

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие .....</b>	<b>4</b>
<b>Введение .....</b>	<b>6</b>
<b>1. Статика .....</b>	<b>7</b>
1.1. Связи их реакции .....	7
1.2. Система сходящихся сил.....	10
1.3. Момент силы относительно центра .....	12
1.4. Момент силы относительно оси.....	14
1.5. Пара сил. Момент пары.....	16
1.6. Приведение произвольной системы сил.....	18
1.7. Системы сил и аналитические условия равновесия .....	20
<b>2. Кинематика .....</b>	<b>29</b>
2.1. Кинематика точки .....	29
2.2. Поступательное движение твердого тела .....	38
2.3. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси .....	38
2.4. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела .....	46
2.5. Сложное (составное) движение точки .....	56
<b>3. Динамика .....</b>	<b>66</b>
3.1. Динамика точки .....	66
3.2. Введение в динамику механической системы .....	77
3.3. Работа силы. Мощность .....	83
3.4. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы .....	88
3.5. Принцип Д'Аламбера .....	93
3.6. Уравнения Лагранжа второго рода .....	100
<b>4. Задачи для контрольной работы .....</b>	<b>111</b>
4.1. Задача С1 .....	112
4.2. Пример решения задачи С1 .....	115
4.3. Задача К1 .....	118
4.4. Пример решения задачи К1 .....	120
4.5. Задача К2 .....	125
4.6. Примеры решения задачи К2.....	127
4.7. Задача Д1 .....	137
4.8. Пример решения задачи Д1 .....	139
4.9. Задача Д2 .....	143
4.10. Пример решения задачи Д2 .....	145
4.11. Задача Д3 .....	149
4.12. Пример решения задачи Д3 .....	152
4.13. Задача Д4 .....	156
4.14. Пример решения задачи Д4 .....	158
<b>5. Задачи для самостоятельного решения.....</b>	<b>163</b>
<b>Заключение .....</b>	<b>175</b>
<b>Библиографический список .....</b>	<b>176</b>
<b>Приложения .....</b>	<b>177</b>
Приложение 1. Программа дисциплины «Теоретическая механика» .....	177
Приложение 2. Производные элементарных функций .....	180
Приложение 3. Основные интегралы.....	181
Приложение 4. Принятые обозначения .....	182

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Известно, что научно-технический прогресс приводит к достаточно быстрому устареванию узкоспециальных знаний. Поэтому для решения принципиально новых задач специалисту необходимо обладать хорошей подготовкой в области фундаментальных наук. Одной из таких дисциплин, дающих основополагающие знания об окружающем нас мире, является «Теоретическая механика».

Основные разделы курса «Теоретической механики» (статика, кинематика, динамика) для студентов энергетических специальностей заочной формы обучения СФУ представлены в настоящем пособии. В них содержание дисциплины изложено в краткой форме и включает отдельные вопросы необходимые для выполнения контрольной работы по «Теоретической механике».

Настоящее пособие «Теоретическая механика» по структуре и содержанию соответствует программе дисциплины «Теоретическая механика» для студентов заочной формы обучения, изучающих эту дисциплину в течение одного семестра. Данная работа отличается от имеющихся в библиотеке СФУ учебников компактностью и ориентированность на практическое приложение полученных знаний.

Учебное пособие «Теоретическая механика» содержит теоретическую часть, которая разбита на три раздела «Статику», «Кинематику» и «Динамику». Теоретический материал каждого раздела заканчивается вопросами для проверки степени его усвоения.

В пособии приведены варианты задач для контрольной работы и примеры их выполнения. В конце пособия даны задачи для самостоятельного решения с ответами, которые позволят студентам подготовиться к экзамену (зачету) по этой дисциплине.

При освоении курса «Теоретическая механика» изучение теоретического материала рекомендуется по темам программы дисциплины, приведенной в «Приложении 1» настоящего пособия.

Поскольку в данной работе изложены только отдельные вопросы теории в краткой конспективной форме, то изучать теоретический материал рекомендуется по учебникам [1-3], приведенным в «Библиографическом списке». Особое внимание при его чтении следует обращать на формулировки определений и теорем, которые обычно выделены в тексте. В точных формулировках, как правило, бывает существенно каждое слово и очень полезно понять, почему данное положение сформулировано именно так. Однако не следует стараться заучивать формулировки; важнее

понять их смысл и уметь изложить результат своими словами. Прежде всего следует уяснить существо изучаемого вопроса или теоремы. *Главное – это понять изложенный материал*, а не заучить.

