm o(1) = o(1)\,(x \to x_0)$;

3^0) $o(1) \cdot o(1) = o\,(1)\,(x \to x_0)$;

4^0) $o(1) \cdot O(1) = o(1)\,(x \to x_0)$.

Доказательство. Свойство 1^0) очевидно. Докажем свойство 2^0) (другие свойства доказываются аналогично). Пусть $\alpha(x) = o(1)$ и $\beta(x) = o(1)\,(x \to x_0)$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_j = \delta_j(\varepsilon) > 0\,(j = 1, 2)$ такие, что

$$(\forall x)\left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\right), \tag{1.2}$$

$$(\forall x)\left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\right). \tag{1.3}$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Тогда $\forall x \in \dot{U}_{x_0}(\delta)$ будут иметь место одновременно неравенства (1.2) и (1.3). Складывая их, получим, что

$$(\forall x)\left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\right).$$

Это и означает, что $\alpha(x) + \beta(x) = o(1)\,(x \to x_0)$, т.е. верно свойство 2^0). Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает связь между бесконечно малыми функциями и функциями, имеющими предел при $x \to x_0$.

Теорема 1.4. *Если существует (конечный) предел* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = P$, *то* $f(x) = P + o\,(1)\,(x \to x_0)$. *Обратно: если функция* $f(x)$ *представляется в виде* $f(x) = P + o(1)\,(x \to x_0)$, *то* $f(x)$ *имеет предел в точке* $x = x_0$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = P$.

Доказательство. Существование предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = P$ эквивалентно высказыванию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\forall x)\,(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon)\,. \tag{1.4}$$

Высказывание (1.4), в свою очередь, эквивалентно тому, что функция $\alpha(x) = f(x) - P = o(1)\ \ (x \to x_0)$, т. е. что $f(x) = P + o(1)\,(x \to x_0)$. Теорема доказана.

Замечание 1.2. Равенство $f(x) = P + o(1)\,(x \to x_0)$ называют *асимптотическим разложением функции* $f(x)$, *имеющей предел в точке* $x = x_0$.

И, наконец, дадим определение предела функции в бесконечности. Сделаем это кратко.

Определение 1.4. Множества

$$U_{\infty}(R) = \{x : |x| > R\}\,, U_{-\infty}(R) = \{x : x < -R\}\,,\\ U_{+\infty}(R) = \{x : x > R\}$$

называются R-окрестностями точек $x_0 = \infty, x_0 = -\infty, x_0 = +\infty$ соответственно. Следующие высказывания являются определениями предела функции $f(x)$ в бесконечности:

$$1)\,(\lim_{x\to\infty} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) > 0 :$$

$$(\forall x)\,(x \in U_{\infty}(R) \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon));$$

$$2)\,(\lim_{x\to-\infty} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) > 0 :$$

$$(\forall x)\ (x \in U_{-\infty}(R) \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon));$$

$$3)\ (\lim_{x\to+\infty} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) > 0 :$$

$$(\forall x)\,(x \in U_{+\infty}(R) \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon)\,.$$

Перейдем теперь к обоснованию арифметических действий над пределами.

Теорема 1.5. *Если существуют (конечные) пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P_1, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = P_2,$ *то и существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)]\,, \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]\,;$ *при этом*

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)\,,$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)\,.$$

Если (кроме существования пределов P_1 *и* P_2 *) выполняется ещё условие* $P_2 \neq 0,$ *то существует предел частного* $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)/g(x)]\,,$ *причем*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Доказательство. Докажем, например, теорему о пределе произведения. Так как существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P_1, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = P_2,$ то по теореме 1.4 имеют место асимптотические разложения $f(x) = P_1 + o(1)\,(x\to x_0)\,, g(x) = P_2 + o(1)\,(x\to x_0)\,.$ Умножая эти равенства друг на друга, будем иметь

$$f(x)\cdot g(x) = P_1P_2 + P_1\cdot o(1) + P_2\cdot o(1) + o(1)\cdot o(1).$$

Поскольку $P_j = \mathrm{const} = O(1)\,(x\to x_0)\,,$ то $P_j\cdot o(1) = o(1), j = 1, 2$ (см. теорему 1.3). Далее, поскольку $o(1)\cdot o(1) = o(1), o(1) + o(1) + o(1) = o(1),$ то функция $f(x)\cdot g(x)$ представляется в виде $f(x)\cdot g(x) = P_1P_1 + o(1)\,(x\to x_0)\,.$ По теореме 1.4 отсюда следует, что существует предел произведения $f(x)\cdot g(x)$ при $x\to x_0$ и он равен

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = P_1\cdot P_2 = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)\,.$$

Теорема доказана.

1.6. Эквивалентные бесконечно малые. Таблица эквивалентных бесконечно малых

Введем следующее понятие. Пусть x_0 — конечная или бесконечная точка и пусть функции $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Определение 1.5. *Две бесконечно малые функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *(при* $x\to x_0$*) называются эквивалентными, если* $\beta(x)\neq 0$ *в некоторой проколотой окрестности* $\dot U_{x_0}(\delta)$ *и если*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

При этом пишут: $\alpha(x)\sim\beta(x)\;(x\to x_0)\,.$

Важность этого понятия становится ясной при формулировке следующего утверждения, используемого при вычислении пределов.

Теорема 1.6. *Если* $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)\,,\ \beta(x)\sim\beta_1(x)\,(x\to x_0)$ *и если существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = P,$ *то существует и предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ *и он также равен числу* $P.$

Доказательство. Переходя в тождестве $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \equiv \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$ к пределу при $x \to x_0$ и учитывая, что $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)\ (x \to x_0)$, получаем утверждение теоремы.

Используя эту теорему, а также формулы:

Таблица 1.1 эквивалентных бесконечно малых

Если $u(x) \to 0$ *при* $x \to x_0$, *то при* $x \to x_0$ *верны следующие* соотношения:

1) $\sin u \sim u$,

2) $\mathrm{tg} u \sim u$,

3) $\arcsin u \sim u$,

4) $\mathrm{arctg}\, u \sim u$,

5) $1 - \cos u \sim \dfrac{1}{2}u^2$,

6) $e^u - 1 \sim u$,

7) $a^u - 1 = u \ln a,\ a > 0, a \neq 1$,

8) $\ln(1+u) \sim u$,

9) $(1+u)^\sigma - 1 \sim \sigma \cdot u$, $\sigma = \mathrm{const}$.

можно без особого труда вычислять пределы конкретных функций.

Пример 1.1. $P = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = [x-1 = u, x = u+1] = \lim\limits_{u\to 0} \frac{-\sin \pi u}{u} = [\sin \pi u \sim \pi u (u \to 0)] =$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-\pi u}{u} = \lim_{u\to 0}(-\pi) = -\pi.$$

1.7. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta_0)$ точки $x = x_0$.

Определение 1.6. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (ББФ) при $x \to x_0$, если для всякого $R > 0$ существует число $\delta = \delta(R) > 0$ такое, что

$$(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > R).$$

При этом пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Заметим, что ∞ – это не число, а символ, поэтому бесконечный предел – это всего лишь обозначение бесконечно большой функции. Тем не менее при вычислениях удобно относиться к бесконечному пределу как к обычному, хотя для бесконечных пределов и существуют свои правила действий, несколько отличные от правил действий над конечными пределами (см. ниже свойства $10^0 - 13^0$).

Если функция $f(x)$ сохраняет знак в некоторой проколотой окрестности точки $x = x_0$ и является при этом бесконечно большой функцией, то естественно писать

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ \ (\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty)$$

(в зависимости от знака функции $f(x)$ в указанной окрестности). Более точно:

$$(\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall R > 0 \exists \delta = \delta(R) > 0 :$$

$$(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > R)),$$

$$(\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall R > 0 \exists \delta = \delta(R) > 0 :$$

$$(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -R)).$$

В этих определениях и определении 5 фигурирует окрестность

$$\dot{U}_{x_0}(\delta) = \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\} \subset \dot{U}_{x_0}(\delta_0)$$

конечной предельной точки $x_0 (x_0 \neq \infty)$. Почти дословно определяются бесконечно большие функции на бесконечности. В этом случае под точкой $x = x_0$ следует понимать один из символов: $\infty, -\infty, +\infty$, а под окрестностью $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ – окрестность соответствующей бесконечно удаленной точки x_0. Например,

$$(\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall R > 0 \exists M = M(R) > 0 :$$

$$(\forall x)(x > M \Rightarrow f(x) < -R)).$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1.7. *Пусть функция $\alpha(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ точки $x = x_0$. Тогда справедливо высказывание*

$$(\alpha(x) = o(1)(x \to x_0)) \Leftrightarrow \left(f(x) = \frac{1}{\alpha(x)} - \text{ББФ } (x \to x_0)\right).$$

Иначе говоря, для того чтобы функция $\alpha(x)$ была бесконечно малой при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы обратная к ней по величине функция $f(x) = 1/\alpha(x)$ была бесконечно большой при $x \to \to x_0$.

Используя эту теорему, можно доказать истинность следующих операций над бесконечно большими функциями:

$$10^0)(\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \infty);$$

$$11^0)(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty) \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty(-\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = +\infty(-\infty);$$

$$12^0)(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty) \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty(+\infty)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=+\infty(-\infty));$$

$13^0)(\lim\limits_{x\to x_0} f\,(x) = P^{\neq 0}_{\neq\infty} \wedge \alpha(x)=o(1)(x\to x_0)\wedge\alpha(x)\neq 0 \forall x\in \dot{U}_{x_0}(\delta_0)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{\alpha(x)}-\text{ББФ}\,(x\to x_0)\right).$$

И, наконец, отметим ещё ряд свойств, связанных с пределами функций.

Теорема 1.8 (о пределе промежуточной функции)**.** *Пусть в некоторой окрестности* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *точки* $x=x_0$ *выполняются неравенства* $\varphi\,(x)\leq f\,(x)\leq\psi\,(x)$ *и пусть, кроме того, крайние функции имеют пределы в точке* $x=x_0$ *и эти пределы равны друг другу, т.е.*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi\,(x)=\lim_{x\to x_0}\psi\,(x)=P.$$

Тогда существует предел промежуточной функции и он равен P*, т. е.* $\lim\limits_{x\to x_0} f\,(x)=P$*.*

Теорема 1.9. *Пусть в некоторой окрестности* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *точки* $x=x_0$ *выполняются неравенства* $\varphi\,(x)\leq f\,(x)$ *и пусть существуют пределы*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi\,(x)=P_1,\lim_{x\to x_0} f\,(x)=P_2.$$

Тогда $P_1\leq P_2$ (докажите это утверждение самостоятельно).

Теорема 1.10 (о знаке предела)**.** *Если в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *функция* $f\,(x)$ *неотрицательна (неположительна) и существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f\,(x)=P$*, то* $P\geq 0$ *(соответственно* $P\leq 0$ *).*

В тех случаях, когда при вычислении того или иного предела непосредственный переход к пределу при $x\to x_0$ приводит к одному из символов типа

$$\infty-\infty, 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 1^\infty,$$

возникает ситуация, в которой становятся неприменимы теоремы об арифметических действиях над пределами. В таких случаях возникает *неопределенность* при решении вопроса о существовании предела или его величины. Эта неопределенность может быть снята после некоторых тождественных преобразований. В этом случае говорят, что тождественные преобразования приводят к *раскрытию неопределенности.* Поясним сказанное примером.

Пусть требуется вычислить предел $P = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot\sin x}{\mathrm{tg}^2 x}$. Если в указанном отношении мы сразу же перейдем к пределу, то получим неопределенность типа $0/0$. Что скрывается под этим символом, мы пока не знаем. Попробуем избавиться от неопределенности. Применим для этого таблицу 1.1 эквивалентных бесконечно малых и теорему 1.5. Получим

$$P = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\sin x}{\mathrm{tg}^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \lim 1 = 1$$

Для усвоения изложенной теории рекомендуем выполнить задачи из типового расчета “Пределы,” помещённого в конце пособия.

Лекция 2. Односторонние пределы функции в точке. Непрерывность функции. Разрывные функции и классификация точек разрыва. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Производная сложной функции. Таблица производных

2.1. Односторонние пределы

Дадим их кратко.

Определение 2.0. ***Левый предел*** *функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *(обозначение:* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \equiv f(x_0-0)$*)* :

$$\left(f(x_0-0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0 (x<x_0)} f(x) = A\right) \Leftrightarrow$$

$$(\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ (\forall x)\ (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon)).$$

Правый предел *функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *(обозначение:* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \equiv f(x_0+0)$*)* :

$$\left(f(x_0+0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0 (x>x_0)} f(x) = A\right) \Leftrightarrow$$

$$(\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ (\forall x)\ (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon)).$$

Очевидно следующее свойство:

1^0) *Для существования обычного предела* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние пределы* $f(x_0 \pm 0)$ *и чтобы имело место равенство*

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = P.$$

2.2. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности.

Определение 2.1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. если

$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall x)\left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right).$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева (справа) в точке* $x = x_0$, *если* $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ *(соответственно* $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ *).*

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* A если она непрерывна в каждой точке $x_0 \in A$ этого множества.

Очевидны следующие высказывания.

2^0) $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = f(x_0) + o(1)\,(x \to x_0)$. [1]

3^0) *Для того чтобы функция* $f(x)$ *была непрерывна в точке* $x = x_0$, *необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева и справа в точке* $x = x_0$.

Нетрудно показать, *что сумма, разность и произведение двух функций, непрерывных в точке* $x = x_0$, *также являются непрерывными в этой точке функциями. Частное* $f(x)/g(x)$ *двух непрерывных в точке* $x = x_0$ *функций непрерывно в этой точке, если* $g(x_0) \neq 0$.

С непрерывными функциями связаны следующие два важных утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть сложная функция* $f(\varphi(x))$ *определена в некоторой проколотой окрестности точки* $x = x_0$ *и пусть выполнены условия:*

а) существует $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = u_0$,

б) функция $f(u)$ *непрерывна в точке* $u = u_0$.

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} \varphi(x)\right) = f(u_0).$$

[1] Это равенство называется асимптотическим разложением непрерывной в точке $x = x_0$ функции.

Теорема 2.2. *Пусть сложная функция $f(\varphi(x))$ определена в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности и пусть выполнены условия:*

а) функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$,

б) функция $f(u)$ непрерывна в соответствующей точке $u = = u_0 = \varphi(x_0)$.

Тогда сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x = x_0$.

Теорему 2.1 называют теоремой *о переходе к пределу под знаком непрерывной функции,* а теорему 2.2 − теоремой *о непрерывности сложной функции.*

Пример 1.1. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \cos(\sin x/x) = P$.

Решение. Так как существует $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x/x) = 1$, а функция $\cos u$ непрерывна в точке $u = 1$, то по теореме 2.1 имеем

$$\lim_{x \to 0} \cos(\sin x/x) = \cos\left(\lim_{x \to 0} \sin x/x\right) = \cos 1\ .$$

Определение 2.3. Функции вида

$$c = \text{const}, \sqrt[n]{x}, x^{\alpha}\,(\alpha \in R)\,, a^x, \log_a x\,(a > 0, a \neq 1)\,,\ \sin x, \cos x,$$

$$\text{arcsin}x, \text{arccos}x, \text{arctg}x, \text{arcctg}x$$

называются *простейшими элементарными функциями.* Всякая функция, полученная из простейших элементарных функций путем применения к ним *конечного числа операций* сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функций от функций (т.е. образования сложных функций) называется *элементарной функцией (общего вида).*

Имеет место следующая замечательная теорема.

Теорема 2.3. *Всякая элементарная функция $f(x)$ непрерывна в любой внутренней точке своей области определения $D = D(f)$.*

Напомним, что точка $x = x_0$ называется *внутренней точкой множества* D, если она входит в D вместе с некоторой своей окрестностью $U_{x_0}(\delta)$.

Например, функция $f(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)}{x-1}$ непрерывна на множестве $D = (x > -1, x \neq 1)$, так как это множество является областью определения функции $f(x)$ и все точки этого множества − внутренние.

Если хотя бы одно из условий определения 2.1 не выполнено, то функция $f(x)$ называется *разрывной в точке* $x = x_0$. Различают два типа разрывов:

Точка $x = x_0$ **– точка *разрыва I рода,*** если:

а) существуют $f(x_0)$ и конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$, но либо они не совпадают, либо хотя бы один из них не равен значению $f(x_0)$;

б) существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$, но $f(x)$ не определена в точке $x = x_0$.

Точка $x = x_0$ **– точка *разрыва II рода:*** если либо не существует хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$, либо хотя бы один из них равен бесконечности.

Например, точка $x = 0$ – точка разрыва I рода для функций

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0, \end{cases}$$

а для функции $f(x) = \sin 1/x$ она является точкой разрыва II рода.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = x_0$ – *вертикальная асимптота для функции* $y=f(x)$. Прямая $y = kx + b$ *называется наклонной (горизонтальной при* $k = 0$*) асимптотой функцииу* $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x) - (kx + b)| = 0$. Нетрудно показать, что если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx),$$

то прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой $y = f(x)$. Таким образом, асимптоты функции $y = f(x)$ могут возникнуть при подходе x к точкам разрыва $x = x_0$ второго рода этой функции либо на бесконечности.

Рекомендуем ответить на теоретические вопросы и теоретические упражнения, касающиеся изложенной выше темы, в типовом расчёте “Пределы.”

2.3. Производная функции в точке, ее геометрический и механический смысл

На рисунке 2.1 изображены график функции $y = f(x)$, точки $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$, M_0M − секущая, M_0N − касательная к кривой $y = f(x)$, углы $\alpha = \left(\overrightarrow{M_0N},^\wedge \overrightarrow{Ox}\right)$, $\beta = \beta(\Delta x) = \left(\overrightarrow{M_0M},^\wedge \overrightarrow{Ox}\right)$.
Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности U_{x_0}.

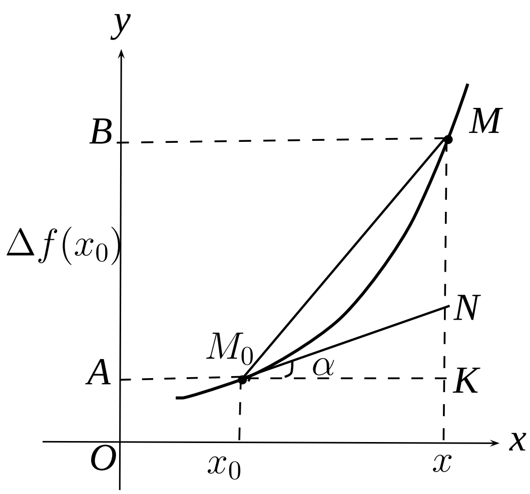


Рис. 2.1

Сместимся из точки x_0 в точку x. Величина $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением аргумента в точке* $x = x_0$, а величина $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \equiv \Delta f(x_0)$ *называется приращением функции* $y = f(x)$ *в точке* $x = x_0$ (соответствующим приращению Δx аргумента).

Определение 2.4. Если существует (конечный) предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = P,$$

то его называют *производной функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ и обозначают $f'(x_0) \equiv \frac{dy}{dx}\big|_{x=x_0}$. При этом функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке* $x = x_0$, а величину $dy \equiv df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x \equiv f'(x_0)\cdot dx$ называют *дифференциалом функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$.

Выясним, в чем состоит геометрический смысл производной и дифференциала. Так как $\operatorname{tg}\beta(\Delta x) = \frac{MK}{M_0K} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ и так как $\beta(\Delta x) \to \alpha$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$, т.е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, значит,

производная функции $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *является угловым коэффициентом касательной к кривой* $y = f(x)$ *с точкой касания* $M_0(x_0, f(x_0))$.

С другой стороны, из рисунка видно,что $NK = M_0K\cdot\operatorname{tg}\alpha = \Delta x \times$ $\times f'(x_0) = df(x_0)$, поэтому

дифференциал $df(x_0)$ *равен приращению касательной* M_0N *к графику функции* $y = f(x)$ *при переходе аргумента из точки* x_0 *в точку* $x_0+\Delta x$.

Используя геометрический смысл производной легко получить уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (*касательная*),

$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ (здесь $f'(x_0) \neq 0$), $x = x_0$ ($f'(x_0) = 0$) (*нормаль*).

Выясним теперь механический смысл производной. Если $S = S(t)$ – путь пройденный материальной точкой за время от момента t_0 до момента $t_0 + \Delta t$, то $\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$ – средняя скорость материальной точки, а величина

$v(t_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0)$ – *мгновенная скорость материальной точки в момент* $t = t_0$.