Закончив рассмотрение теоретического материала по данной теме, полезно составить краткий конспект, по возможности не заглядывая в учебник.

После изучения данной темы, следует проверить, можете ли вы дать ответ на вопросы по этой части курса, приведенным в конце каждой темы (осуществить самопроверку) и разобрать типовые задачи, данные в конце каждой главы (параграфа).

Затем следует приступить к выполнению контрольной работы. Задачи контрольной работы, приведенной в данном пособии, представляют собой модифицированные задачи из [5], переработанные в соответствии с требованиями, предусмотренными «Государственным Образовательным Стандартом Высшего Профессионального Образования 3». Каждую задачу следует решать для вашего варианта, предварительно разобрав приведенный пример ее выполнения.

Содержательная часть учебного пособия закачивается задачами для самостоятельного решения, которые позволят закрепить полученные теоретические и практические навыки и подготовиться к экзамену (зачету) по дисциплине «Теоретическая механика».

Трудно перечислить все учебники и статьи, под влиянием которых сложились методические взгляды авторов. Наиболее часто использованная в данном учебном пособии литература, позволяющая студентам изучить материал дисциплины самостоятельно, приведена в «Библиографическом списке». В «Приложении 2» и «Приложении 3» пособия даны соответственно таблицы производных от элементарных функций и основных интегралов; а в «Приложении 4» расшифрованы обозначения, используемые в данной работе.

Авторы надеются, что данное учебное пособие позволит студентам заочной формы обучения энергетических специальностей СФУ самостоятельно изучить основные положения дисциплины «Теоретическая механика» и применить полученные знания при выполнении контрольной работы и сдачи экзамена (зачета) по этой дисциплине.

## ВВЕДЕНИЕ

Современная техника ставит перед специалистами задачи, решение которых связано с исследованием механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

*Механическим движением* называется происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве. Примерами механического движения служат движения небесных тел, колебания земной коры, воздушные и морские течения, движение всех видов транспорта, частей механизмов и машин, течение жидкостей и газов и т. д.

*Механическим взаимодействием* называются действия материальных тел друг на друга, в результате которых происходит изменение движения этих тел или изменение их формы.

Наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел называется *механикой*.

Круг проблем рассматриваемых в механике велик. Поэтому появился целый ряд самостоятельных наук, рассматривающих те или иные формы механического движения: сопротивление материалов, гидромеханика, аэродинамика, теория механизмов и машин и другие. Однако все эти дисциплины наряду со спецификой опираются на основные законы и принципы, используют многие понятия и методы общие для всех областей механики. Рассмотрение этих общих понятий, законов и методов и составляет предмет дисциплины «Теоретическая механика».

В основе механики лежат законы (*аксиомы*), которые установлены путем обобщения результатов опытов и наблюдений. Они нашли подтверждение в процессе общественно–производственной практики человечества. Это позволяет рассматривать знания, основанные на законах механики как объективные и достоверные, на которые специалист может, смело опираться в своей практической деятельности.

Теоретическая механика имеет *дедуктивный характер*. Опираясь на аксиомы, как на проверенный практикой и экспериментом фундамент, она возводит свое здание науки с помощью строгих математических выводов.

Теоретическая механика как часть естествознания, использующая математические методы, имеет дело не с реальными материальными объектами, а с их *моделями*. Такими моделями являются:

1. *материальная точка* – частица материи, размером которой можно пренебречь при изучении ее движения;

2. *система материальных точек (механическая система)* – выделенная каким-либо образом совокупность материальных точек (тел), движение которых изучается;

3. *абсолютно твердое тело* – тело, расстояние между любыми точками которого не изменяется.

# 1. СТАТИКА

*Статикой* называется раздел механики, в котором излагается учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под *равновесием* понимают состояние покоя тела по отношению к инерциальной системе отсчета, связанной обычно с неподвижным телом.

В статике в качестве модели реального материального тела рассматривается *абсолютно твердое тело*.

Мерой взаимодействия материальных тел в механике является сила. Сила  $\vec{F}$  – векторная величина, действие которой на тело определяется модулем, направлением и точкой приложения. Прямая, вдоль которой направлен вектор силы  $\vec{F}$ , является линией действия силы.