Нетрудно показать, что

4^0) *любая дифференцируемая в точке* $x = x_0$ *функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x = x_0$ (обратное, вообще говоря, неверно; пример: $f(x) = |x|$ – непрерывна в точке $x = 0$, но $f'(0)$ не существует).

2.4. Арифметические действия над производными

Теорема 2.4. *Если функции* $u = u(x)$, $v = v(x)$ *дифференцируемы в точке* x, *то в этой точке дифференцируемы и функции* $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, *причем*

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \ (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

в рассматриваемой точке x .

Если, кроме того, $v(x) \neq 0$, *то в точке* x *дифференцируемо и частное, причем*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Доказательство проведем для производной суммы. Имеем

$$\Delta(u(x) + v(x)) \equiv (u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)) - (u(x) + v(x)) =$$
$$= (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)) =$$
$$= \Delta u(x) + \Delta v(x),$$

поэтому

$$\frac{\Delta\left(u\left(x\right)+v\left(x\right)\right)}{\Delta x}=\frac{\Delta u\left(x\right)}{\Delta x}+\frac{\Delta v\left(x\right)}{\Delta x}\Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(u\left(x\right)+v\left(x\right)\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\left(x\right)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v\left(x\right)}{\Delta x}=u'\left(x\right)+v'\left(x\right).$$

Теорема доказана.

2.5. Производная сложной и обратной функций и функции, заданной параметрически

Приведем без доказательства некоторые утверждения, связанные с производными.

Теорема 2.5. *Пусть сложная функция* $y=f\left(g\left(x\right)\right)$ *определена в точке* x *и некоторой ее окрестности и пусть выполнены условия:*

1. функция $u=g\left(x\right)$ *дифференцируема в точке* x,

2. функция $y=f\left(u\right)$ *дифференцируема в соответствующей точке* $u=g\left(x\right)$.

Тогда сложная функция $y=f\left(g\left(x\right)\right)$ *дифференцируема в точке* x *и имеет место равенство*

$$\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)'=f'\left(u\right)\big|_{u=g(x)}\cdot g'\left(x\right).$$

Напомним некоторые понятия.

а) Функция $y=f\left(x\right):\ A\to f\left(A\right)$ называется *обратимой на множестве* A, если

$$\left(\forall x_1,x_2\in A\right)\left(x_1\neq x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\neq f\left(x_1\right)\right).$$

При этом функция $x=g\left(y\right):\ f\left(A\right)\to A$, сопоставляющая каждому $y\in f\left(A\right)$ элемент $x\in A$ такой, что $f\left(x\right)=y$, называется функцией, *обратной к* $f\left(x\right)$.

Очевидно, имеют место тождества:

$$f\left(g\left(y\right)\right)\equiv y\ \left(\forall y\in f\left(A\right)\right);\ g\left(f\left(x\right)\right)\equiv x\left(\forall x\in A\right).$$

Заметим, что все строго монотонные на множестве A функции обратимы на A.

б) Говорят, что функция $y = f(x)$ *задана параметрически уравнениями* $x = x(t), y = y(t)$ $(a \leq x \leq b)$, *если функция* $x = x(t)$ *обратима на отрезке* $[a, b]$. В этом случае $f(x) \equiv y(g(x))$, где $t = g(x)$ – функция, обратная к функции $x = x(t)$.

Теорема 2.6. *Пусть функция* $y = f(x)$ *в некоторой окрестности точки* $x = x_0$ *имеет обратную функцию* $x = g(y)$. *Пусть, кроме того, функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* $x = x_0$ *и* $f'(x_0) \neq 0$. *Тогда обратная функция* $x = g(y)$ *дифференцируема в соответствующей точке* $y = y_0 = f(x_0)$ *и имеет место равенство* $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Теорема 2.7. *Пусть* функция $y = f(x)$ *задана параметрически уравнениями* $x = x(t), y = y(t)$ $(a \leq x \leq b)$ *и пусть выполнены условия:*

1) функции $x = x(t), y = y(t)$ *дифференцируемы в фиксированной точке* $t \in [a, b]$;

2) $x'(t) \neq 0$ *в рассматриваемой точке* t.

Тогда функция $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* t *и имеет место равенство*

$$f'(x)\,|_{x=x(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \;\Leftrightarrow\; y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

2.6. Производные простейших элементарных функций

Используя определение 2.4 производной, а также теоремы 2.6 и 2.7, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.8. *В области определения соответствующих функций* *имеют место формулы:*

Таблица 2.1 производных

1) $(C)^{'} = 0 \ (C = \text{const.})\,;$

2) $(a^x)^{'} = a^x \cdot \ln a \ \ \left(a_{\neq 1}^{>0} = \text{const.}\right),\ \ (e^x)^{'} = e^x;$

3) $(x^{\alpha})^{'} = \alpha x^{\alpha - 1} \ \ (\alpha = \text{const.})\,;$

4) $(\ln |x|)^{'} = \dfrac{1}{x} \ \ (x \neq 0)\,;$

5) $(\sin x)^{'} = \cos x,\ \ (\cos x)^{'} = -\sin x,\ \ (\operatorname{tg} x)^{'} = \dfrac{1}{\cos^2 x},$

$(\operatorname{ctg} x)^{'} = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

6) $(\arcsin x)^{'} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ \ (\arccos x)^{'} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$

$(\operatorname{arctg} x)^{'} = \dfrac{1}{1 + x^2},\ \ (\operatorname{arcctg} x)^{'} = -\dfrac{1}{1 + x^2};$

7) $(\operatorname{sh} x)^{'} \equiv \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^{'} = \operatorname{ch} x,\ \ (\operatorname{ch} x)^{'} \equiv \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{'} = \operatorname{sh} x,$

$(\operatorname{th} x)^{'} \equiv \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)^{'} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

И, наконец, рассмотрим пример вычисления производной сложной функции, состоящей из многих звеньев:

$$\left(\operatorname{arctg}^2 (\ln\ (\sin (3x + 2)))\right)^{'} = 2\operatorname{arctg} (\ln\ (\sin (3x + 2))) \cdot \tfrac{1}{1 + (\ln\ (\sin(3x+2)))^2} \times$$
$$\times \tfrac{1}{\sin(3x+2)} \cdot \cos\ (3x + 2) \cdot 3.$$

Лекция 3. Логарифмическая производная. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и Пеано. Формулы Маклорена – Тейлора для простейших элементарных функций. Правило Лопиталя. Применение формулы Тейлора

3.1. Логарифмическая производная

При дифференцировании показательно-степенной функции $y = [u(x)]^{v(x)}$ обычно используют *логарифмическую производную* $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Делается это так:

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv e^{\ln[u(x)]^{v(x)}} = e^{v(x)\ln[u(x)]} \Leftrightarrow y' = \left(e^{v(x)\ln[u(x)]}\right)' =$$
$$= e^{v(x)\ln[u(x)]} \cdot (v(x)\ln[u(x)])' = [u(x)]^{v(x)} \cdot \left(v'(x)\ln[u(x)] + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Например, $\left(\left(x^2+1\right)^{x^3}\right)' = \left(e^{x^3\ln\left(x^2+1\right)}\right)' = e^{x^3\ln\left(x^2+1\right)} \times \left(x^3\ln\left(x^2+1\right)\right)' = \left(x^2+1\right)^{x^3} \cdot \left(3x^2\ln\left(x^2+1\right) + x^3\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

3.2. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $f'(x)$ сама является функцией от x, поэтому можно взять от нее производную. Полученная таким образом функция (если она существует) называется второй производной от функции $y = f(x)$ и обозначается $f''(x) \equiv (f'(x))' = y''_{xx}(x)$. И вообще:

если известна производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$, то производная n-го порядка определяется так: $f^{(n)}(x) \equiv \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$. При этом функция $y = f(x)$ называется n раз дифференцируемой в точке x.

Аналогично определяются дифференциалы высшего порядка. Именно: *если известен дифференциал $d^{n-1}f(x)$ $(n-1)$-го порядка то дифференциал n-го порядка определяется так: $d^n f(x) = d\left(d^{n-1}f(x)\right)$; при этом дифференциал $dx = \Delta x$ независимой переменной и все его степени $(dx)^k \equiv dx^k$ считаются постоянными дифференцирования.*

Имеем $d^2y = d\,(dy) = d\,(f'(x)\,dx) = (f'(x))' \cdot dx \cdot dx = f''(x)\,dx^2$. И вообще, справедливо утверждение: *если функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке x, то*

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *В области определения выписанных ниже функций справедливы равенства:*

$$\boxed{\begin{array}{l} 1^0)\ \ (x^\alpha)^{(n)} = \alpha\,(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}\ \ (\alpha = \text{const.}),\\ 2^0)\ (a^x)^{(n)} = (\ln^n a)\cdot a^x\ \ \left(a_{\neq 1}^{>0} = \text{const.}\right),\ \ \ (e^x)^{(n)} = e^x,\\ 3^0)\ \ (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right). \end{array}}$$

Производные n-го порядка являются линейными операциями, т.е.

$$(C_1 u(x) + C_2 v(x))^{(n)} = C_1 u^{(n)}(x) + C_2 v^{(n)}(x)\ \ \ (C_1, C_2 = \text{const.}).$$

Производная n-го порядка для произведения uv вычисляется довольно сложно.

Формула Лейбница. *Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы n раз в точке x, то имеет место равенство*

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = \\ &= u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \dots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь: $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots3\cdot2\cdot1}$ – число сочетаний[2] *из n элементов по k, нулевая производная функции $g(x)$ совпадает с ней самой: $g^{(0)} \equiv$ $\equiv g(x)$.*

Легко видеть, что формула (3.1) напоминает формулу бинома Ньютона; только в ней вместо произведения степеней $u^m v^n$ стоит произведение производных $u^{(m)}v^{(n)}$. Учитывая это, легко записать, например, третью производную от произведения:

$$(uv)''' = [(u+v)^3 = u^3v^0 + 3u^2v^1 + 3u^1v^2 + u^0v^3] = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

[2] Полезно знать, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

3.3. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа

При вычислении пределов функций мы использовали таблицу эквивалентных бесконечно малых. Например, при вычислении предела $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/\operatorname{tg} x)$ мы использовали формулы $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$. Однако этих формул не достаточно для вычисления предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}. \tag{3.2}$$

Нужны более точные формулы или так называемые *асимптотические разложения высших порядков.* Переходя к описанию таких разложений, введем следующее понятие.

Определение 3.1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x = x_0$. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ *асимптотическое разложение* n*-го порядка,* если существуют числа A_j $\left(j=\overline{0,n}\right)$ такие, что $f(x)$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ представляется в виде

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + ... + A_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right). \tag{3.3}$$

Здесь $o\left((x-x_0)^n\right) = (x-x_0)^n\cdot o(1)$ $(x\to x_0)$.

Равенство (3.3) означает, что функция $f(x)$ аппроксимируется в некоторой малой окрестности точки $x = x_0$ многочленом (с точностью до $o\left((x-x_0)^n\right)$). В каком случае функция $f(x)$ имеет асимптотическое разложение n-го порядка? Ответ на этот вопрос содержится в следующем утверждении.

Теорема 3.2. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет в точке* $x = x_0$ *производные* $f^{(0)}(x_0)\equiv f(x_0), f'(x_0), ..., f^{(n)}(x_0)$ *до* n*-го порядка включительно. Тогда* $f(x)$ *имеет в точке* $x = x_0$ *асимптотическое разложение* n*-го порядка вида*

$$\begin{aligned} f(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)\equiv \\ &\equiv f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ &+ ... + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)\ (x\to x_0) \end{aligned} \tag{3.4}$$

(формулу (3.4) называют *формулой Тейлора с остаточным членом* $o\left((x-x_0)^n\right)$ *в форме Пеано или локальной формулой Тейлора).*

Если в (3.4) положить $x_0=0,$ то получим формулу $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$ $(x$
называемую *формулой Маклорена-Тейлора.* Приведем формулы Маклорена-Тейлора для основных элементарных функций.

Теорема 3.3. *Имеют место следующие разложения:*

1. $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)\equiv 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ \ (x\to 0),$
2. $\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)\equiv$
$\equiv x-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)\ (x\to 0),$
3. $\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n}\right)\equiv$
$\equiv 1-\frac{x^2}{2!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)\ (x\to 0),$
4. $\ln\ (1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)\equiv$
$\equiv x-\frac{x^2}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\ \ (x\to 0),$
5. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+...+\frac{(\alpha-n+1)x^n}{n!}+$
$+o(x^n)\ \ (x\to 0,\ \alpha=\mathrm{const}).$

Доказательство этих формул базируется на подсчёте производной n-го порядка соответствующей функции. Докажем, например, формулу 2.

Итак, пусть $f(x)=\sin x.$ По теореме 3.1 имеем

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)\ \Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1,$$
$$f''(0)=\sin\left(2\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)=0,$$
$$f'''(0)=\sin\left(3\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)=-1,...,$$
$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0,\ n=2k,\\ \cos\pi k=(-1)^k,\ n=2k+1.\end{cases}$$

Значит, в формуле

$$f(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f^{(r)}(0)}{r!}x^r+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)+$$
$$+o\left(x^{2n+1}\right)$$

будут отсутствовать все четные степени x, а слагаемые с нечетными степенями $\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ имеют вид $\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Следовательно имеет место формула 2.

Замечание 3.1. В формуле 2 остаточный член можно записать в виде $o\left(x^{2n+2}\right)$, а в формуле 3 – в виде $o\left(x^{2n+1}\right)$ (почему?).

Теорема 3.2 аппроксимирует функцию $f(x)$ лишь в достаточно малой окрестности точки $x = x_0$. Условия представления функции $f(x)$ на некотором отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ (где $h > 0$ может быть достаточно большим) по формуле Тейлора описаны в следующем утверждении.

Теорема 3.4. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)$ *существуют и непрерывны на отрезке* $[x_0 - h, x_0 + h]$;

2) *производная* $f^{(n+1)}(x)$ *существует и конечна по-крайней мере на интервале* $(x_0 - h, x_0 + h)$.

Тогда для всех $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ *функция* $f(x)$ *представляется в виде*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \equiv \\
&\equiv f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\
&+ ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

где точка $x = c$ *находится между точками* x_0 *и* x $(c = x_0 + \theta \cdot (x - x_0),\ 0 < \theta < 1)$

Формулу (3.5) называют (*глобальной) формулой Тейлора с остаточным членом* $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ *в форме Лагранжа.*

Если в формуле (3.5) положить $n = 1$, то получим равенство $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, или, обозначая $x = b$, $x_0 = a$, будем иметь

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),\ c \in (a, b).} \tag{3.6}$$

Эту формулу называют ***формулой Лагранжа***. Она верна в случае, *когда функция* $f(x)$ *непрерывна отрезке* $[a, b]$, *а* $f'(x)$ *существует и конечна по-крайней мере на интервале* (a, b). *Если, кроме того, выполняется условие* $f(a) = f(b)$, *то существует точка* $c \in (a, b)$ *такая, что* $f'(c) = 0$ ***(теорема Ролля)***.

3.4. Применения формулы Тейлора

а) Приближенное вычисление значений функции. Если в формуле (3.4) (или (3.5)) отбросить остаточный член, то получим приближенное значение функции

$$f\left(x\right)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k$$

с точностью до модуля остаточного члена. Если величина $|x-x_0|\ll 1$, то и погрешность этого приближенного равенства будет очень малой. Например, $\sin\frac{1}{2}\approx\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{13}{32}$. При этом

$$\left|\sin\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)\right|\le\left|\frac{\sin^{(6)}\left(\theta\cdot\frac{1}{2}\right)}{6!}\right|\left(\frac{1}{2}\right)^6\le\frac{1}{2^6 6!}=\frac{1}{46080}.$$

б) Вычисление пределов. Ранее мы отметили, что при вычислении предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ не достаточно формулы эквивалентности $\sin\theta\sim\sim\theta\left(\theta\to 0\right)$, так как при использовании этой формулы не исчезает неопределенность. В таких случаях пользуются локальной формулой Тейлора (3.4), записывая в ней столько слагаемых, чтобы стало возможным ликвидировать неопределенность. В нашем примере поступаем так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}+o\left(1\right)\right)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}.$$

3.5. Правило Лопиталя

Другой способ раскрытия неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ доставляет так *называемое правило Лопиталя*, к изложению которого мы переходим.

Теорема Лопиталя $\left(\frac{0}{0}\right)$. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_a = \{0 < |x-a| < \delta\}$ удовлетворяют требованиям:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны и дифференцируемы в* $\dot{U}_a$;
2) $g'(x) \neq 0\ \forall x \in \dot{U}_a$;
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Если при этом существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = P$, то и существует равный ему предел отношения самих функций: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = P$.

Теорема Лопиталя $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_a = \{0 < |x-a| < \delta\}$ удовлетворяют требованиям:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны и дифференцируемы в* $\dot{U}_a$;
2) $g'(x) \neq 0\ \forall x \in \dot{U}_a$;
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

Если при этом существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = P$, то и существует равный ему предел отношения самих функций: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = P$.

Например, для рассмотренного выше предела имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

Для усвоения изложенной теории рекомендуем выполнить задачи из типового расчета “Производные,” помещённого в конце пособия.

Лекция 4. Свойства функций, непрерывных на отрезке(ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, реализация всех промежуточных значений). Свойства дифференцируемой функции: монотонность, экстремумы. Схема построения графика функции с помощью первой производной

4.1. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в любой точке $x \in (a, b)$, а на концах $x = a$ и $x = b$ отрезка непрерывна справа и слева соответственно, т.е. $f(a+0) = f(a)$, $f(b-0) = f(b)$. Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом замечательных свойств, сформулированных ниже.

Теорема Вейерштрасса I. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует постоянная* $M > 0$, *такая, что* $|f(x)| \le M \ (\forall x \in [a, b])$.

Теорема Вейерштрасса II. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) = m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $f(x_2) = M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Теорема Больцано-Коши I. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков* $(f(a) \cdot f(b) < 0)$, *то существует хотя бы одно значение* $x = x_* \in (a, b)$ *такое, что* $f(x_*) = 0$.

Теорема Больцано-Коши II. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то каково бы ни было промежуточное значение* $K \in [m, M]$, *существует значение* $x = c \in [a, b]$ *такое, что* $f(c) = K$.

4.2. Монотонность функции

Напомним определение монотонных функций.

Определение 4.1. Говорят, что функция $y = f(x)$ *строго возрастает* на множестве $A \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) < f(x_2.)$

Если же $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$, то функция $y = f(x)$ называется *строго убывающей* на множестве A.

Если же из строгого неравенства $x_1 < x_2$ между аргументами вытекают нестрогое неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$ между значениями функции, то говорят, что $y = f(x)$ является *неубывающей* (*соответственно невозрастающей*) на множестве A.

Множество всех функций, строго возрастающих и строго убывающих, образует класс *строго монотонных функций;* невозрастающие и неубывающие функции образует класс просто *монотонных функций.*

При исследовании на монотонность функций используются выписанная ранее

Теорема Лагранжа. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и является дифференцируемой по-крайней мере в интервале (a, b), то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и является дифференцируемой по-крайней мере в интервале (a, b). Тогда справедливы следующие высказывания:*

1. если $f'(x) > 0$ $(\forall x \in (a, b))$, то функция $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[a, b]$;

2. если $f'(x) < 0$ $(\forall x \in (a, b))$, то функция $f(x)$ строго убывает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство вытекает из равенства (4.1), в котором надо положить $a = x_1, b = x_2$. Действительно, если $x_1 < x_2$, а $f'(x) > 0$ $(\forall x \in (a, b))$ (тогда и $f'(c) > 0$), то (см. (4.1)) будет выполняться неравенство $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Это означает, что *функция* $f(x)$ *строго возрастает на отрезке* $[a,b]$. Аналогично доказывается высказывание 2. Теорема доказана.

Замечание 4.1. Можно показать, что в случае нестрогого знака производной имеет место высказывание:

3. Для того чтобы функция $f(x)$, *удовлетворяющая условиям теоремы 4.1, была неубывающей (невозрастающей) на отрезке* $[a,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x) \geq 0$ $(\forall x \in (a,b))$ *(соответственно* $f'(x) \leq 0$ $(\forall x \in (a,b))$ *).*

Например, функция $y = x^2 - x$ строго убывает на любом отрезке $[a,b] \subset \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, так как $y' = 2x - 1 < 0$ при $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, и эта функция строго возрастает на $[a,b] \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, так как $y' = 2x - 1 > 0$ при $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

4.3. Локальный экстремум

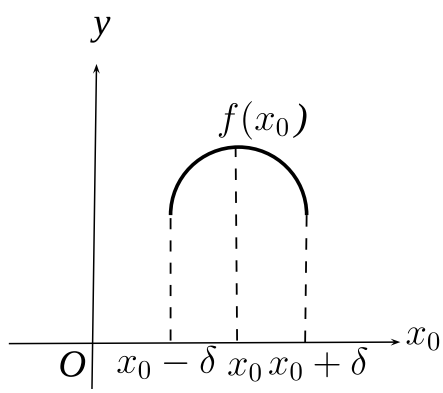


Рис. 4.1

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и некоторой её окрестности.

Определение 4.2. Говорят, что функция $y = f(x)$ достигает в точке $x = x_0$ *локального максимума* (см. рис. 4.1), если существует $\delta > 0$ такое, что $\forall x \in U_{x_0}(\delta) \equiv \{|x - x_0| < \delta\}$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Если при указанных $x \in U_{x_0}(\delta)$ имеет место противоположное неравенство $f(x) \geq f(x_0)$, то говорят, что в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ достигает в точке $x = x_0$ *локального минимума.*

Заметим, если неравенства $f(x) \leq f(x_0)$ или $f(x) \geq f(x_0)$ обращаются в равенство *лишь в одной точке* $x = x_0$, то говорят, что соответствующий максимум или минимум является *строгим.* Точки $x = x_0$, функция $f(x)$ достигает локального максимума или минимума, называются *точками локального экстремума* этой функции.

Замечание 4.2. Слово “локальный” здесь означает, что введенное понятие экстремума верно лишь в достаточно малой окрестности точки $x = x_0$. Иногда слово “локальный” будем опускать.

Необходимое условие экстремума. *Пусть в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ достигает локального экстремума. Тогда либо в этой точке функция $f(x)$ дифференцируема и тогда $f'(x_0) = 0,$ либо $f(x)$ не дифференцируема в точке $x = x_0$.*

Замечание 4.3. Точки $x = x_0 \in D(f)$ такие, что $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует (или равна ∞), называются *критическими точками* функции $f(x)$.

Если $x = x_0$ – точка локального экстремума функции $f(x)$, то она обязательно для неё критическая. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Например, для функции $y = f(x) = x^3$ производная $f'(0) = 0,$ но в точке $x = 0$ эта функция не имеет экстремума. Как проверить, что в критической точке достигается экстремум? Ответ на этот вопрос содержится в следующем утверждении.

Теорема 4.2 (*достаточные условия экстремума по первой производной*). *Пусть точка $x = x_0$ – критическая точка для функции $f(x)$ и функция $f(x)$ непрерывна в этой точке. Пусть, кроме того, производная $f'(x)$ существует в некоторой проколотой окрестности точки $x = x_0$. Тогда:*

1. если $f'(x)$ при переходе аргумента x через точку $x = x_0$ (слева направо) изменяет знак с $+$ на $-$, то в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ достигает локального максимума;

2. если $f'(x)$ при переходе аргумента x через точку $x = x_0$ (слева направо) изменяет знак с $-$ на $+$, то в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ достигает локального минимума;

3. если в окрестности точки $x = x_0$ функция $f'(x)$ не изменяет знака, то в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ не достигает локального экстремума.

Доказательство. Действительно, если производная $f'(x) > 0\,(\forall x : x_0 - \delta < x <$ то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$, и, значит, $f(x_0) > f(x)$ для всех x из указанного отрезка. С другой стороны, так как $f'(x) < 0\,(\forall x : x_0 + \delta > x > x_0)$, то функция $f(x)$ убывает на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$, и, значит, снова $f(x_0) > f(x)$ для всех x из указанного отрезка. Следовательно, при всех $x \in \{|x - x_0| < \delta\}$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$, т.е. точка $x = x_0$ является точкой локального максимума. Аналогично доказываются утверждения 2 и 3. Теорема доказана.

Например, рассмотренная выше функция $y = x^2 - x$ имеет в точке $x = \frac{1}{2}$ минимум, так как $y' = f'(x) = 2x - 1$ при переходе через критическую точку $x = \frac{1}{2}$ изменяет знак с минуса на плюс. Другие достаточные условия экстремума, получаемые с помощью высших производных, будут даны позже. А сейчас приведем схему построения графика функции $y = f(x)$ с помощью первой производной. Сделаем это для конкретной функции $y = f(x) = x + \ln\left(x^2 - 1\right)$. Напомним сначала информацию о вычислении асимптот.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = x_0$ – *вертикальная асимптота для функции* $y = f(x)$. Если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \ b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx],$$

то прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой $y = f(x)$. Таким образом, асимптоты функции $y = f(x)$ могут возникнуть при подходе x к точкам разрыва $x = x_0$ второго рода этой функции либо на бесконечности.

Схема построения графика функции $y = f(x)$ ***с помощью первой производной.***

1. Находим область определения функции $f(x)$: $|x| > 1$.

2. Находим (если это возможно) нули функции и ее интервалы знакопостоянства. Этот пункт мы опускаем, так как не можем точно решить уравнение $x + \ln\left(x^2 - 1\right) = 0$ (его приближенный корень равен 1.1478).

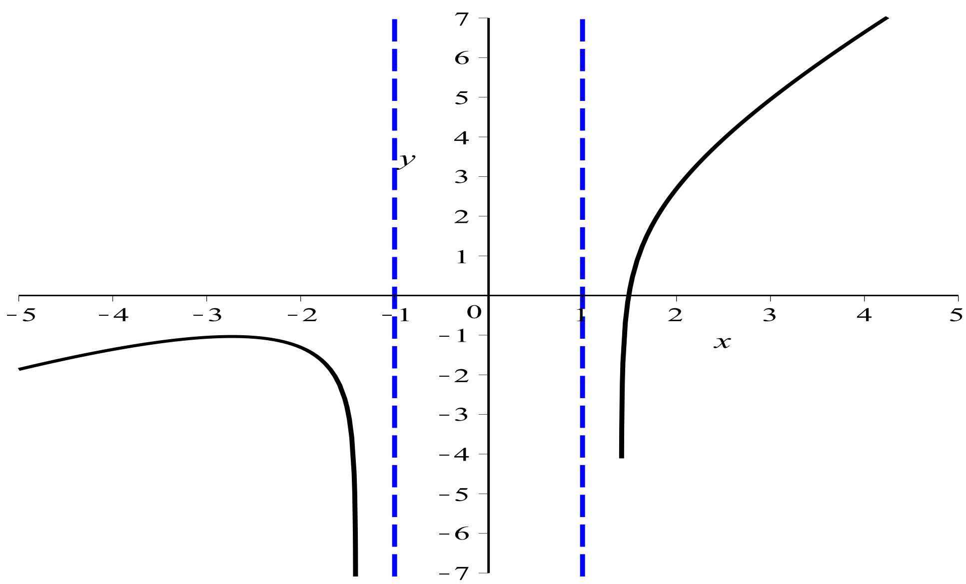
3. Находим точки разрыва функции $f(x)$ и её асимптоты.

а) вертикальные асимптоты: $x = \pm 1$, так как

$\lim\limits_{x \to -1+0} \left[x + \ln\left(x^2 - 1\right)\right] = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to 1-0} \left[x + \ln\left(x^2 - 1\right)\right] = +\infty;$
наклонных и горизонтальных асимптот нет, так как один из выписанных

ниже пределов бесконечен:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\ln\left(x^2-1\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(x+\ln\left(x^2-1\right)\right)'}{x'} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{2x}{x^2-1}\right) = 1,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x+\ln\left(x^2-1\right) - 1\cdot x\right] =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(x^2-1\right) = \infty.$$



4. Находим производную и исследуем функцию $y = f(x)$ на монотонность и локальные экстремумы. Имеем

$$f'(x) = 1+\frac{2x}{x^2-1};\ f'(x) = 0,$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-1} = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1-\sqrt{2}, \\ x = -1+\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Итак, $x = -1\pm\sqrt{2}-$ критические точки. Применяя метод интервалов (с учётом ОДЗ($f(x)$)), будем иметь:

$$y' < 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{2} < x < -1;$$
$$y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x < -1-\sqrt{2}, \\ x > 1. \end{array}\right.$$

Значит, в точке $x = -1-\sqrt{2}$ производная изменяет знак с плюса на минус, поэтому в этой точке функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум, равный приближенно -0.839692795. По полученной информации строим график функции $y = f(x)$. Он будет иметь вид, указанный на рис. 4.2. Чтобы закрепить навыки, постройте график $y = (x^3+x+1)/(x^2-1)$.

4.4. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба

Пусть дана функция $y = f(x)$, дифференцируемая в точке $x = x_0$. Тогда в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ она имеет касательную, каждая точка (x, y^*) которой удовлетворяет уравнению

$$y^* = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.3}$$

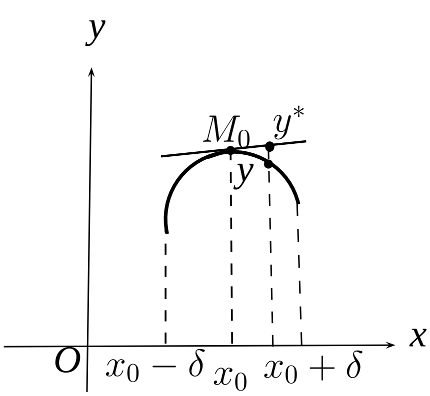


Рис. 4.3

Определение 4.3. Говорят, что кривая $y = f(x)$ *выпукла вверх в точке* $x = x_0$, если существует $\delta > 0$ такое, что в окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta) = \{0 < |x - x_0| < \delta\}$ кривая $y = f(x)$ находится *ниже* своей касательной (4.3) в точке M_0, т.е. если $\forall x \in \dot{U}_{x_0}(\delta) \Rightarrow y - y^* < 0$. Если же $\forall x \in \dot{U}_{x_0}(\delta) \Rightarrow y - y^* > 0$, то кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* в точке M_0 (часто говорят, о выпуклости или вогнутости в точке $x = x_0$). Говорят, что кривая $y = f(x)$ *выпукла вверх (выпукла вниз) на интервале* (a, b), *если она выпукла вверх (выпукла вниз) в каждой точке* $x_0 \in (a, b)$ этого интервала.

На рисунке 4.3 функция $y = f(x)$ выпукла вверх в точке $x = x_0$, а на рисунке 4.4 — выпукла вниз.

Теорема 4.3. *Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b). Тогда справедливы высказывания:*

1. если $f''(x) < 0$ $(\forall x \in (a,b))$, то кривая $y = f(x)$ выпукла вверх на (a,b);

2. если $f''(x) > 0$ $(\forall x \in (a,b))$, то кривая $y = f(x)$ выпукла вниз на (a,b).

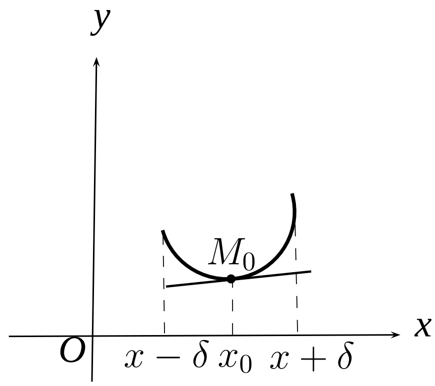


Рис. 4.4

Доказательство. Пусть $x = x_0$ — произвольная точка интервала (a,b). Окружим её отрезком $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset (a,b)$.

Так как функция $y = f(x)$ удовлетворяет на этом отрезке всем условиям теоремы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, то для всех $x \in \dot{U}_{x_0}(\delta)$ имеет место представление

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2. \qquad (4.4)$$

С другой стороны, в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ функция $y = f(x)$ имеет касательную с уравнением $y^* = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.Значит, $y - y^* = \frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2$ $\left(x \in \dot{U}_{x_0}(\delta)\right)$. Отсюда видно, что если $f''(x) < 0$ $(\forall x \in (a,b))$ (тогда и $f''(c) < 0$), то $y - y^* < 0 \left(\forall x \in \dot{U}_{x_0}(\delta)\right)$, значит, кривая $y = f(x)$ *выпукла вверх* в точке $x = x_0$. Если же $f''(x) > 0$ $(\forall x \in (a,b))$, то то $y - y^* < 0 \left(\forall x \in \dot{U}_{x_0}(\delta)\right)$, значит, кривая $y = f(x)$ *выпукла вниз* в точке $x = x_0$. Теорема доказана.

Определение 4.4. Точка $x = x_0$ называется *точкой перегиба кривой* $y = f(x)$, если:

а) $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$;

б) кривая $y = f(x)$ при переходе x через точку $x = x_0$ изменяет направление выпуклости (это равносильно тому, что разность $y - y^*$ изменяет знак при переходе x через точку $x = x_0$).

Необходимое условие точки перегиба. *Если $x = x_0$ - точка перегиба и если существует $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство вытекает из локальной формулы Тейлора и из равенства

$$y - y^* = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)(x \to x_0).$$

Замечание 4.4. К точкам, подозрительным на “перегиб”, следует отнести, прежде всего, точки $x = x_0$, для которых $f''(x_0) = 0$. Однако “перегиб” может иметь место и в точках, в которых *вторая производная* $f''(x)$ *не существует или равна* ∞. Например, в точке $x = 0$ функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ имеет производную $y'' = -\frac{2}{9x^{5/3}}|_{x=0} = \infty$. И в этой точке эта функция имеет “перегиб”. Очевиден следующий результат.

Теорема 4.4 (*достаточное условие точки перегиба*). *Пусть функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* $x = x_0$ *и некоторой её окрестности и дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности этой точки. Тогда если при переходе* x *через точку* $x = x_0$ *вторая производная* $f''(x)$ *изменяет знак, то точка* $x = x_0$ *– точка перегиба кривой* $y = f(x)$.

4.5. Исследование функций с помощью высших производных

Используя локальную формулу Тейлора, можно доказать следующие утверждения.

4. Пусть функция $y = f(x)$ *дифференцируема* n *раз в критической точке* $x = x_0$ *и пусть при этом*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда если $n = 2k$, *то при* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *в точке* $x = x_0$ *функция* $y = f(x)$ *достигает минимума; при* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *функция* $y = f(x)$ *достигает максимума в точке* $x = x_0$.

Если же $n = 2k + 1$, *то в точке* $x = x_0$ *функция* $y = f(x)$ *не имеет локального экстремума.*

5. Пусть функция $y = f(x)$ *трижды дифференцируема в точке* $x = x_0$ *и выполнены условия: а)* $f''(x_0) = 0$, *б)* $f'''(x_0) \neq 0$. *Тогда* $x = x_0$ *– точка перегиба кривой* $y = f(x)$.

Например, при изучении функции $y = \operatorname{ch} x + \cos x$ на экстремум в точке $x = 0$ исследовать знак производной $y' = f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ довольно сложно. Для решения этой задачи воспользуйтесь теоремой 4.4, вычислите $f''(0)$ и найдите, что в точке $x = 0$ функция достигает минимума.

Для усвоения изложенной теории рекомендуем выполнить задачи из типового расчета “Графики,” помещённого в конце пособия.

Лекция 5. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица первообразных. Простейшие приемы интегрирования: подведение функции под знак дифференциала, выделение полного квадрата, замена переменных и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Определенный интеграл, его свойства и геометрический смысл

Операция, обратная дифференцированию, называется *интегрированием.* Перейдем к ее изложению.

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Ниже в качестве A берется любой из промежутков: $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ (концы a и b могут быть бесконечными).

Определение 5.1. Говорят, что функция $F(x)$ является *первообразной для функции* $f(x)$ на множестве A, если $F'(x) \equiv f(x)$ $(\forall x \in A)$. Разыскание всех первообразных функции $f(x)$ называется *интегрированием* $f(x)$.

Например, функция $F(x) = x^3$ является первообразной для $f(x) = 3x^2$ на всей оси R, так как $\left(x^3\right)' = 3x^2$ $(\forall x \in R)$.

Теорема 5.1(об общем виде всех первообразных данной функции). *Пусть* $F(x)$ *– фиксированная первообразная функции* $f(x)$ *(на множестве* A *). Тогда множество всех первообразных функции* $f(x)$ *(на множестве* A *) описывается формулой*

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где C *– произвольная постоянная.*

Доказательство вытекает из того, что если $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные функции $f(x)$, то $\left(\Phi(x) - F(x)\right)' = f(x) - f(x) \equiv \equiv 0$ $(\forall x \in A)$, а, значит, разность $\Phi(x) - F(x)$ является постоянной величиной на множестве A, т.е. $\Phi(x) - F(x) = C$ $(\forall x \in A)$.

Определение 5.2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ *(на множестве A)* называется *неопределенным интегралом на A этой функции.* Обозначение: $\int f(x)\,dx$. При этом сама функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией* и если интеграл от нее существует, то говорят, что $f(x)$ *интегрируема на A.*

Из теоремы 5.1 вытекает, что $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, где $F(x)$ – *фиксированная первообразная функции $f(x)$ (на множестве A), а C – произвольная постоянная.* Отметим, что равенство $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ равносильно равенству $F'(x) \equiv f(x)\ (\forall x \in A)$. Таким образом, для доказательства того, что некоторая функция $\varphi(x) + C$ является неопределенным интегралом от функции $f(x)$, надо продифференцировать ее по x; если при этом будет получена подынтегральная функция $f(x)$, то равенство $\int f(x)\,dx =$ $\varphi(x) + C$ *будет истинным.* Используя этот факт, легко докажем следующие формулы.

Таблица 5.1. Неопределенные интегралы основных функций

Везде ниже C– произвольная постоянная.

1. $\displaystyle\int 0dx = C = \text{const.};$

2. $\displaystyle\int dx = x + C;$

3. $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1 - \text{постоянная});$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

5. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C;$

6. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C;$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

9. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ \left(a_{\neq 1}^{>0} - \text{постоянная}\right),\ \int e^x dx = e^x + C;$
10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arc\mathrm{tg}\dfrac{x}{a} + C \ \ (a > 0 - \text{постоянная})\,;$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C \ \ (a > 0 - \text{постоянная})\,;$
12. $\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C;$
13. $\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C;$
14. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C;$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C;$
16. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x - a}{x + a}\right\| + C.$

Докажем, например, формулу 10, табл. 5.1. Дифференцируем правую часть равенства 10 по x:

$$\left(\frac{1}{a} arc\mathrm{tg}\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2 + x^2}.$$

Получена подынтегральная функция левой части 10. Значит, равенство 10 верно. Точно так же доказываются остальные формулы этой таблицы.

Свойства неопределенного интеграла (везде ниже предполагается, что интегралы от соответствующих функций существуют):

$$1^0)\ \left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x)\,, \quad 2^0)\ \int g'(x)\, dx = g(x) + C;$$

$$3^0)\ \int (C_1 f(x) + C_2 g(x))\, dx = C_1 \int f(x)\, dx + C_2 \int g(x)\, dx$$

$$\left(C_1, C_2 = \mathrm{const}, C_1^2 + C_2^2 \neq 0\right).$$

Свойство 3^0 называют свойством *линейности интеграла.* Первые два свойства показывают, что операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны.

Немного позже будет установлено, что *всякая непрерывная на отрезке* $A = [a, b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на этом отрезке.*

5.2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Перейдем к формулировке теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле, которая часто используется при вычислении интегралов. Здесь имеются в виду два утверждения[3]:

$I.$ $\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \equiv \int g(\varphi(x))\,d\varphi(x) = [\varphi(x) = t] = \int g(t)\,dt|_{t=\varphi(x)}.$
$II.$ $\int f(x)\,dx = [x = \psi(t), dx = \psi'(t)\,dt] = \int f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt|_{t=g(x)},$

где $t = g(x)$ − функция, обратная к функции $x = \psi(t)$.

Теорема 5.2. *а) Пусть выполнены условия: 1) функция* $g(x)$ *непрерывна в своей области определения* D; *б) функция* $t = \varphi(x)$ *непрерывно дифференцируема на множестве* A *таком, что* $\varphi(A) \subseteq \subseteq D$. *Тогда для всех* $x \in A$ *имеет место равенство* I.

б) Пусть выполнены условия: 1) функция $f(x)$ *непрерывна в своей области определения* D;

2) функции $x = \psi(t)$ *и* $\psi'(t)$ *непрерывны на множестве* B *таком, что* $\psi(B) \subset D$;

3) $\psi'(t) \neq 0$ $(\forall t \in B)$; *4) функция* $x = \psi(t)$ *имеет на множестве* B *обратную функцию* $t = g(x)$. *Тогда для всех* $x \in \psi(B)$ *имеет место равенство* II.

Замечание 5.1. Преобразования в I часто называют *процедурой введения множителя под знак дифференциала.* Формулу II удобно применять в тех случаях, когда функция $f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt$ легче интегрируется, чем исходная функция $f(x)$. Её применяют, например, при вычислении

[3]Здесь и всюду далее с тем, чтобы не прерывать выкладки, в квадратных скобках будем указывать соответствующие замены переменных или формулы, необходимые для преобразований исходных выражений.