Совокупность сил, действующих на тело, называется *системой сил*. Если линии действия сил лежат в одной плоскости, то система сил является *плоской*, если в пространстве – *пространственной*. Система сил, у которых линии действия пересекаются в одной точке, называется *сходящейся*.

Две системы сил, оказывающие на тело одинаковое действие, являются *эквивалентными*. Система сил, под действием которой свободное твердое тело находится в покое, называется *уравновешенной* или эквивалентной нулю. Если система сил эквивалентна одной силе, то она является их *равнодействующей*.

**Две основные задачи статики.** В статике решаются две задачи:

- 1) *задача о приведении системы сил* заключается в замене данной системы сил другой, более простой, ей эквивалентной;
- 2) *задача о равновесии* состоит в определении условий, при которых система сил, приложенная к телу, будет уравновешенной системой.

## 1.1. Связи и их реакции

Тело, перемещения которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним, тела, является *несвободным*. Всё, что ограничивает перемещение данного тела в пространстве, называется *связью*.

Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется *реакцией связи*. Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

Одним из основных положений теоретической механики является **принцип освобожденности от связей**: *несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей,*

заменяя их действие реакциями связей. В статике этот принцип позволяет рассматривать равновесие несвободного твердого тела как свободного, находящегося под действием активных (заданных) сил и реакций связей.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся связи и направления их реакций.

*Гладкая плоскость (поверхность) или опора.* Реакция  $\vec{N}$  гладкой плоскости (поверхности) (рис. 1.1, а) или опоры (рис. 1.1, б) направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке.

*Гибкая нить (провода, канаты, цепи, ремни).* Реакция  $\vec{T}$  нити направлена от тела вдоль нити к точке подвеса (рис. 1.1, в).

*Невесомый стержень с шарнирами.* Реакция  $\vec{N}$  шарнира направлена вдоль невесомого стержня. Обычно реакция  $\vec{N}$  изображается от тела по стержню в предположении, что в равновесии стержень растянут (рис. 1.2, а).

*Неподвижный цилиндрический шарнир (подшипник).* Реакция  $\vec{R}_A$  цилиндрического шарнира  $A$  лежит в плоскости  $Axy$ , перпендикулярной оси шарнира, и может иметь любое направление. Обычно  $\vec{R}_A$  раскладывают в точке  $A$  на две взаимно перпендикулярные составляющие  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$  вдоль декартовых осей (рис. 1.2, б).