интегралов от иррациональностей вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right) dx$, $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ (здесь $R(u,v)$ – рациональная функция). В первом случае делается замена $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}} = t$, во втором случае подбирают такую замену $x = \psi(t)$, чтобы исчезла иррациональность. Например,

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = [x = \cos t, dx = -\sin t dt] = \int \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t dt) = -$$

$$-\int \sin^2 t dt = -\frac{1}{2}\int (1-\cos 2t)\,dt =$$

$= -\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C.$ Далее надо вернуться к старой переменной с помощью обратной функции $t = \arccos x$ и получить ответ: $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arccos x + C.$

5.3. *Интегрирования по частям в неопределенном интеграле*

При вычислении интегралов часто используется *операция интегрирования по частям,* смысл которой раскрывается в следующем утверждении.

Теорема 5.3. *Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на множестве A. Тогда на этом множестве справедливо равенство*

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Доказательство вытекает из цепочки тождеств

$$(u \cdot v)' \equiv u'v + u \cdot v' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u \cdot v' \equiv (u \cdot v)' - u'v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int u \cdot v' dx \equiv \int (u \cdot v)' dx - \int u' v dx \Leftrightarrow \int u dv \equiv u \cdot v - \int v du.$$

Замечание 5.2. Операция интегрирования по частям применяется к интегралам вида

$$1.\ \int P_m(x) \times \left[\begin{array}{c} \sin \alpha x\, dx, \\ \cos \alpha x\, dx, \\ e^{\alpha x}\, dx. \end{array} \right. \qquad 2.\ \int P_m(x) \times \left[\begin{array}{c} \arcsin x dx, \\ \arccos x dx, \\ \mathrm{arctg}\, x dx, \\ \ln x dx \end{array} \right.$$

($P_m(x)$ − многочлен степени m).

При этом в интегралах типа 1 для получения дифференциала dv надо ввести под знак дифференциала трансцендентную функцию $(\sin \alpha x, \cos \alpha x, e^{\alpha x})$, а в интегралах типа 2 под знак дифференциала надо ввести многочлен $P_m(x)$. Например,

$$\int (2x+1) \cos x dx = \int (2x+1)\, d(\sin x) = (2x+1) \sin x + 2\cos x + C;$$

$$\int x \ln x dx = \int \ln x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} d(\ln x) =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

5.4. Выделение полного квадрата

При интегрировании алгебраических дробей будет использоваться операция *выделения полного квадрата.* Продемонстрируем ее на примере интеграла

$$\int \frac{dx}{3-2x-x^2} = -\int \frac{dx}{-3+2x+x^2} =$$
$$= \left[x^2+2x-3 = (x+1)^2 - 4,\ x+1 = t, dx = dt \right] = -\int \frac{dt}{t^2-4} =$$
$$= -\frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1-2}{x+1+2} \right| + C = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C.$$

5.5. Определенный интеграл, его свойства и геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Произведем разбиение (см. рис. 5.1)

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \qquad (\Delta)$$

отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ и выберем произвольно точки $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ $\left(i = \overline{0, n-1}\right)$. Вычислим значения $f(x_i^*)$ и составим так называемую *интегральную сумму*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\,\Delta x_i \equiv f(x_0^*)\,\Delta x_0 + f(x_1^*)\,\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1}^*)\,\Delta x_{n-1}$$
$$(\Delta x_i = x_{i+1} - x_i)\,.$$

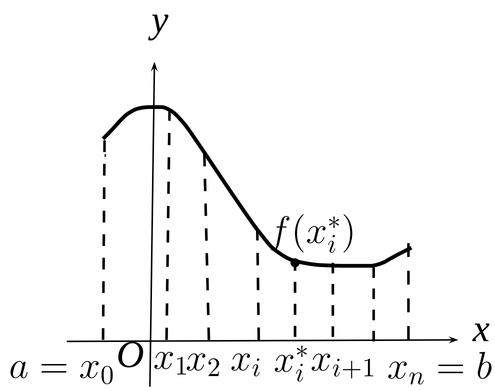


Рис. 5.1

Определение 5.3. Если существует конечный предел интегральных сумм:

$$\lim_{\lambda = \max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\,\Delta x_i = I,$$

и если этот предел не зависит от вида разбиения (Δ) и выбора точек $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$, то его называют *определенным интегралом от функции* $y = f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$. Обозначение: $I = \int_a^b f(x)\,dx$. При этом саму функцию $y = f(x)$ называют *интегрируемой на отрезке* $[a, b]$ (заметим, что число $\lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \Delta x_i \equiv \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} (x_{i+1} - x_1)$ называется *диаметром разбиения* (Δ)).

Пусть теперь функция $f(x) \geq 0$ $(\forall x \in [a, b])$. По разбиению (Δ) строится ступенчатая фигура (см. рис. 5.2), состоящая из прямоугольников $MPFN$ высоты $f(x_i^*)$ и длиной основания, равной Δx_i. Площадь этой ступенчатой фигуры (достройте ее самостоятельно) равна интегральной сумме $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\,\Delta x_i$ и эта площадь будет приближенно равна площади криволинейной трапеции[4] $\pi = \{(x, y) : \ y = f(x),\ a \leq x \leq b\}$, т.е. $S_\pi \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\,\Delta x_i$, причем это равенство будет тем точнее, чем меньше диаметр разбиения $\lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \Delta x_i$, и оно становится точным при $\lambda \to 0$:

$$\boxed{S_\pi = \lim_{\lambda = \max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

[4]На рис. 5.2 : π – это трапеция $ACDB$, ограниченная сверху кривой $y = f(x)$, снизу – осью Ox , с боков – прямыми $x = a$ и $x = b$.

Мы пришли к следующему *геометрическому смыслу определенного интеграла: интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *численно равен площади* S_π *криволинейной трапеции* $\pi = \{(x,y):\ y = f(x)\,,\ a \le x \le b\}$ *с верхней границей, описываемой уравнением* $y = f(x)\,,\ x \in [a,b]\,.$

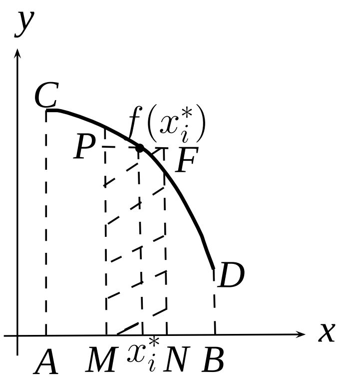


Рис. 5.2

Замечание 5.3. В определении 5.3 интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ предполагается, что отрезок интегрирования ориентирован от a до b (т.е. $a < b$). В случае противоположной ориентации отрезка $[a,b]$ (т.е. при $b < a$) полагаем по определению $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Также полагаем по определению, что $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Перейдем к формулировке свойств определенного интеграла.

Ограниченность подынтегральной функции. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке (т.е. $\exists M = \mathrm{const} : |f(x)| \le M\ \forall x \in [a,b]$).

Линейность интеграла. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$, *то на этом отрезке интегрируема и любая их линейная комбинация* $\alpha f(x) + \beta g(x)$ *и имеет место равенство*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \quad (\alpha, \beta = \mathrm{const})\ .$$

Аддитивность интеграла. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на максимальном из отрезков* $[a,b]\,,\ [a,c]\,,\ [c,b]\,,$ *то она интегрируема и на двух других отрезках, причем имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Далее везде предполагаем, что $a < b$.

Монотонность интеграла. *Если функции* $f(x)\,, g(x)$ *и* $p(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$ и $p(x) \le f(x) \le g(x)$ $(\forall x \in [a,b])\,,$ то $\int_a^b p(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Интегрируемость модуля. *Если функции* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *то на этом отрезке интегрируема и функция* $|f(x)|$, *причем имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Теорема о среднем для интеграла. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$. *Тогда существует точка* $c \in [a,b]$ *такая, что* $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ (геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что существует прямоугольник с основанием $[a,b]$ и высоты $f(c)$, равновеликий криволинейной трапеции π).

Доказательство. Пусть $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (по теореме Вейерштрасса значения m и M функцией $f(x)$ достигаются). Имеем $m \le f(x) \le M$ $(\forall x \in [a,b])$, поэтому из свойства монотонности интеграла отсюда получаем

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\;dx \le \int_a^b M\,dx \;\Leftrightarrow\; m(b-a)\int_a^b f(x)\;dx \le$$

$$\le M(b-a) \Leftrightarrow\; m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\;dx \le M.$$

Последние неравенства показывают, что значение $K = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\;dx$ является промежуточным для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а, значит, по теореме Больцано–Коши существует $c \in [a,b]$ такое, что

$$f(c) = K \;\Leftrightarrow\; f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\;dx \Leftrightarrow\; \int_a^b f(x)\;dx = f(c)(b-a).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим ещё несколько примеров, которые демонстрируют простейшие приемы интегрирования.

1. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = [\sin x = t] = \int \frac{dt}{t} = \ln|\mathrm{t}| + C.$

2. $$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\,(\ln x)}{\ln x} = [\ln x = t] = \int \frac{dt}{t} = \ln|\mathrm{t}| + \mathrm{C} = \ln\,|\ln x| + C.$$

3. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \left[x = \mathrm{tg}\ t, dx = \frac{dt}{\cos^2 t}\right] = \int \frac{dt}{\left(1+\mathrm{tg}^2\ t\right)^2 \cos^2 t} = \int \frac{dt}{\frac{1}{\cos^4 t}\cdot\cos^2 t} =$
$= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C = [t = \mathrm{arctg}\ x] =$
$= \frac{\mathrm{arctg}\ x}{2} + \frac{1}{2}\cdot \sin(\mathrm{arctg}\ x)\cdot\cos(\mathrm{arctg}\ x) + C =$
$= \frac{\mathrm{arctg}\ x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\ (\mathrm{arctg}\ x)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\ (\mathrm{arctg}\ x)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\ (\mathrm{arctg}\ x)}} + C = \frac{\mathrm{arctg}\ x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + C.$

4. $\int \mathrm{arctg}\ x dx = \left[\int u dv = uv - \int v du\right] = (\mathrm{arctg}\ x)x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx =$
$= x\cdot\mathrm{arctg}\ x - \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x\cdot\mathrm{arctg}\ x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$

5. $I = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\, d\left(e^{ax}\right) = \left[\int u dv = uv - \int v du\right] =$
$= \frac{1}{a}\left(e^{ax}\cos bx + b\int e^{ax}\sin\ bx dx\right) =$
$= \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}\int \sin\ bx\, de^{ax} = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\sin\ bx - b\int e^{ax}\cos bx dx\right),$
$\Leftrightarrow I = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin\ bx - \frac{b^2}{a^2}I \Leftrightarrow \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin\ bx,$
$I = \frac{b\sin\ bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}.$

Лекция 6. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле. Интегрирование дробно-рациональных функций и тригонометрических выражений

Вычисление определенного интеграла можно свести к вычислению неопределенного. Соответствующая формула носит название формулы Ньютона—Лейбница. Для ее вывода необходимо изучить сначала свойства интеграла с переменным верхним пределом, к описанию которого мы переходим.

6.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Заметим, что в качестве переменной интегрирования можно выбрать любую букву:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \int_a^b f\,(t)\,dt = \int_a^b f\,(\xi)\,d\xi = \int_a^b f\,(A)\,dA.$$

Пусть функция $f\,(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $x \in [a, b]$ можно вычислить число $F\,(x) = \int_a^x f\,(t)\,dt$. Значит, для каждого $x \in [a, b]$ определена функция $F\,(x) = \int_a^x f\,(t)\,dt$. Эту функцию называют *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 6.1. *Если функция $f\,(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то интеграл $F\,(x) = \int_a^x f\,(t)\,dt$ непрерывен на этом отрезке. Если $f\,(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $F\,(x)$ дифференцируема на указанном отрезке, причем*

$$F'\,(x) = f\,(x) \quad \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f\,(t)\,dt = f\,(t)\,|_{t=x} \;\; (\forall x \in [a, b])\,. \qquad (6.1)$$

Доказательство первой части этого утверждения опускаем. Перейдем к обоснованию второй части. Пусть x – произвольная точка интервала (a, b). Вычислим

$$\frac{\Delta F\,(x)}{\Delta x} \equiv \frac{F\,(x+\Delta x) - F\,(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f\,(t)\,dt - \int_a^x f\,(t)\,dt}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}.$$

Так как $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то применима теорема о среднем: существует точка $c \in [x, x+\Delta x]$, $\Delta x > 0$ ($c \in [x+\Delta x, x]$, $\Delta x < 0$) такая, что

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)(x+\Delta x - x) = \Delta F(x).$$

Тогда $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(c)$. Устремляя здесь $\Delta x \to 0$ и учитывая, что при этом $c \to x$, $f(c) \to f(x)$, будем иметь $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Равенство (6.1) показано в любой внутренней точке отрезка $[a,b]$. Можно показать, что оно верно и на концах этого отрезка. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Любая непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *имеет первообразную.*

Действительно, в качестве одной из первообразных можно указать интеграл $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ с переменным верхним пределом (при этом $F'(x) = f(x)$ $(\forall x \in [a,b])$, т.е. $F(x)$ – первообразная для $f(x)$).

6.2. Формула Ньютона—Лейбница

Докажем теперь одну из основных формул интегрального исчисления.

Теорема 6.2. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и* $\Phi(x)$ – *её первообразная на отрезке* $[a,b]$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\big|_{x=a}^{x=b} = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{6.2}$$

Доказательство. Так как $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то существует постоянная C такая, что $\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C$. Положим в этом равенстве $x = a$; будем иметь $0 = \Phi(a) + C \Leftrightarrow C = -\Phi(a)$. Поэтому

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Полагая здесь $x = b$, получаем формулу (6.2). Теорема доказана.

Например, $\int_2^3 \left(x^3 + 2x\right) dx = \left(\int \left(x^3 + 2x\right) dx\right) |_{x=2}^{x=3} = \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + C\right) |_2^3 = \left(\frac{3^4}{4} + 3^2 + C\right) - \left(\frac{2^4}{4} + 2^2 + C\right) = \frac{85}{4}$.

6.3. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле

С помощью формулы Ньютона – Лейбница нетрудно доказать следующие утверждения.

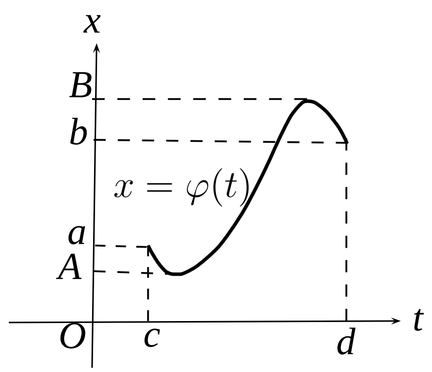


Рис. 6.1

Теорема 6.3 (см. рис. 6.1)**.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[A, B] \supset [a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[c, d]$ таком, что $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, причем $\varphi[c, d] \subset [A, B]$. Тогда имеет место формула замены переменных в определенном инте- грале:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left[x = \varphi(t)\,, dx = \varphi'(t)\, dt, \varphi(c) = a, \varphi(d) = b\right] =$$

$$= \int_c^d f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Теорема 6.4. *Пусть функции $u = u(x)\,, v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда имеет место формула интегрирования по частям в определенном интеграле:*

$$\int_a^b u dv = uv|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v du.$$

6.4. Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (*или алгебраической дробью*) называется функция, представимая в виде отношения двух много- членов:

$$R\,(x) = \frac{P_m\,(x)}{Q_n\,(x)} \equiv \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0}.$$

При этом дробь $R\,(x)$ называется *правильной,* если степень m ее многочлена-числителя $P_m\,(x)$ меньше степени n её многочлена-знаменателя $Q_n\,(x)$; в противном случае (т.е. в случае $m \geq n$) дробь $R\,(x)$ называется *неправильной.* Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной дроби. Для этого надо разделить числитель на знаменатель углом. Например,

$$\frac{3\,x^4 - 5\,x^2 + 2\,x - 8}{x^2 + 3\,x - 1} = 3x^2 - 9x + 25 + \frac{17 - 82x}{x^2 + 3x - 1}.$$

Определение 6.1. *Простейшими дробями типа* $I{-}IV$ называются следующие дроби:

$$I.\ \ \frac{A}{x-a};\quad II.\ \ \frac{A}{(x-a)^k};\quad III.\ \ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ \ \left(D = p^2 - 4q < 0\right);$$

$$IV.\ \ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\ \ \left(D = p^2 - 4q < 0\right),$$

где A, M, N, a, p, q – действительные постоянные, $k, m \geq 2$ – натуральные числа.

Теорема 6.5. *Любую правильную дробь* $R\,(x)$ *можно разложить в сумму простейших дробей типа* $I{-}IV$*. Это разложение единственно (с точностью до порядка слагаемых).*

Алгоритм разложения на простейшие дроби

Пусть требуется разложить на простейшие дроби правильную дробь $R\,(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Выполним следующие действия:

1) разложим знаменатель на множители:

$$Q_n(x) = b_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{r_1} \left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{r_2};$$

2) каждому "линейному" множителю $(x - x_0)^k$ *поставим в соответствие сумму* k *простейших дробей типа* $I - II$:

$$\frac{A_k}{(x - x_0)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x - x_0)^{k-1}} + ... + \frac{A_1}{x - x_0},$$

а каждому "квадратичному" множителю $\left(x^2 + px + q\right)^m$ *поставим в соответствие* m *дробей типа* $III - IV$:

$$\frac{M_m x + N_m}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{M_{m-1} x + N_{m-1}}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + ... + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q}.$$

Сделав это для каждого множителя знаменателя $Q_n(x)$, *запишем тождество*

$$\begin{aligned} &\tfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} \equiv \left[\tfrac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \tfrac{A_{k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + ... + \tfrac{A_1}{x-x_1}\right] + \\ &+ \left[\tfrac{\hat{A}_{k_2}}{(x-x_1)^{k_2}} + \tfrac{\hat{A}_{k_2-1}}{(x-x_1)^{k_2-1}} + ... + \tfrac{\hat{A}_1}{x-x_1}\right] + \\ &+ \left[\tfrac{M_{r_1}x+N_{r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}} + \tfrac{M_{r_1-1}x+N_{r_1-1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}} + ... + \tfrac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}\right] + \\ &+ \left[\tfrac{\hat{M}_{r_2}x+\hat{N}_{r_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{r_2}} + \tfrac{\hat{M}_{r_2-1}x+\hat{N}_{r_2-1}}{(x^2+p_2x+q_2)^{r_2-1}} + ... + \tfrac{\hat{M}_1x+\hat{N}_1}{x^2+p_1x+q_1}\right]. \end{aligned} \tag{6.3}$$

3) Умножив обе части этого тождества на знаменатель $Q_n(x)$, *получим тождество двух многочленов. Приравнивая в нем коэффициенты при одинаковых степенях* x^s, *получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов* $A_j, \hat{A}_j, M_j, \hat{M}_j, N_j, \hat{N}_j$, *решая которую (например, методом Гаусса), найдем эти коэффициенты. Подставляя их в (6.3), получим разложение дроби* $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *на простейшие дроби.*

Например, разложим дробь $R(x) = \frac{5x^3+3x^2+23x+9}{(x^2-2\,x+1)(x^2+2x+5)}$ на простейшие. Так как $\left(x^2 - 2\,x + 1\right)\left(x^2 + 2x + 5\right) = (x - 1)^2 \left(x^2 + 2x + 5\right)$, то $R(x)$ представляется в виде

$$\frac{5x^3 + 3x^2 + 23x + 9}{(x^2 - 2\,x + 1)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 5}, \tag{6.4}$$

где коэффициенты A, B, M, N пока не найдены. Приводя правую часть к общему знаменателю, а затем отбрасывая в обеих частях одинаковые знаменатели, получим тождество

$$\begin{gathered}5x^3+3x^2+23x+9 \equiv A\left(x^2+2x+5\right)+\\ +B\left(x-1\right)\left(x^2+2x+5\right)+\left(Mx+N\right)\left(x-1\right)^2.\end{gathered} \tag{6.5}$$

Можно было бы приравнять здесь коэффициенты при одинаковых степенях x (начиная с x^3), а затем решить полученную систему уравнений относительно A, B, M, N. Но мы поступим проще. Применим так называемый *метод частных значений*.

Так как (6.5) $-$ тождество, то оно верно при любых значениях x. Удобно выбрать значение $x=1$. При этом из (6.5) получаем равенство $40=8A$, откуда выводим, что $A=5$. Далее подставляем $A=5$ в (6.4) и переносим все первые слагаемые влево; будем иметь

$$5x^3-2x^2+13x-16 \equiv B\left(x-1\right)\left(x^2+2x+5\right)+\left(Mx+N\right)\left(x-1\right)^2.$$

Разделив обе части этого тождества на $x-1$, получим

$$5x^2+3x+16 = B\left(x^2+2x+5\right)+\left(Mx+N\right)\left(x-1\right).$$

Полагая здесь снова $x=1$, будем иметь $24=8B \Leftrightarrow B=3$, и последнее равенство перепишется в виде $2x^2-3x+1=\left(Mx+N\right)\left(x-1\right) \Rightarrow 2x-1=Mx+N$. Отсюда сразу же находим $M=2, N=-1$. Следовательно, все коэффициенты разложения (6.4) найдены и мы получаем ответ: $\frac{5x^3+3x^2+23x+9}{(x^2-2\,x+1)(x^2+2x+5)}=\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{2x-1}{x^2+2x+5}$.

Из теоремы 6.5 вытекает, что интегрирование правильных алгебраических дробей сводится к их разложению на простейшие дроби и последующему интегрированию последних. Займемся задачей интегрирования простейших дробей.

Дроби типа $I-II$ интегрируются очевидным образом:

$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A{\cdot}\ln|x-a|+C;\;\; \int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int\left(x-a\right)^{-k}d\left(x-a\right)=\frac{A(x-a)^{-k}}{-k+1}$
$C.$

Дробь типа III интегрируется следующим образом:

$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx =$
$= \left[x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right);\ x+\frac{p}{2} = t, dx = dt,\ q-\frac{p^2}{4} = a^2\right] =$
$= \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$
$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a} = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) +$
$+ \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C.$

Дробь типа IV интегрируется сложнее. Сначала производятся все операции, применяемые при интегрировании дроби типа $III,$ а затем используется рекуррентная формула

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}} = \frac{1}{2ma^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m} + (2m-1)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}\right).$$

Например,

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot a^2}\left(\frac{t}{t^2+a^2} + (2-1)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)}\right) =$$

$$= \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)}{2a^3} + C.$$

В заключение предлагаем вычислить самостоятельно интеграл

$$\int \frac{2\,x^2+2\,x+13}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)^2}\,dx = \int \left(\frac{-4-3x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{-2-x}{x^2+1} + \frac{1}{x-2}\right)dx$$

и получить ответ: $\frac{1}{4}\cdot\frac{-8x+6}{x^2+1} - 4\mathrm{arctg}\,(x) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|x-2| + C.$

6.5. Интегрирование тригонометрических выражений

Интегралы типа $I = \int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где $R(u,v)$ – дробно-рациональная функция переменных u и v, сводятся к интегрированию рациональной функции одной переменной t с помощью *универсальной подстановки* $t = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Действительно, тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

поэтому $I = \int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} \equiv \int R_1(t)\,dt$, где $R_1(t)$ – дробно-рациональная функция одной переменной. К последнему интегралу можно уже применить алгоритм разложения на простейшие дроби и свести вычисления к интегрированию простейших дробей типа $I{-}IV$. Однако не всегда удобно пользоваться универсальной подстановкой, так как она часто приводит к громоздким выкладкам.

Иногда удобно *пользоваться частными типами подстановок,* которые мы приводим ниже (слева написано свойство подынтегральной функции R, справа – соответствующая замена переменной).

1. $R(-u,v) \equiv -R(u,v) \Rightarrow \boxed{\cos x = t}$.
2. $R(u,-v) \equiv -R(u,v) \Rightarrow \boxed{\sin x = t}$.
3. $R(-u,-v) \equiv R(u,v) \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x = t}$.
4. $\int R\left(\sin^2 x\right)dx,\ \int R\left(\cos^2 x\right)dx \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x = t}$

(здесь часто бывает удобным воспользоваться формулами $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.)

И, наконец, интегралы типа

$$\int \left[\begin{array}{c} \cos\alpha x\cdot\cos\beta x dx, \\ \sin\alpha x\cdot\cos\beta x dx, \\ \sin\alpha x\cdot\sin\beta x dx \end{array}\right.$$

преобразуются в интегралы от синусов и косинусов с помощью формул тригонометрии:

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right),$$
$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right),$$
$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x\right).$$

Приведём примеры.

1. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \left[\operatorname{tg} x = t, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\right] =$
$= \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}} dt = \int \frac{t^2}{t^4-1} dt = \int \left(-\frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{2(t^2+1)} + \frac{1}{4(t-1)}\right) dt =$
$= \frac{1}{4} \ln(\operatorname{tg} x - 1) - \frac{1}{4} \ln(\operatorname{tg} x + 1) + \frac{1}{2} x + C.$

2. $\int \cos 3x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 2x + \sin 8x)\, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$

3. $\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$
$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx =$
$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x)\, dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \sin 4x + C =$
$= \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$

Для усвоения изложенного материала предлагаем вычислить интегралы и проверить истинность выписанных ниже равенств.

1. $\int \ln(4x^2+1) dx = x \ln(4x^2+1) + \operatorname{arctg} 2x - 2x + C.$

2. $\int_{-2}^{0} (x^2 - 4) \cos 3x dx = \frac{4}{9} \cos 6 - \frac{2}{27} \sin 6.$

3. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx = -\frac{1}{x-\sin x} + C.$

4. $\int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx = \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}.$

5. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx = x + 2\ln|x-4| + 12\ln|x-3| - 8\ln|x-2| + C.$

6. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3} dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C.$

7. $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \ln\left|x^2+4\right| + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C..$

8. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} dx = \frac{1}{6}.$

9. $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x + 5) \sin 2x} = \frac{1}{10}(\ln 3 - \ln 14 + \ln 8).$

10. $\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx = \frac{35}{8}\pi.$

Для усвоения изложенной теории рекомендуем также выполнить задачи из типового расчета “Интегралы,” помещённого в конце пособия.

Лекция 7. Несобственные интегралы. Геометрические приложения интегралов

Ранее рассматривались интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ с конечными пределами a, b и от ограниченных функций $f(x)$. Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то указанный интеграл будет *несобственным.* Такие интегралы часто встречаются в приложениях, поэтому перейдем к их изучению.

7.1. Несобственные интегралы

Сначала рассмотрим интегралы с бесконечными пределами.

Определение 7.1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, N] \subset [a, +\infty)$. Тогда если существует конечный предел $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\,dx = I$, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится.* При этом пишут $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = I$. Если же указанный предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится* (см. рис. 7.1).

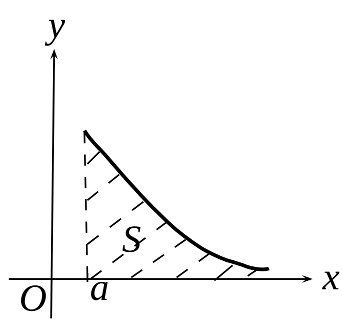


Рис. 7.1

Аналогично определяются интегралы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{b} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{c} f(x)\,dx + \lim_{M\to+\infty} \int_{c}^{M} f(x)\,dx$$

(здесь c – произвольная конечная точка).

Эти интегралы называют *несобственными интегралами первого рода.* Их геометрический смысл ясен из рис. 7.1, где площадь $S = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Теперь рассмотрим интегралы от неограниченных функций.

Определение 7.2. Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки $x = b$ (ее называют *особой точкой*) и является интегрируемой на любом отрезке $[a, b-\varepsilon] \subset [a, b)$, то по определению полагают $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$. Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *второго рода* сходится. В противном случае он называется расходящимся. Аналогичный смысл имеют интегралы (второго рода)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

где в первом случае точка $x = a$ является особой, а во втором случае точка $c \in (a, b)$ является особой. Поскольку заменой переменной $t = \frac{1}{b-x}$ интеграл второго рода $\int_a^b f(x)\,dx$ ($x = b$ – особая точка) сводится к интегралу первого рода, то будем изучать только интегралы с бесконечным верхним пределом. Сначала покажем, что *эталонный интеграл* ($a > 0$)

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{array}{l}\text{сходится, если } \alpha > 1,\\ \text{расходится, если } \alpha \le 1.\end{array}\right.$$

Действительно, имеем

$$\int_a^N \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{array}{l}\ln x|_{x=a}^{x=N} = \ln N - \ln a,\ \alpha = 1,\\ \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_{x=a}^{x=N} = \frac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1},\ \alpha \ne 1.\end{array}\right.$$

Переходя здесь к пределу при $N \to +\infty$, получаем наше утверждение. С помощью эталонного интеграла можно исследовать сходимость других несобственных интегралов.

Теорема сравнения 1. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на произвольном отрезке* $[a, N] \subset [a, +\infty)$ *и имеют место неравенства* $0 \le f(x) \le g(x)$ $(\forall x \in [a, +\infty))$. *Тогда если сходится интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, *то и сходится интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. *Если же интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится, то и расходится интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Теорема сравнения 2. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ ***положительны*** *и интегрируемы на произвольном отрезке* $[a, N] \subset [a, +\infty)$. *Пусть, кроме того, существует предел* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K^{\ne\infty}_{\ne 0}$. *Тогда интегралы* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *и* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Замечание 7.1. При применении этих теорем часто используется эквивалентность бесконечно малых функций.

Таблица 1.1 эквивалентных бесконечно малых
Если $u(x) \to 0$ *при* $x \to x_0$, *то при* $x \to x_0$ *верны следующие соотношения:*
1) $\sin u \sim u$,
2) $\mathrm{tg} u \sim u$,
3) $\arcsin u \sim u$,
4) $\mathrm{arctg}\, u \sim u$,
5) $1 - \cos u \sim \dfrac{1}{2}u^2$,
6) $e^u - 1 \sim u$,
7) $a^u - 1 = u \ln a,\ a > 0, a \neq 1$,
8) $\ln(1+u) \sim u$,
9) $(1+u)^\sigma - 1 \sim \sigma \cdot u,\ \sigma = \mathrm{const}$.

Например, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{3+x\sqrt{x}} dx$ сходится, так как $\frac{\sin \frac{1}{x}}{3+x\sqrt{x}} \sim \frac{\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{5/2}}$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/2}}$ сходится ($\alpha = 5/2 > 1$; см. эталонный интеграл и теорему сравнения 2).

Отметим, что теоремы сравнения верны лишь для неотрицательных подынтегральных функций. Если эти функции не являются знакопостоянными, то вводят понятие абсолютной сходимости: говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$. Если последний интеграл расходится, а сам интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, то его называют *условно сходящимся интегралом.*

Нетрудно показать, что *из сходимости интеграла* $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ *вытекает обычная сходимость интеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Обратное, вообще говоря, неверно. Можно показать, например, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ расходится. Тем не менее, при исследовании сходимости интегралов от знакопеременных функций изучают сначала их абсолютную сходимость (здесь можно применить теоремы сравнения), а затем – условную сходимость.

Например, рассмотрим интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}dx$. Здесь подынтегральная функция изменяет знак на полуинтервале $[2,+\infty)$, поэтому применить к нему теоремы сравнения нельзя. Рассмотрим “модульный” интеграл $I=\int_2^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\right|dx$. Здесь подынтегральная функция неотрицательна, и поэтому к этому интегралу можно применить теорему сравнения 1:

$$\left|\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\right|\le\frac{1}{x\ln^2 x}\;(\forall x\in[2,+\infty))\,.$$

Так как интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{x=2}^{x=+\infty}=\frac{1}{\ln 2}<$ $<\infty$ сходится, то и интеграл I также сходится, а, значит, исходный интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}dx$ сходится абсолютно.

7.2. Вычисление площадей плоских фигур

Из геометрического смысла определенного интеграла вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Если фигура D задана неравенствами $a\le x\le$ $\le b$, $f_1(x)\le y\le f_2(x)$, где функции $f_1(x), f_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то площадь этой фигуры вычисляется по формуле*

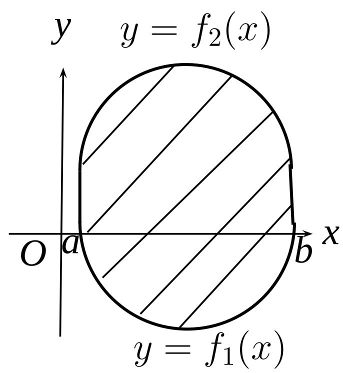


Рис. 7.2

$S_D=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\,dx$. Если фигура ограничена линиями $y=f(x)$, $y=0$ $(a\le x\le b)$, причем функция $f(x)$ знакопеременна и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то её площадь равна $\int_a^b|f(x)|dx$.

Действительно, фигуру D можно перенести параллельно оси Oy вверх и тогда она будет сверху и снизу ограничена линиями

$$y=f_2(x)+C,\;y=f_1(x)+C\quad\left(C\ge\min_{x\in[a,b]}f_1(x)\right).$$

Поэтому $S_D=\int_a^b(f_2(x)+C)\,dx-\int_a^b(f_1(x)+C)\,dx=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\,dx$.

Переходя к вычислению площади в полярных координатах, напомним, что любая точка $M(x,y)$ на плоскости вполне однозначно определяется своим полярным радиусом $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\rho$ и полярным углом $\theta=\left(\overrightarrow{OM},^\wedge\overrightarrow{Ox}\right)$, $0\le$

$\theta < 2\pi$ (считаем, что началу координат O соответствует радиус $\rho = 0$ и любой фиксированный полярный угол $\theta \in [0, 2\pi)$). Поэтому любую кривую на плоскости можно задать уравнением $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$. Переход от декартовых координат точки $M(x, y)$ к полярным осуществляется формулами

$$x = \rho \cos\theta,\ y = \rho \sin\theta.$$

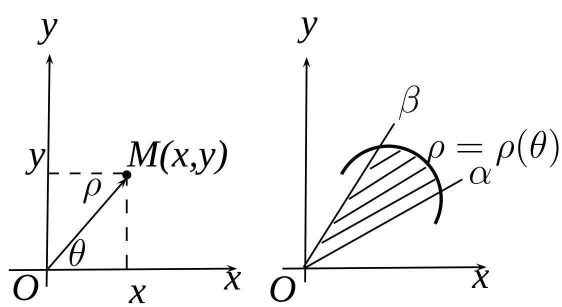


Рис. 7.3

Теорема 7.2. *Пусть фигура D задана в полярных координатах неравенствами $0 \le \rho \le \rho(\theta)$, $\alpha \le \theta \le$ $\le \beta$ (рис. 7.3), причем фун- кция $\rho = \rho(\theta)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда площадь этой фигуры вычисляется по формуле $S_D = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\, d\theta$. Если фигура описывается неравенствами*

$$\rho_1(\theta) \le \rho \le \rho_2(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta,$$

причем функции $\rho_1(\theta)$, $\rho_2(\theta)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, то её площадь вычисляется по формуле $S_D = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[\rho_1^2(\theta) - \rho_2^2(\theta)\right] d\theta$.

Площади фигур с замкнутой границей удобно вычислять, если граница задана в параметрической форме.

Теорема 7.3. *Пусть фигура D имеет границу Γ, заданную параметрически уравнениями*

$$x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta,$$

причем при возрастании параметра t от α к β обход границы Γ совершается так, что сама область D остается слева от наблюдателя. Если при этом функции $x'(t)$, $y(t)$ непрерывны на отрезке, то площадь этой фигуры вычисляется по формуле $S_D = -\int_\alpha^\beta y(t)\, x'(t)\, dt \equiv -\int_\alpha^\beta y dx\big|_{x=x(t), y=y(t)}$ (здесь $t = \alpha$ — начало обхода, $t = \beta$ — конец обхода границы Γ).

7.3. Вычисление длины дуги

Пусть на плоскости Oxy задана некоторая незамкнутая кривая Γ (см. рис.7.4). Произведем разбиение

$$M_0\overset{\frown}{}M_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i\overset{\frown}{M}_{i+1} \qquad (\Delta)$$

этой дуги на частичные дуги $M_i\overset{\frown}{M}_{i+1}$, в каждую из которых впишем хорду M_iM_{i+1}. Тогда получим ломанную $M_0M_1...M_n$, вписанную в дугу Γ. Пусть $\Delta s_i = |M_iM_{i+1}|-$ длина хорды M_iM_{i+1}.

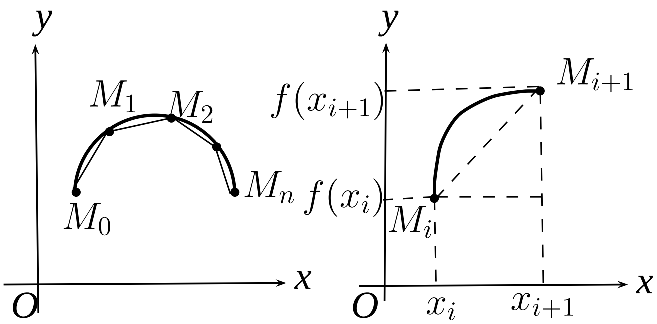


Рис. 7.4

Определение 7.3. За длину дуги l кривой Γ принимают предел, к которому стремится периметр ломанной, вписанной в эту дугу, при стремлении длины максимального звена этой ломанной к нулю, т. е. $l = \lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i$.[5] Если кривая Γ замкнутая, то разбивают ее двумя несовпадающими точками на две незамкнутые кривые Γ_1 и Γ_2 $(\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2)$ и тогда дл. $\Gamma =$ дл. $\Gamma_1 +$ дл. Γ_2.

Теорема 7.4. *Если дуга Γ задана уравнением $y = f(x)$, $a \le$ $\le x \le b$, где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то ее длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \qquad (7.1)$$

Доказательство. Произведем разбиение $a = x_0 < x_1 < \cdots <$ $< x_n = b$ отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$. Это разбиение порождает разбиение (Δ) дуги Γ на частичные дуги $M_i\overset{\frown}{M}_{i+1}$. По определению 7.3 имеем $l = \lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i$. Длина хорды M_iM_{i+1} равна (см. рис.7.4) величине

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} =$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

[5]Если этот предел существует и конечен, то дуга l называется *спрямляемой.*

По теореме Лагранжа существует точка $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ такая, что

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

поэтому $\Delta s_i = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i$. Учитывая это, получаем, что

$$l = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Теорема доказана.

Замечание 7.2. Величина $dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ называется *дифференциалом дуги* $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Учитывая, что $f'(x)\,dx = dy$, её можно записать в виде $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Мы получили теорему Пифагора для криволинейного треугольника с катетами dx, dy и “гипотенузой” dl. Теперь формулу (7.1) для вычисления длины дуги можно записать кратко так: $l = \int_a^b dl$. Эта форма записи длины дуги особенно удобна, если дуга Γ задана параметрически или в полярной форме. Из нее можно получить следующие утверждения.

Теорема 7.5. *Если дуга Γ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$, то ее длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt.$$

Если дуга Γ задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\theta)$, $\varphi_1 \le \theta \le \varphi_2$, где функция $\rho(\theta)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$, то её длина вычисляется по формуле

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta.$$

Действительно, если Γ задана в параметрической форме, то

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t)\,dt^2 + \dot{y}^2(t)\,dt^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt.$$

Рекомендуем получить формулу длины дуги в полярных координатах самостоятельно.

Например, если дуга Γ задана уравнением $\rho = 2\cos\theta,\ 0 \le \theta \le$ $\le \pi/6,$ то её длина равна

$$l = \int_0^{\pi/6} \sqrt{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} d\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

7.4. Вычисление объёмов тел

С помощью определенного интеграла можно вычислять объемы тел. Дадим соответствующие формулы.

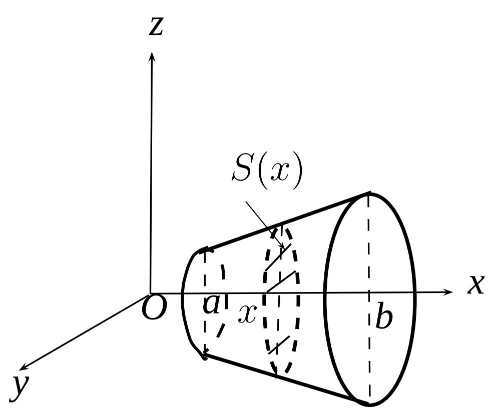


Рис. 7.5

Теорема 7.6. *Пусть тело W заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b,$ а $S = S(x)$ – площадь его поперечного сечения плоскостью $x = \text{const}.$ Если функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то объём тела W вычисляется по формуле*

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Доказательство. Произведем разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \qquad (\Delta)$$

на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ и обозначим $\lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \Delta x_i = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} (x_{i+1} - x_i)$ – диам разбиения (Δ). Плоскости $x = x_i$ разобьют тело W на тела W_i, которые можно приближенно считать прямыми круговыми цилиндрами высотой $h = \Delta x_i$ и основаниями – кругами площади $S = S(\bar{x}_i)$, где

$\bar{x}_i$ – произвольная фиксированная точка отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, $S(\bar{x}_i)$ – площадь поперечного сечения плоскостью $x = \bar{x}_i$. Объём тела W приближенно равен сумме объёмов тел W_i, т.е. $V \simeq \sum_{i=0}^{n-1} V_i = \sum_{i=0}^{n-1} S(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$. Это равенство будет тем точнее, чем мельче разбиение (Δ), и при $\lambda \to 0$ оно становится точным, т.е.