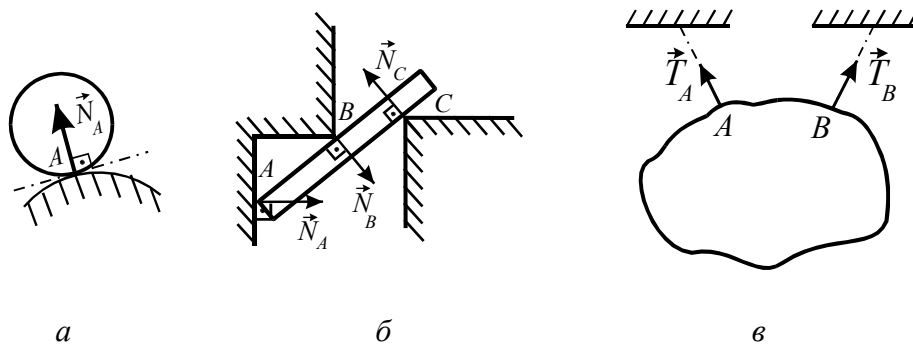


Рис. 1.1

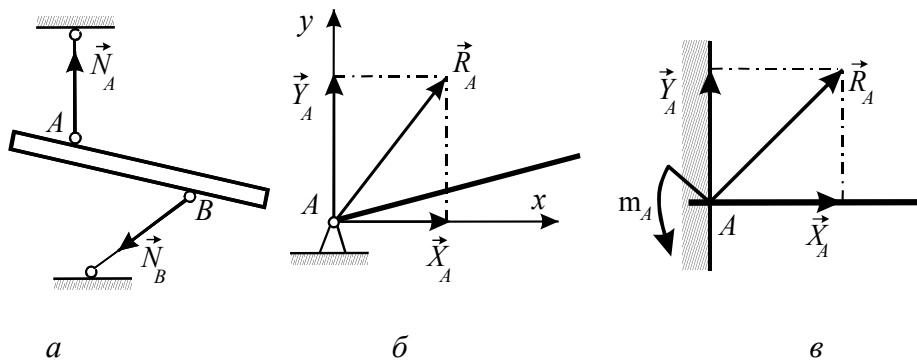


Рис. 1.2

*Жесткая заделка.* Нахождение реакции жесткой заделки  $A$  на плоскости сводится к определению составляющих  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$ , препятствующих линейному перемещению точки  $A$  тела в плоскости действия активных сил, и алгебраической величины реактивного момента  $m_A$ , препятствующего вращению тела под действием заданных активных сил (рис. 1.2, в).

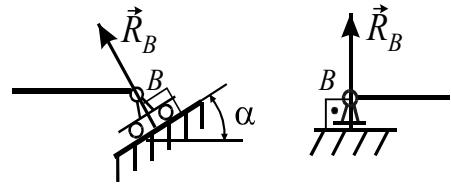


Рис. 1.3

*Шарнирно - подвижная опора (опора на катках).* Реакция  $\vec{R}_B$  проходит через ось шарнира  $B$  и направлена перпендикулярно к опорной поверхности (рис. 1.3).

*Сферический шарнир* – это устройство (рис. 1.4, а), допускающее сферическое движение тела  $3$  вокруг неподвижной точки  $A$  (центр внутренней сферы  $1$ ), с которой жестко скреплено рассматриваемое тело  $3$ . Если сферическая поверхность  $2$  идеально гладкая, то реакция  $\vec{R}_A$  направлена в точке  $A$  по нормали к этой поверхности. Обычно на схемах реакцию  $\vec{R}_A$  сферического шарнира раскладывают на три взаимно перпендикулярные составляющие  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ ,  $\vec{Z}_A$ , неизвестные по величине.

*Подпятник* (рис. 1.4, б) представляет собой соединение цилиндрического шарнира  $2$  с опорной плоскостью  $3$ , на которую опирается вал  $1$ . Реакция подпятника складывается из реакции цилиндрического подшипника, которая раскладывается в плоскости  $3$ , перпендикулярной его оси, на две взаимно перпендикулярные составляющие  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$ , и нормальной реакции  $\vec{Z}_A$  опорной плоскости  $3$ .

*Шероховатая неподвижная поверхность.* Реакция шероховатой поверхности представляет собой равнодействующую  $\vec{R}$  силы нормальной реакции  $\vec{N}$  и силы трения  $\vec{F}_{тр}$  (рис. 1.4, в).

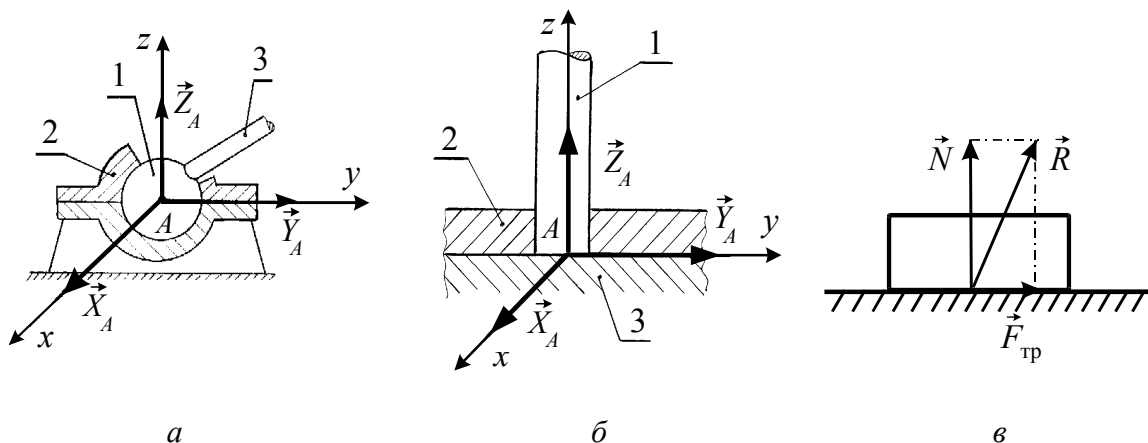


Рис. 1.4

## 1.2. Система сходящихся сил

Проекцией силы  $\vec{F}$  на ось называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси (рис. 1.5):

$$F_x = F \cos \alpha, \quad (1.1)$$

где  $F$  – модуль силы  $\vec{F}$ ;  $\alpha$  – угол между вектором  $\vec{F}$  и положительным направлением оси  $X$ .