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} S(\bar{x}_i)\,\Delta x_i = \int_a^b S(x)\,\Delta x.$$

Теорема доказана.

Замечание 7.3. Если тело W получено вращением криволинейной трапеции

$$D = \{0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b\}$$

вокруг оси Ox, то объём этого тела вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Действительно, в этом случае поперечное сечение является кругом радиуса $R = f(x)$, поэтому $S(x) = \pi \cdot f^2(x)$. Аналогично вычисляется объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $D = \{0 \le x \le g(y),\ c \le y \le d\}$: $V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy$ (конечно, в выписанных формулах для V предполагается, что функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны на соответствующих отрезках).

Рекомендуем выполнить задачи на приложения определённого интеграла в типовом расчете “Интегралы,” помещённом в конце пособия.

Типовой расчёт “Пределы”

Задача 1. Найти пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ последовательностей $\{a_n\}$, заданных своими общими членами, выписанными ниже.

1.1. $\frac{(2-n)^4-(1-n)^4}{-n^3-(n+2)^3}$.

1.2. $\frac{(4-n)^4-(3-n)^4}{2(2-n)^3-n^3}$.

1.3. $\frac{(2-2n)^4-(1-2n)^4}{-8n^3-(2+2n)^3}$.

1.4. $\frac{(4-2n)^4-(3-2n)^4}{(2-2n)^3-9n^3}$.

1.5. $\frac{(n+2)^3-(n+2)^2}{n^3-(n+2)^3}$.

1.6. $\frac{n^3-n^2}{(-2+n)^3-n^3}$.

1.7. $\frac{(2+3n)^3-(2+3n)^3}{27n^3-(2+3n)^3}$.

1.8. $\frac{(3n-1)^3-(3n-1)^2}{(3n-3)^2-(3n-1)^3}$.

1.9. $\frac{(3+2n)^3-(3+2n)^2}{(2n+1)^2-2(3+2n)^3}$.

1.10. $\frac{(1+5n)^3-(1+5n)^2}{(5n-1)^2-3(1+5n)^3}$.

1.11. $\frac{2(3n+1)^3-(3n-2)^3}{9n^2+6n-3}$.

1.12. $\frac{2(2+5n)^3-(5n-1)^3}{(1+5n)^3-1+10n}$.

1.13. $\frac{54n^3-(3n-3)^3}{(3n-1)^2+6n^3-5}$.

1.14. $\frac{2n^3-(-3+n)^3}{(-1+n)^2-5+2n^3}$.

1.15. $\frac{16n^3-(2n-3)^3}{(2n-1)^2+4n^3-5}$.

Задача 2. Найти пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ последовательностей $\{a_n\}$, заданных своими общими членами, выписанными ниже.

2.1. $(2n+1)\left(\sqrt{(2n+1)^2+1}-2\sqrt{n^2+n}\right)$.

2.2. $\sqrt{(n+5)(4+n)}-\sqrt{(n+2)(6+n)}$.

2.3. $(-3+n)\left(\sqrt{n^2-6n+10}-\sqrt{n^2-6n+8}\right)$.

2.4. $(-3n+1)\left(\sqrt{3}\sqrt{n(3n-2)}-\sqrt{9n^2-6n+2}\right)$.

2.5. $\sqrt{5}\sqrt{(1+5n)n}-\sqrt{(5n-2)(2+5n)}$.

2.6. $\frac{\sqrt{(n+2)^3}-\sqrt{(1+n)n(-2+n)}}{\sqrt{1+n}}$.

2.7. $\frac{2\left(\sqrt{n^3}-\sqrt{(-1+n)(-2+n)(-4+n)}\right)}{\sqrt{-1+n}}$.

2.8. $\sqrt{3}\sqrt{(3n+1)n}-\sqrt{(3n-2)(2+3n)}$.

2.9. $\frac{4\left(\sqrt{(4+2n)^3}-\sqrt{2}\sqrt{(3+2n)(2+2n)n}\right)}{\sqrt{3+2n}}$.

2.10. $\frac{6\left(\sqrt{(2n+6)^3}-\sqrt{(2n+5)(4+2n)(2+2n)}\right)}{\sqrt{2n+5}}$.

2.11. $\frac{8\left(\sqrt{(8+2n)^3}-\sqrt{(2n+7)(2n+6)(4+2n)}\right)}{\sqrt{2n+7}}$.

2.12. $8\sqrt{(2n+9)(8+2n)}-8\sqrt{(2n+6)(2n+10)}$

2.13. $\dfrac{7\left(\sqrt{(8+2n)^3}-\sqrt{(2n+7)(2n+6)(4+2n)}\right)}{\sqrt{2n+7}}.$

2.14. $7\ (2n+7)\left(\sqrt{(2n+7)^2+1}-2\sqrt{n^2+7n+12}\right).$

2.15. $5\,(2n-3)\left(\sqrt{(2n-3)^2+1}-2\sqrt{n^2-3n+2}\right).$

Задача 3. Вычислить пределы функций.

3.1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2}-2-x}{1+x}.$

3.2. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{(2+x)^2}-4-x}{x+3}.$

3.3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{(-3+x)^2}+1-x}{x-2}.$

3.4. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{(-3+x)^2}-5+x}{-2x+8}.$

3.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(27+8x)^{1/3}-(27-8x)^{1/3}}{4(x^2)^{1/3}+2^{3/5}x^{1/5}}.$

3.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(27+4x)^{1/3}-(27-4x)^{1/3}}{16^{1/3}(x^2)^{1/3}+4^{1/5}x^{1/5}}.$

3.7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\left((1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3}\right)}{9(x^2)^{1/3}+3^{3/5}x^{1/5}}.$

3.8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\left(x^{1/3}-1\right)}{-\sqrt{2x+2}+2\sqrt{x}}.$

3.9. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{3\left(\sqrt[3]{12x}-2\right)}{\sqrt{3x+2}-\sqrt{6}\sqrt{x}}.$

3.10. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{3\left(4^{2/3}x^{1/3}-2\right)}{\sqrt{4x+2}-2\sqrt{2}\sqrt{x}}.$

3.11. $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{\sqrt{2x+13}-2\sqrt{2x+1}}{4x^2-9}.$

3.12. $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}}\dfrac{32\left(\sqrt{4x+13}-2\sqrt{1+4x}\right)}{16x^2-9}.$

3.13. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{8\left(\sqrt{3x+13}-2\sqrt{1+3x}\right)}{9x^2-9}.$

3.14. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{8\left(\sqrt{(-1+3x)^2}-1-3x\right)}{x}.$

3.15. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{5}\sqrt{15}+\dfrac{\sqrt{2x+13}-2\sqrt{2x+1}}{4x^2-9}\right).$

Задача 4. Вычислить пределы функций.

4.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(6x-5)}{\sin(6x)}.$

4.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(9x-5)}{\sin(9x)}.$

4.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-11x+8}{\sin(3x-3)}.$

4.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4(1-\cos(3x))}{\cos(21x)-\cos(9x)}.$

4.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5(1-\cos(2x))}{\cos(14x)-\cos(6x)}.$

4.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8(1-\cos(5x))}{\cos(35x)-\cos(15x)}.$

4.7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8\left(2^{2x}-1\right)}{\ln(1+4x)}.$

4.8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\left(2^{\frac{1}{2}x}-1\right)}{\ln(1+x)}.$

4.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\left(2^{\frac{1}{3}x}-1\right)}{\ln\left(1+\frac{2}{3}x\right)}.$

4.10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln\left(1-\frac{7}{3}x\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{3}x+7\right)\right)}.$

4.11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\ln\left(1-\frac{7}{4}x\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{4}x+7\right)\right)}.$

4.12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-21x)}{\sin(\pi(3x+7))}.$

4.13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9\ln(1-6x)}{\mathrm{arctg}(9x)}.$

4.14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\left(\mathrm{e}^{12x}-1\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{3}{2}x+1\right)\right)}.$

4.15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{4x^2}-1}{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)\right)}.$

Задача 5. Вычислить пределы функций.

5.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\,\frac{7^{4x}-5^{6x}}{4x-\operatorname{arctg}(6x)}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{5}\,\frac{7^{x}-5^{\frac{3}{2}x}}{x-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}x\right)}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3}\,\frac{7^{2x^2}-5^{3x^2}}{2x^2-\operatorname{arctg}(3x^2)}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3}\,\frac{3^{10x}-2^{2x}}{2x-\sin(18x)}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{15x}-2^{3x}}{3x-\sin(27x)}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{4\left(3^{\frac{5}{2}x}-2^{\frac{1}{2}x}\right)}{\frac{1}{2}x-\sin\left(\frac{9}{2}x\right)}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\,\frac{4^{\frac{5}{2}x}-9^{-x}}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{8}x^3\right)}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\left(4^{10\sqrt{x}}-9^{-4\sqrt{x}}\right)}{\sin(2\sqrt{x})-\operatorname{tg}\left(8x^{3/2}\right)}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{4^{5x^{1/3}}-9^{-2x^{1/3}}}{\sin\left(x^{1/3}\right)-tg(x)}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3}\,\frac{4^{5\ln(x+1)}-9^{-2\ln(x+1)}}{\sin(\ln(x+1))-\operatorname{tg}\left(\ln(x+1)^3\right)}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{6}\,\frac{4^{10x}-9^{-4x}}{\sin(2x)-tg(8x^3)}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\,\frac{4^{10\sqrt{x}}-9^{-4\sqrt{x}}}{\sin(2\sqrt{x})-\operatorname{tg}\left(8x^{3/2}\right)}$.

5.13. $\frac{1}{5}\,\frac{4^{5x^2}-9^{-2x^2}}{\sin(x^2)-\operatorname{tg}(x^6)}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to0}\ \frac{1}{5}\ \frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\sin(x)}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{2}x}-e^{-x}}{x+2\sin\left(\frac{1}{4}x^2\right)}$.

Задача 6. Вычислить пределы функций.

6.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{2+\frac{1}{2}x}{3-\frac{1}{2}x}\right)^{\frac{1}{2}x}$.

6.2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$.

6.3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x+3}\cdot\left(\frac{2+3x}{3-3x}\right)^{3x}$.

6.4. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{3}\left(\frac{1}{5}\frac{e^{15x}-1}{x}\right)^{\cos^2\left(\frac{1}{4}\pi+5x\right)}$.

6.5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{3\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\right)^{\cos^2\left(\frac{1}{4}\pi+\sqrt{x}\right)}$.

6.6. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{(x+1)^3-1}{\ln(x+1)}\right)^{\cos^2\left(\frac{1}{4}\pi+\ln(x+1)\right)}$.

6.7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{9x+4}{2+3\sqrt{x}}\right)^{9x+3}$.

6.8. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{1}{4}x^6+4}{2+\frac{1}{2}x^3}\right)^{\frac{1}{4}x^6+3}$.

6.9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{4}x^4+4}{\frac{1}{2}x^2+2}\right)^{\frac{1}{4}x^4+3}$.

6.10. $\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{4}x^{2/3}+4}{\frac{1}{2}x^{1/3}+2}\right)^{\frac{1}{4}x^{2/3}+3}$.

6.11. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin\left(\left(x^2\right)^{1/3}\right)}{\left(x^2\right)^{1/3}}\right)^{\frac{2}{\left(x^2\right)^{1/3}+5}}$.

6.12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\arcsin(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}\right)^{\frac{2}{\ln(x+1)+5}}$.

6.13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{4}\left(6-\frac{5}{\cos(3x)}\right)^{\operatorname{tg}^2(3x)}$.

6.14. $\lim\limits_{x\to0}3\left(6-\frac{5}{\cos\left(3x^{1/3}\right)}\right)^{\operatorname{tg}^2\left(3x^{1/3}\right)}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^{3/5}+4}{x^{3/5}+9}\right)^{\frac{1}{x^{1/5}+2}}$.

Задача 7. Вычислить пределы функций.

7.1. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{\cos(2x)}{\cos(2)}\right)^{\frac{1}{2x-2}}$.

7.2. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\left(\frac{\cos(3x)}{\cos(2)}\right)^{\frac{1}{3x-2}}$.

7.3. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\cos(x-1)}{\cos(2)}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

7.4. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{\cos(x-2)}{\cos(2)}\right)^{\frac{1}{x-4}}$.

7.5. $\lim\limits_{x\to 4\,\pi}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)^{\frac{\mathrm{ctg}(x)}{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}}$.

7.6. $\lim\limits_{x\to \frac{2\,\pi}{3}} 3\cos\left(3x\right)^{\frac{\mathrm{ctg}(6x)}{\sin(9x)}}$.

7.7. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\left(2\mathrm{e}^{3x-1}-1\right)^{\frac{3x}{3x-1}}$.

7.8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x-1}-1\right)^{\frac{x}{x-2}}$.

7.9. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} 3\left(2\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x\sqrt{3}-1}-1\right)^{\frac{x\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-3}}$.

7.10. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{5}} 2\left(2\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x-1}-1\right)^{\frac{x}{5x-2}}$.

7.11. $\lim\limits_{x\to 6} 3\left(2\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x-2}-1\right)^{\frac{x+2}{\frac{1}{3}x-2}}$.

7.12. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{5}} \mathrm{e}^{-2}\left(2\mathrm{e}^{5x-2}-1\right)^{\frac{15x+2}{5x-2}}$.

7.13. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{2}\left(2\mathrm{e}^{2x-2}-1\right)^{\frac{3x+1}{x-1}}$.

7.14. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-8}\left(2\mathrm{e}^{4x-2}-1\right)^{\frac{6x+1}{2x-1}}$.

7.15. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln\left(2-\frac{1}{3}x\right)}}$.

Задача 8. Различные задачи.

8.1. Доказать по определению непрерывность функции $f\,(x)$ в точке $x = x_0$.

1) $f\,(x) = x^2 - 1,\;\; x_0 = 1.$
2) $f\,(x) = x^2 - 2x,\;\; x_0 = 0.$
3) $f\,(x) = 3x^2 + 5,\;\; x_0 = 2.$
4) $f\,(x) = x^2 + 2x,\;\; x_0 = 1.$
5) $f\,(x) = x^3 - 1,\;\; x_0 = 1.$

8.2. Вычислить пределы функций.

1) $\lim\limits_{x\,\to\,0}\sqrt{5\cos 3x + x^2\,\mathrm{arctg}\,(1/x)}.$
2) $\lim\limits_{x\,\to\,\pi/2}\sqrt{5\sin 2x + (2x-\pi)\sin\frac{7x}{2x-\pi}}.$
3) $\lim\limits_{x\,\to\,\pi/4}\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}3x}+(4x-\pi)\cos\frac{5x}{4x-\pi}}{\ln(2+\mathrm{tg}x)}.$
4) $\lim\limits_{x\,\to\,-2}\sqrt{\frac{1+\cos\pi x}{4+(2x+4)\sin\frac{3x}{x+2}}}.$
5) $\lim\limits_{x\,\to\,0}\sqrt{5\cos 2x + \sin\frac{5}{3x}\cdot\ln\left(1+7x\right)}.$

8.3. Доказать принадлежность функции $f\,(x)$ к классу $O\,(1)\;\;(x\to 2)$.

1) $f\,(x) = 2x - 1$; 2) $f\,(x) = 3x + 1$; 3) $f\,(x) = (x-2)\sin\frac{2}{x-2}$;
4) $f\,(x) = (x-2)\cos\frac{5}{x-2}$; 5) $f\,(x) = \cos\frac{3}{x-2}$.

8.4. Доказать принадлежность функции $f\,(x)$ к классу $o\,(x)\;\;(x\to 0)$.

1) $f(x) = x^3 - 2x^2$; 2) $f(x) = (x+1)\sin\left(x^2\right)$;
3) $f(x) = (2x+1)\sin\left(x^2(x+3)\right)$;
4) $f(x) = x \cdot \arcsin 4x$; 5) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}\left(x^2 - 2x\right)$.

Рекомендуем проверить свои знания, отвечая на теоретические вопросы и теоретические упражнения, приводимые ниже[6].

Теоретические вопросы

1. Понятие числовой последовательности и ее предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. оо
2. Понятие предела функции в точке. Понятие функции, ограниченной в окрестности точки. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел.
3. Теорема о переходе к пределу в неравенствах.
4. Теорема о пределе промежуточной функции.
5. Понятие непрерывности функции. Доказать непрерывность функции $\cos x$.
6. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
7. Понятие бесконечно малой функции. Теорема о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.
8. Теорема о сумме бесконечно малых функций.
9. Теорема о произведении бесконечно малой функции на ограниченную функцию.
10. Теорема об отношении бесконечно малой функции к функции, имеющей предел, отличный от нуля.
11. Теорема о пределе суммы.
12. Теорема о пределе произведения.
13. Теорема о пределе частного.
14. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.
15. Непрерывность суммы, произведения и частного.
16. Непрерывность сложной функции.

[6]См. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчёты.- Изд-во «Лань», 2005.-240 с.

17. Понятие бесконечно большой функции. Теоремы о связи бесконечно больших функций с бесконечно малыми.

18. Сравнение бесконечно малых функций.

19. Эквивалентные бесконечно малые функции. Теорема о замене бесконечно малых функций эквивалентными.

20. Условие эквивалентности бесконечно малых функций.

Теоретические упражнения

1. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Вытекает ли из существования $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ существование $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

У к а з а н и е. Доказать и использовать неравенство
$||b| - |a|| \leq |b-a|$.

1. Доказать, что последовательность $\{n^2\}$ расходиться.

2. Сформулировать на языке «$\varepsilon - \delta$» утверждение: «Число A не является пределом в точке x_0 функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0».

3. Доказать, что если $f(x)$ непрерывная функция, $F(x) = |f(x)|$ есть также непрерывная функция. Верно ли обратное утверждение?

4. Сформулировать на языке «$\varepsilon - \delta$» утверждение: «Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, не является непрерывной в этой точке».

5. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ не существует. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\varphi(x)$ не существует.

У к а з а н и е. Допустить противное и использовать теорему о пределе частного.

1. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, а функция $\varphi(x)$ не имеет предела. Будут ли существовать пределы:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + \varphi(x)]$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\varphi(x)$?
Рассмотреть пример: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

1. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, а функция $\varphi(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$. Доказать, что произведение $f(x)\varphi(x)$ является бесконечно большой функцией при $x \to x_0$.

2. Является ли бесконечно большой при $x \to 0$ функция $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$?

3. Пусть $\alpha'(x) \sim \alpha(x)$ и $\beta'(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$. Доказать, что если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ не существует, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ тоже не существует.

Типовой расчёт «Производная»

Задача 1. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$.

1.1. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(9x^2\cos\left(\frac{1}{27x}\right)\right) + 2x, & x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.2. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{9}{4}x^2\cos\left(\frac{2}{27x}\right)\right) + x, & x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.3. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(25x^2\cos\left(\frac{1}{45x}\right)\right) + \frac{10}{3}x, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.4. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(49x^2\cos\left(\frac{1}{63x}\right)\right) + \frac{14}{3}x, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.5. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(16x^4\cos\left(\frac{1}{36x^2}\right)\right) + \frac{8}{3}x^2, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.6. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(64x^6\sin\left(\frac{1}{4x^2}\right)\right)\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.7. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(125x^3\sin\left(\frac{1}{5x}\right)\right)\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.8. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(8x^3\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\right)\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.9. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(343x^3\sin\left(\frac{1}{7x}\right)\right)\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.10. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(8x^6\sin\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right)\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.11. $f(x) = \begin{cases} -42x + 7x\sin\left(\frac{1}{7x}\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.12. $f(x)=\begin{cases} 2x^2+\frac{1}{3}x^2\sin\left(\frac{3}{x^2}\right), \\ 0, x=0. \end{cases}$

1.13. $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x^4+\frac{1}{4}x^4\sin\left(\frac{4}{x^4}\right), \\ 0, x=0. \end{cases}$

1.14. $f(x)=\begin{cases} 3^{\frac{1}{4}x^8\sin\left(\frac{4}{x^4}\right)}-1+x^4, \\ 0, x=0. \end{cases}$

1.15. $f(x)=\begin{cases} 3^{9x^6\sin\left(\frac{2}{3x^3}\right)}-1+6x^3, \\ 0, x=0. \end{cases}$

Задача 2. Найти производную функции.