Проекция силы положительна, если угол  $\alpha$  острый (рис. 1.5, а). Проекция силы отрицательна, если угол  $\alpha$  тупой (рис. 1.5, б):  $F_x = F \cos \alpha = F \cos (180^\circ - \beta) = -F \cos \beta$ . Проекция силы на ось равна нулю, если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (рис. 1.5, в).

Силу  $\vec{F}$  в декартовой системе координат  $OXYZ$  можно аналитически задавать, зная координаты точки  $A$  ее приложения и проекции  $F_x, F_y, F_z$  силы на декартовы оси. Вектор силы  $\vec{F}$ , ее модуль и косинусы углов между силой и координатными осями определяются по формулам

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}; \quad (1.2)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad (1.3)$$

$$\cos(\widehat{\vec{F} \vec{i}}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\widehat{\vec{F} \vec{j}}) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\widehat{\vec{F} \vec{k}}) = \frac{F_z}{F}. \quad (1.4)$$

Здесь  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты декартовых осей  $OX, OY, OZ$  соответственно.

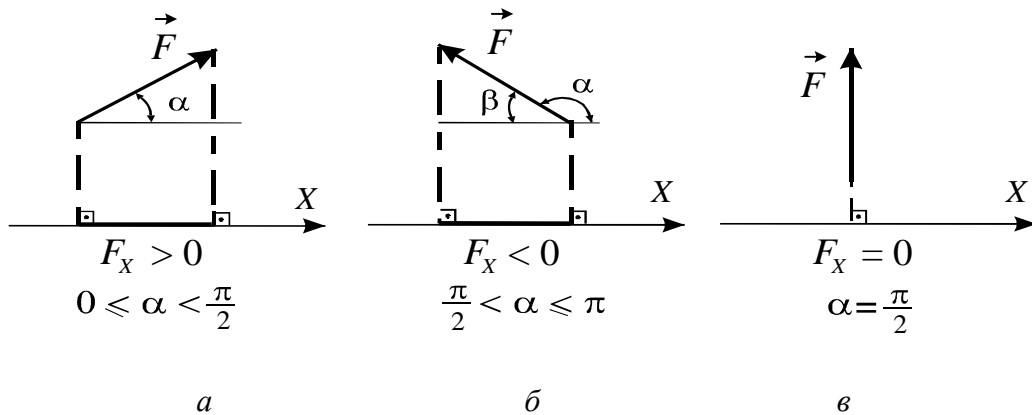


Рис. 1.5



Следовательно, согласно (1.2) любую силу можно разложить на три взаимно перпендикулярные составляющие  $\vec{F}_X = F_X \vec{i}$ ,  $\vec{F}_Y = F_Y \vec{j}$  и  $\vec{F}_Z = F_Z \vec{k}$ , модули которых равны модулям проекций силы на соответствующие декартовы оси.

Если на тело действует система сходящихся сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ , линии действия которых пересекаются в точке  $O$ , то сила  $\vec{R}$ , эквивалентная этой системе сил, является их *равнодействующей*:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{\kappa=1}^n \vec{F}_\kappa. \quad (1.5)$$

Геометрически вектор  $\vec{R}$  определяется построением силового многоугольника (рис. 1.6).

Проецируя (1.5) на декартовы оси, можно найти проекции равнодействующей:

$$R_X = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa X}, \quad R_Y = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Y}, \quad R_Z = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Z}, \quad (1.6)$$

где  $F_{\kappa X}, F_{\kappa Y}, F_{\kappa Z}$  – проекции силы  $\vec{F}_\kappa$  на оси  $OX, OY$  и  $OZ$  соответственно.