2.1. $y=\frac{81x^4-72x^2}{18x^2-8}$.

2.2. $y=\frac{\frac{1}{16}x^4-2x^2}{\frac{1}{2}x^2-8}$.

2.3. $y=\frac{\frac{81}{16}x^4-18x^2}{\frac{9}{2}x^2-8}$.

2.4. $y=\frac{1}{375}\frac{\left(50x^2-1\right)\sqrt{25x^2+1}}{x^3}$.

2.5. $y=\frac{1}{81}\frac{\left(18x^2-1\right)\sqrt{9x^2+1}}{x^3}$.

2.6. $y=\frac{1}{24}\frac{\left(8x^4-1\right)\sqrt{4x^4+1}}{x^6}$.

2.7. $y=\frac{1}{3}\frac{\left(2x^6-1\right)\sqrt{x^6+1}}{x^9}$.

2.8. $y=\frac{1}{3}\frac{\left(2x^2+8x+7\right)\sqrt{x^2+4x+5}}{(x+2)^3}$.

2.9. $y=\frac{1}{3}\frac{\left(2x^2-4x+1\right)\sqrt{x^2-2x+2}}{(x-1)^3}$.

2.10. $y=\frac{1}{100}\frac{\sqrt{5x-1}(15x+2)}{x^2}$.

2.11. $y=\frac{1}{36}\frac{\sqrt{-3x-1}(-9x+2)}{x^2}$.

2.12. $y=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}(3x+5)}{(x+1)^2}$.

2.13. $y=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2x-2}(6x-1)}{(2x-1)^2}$.

2.14. $y=\frac{1}{15}\frac{3x^6+4x^4-x^2-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.15. $y=\frac{1}{15}\frac{192x^6+64x^4-4x^2-2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Задача 3. Найти дифференциал dy.

3.1. $y=2x\ln\left(\left|2x+\sqrt{4x^2+3}\right|\right)-\sqrt{4x^2+3}$.

3.2. $y=x^2\ln\left(\left|x^2+\sqrt{x^4+3}\right|\right)-\sqrt{x^4+3}$.

3.3. $y=x^3\ln\left(\left|x^3+\sqrt{x^6+3}\right|\right)-\sqrt{x^6+3}$.

3.4. $y=\sqrt{x}\ln\left(\left|\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right|\right)-\sqrt{x+3}$.

3.5. $y=x^{1/3}\ln\left(\left|x^{1/3}+\sqrt{x^{2/3}+3}\right|\right)-\sqrt{x^{2/3}+3}$.

3.6. $y=\arccos\left(\frac{1}{18}\frac{\left(9x^2-1\right)\sqrt{2}}{x^2}\right)$.

3.7. $y=\arccos\left(\frac{1}{2}\frac{\left(x^6-1\right)\sqrt{2}}{x^6}\right)$.

3.8. $y=\arccos\left(\frac{1}{2}\frac{\left(x^4-1\right)}{x^4}\right)$.

3.9. $y=\operatorname{tg}\left(\frac{9x^2-1}{3x}\right)$.

3.10. $y=\operatorname{tg}\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)$.

3.11. $y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+4x^2}-1}{2x}$.

3.12. $y=\arccos\frac{x^2-9}{\sqrt{x^4+81}}$.

3.13. $y = \sqrt[3]{\frac{3x+2}{3x-2}}$.

3.14. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3x}{2} + 1\right)$.

3.15. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} 3x) +$
$+ (\operatorname{sh} 3x)\ln(\operatorname{ch} 3x)$.

Задача 4. Найти производную функции.

4.1. $y = \ln(x) + \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

4.2. $y = \sin\left(3\,x^2 + 1\right) + \frac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$.

4.3. $y = \cos\left(x^3 + 2x\right) + \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$.

4.4. $y = \frac{1}{243}\frac{\left(18x^2+3\right)\sqrt{9x^2-3}}{x^3}$.

4.5. $\frac{1}{9}\frac{\left(2\ln(x)^2+3\right)\sqrt{\ln(x)^2-3}}{\ln(x)^3}$.

4.6. $y = \frac{1}{9}\frac{\left(2\mathrm{e}^{4x}+3\right)\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-3}}{\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^3}$.

4.7. $y = \frac{3\left(9x^2+3x+1\right)^{1/3}}{3x+1}$.

4.8. $y = 3\left(\frac{x}{(x-2)^2}\right)^{1/3}$.

4.9. $3\left(\frac{2x+1}{(2x-1)^2}\right)^{1/3}$.

4.10. $y = \frac{27x+3\sqrt{x}}{\sqrt{81x^2+2}}$.

4.11. $y = \frac{2x+7}{6\sqrt{4x^2+4x+7}}$.

4.12. $y = \frac{x\sqrt{2x+1}}{4x^2+4x+1}$.

4.13. $y = \frac{9x^2+2}{2\sqrt{1-81x^4}}$.

4.14. $y = \frac{(5x+3)\sqrt{10x-1}}{10x+7}$.

4.15. $y = \frac{6x+\sqrt{2x}}{\sqrt{4x^2+2}}$.

Задача 5. Найти производную функции.

5.1. $y = \left(x^2 + 2x\right)^{\operatorname{sh}(x+1)}$.

5.2. $y = \left(x^4 + 4x^3 + 6x^2\right) +$
$+ (4x+6)^{\operatorname{ctg}(x+1)}$.

5.3. $y = (\sin(x+1))^{3x+3}$.

5.4. $y = \left(x^2 + 2x + 2\right)^{\cos(x+1)}$.

5.5. $y = 19^{(x+1)^{19}}(x+1)^{19}$.

5.6. $y = (x+1)^{3^{x+1}}\,2^{x+1}$.

5.7. $y = \left(x^2+1\right)^{3^{x+1}} \cdot 2^{x^3+1}$.

5.8. $y = (\sin(x+1))^{\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}}$.

5.9. $y = \left(x^2 + 2x + 2\right)^{\cos(x+1)}$.

5.10. $y = (x+1)^{\mathrm{e}^{\cos(x+1)}}$.

5.11. $y = (x+1)^{2^{x+1}}\,5^{x+1}$.

5.12. $y = (3x)^{\mathrm{e}^{\sin(3x)}}$.

5.13. $y = (\operatorname{tg}(3x))^{\frac{1}{4}\ln(tg(3x))}$.

5.14. $y = \left(6561x^8 + 1\right)^{\operatorname{th}(3x)}$.

5.15. $y = 19683\,(3x)^{e^{3x}}\,x^9$.

Задача 6. Найти производную функции.

6.1. $y = \sqrt{4 + 2x\cdot(1+2x)} + 3\ln\left(\sqrt{4+2x} + \sqrt{1+2x}\right)$.

6.2. $y = \sqrt{-8x^2 - 6x + 1} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\arcsin\left(\frac{1}{17}(8x+3)\sqrt{17}\right)$.

6.3. $y = \sqrt{4 + 6x(1+6x)} + 3\ln\left(\sqrt{4+6x} + \sqrt{1+6x}\right)$.

6.4. $y = \frac{\arcsin(2x)}{\sqrt{-4x^2+1}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$.

6.5. $y=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4x^2+2}}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\ln\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4x^2+2}}{x}\right).$

6.6. $y=(2+12x)\sqrt{4x-1}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{4x-1}\right).$

6.7. $y=\left(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)\sqrt{1+4x}+\ln\left(\sqrt{1+4x}+1\right).$

6.8. $y=\sqrt{16x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{16x^2+1}-4x}{\sqrt{16x^2+1}+1}\right).$

6.9. $y=\left(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)\sqrt{1+4x}+\ln\left(\sqrt{1+4x}+1\right).$

6.10. $y=\sqrt{144x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{144x^2+1}-12x}{\sqrt{144x^2+1}+1}\right).$

6.11. $y=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{4x-1}{1+4x}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2(16x^2-1)}\right)\operatorname{arctg}(4x).$

6.12. $y=4\ln\left(\sqrt{1-4x}+\sqrt{1+4x}\right)+\frac{1}{2}\arcsin(4x)-2x.$

6.13. $y=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{16x^2-1}\right)-\frac{\ln(4x)}{\sqrt{16x^2-1}}.$

6.14. $y=\sqrt{3-4x(2+4x)}+5\arcsin\left(\frac{1}{5}\sqrt{10+20x}\right).$

6.15. $y=16\,x\left(\arcsin(4x)\right)^2+2\sqrt{-16x^2+1}\arcsin(4x)-8x.$

Задача 7. Найти производную n-го порядка.

7.1. $y=\sin(10x)+\cos(1+5x).$

7.2. $y=5x\mathrm{e}^{15x}.$

7.3. $y=\left(e^{35x-1}\right)^{1/5}.$

7.4. $y=\frac{20x+7}{10x+3}.$

7.5. $y=\frac{5x}{4+30x}.$

7.6. $y=a^{15x}.$

7.7. $y=\frac{\ln(4+5x)}{\ln(10)}.$

7.8. $y=\sqrt{5\,x}.$

7.9. $y=\frac{10x+5}{13+195x}.$

7.10. $y=(x+1)\,\mathrm{e}^{3x+3}.$

7.11. $y=\left(e^{7x+6}\right)^{1/5}.$

7.12. $y=\frac{4x+11}{2x+5}.$

7.13. $y=\sqrt{x+1}.$

7.14. $y=\sin(2x+2)+\cos(2+x).$

7.15. $y=\frac{2x+7}{52+39x}.$

Задача 8. Найти производную y'_x.

8.1. $\begin{cases} x=\left(1+\cos^2 3t\right)^2, \\ y=\frac{\cos 3t}{\sin^2 3t}. \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} x=\ln\frac{1-t^2}{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t^4}. \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} x=\arccos\frac{1}{t+1}, \\ y=\sqrt{t^2+2t}+\arcsin\frac{1}{t+1}. \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} x=\frac{1}{\ln 5t}, \\ y=\ln\frac{1+\sqrt{1-25t^2}}{5t}. \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t-1}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} x = \left(\arcsin t^3\right)^2, \\ y = \frac{t^3}{\sqrt{1-t^6}}. \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} x = 2t\sqrt{4t^2+1}, \\ y = \ln\frac{1+\sqrt{1+4t^2}}{2t}. \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 5t, \\ y = \ln\frac{\sqrt{1+25t^2}}{5t+1}. \end{cases}$

8.9. $\begin{cases} x = \ln\left(-t^2-2t\right), \\ y = \arcsin\sqrt{-t^2-2t}. \end{cases}$

8.10. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\frac{2t+1}{2t-1}, \\ y = \arcsin\sqrt{1-4t^2}. \end{cases}$

8.11. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\frac{1-\sin 2t}{1+\sin 2t}}, \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 2t + \ln\cos 2t. \end{cases}$

8.12. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-4t^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-2t}{2t}}, \\ y = \sqrt{2t} - \sqrt{1-2t}\arcsin\sqrt{2t}. \end{cases}$

8.13. $\begin{cases} x = \ln\left(\operatorname{tg} 3t\right), \\ y = \frac{1}{\sin^2 3t}. \end{cases}$

8.14. $\begin{cases} x = \frac{9t^2\ln 3t}{1-9t^2} + \ln\sqrt{1-9t^2}, \\ y = \frac{3t}{\sqrt{1-9t^2}}\arcsin 3t + \ln\sqrt{1-9t^2}. \end{cases}$

8.15. $\begin{cases} x = e^{\sec^2 2t}, \\ y = \operatorname{tg} 2t \cdot \ln\cos 2t + \operatorname{tg} 2t - 2t. \end{cases}$

Задача 9. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

9.1. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos 7x+\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 10x}$.

9.2. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{\cos 3x}{(3^{x-\pi/6}-1)}$.

9.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2 x\right)^{(1-\cos 3x)^{-1}}$.

9.4. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\mathrm{e}^x(\cos(4x)-1)}{\cos(6x)-1}$

9.5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\pi(x^2-1)}{e^{\sin\pi x^3}-1}$.

9.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\ln(2-\cos^2 x)}$.

9.7. $\lim\limits_{x\to\infty}(2\cos^2\frac{1}{2x}-1)^{x^2}$.

9.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{1+2x}-2}{(\ln(1+3x))}$.

9.9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^8+1}-\sqrt[3]{8x^8+3x+1}}{\cos^2(1/x)}$.

9.10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-2\sin^2\frac{\pi x}{4}}{1-\sqrt{x}}$.

9.11. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(x^3-\pi^3)5x}{e^{1-\cos 2x}-1}$.

9.12. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-2\sin^2(3x/4)}{e^{x-\pi}-\sin(17\pi/2)}$.

9.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\cos(1/x))}{2^{1/x^2}-1}$.

9.14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+2x+1}-\sqrt[3]{x^3+3x}}{e^{1/x}-1}$.

9.15. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)$

Рекомендуем проверить свои знания, отвечая на теоретические вопросы и теоретические упражнения, приводимые ниже[7].

Теоретические вопросы

1. Понятие производной. Производная функции x^n .
2. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
3. Понятие дифференцируемости функции и дифференциала. Условие дифференцируемости. Связь дифференциала с производной.
4. Геометрический смысл дифференциала.
5. Непрерывность дифференцируемой функции.

[7] См. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчёты.- Изд-во «Лань», 2005.-240 с.

6. Дифференцирование постоянной и суммы, произведения и частного.
7. Производная сложной функции.
8. Инвариантность формы дифференциала.
9. Производная обратной функции.
10. Производные обратных тригонометрических функций.
11. Гиперболические функции, их производные.
12. Производные высших порядков, формула Лейбница.
13. Правило Лопиталя.
14. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Теоретические упражнения

1. Исходя из определения производной, доказать, что
   (a) а) производная периодической дифференцируемой функции есть функция периодическая;
   (b) б) производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная;
   (c) в) производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.
2. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$ и $f(0) = 0$, то $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.
3. Доказать, что производная $f'(0)$ не существует, если
4. $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
5. Доказать, что производная от функции
6. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
7. разрывна в точке $x = 0$.
8. Доказать приближенную формулу
   (a) $\sqrt{a^2 + z} \approx a + z/(2a), \quad a > 0, \quad |z| \ll a.$

9. Что можно сказать о дифференцируемости суммы $f(x) + g(x)$ в точке $x = x_0$ если, в этой точке:
10. а) функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $g(x)$ не дифференцируема;
11. б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не дифференцируемы.
12. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке. Доказать, что произведение $f(x)\, g(x)$ является недифференцируемым в точке x_0.
13. Что можно сказать о дифференцируемости произведения $f(x)\, g(x)$ в предположениях задачи?

    (a) Рассмотреть примеры:

    (b) а) $f(x) = x, \quad g(x) = |x|, \quad x_0 = 0;$

    (c) $f(x) = x, \quad g(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

    (d) б) $f(x) = |x|, \quad g(x) = |x|, \quad x_0 = 0;$

    (e) $f(x) = |x|, \quad g(x) = |x| + 1, \quad x_0 = 0.$

14. Найти $f'(0)$, если $f(x) = x(x+1)\dots(x+1234567)$.
15. Выразить дифференциал d^3y от сложной функции $y[u(x)]$ через производные от функции $y(u)$ и дифференциалы от функции $u(x)$.
16. Пусть $y(x)$ и $x(y)$ дважды дифференцируемые взаимно обратные функции. Выразить x'' через y' и y''.

Типовой расчёт «Графики»

Задача 1. Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

1.1. $y = 8x^3 - 6\,x$.

1.2. $y = 16x(-x-1)^4$.

1.3. $y = 8x^3 + 12x^2 - 2$.

1.4. $y = -2x^3 + 9x^2 - 12\,x$.

1.5. $y = (2x+1)^2(2x+3)^2$.

1.6. $y = 1 - \left(x^2 - 2x\right)^{1/3}$.

1.7. $y = -4x + 8 - 6\left((-x+2)^2\right)^{1/3}$.

1.8. $y = (x(x+2))^{1/3}$.

1.9. $y = \frac{36^{1/3}\left((-x-1)^2\right)^{1/3}}{2x^2-4\,x+18}$.

1.10. $y = 3\left((-x+4)^2\right)^{1/3} + 2x - 8$.

1.11. $y = -216x^3 + 18x$.

1.12. $y = 54x^3 + 81x^2 + 36x$.

1.13. $y = 1 - \left(9x^2 + 6x\right)^{1/3}$.

1.14. $y = -216x^3 + 108x^2 - 2$.

1.15. $y = 12x + 8 - 6\left((3x+2)^2\right)^{1/3}$.

Задача 2. Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

2.1. $y = 6\,\mathrm{e}^{2x} - 8x^3 - 12x^2 - 12x - 5, x_0 = 0$.

2.2. $y = 4\,x^2 - 4x - 2\mathrm{e}^{2x-2}, x_0 = 1$.

2.3. $y = \cos(2x-1)^2 + 4x^2 - 4x, x_0 = \frac{1}{2}$.

2.4. $y = 6\,\mathrm{e}^{2x+1} - 8x^3 - 24x^2 - 30x - 16, x_0 = -\frac{1}{2}$.

2.5. $y = 4\,x^2 - 2\mathrm{e}^{2x-1}, x_0 = \frac{1}{2}$.

2.6. $y = \sin(2x) + \mathrm{sh}(2x) - 4x, x_0 = 0$.

2.7. $y = 4\,x^2 - 4x - 2\mathrm{e}^{2x-2}, x_0 = 1$.

2.8. $y = 4\,x^2 - 8x + \cos(2x-2)^2, x_0 = 1$.

2.9. $y = 6\mathrm{e}^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 5, x_0 = 0$.

2.10. $y = x^2 + 2x - 2\mathrm{e}^{-x-2}, x_0 = -2$.

2.11. $y = \cos(x+1)^2 + x^2 + 2x, x_0 = -1$.

2.12. $y = x^2 - 2\mathrm{e}^{-x-1}, x_0 = -1$.

2.13. $y = x^2 + 2x - 2\mathrm{e}^{-x-2}, x_0 = -2$.

2.14. $y = x^2 + 4x + \cos(x+2)^2, x_0 = -2$.

2.15. $y = -\sin(x) - \mathrm{sh}(x) + 2x, x_0 = 0$.

Задача 3. Найти асимптоты и построить графики функций.

3.1. $y = \frac{-3x^2+7}{7x+3}$.

3.2. $y = \frac{54x^3-27x^2-6x+1}{-27x^2+1}$.

3.3. $y = \frac{27x^3+9x^2-9x-1}{18x^2-2}$.

3.4. $y = \frac{27x^2-7}{6x+1}$.

3.5. $y = \frac{18x^2-1}{\sqrt{9x^2-2}}$.

3.6. $y = \frac{9x^2+18x+9}{3x+4}$.

3.7. $y = \frac{-9x^2-8}{\sqrt{9x^2-4}}$.

3.8. $y = \frac{9x^2+16}{\sqrt{81x^2-8}}$.

3.9. $y = \frac{-4x^2+21}{-14\,x+9}$.

3.10. $y = \frac{12x^2-7}{-4x+1}$.

3.11. $y = \frac{8x^2-1}{\sqrt{4x^2-2}}$.

3.12. $y = \frac{4x^2-12x+9}{-2\,x+4}$.

3.13. $y = \frac{-2x^2-4}{\sqrt{x^2-1}}$.

3.14. $y = \frac{2x^2+8}{\sqrt{9x^2-2}}$.

3.15. $y = \frac{-8x^3+4x^2+6x-1}{8x^2-2}$.

Задача 4. Провести полное исследование функции и построить её график.

4.1. $y = \frac{\mathrm{e}^{5x-3}}{5x-3}$.

4.2. $y = \ln\left(\frac{5x+6}{5x}\right)$.

4.3. $y = 2\ln\left(\frac{5x-1}{5x}\right) + 1$.

4.4. $y = (10x+5)\,\mathrm{e}^{-10x-4}$.

4.5. $y = \left((2-5x)\left(25x^2-20x+1\right)\right)^{1/3}$.

4.6. $y = \left((5x+1)\left(25x^2+10x-2\right)\right)^{1/3}$.

4.7. $y = \left((5x-3)\left(25x^2-30x+6\right)\right)^{1/3}$.

4.8. $y = 25^{1/3}\left((3+5x)\,x^2\right)^{1/3}$.

4.9. $y = \left((5x-2)^2\right)^{1/3} - \left((5x-3)^2\right)^{1/3}$.

4.10. $y = \frac{\mathrm{e}^{-x-3}}{-x-3}$.

4.11. $y = \ln\left(-\frac{-x+6}{x}\right) - 1$.

4.12. $y = (-2x+5)\,\mathrm{e}^{2x-4}$.

4.13. $y = \left((x+2)\left(x^2+4x+1\right)\right)^{1/3}$.

4.14. $y = \left((3-x)\,x^2\right)^{1/3}$.

4.15. $y = 2\ln\left(-\frac{-x-1}{x}\right) + 1$.

Задача 5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

5.1. $y = \frac{1}{\sin(2x)-\cos(2x)}$.

5.2. $y = \mathrm{e}^{\sin(2x)-\cos(2x)}$.

5.3. $y = \sin^{1/3}(2x)$.

5.4. $y = -arctg\,(\cos(2x))$.

5.5. $y = \ln\left(\sqrt{2}\sin(2x)\right)$.

5.6. $y = \frac{1}{\sin(x+1)-\cos(x+1)}$.

5.7. $y = -\operatorname{arctg}(\cos(x+1))$.

5.8. $y = \sin^{1/3}(x+1)$.

5.9. $y = \ln\left(\sqrt{2}\sin(x+1)\right)$.

5.10. $y = \mathrm{e}^{\sin(x+1)-\cos(x+1)}$.

5.11. $y = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}$.

5.12. $y = \sin^{1/3}\left(\frac{1}{2}x\right)$.

5.13. $y = \mathrm{e}^{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}$.

5.14. $y = -\operatorname{arctg}\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)$.

5.15. $y = \ln\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)$.

Рекомендуем проверить свои знания, отвечая на теоретические вопросы и теоретические упражнения, приводимые ниже[8].

Теоретические вопросы

1. Условия возрастания функции на отрезке.
2. Условия убывания функции на отрезке.
3. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума.
4. Достаточные признаки максимума и минимума функции (изменение знака первой производной).
5. Наибольшее и наименьшее значения, функции, непрерывной на отрезке.
6. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости.
7. Точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба.
8. Исследование функций на экстремум с помощью высших производных.
9. Асимптоты графика функции.

Теоретические упражнения

1. Доказать, что функция $f(x) = x - \sin x$ монотонно возрастает на отрезке: а) $\left[\ 0,\ \ 2\pi\ \right]$; б) $\left[\ 0,\ \ 4\pi\ \right]$ Следует ли из монотонности дифференцируемой функции монотонность ее производной?

2. Доказать теорему: *если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *дифференцируемы на отрезке* $\left[\ a,\ \ b\ \right]$ *и* $\varphi'(x) > \psi'(x)$ $\forall x \in \left(\ a,\ \ b\ \right)$, *а* $\varphi(a) = \psi(a)$, *то* $\varphi(x) > \psi(x)$ $\forall x \in \left(\ a,\ \ b\ \right]$.

Дать геометрическую интерпретацию теоремы.

У к а з а н и е. При доказательстве теоремы установить и использовать монотонность функции $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$.

3. Доказать неравенство $2x/\pi < \sin x$ для трех случаев:

а) $\forall x \in \left(\ 0,\ \ \arccos\frac{2}{\pi}\ \right]$;

б) $\forall x \in \left[\ \arccos\frac{2}{\pi},\ \ \frac{\pi}{2}\ \right)$;

в) $\forall x \in \left(\ 0,\ \ \frac{\pi}{2}\ \right)$.

---

[8]См. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчёты.- Изд-во «Лань», 2005.-240 с.

Дать геометрическую интерпретацию неравенства.

4. Исходя из определений минимума и максимума, доказать, что функция
$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$
имеет в точке $x=0$ минимум, а функция
$$f(x)=\begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$
не имеет в точке $x=0$ экстремума.

5. Исследовать на экстремум в точке x_0 функцию $f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$, считая, что производная $\varphi'(x)$ не существует, но функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\varphi(x_0)\neq 0$, n .— натуральное число.

6. Исследовать знаки максимума и минимума функции x^3-3x+q и выяснить условия, при которых уравнение $x^3-3x+q=0$ имеет а) три различных действительных корня; б) один действительный корень.

7. Определить «отклонение от нуля» многочлена $p(x)=6x^3-27x^2+36x-14$ на отрезке $\left[\,0,\ \ 3\,\right]$, т. е. найти на этом отрезке наибольшее значение функции $|p(x)|$.

8. Установить условия существования асимптот у графика рациональной функции.

Типовой расчет «Интегрирование»

Задача 1. Вычислить интегралы.

1.1. $\int (15x-2)\,\mathrm{e}^{9x}\,\mathrm{d}x.$

1.2. $\int \ln\left(9x^2+4\right)\mathrm{d}x.$

1.3. $\int\ (2-12x)\sin(6x)\,\mathrm{d}x.$

1.4. $\int \ln\left(36x^2+1\right)\ \mathrm{d}x.$

1.5. $\int\ \frac{3x}{\cos(3x)^2}\mathrm{d}x.$

1.6. $\int arctg\left(\sqrt{12x-1}\right)\ \mathrm{d}x.$

1.7. $\int\ (9x-2)\cos(15x)\,\mathrm{d}x.$

1.8. $\int 3x\sin^2(3x)\ \mathrm{d}x.$

1.9. $\int\ (5x+3)\,\mathrm{e}^{3x+3}\mathrm{d}x.$

1.10. $\int\ \ln\left(x^2+2x+5\right)\mathrm{d}x$

1.11. $\int (3x+1)\cos(5x+5)\ \mathrm{d}x.$

1.12. $\int \frac{x+1}{\cos^2(x+1)}\ \mathrm{d}x.$

1.13. $\int arctg\left(\sqrt{4x+3}\right)\ \mathrm{d}x.$

1.14. $\int\ \ln\left(4x^2+8x+5\right)\mathrm{d}x.$

1.15. $\int\ (x+1)\left(\cos^2(x+1)-1\right)\mathrm{d}x.$

Задача 2. Вычислить интегралы.

2.1. $\int\ \frac{1}{x\,\sqrt{9x^2+1}}\mathrm{d}x.$

2.2. $\int\ \frac{9x^2+\ln\left(9x^2\right)}{x}\mathrm{d}x.$

2.3. $\int \frac{\sin(3x)-\cos(3x)}{(\cos(3x)+\sin(3x))^5}\, dx.$

2.4. $\int tg\,(3x)\ln(\cos(3x))\; dx.$

2.5. $\int \frac{tg(3x+1)}{\cos^2(3x+1)}\, dx.$

2.6. $\int \frac{x^3}{(9x^2+1)^2}\, dx.$

2.7. $\int \frac{2\left(\frac{1}{4}x^2+\ln\left(\frac{1}{4}x^2\right)\right)}{x}\, dx$

2.8. $\int \frac{x^3}{(25x^2+1)^2}\, dx.$

2.9. $\int \frac{2\left(\arccos^3\left(\frac{1}{2}x\right)-1\right)}{\sqrt{-x^2+4}}\, dx.$

2.10. $\int \frac{x-\frac{4}{x}}{\sqrt{x^2+4}}\, dx.$

2.11. $\int \frac{x^3}{\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)^2}\, dx.$

2.12. $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^5}\, dx.$

2.13. $\int \frac{4}{x\sqrt{x^2+4}}\, dx.$

2.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}(x-1)}.$

2.15. $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}} dx.$

Задача 3. Вычислить определённые интегралы.

3.1. $\int\limits_0^1 \frac{x}{16x^4+1}\, dx.$

3.2. $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{-2x-\frac{1}{2x}}{\sqrt{4x^2+1}}\, dx$

3.3. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mathrm{arctg}(2x)+2\,x}{4x^2+1}\, dx.$

3.4. $\int\limits_{-1}^{-\frac{3}{2}} \frac{1-\sqrt{-2x}}{\sqrt{-2x}(-2x+1)} dx.$

3.5. $\int\limits_{-1}^{-\frac{3}{2}} \frac{1-\sqrt{-2x}}{\sqrt{-2x}(-2x+1)} dx.$

3.6. $\int\limits_{-e}^{-1} \frac{1+\ln(-2x)}{x}\, dx.$

3.7. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{tg}(2x-1)}{\cos(2x-1)^2}\, dx.$

3.8. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{8\,x^3+2\,x}{16x^4+1}\, dx.$

3.9. $\int\limits_0^4 \frac{x}{\frac{1}{256}x^4+1}\, dx.$

3.10. $\int\limits_{4\sqrt{3}}^{8\sqrt{2}} \frac{x+\frac{16}{x}}{\sqrt{x^2+16}}\, dx.$

3.11. $\int\limits_0^4 \frac{2\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{4}x+1\right)}\, dx.$

3.12. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{4}x\right)+\frac{1}{4}x}{\frac{1}{16}x^2+1}\, dx.$

3.13. $\int\limits_1^{e^1} \frac{4\left(1+\ln\left(\frac{1}{4}x\right)\right)}{x}\, dx.$

3.14. $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{1}{4}x+1\right)}{\cos\left(\frac{1}{4}x+1\right)^2}\, dx.$

3.15. $\int\limits_0^4 \frac{\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x}{\frac{1}{256}x^4+1}\, dx.$

Задача 4. Вычислить определённые интегралы.

4.1. $\int \frac{3x^3+9x^2+9x+1}{x(x^2+3x+2)}\, dx.$

4.2. $\int \frac{3x^5+15x^4+18x^3-6x^2-21x-16}{x^2+4x+3}\, dx.$

4.3. $\int \frac{x^5+4x^4-14x^2-4x+13}{(x+1)(x-2)(x+3)}\, dx.$

4.4. $\int \frac{x^3-3x^2+4x+2}{(x+3)(x-1)^3}\, dx.$

4.5. $\int \frac{x^3+3x^2+4x+4}{(x+3)(x+1)^3}\, dx.$

4.6. $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}\, dx.$

4.7. $\int \frac{x^3+7x^2+14x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+2)}\, dx.$

4.8. $\int \frac{3x^3+15x^2+26x+13}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}\, dx.$

4.9. $\int \frac{3x^3-9x^2+9x-5}{x(x^2-3x+2)}\, dx.$

4.10. $\int \frac{x^5-6x^4+8x^3+2x^2+4x-3}{(x-4)(x^2-1)}\, dx.$

4.11. $\int \frac{x^3-9x^2+28x-26}{(x+1)(x-3)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.12. $\int \frac{x\left(x^2-3x+4\right)}{(x+1)(x-1)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.13. $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-2}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.14. $\int \frac{x^3+x^2-2x+2}{x^2(x^2-2x+2)}\,\mathrm{d}x.$

4.15. $\int \frac{3x^3-3x^2+2x-3}{x^2(x^2-2x+3)}\,\mathrm{d}x.$

Задача 5. Вычислить определённые интегралы.

5.1. $\int\limits_{\pi/4}^{arctg(3)} \frac{1}{\sin(2x)^2(1-\cos(2x))}\,\mathrm{d}x.$

5.2. $\int\limits_{arctg(2)}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{(1-\cos(2x))^3}\,\mathrm{d}x.$

5.3. $\int\limits_{arctg\left(\frac{1}{2}\right)}^{arctg(2)} \frac{1}{\sin(2x)\cdot(1+\sin(2x))}\,\mathrm{d}x.$

5.4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{5+4\cos(2x)}\,\mathrm{d}x.$

5.5. $\int\limits_{-\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}^{0} \frac{3\tan(2x)^2-50}{-2\tan(2x)+7}\,\mathrm{d}x.$

5.6. $\int_{-\pi/8}^{-\frac{\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}}{2}} \frac{1}{(6+\mathrm{tg}(2x))\sin(4x)}\mathrm{d}x.$

5.7. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2(2x)\cos^6(2x)\,\mathrm{d}x.$

5.8. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos^8\left(\frac{1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x.$

5.9. $\int\limits_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^3}\,\mathrm{d}x.$

5.10. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\left(6-\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)\right)\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$

5.11. $\int\limits_{0}^{4\pi} \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)\cos^6\left(\frac{1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x.$

5.12. $\int\limits_{0}^{4\pi} \cos^8\left(\frac{1}{8}x\right)\mathrm{d}x.$

5.13. $\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\right)} \frac{\cos(3x)}{5+4\cos(3x)}\,\mathrm{d}x.$

5.14. $\int\limits_{0}^{6\pi} \sin^2(3x)\cos^6(3x)\,\mathrm{d}x.$

5.15. $\int\limits_{0}^{6\pi} \cos^8\left(\frac{3}{4}x\right)\,\mathrm{d}x.$

Задача 6. Вычислить интегралы.

6.1. $\int\limits_{1}^{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{2-3x}{3x-6}}\,\mathrm{d}x.$

6.2. $\int\limits_{3}^{5} \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\,\mathrm{d}x.$

6.3. $\int\limits_{3}^{5} \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\,\mathrm{d}x.$

6.4. $\int\limits_{0}^{\frac{4}{3}} x^2\sqrt{-9x^2+16}\,\mathrm{d}x.$

6.5. $\int\limits_{1}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x^4}\,\mathrm{d}x.$

6.6. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{1+3^{1/3}x^{1/3}}\sqrt{3}}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$

6.7. $\int\limits_{1}^{3} \frac{\left(1+27^{1/4}\left(x^3\right)^{1/4}\right)^{1/3}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

6.8. $\int\limits_{-5}^{-3} \sqrt{\frac{x+2}{-x-6}}\,\mathrm{d}x.$

6.9. $\int\limits_{-15}^{-9} \sqrt{\frac{x+6}{-x-18}}\,\mathrm{d}x.$

6.10. $\int\limits_{-2}^{0} \sqrt{-x^2+4}\,\mathrm{d}x.$

6.11. $\int\limits_{-4}^{0} x^2\sqrt{-x^2+16}\,\mathrm{d}x.$

6.12. $\int\limits_{-5}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+25}}\,\mathrm{d}x.$

6.13. $\int\limits_{3}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,\mathrm{d}x.$

6.14. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{1+(-x)^{1/3}}}{x\sqrt{-x}}\,\mathrm{d}x.$

6.15. $\int\limits_{-\frac{5}{2}}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{-4x^2+25}}\,\mathrm{d}x.$

Задача 7. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

7.1. $y=-9x^2+4, y=9x^2-6\,x.$
7.2. $y=9x\sqrt{-x^2+1}, y=0, 0\le x\ \le 1.$
7.3. $y=\cos^2(\sin(3x)), y=0, 0\le x\ \ \le \frac{1}{6}\pi.$
7.4. $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln(3x)}}, y=0, x=\frac{1}{3}, x=\frac{\mathrm{e}}{3}.$
7.5. $y=-9x^2+6x+3, y=9x^2-12x+3.$
7.6. $y=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{3x}}}{x^2}, y=0, 3x=2, 3x=1.$
7.7. $y=(3x-2)^3, y=12x-8.$
7.8. $y=-25x^2+4, y=25x^2-10x.$
7.9. $y=x\sqrt{-25x^2+9}, y=0, 0\le x\ \ \le \frac{3}{5}.$
7.10. $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln(5x)}}, y=0, x=\frac{1}{5}, x=\frac{\mathrm{e}}{5}.$
7.11. $y=-25x^2+10x+3, y=25x^2-20x+3.$
7.12. $y=\frac{x}{1+\sqrt{5x}}, y=0, 5x=1.$
7.13. $y=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{5x}}}{x^2}, y=0, 5x=2, 5x=1.$
7.14. $y=(5x-2)^3, y=20x-8.$
7.15. $y=-x^2+4, y=x^2-2x.$

Задача 8. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

8.1. $y=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{6}\ln(3x), \frac{1}{3}\le x\ \le \frac{2}{3}.$
8.2. $y=\frac{1}{3}\left(\sqrt{-9x^2+3x}-\arccos\left(\sqrt{3x}\right)\right)+5, \frac{1}{27}\le x\le \frac{1}{3}.$
8.3. $y=\frac{1}{3}\ln\left(9x^2-1\right), \frac{2}{3}\le x\le 1.$
8.4. $y=\frac{1}{3}\operatorname{ch}(3x)+3, 0\le x\le \frac{1}{3}.$
8.5. $y=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+13, \frac{\ln(15)}{6}\le\ x\le \frac{\ln\left(2\sqrt{6}\right)}{3}.$
8.6. $y=\frac{1}{8}x^2-\ln\left(\frac{1}{2}x\right), 2\le x\le 4.$

8.7. $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-4\,x^2+2x} - \left(\arccos\left(\sqrt{2x}\right)\right)\right) + 7, 0 \le x \le \frac{1}{2}$.
8.8. $y = 2\ln\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right), 4 \le x \le 6$.
8.9. $y = 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}x\right) + 9, 0 \le x \le 2$.
8.10. $y = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + 17, 0 \le x \le \ln 2$.
8.11. $y = 5 + \frac{1}{2}\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2x}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x}\right), 0 \le x \le \frac{15}{32}$.
8.12. $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{1}{2}\ln(x+1), 0 \le x \le 1$.
8.13. $y = \ln\left(x^2+2x\right), 1 \le \ x \le 2$.
8.14. $y = \mathrm{ch}(x+1) + 3, -1 \le x \le 0$.
8.15. $y = 2 + \arcsin\left(\sqrt{x+1}\right) + \sqrt{x+1-(x+1)^2}, -\frac{3}{4} \le \ x \le 0$.

Задача 9. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

9.1. $z = x^2 + 36y^2, z = 2$.
9.2. $\frac{1}{9}x^2 + \frac{9}{4}y^2 - z^2 = 1, z = 0, z = 3$.
9.3. $z = x^2 + 81y^2, z = 3$.
9.4. $\frac{1}{9}x^2 + \frac{9}{16}y^2 - \frac{1}{64}z^2 = -1, z = 16$.
9.5. $\frac{1}{9}x^2 + \frac{9}{4}y^2 - z^2 = 1, z = 0, z = 3$.
9.6. $z = 4x^2 + 36y^2, z = 2$.
9.7. $z = 9x^2 + 4y^2, z = 2$.
9.8. $x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z^2 = 1, z = 0, z = 3$.
9.9. $z = 9x^2 + 9y^2, z = 3$.
9.10. $x^2 + \frac{1}{16}y^2 - \frac{1}{64}z^2 = -1, z = 16$.
9.11. $x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z^2 = 1, z = 0, z = 3$.
9.12. $z = 36x^2 + 4y^2, z = 2$.
9.13. $z = 9x^2 + 16y^2, z = 2$.
9.14. $x^2 + y^2 - z^2 = 1, z = 0, z = 3$.
9.15. $x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{64}z^2 = -1, z = 16$.

Рекомендуем проверить свои знания, отвечая на теоретические вопросы и теоретические упражнения, приводимые ниже[9].

Теоретические вопросы

1. Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.
2. Неопределенный интеграл, его свойства.
3. Таблица неопределенных интегралов.

[9]См. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчёты.- Изд-во «Лань», 2005.-240 с.

4. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

5. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.

6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.

7 Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

8. Интегрирование иррациональных выражений.

9. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.

10. Основные свойства определенного интеграла.

11. Теорема о среднем.

12. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.

13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

14. Интегрирование биномиальных дифференциалов.

15. Вычисление площадей плоских фигур.

16. Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

Теоретические упражнения

1. Считая, что функция $\frac{\sin x}{x}$ равна 1 при $x = 0$, доказать, что она интегрируема на отрезке $\left[\ 0,\ \ 1\ \right]$.

2. Какой из. интегралов больше:
$\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ или $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$?

3. Пусть $f\left(t\right)$ – непрерывная функция, а функции $\varphi\left(x\right)$ и $\psi\left(x\right)$ дифференцируемые. Доказать, что
$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f\left(t\right) dt = f\left[\psi\left(x\right)\right]\psi'\left(x\right) - f\left[\varphi\left(x\right)\right]\varphi'\left(x\right).$

4. Найти $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt.$

5. Найти точки экстремума функции
$f\left(x\right) = \int_0^x \left(t-1\right)\left(t-2\right) e^{-t^2} dt.$

6. Пусть $f\left(x\right)$ – непрерывная периодическая функция с периодом T. Доказать, что
$\int_a^{a+T} f\left(x\right) dx = \int_0^T f\left(x\right) dx \quad \forall a.$

7. Доказать, что если $f\left(x\right)$ – четная функция, то
$\int_{-a}^0 f\left(x\right) dx = \int_0^{+a} f\left(x\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} f\left(x\right) dx.$

8. Доказать, что для нечетной функции $f\left(x\right)$ справедливы равенства
$\int_{-a}^0 f\left(x\right) dx = -\int_0^{+a} f\left(x\right) dx$ и $\int_{-a}^{a} f\left(x\right) dx = 0.$
Чему равен интеграл $\int_{-1}^{+1} \sin^2 x \ln\frac{2+x}{2-x} dx$?

9. При каком условии, связывающем коэффициенты a, b, c интеграл $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} dx$ является рациональной функцией?

10. При каких целых значениях n интеграл $\int \sqrt{1+x^4} dx$ выражается элементарными функциями.