Тогда аналитически вектор  $\vec{R}$ , его модуль и направление определяются по следующим формулам аналогичным (1.2)-(1.4):

$$\vec{R} = R_X \vec{i} + R_Y \vec{j} + R_Z \vec{k}; \quad (1.7)$$

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}; \quad (1.8)$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{R} \vec{i}}\right) = \frac{R_X}{R}; \quad \cos\left(\widehat{\vec{R} \vec{j}}\right) = \frac{R_Y}{R}; \quad \cos\left(\widehat{\vec{R} \vec{k}}\right) = \frac{R_Z}{R}. \quad (1.9)$$

Если абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием системы сходящихся сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ , то их равнодействующая равна нулю:

$$\vec{R} = \sum_{\kappa=1}^n \vec{F}_\kappa = 0. \quad (1.10)$$

Следовательно, силовой многоугольник, построенный на силах  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ , является замкнутым, т. е. конец силы  $\vec{F}_n$  совпадает с началом силы  $\vec{F}_1$  (рис. 1.7).

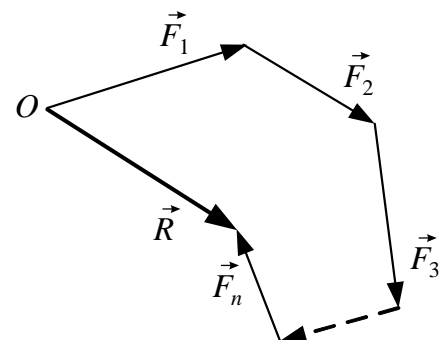


Рис. 1.6

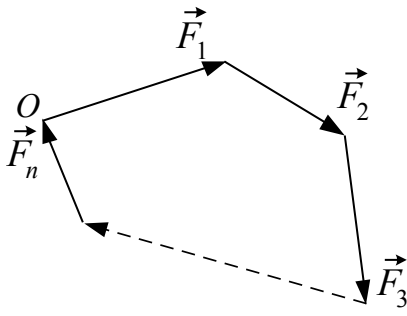


Рис. 1.7

Условие (1.10) называется **геометрическим условием равновесия для системы сходящихся сил**: необходимым и достаточным условием равновесия твердого тела под действием системы сходящихся сил является замкнутость силового многоугольника, построенного на этих силах.

Аналитически условие (1.10) с учетом (1.7) означает, что  $R_X = 0$ ,  $R_Y = 0$ ,  $R_Z = 0$  или

$$\sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa X} = 0, \quad \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Y} = 0, \quad \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Z} = 0. \quad (1.11)$$

Уравнения (1.11) называются **аналитическими условиями равновесия плоской системы сходящихся сил**: для равновесия абсолютно твердого тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую координатную ось были равны нулю.

При действии на твердое тело, находящееся в равновесии, плоской системы трех непараллельных сил, часто используется **теорема о трех силах**: если на абсолютно твердое тело, находящееся в равновесии, действуют три силы, лежащие в одной плоскости, то линии их действия пересекаются в одной точке.

### 1.3. Момент силы относительно центра

**Моментом силы  $\vec{F}$  относительно центра  $O$**  называется вектор  $\vec{m}_O(\vec{F})$ , равный векторному произведению радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из центра  $O$  в точку  $A$  приложения силы, на вектор силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.12)$$

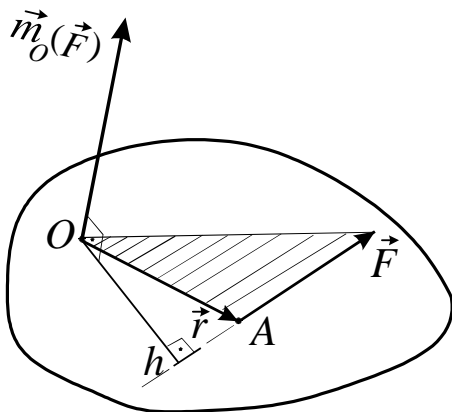


Рис. 1.8

Вектор  $\vec{m}_O(\vec{F})$  приложен в точке  $O$  и направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр  $O$  и силу  $\vec{F}$  в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра  $O$  против хода часовой стрелки (рис. 1.8).

**Момент  $\vec{m}_O(\vec{F})$  характеризует вращательный эффект силы  $\vec{F}$  относительно центра (точки)  $O$ .**

Модуль вектора  $\vec{m}_O(\vec{F})$  равен произведению модуля  $F$  силы на плечо  $h$ :

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = Fh. \quad (1.13)$$

Здесь плечо  $h$  – перпендикуляр, опущенный из точки  $O$  на линию действия силы  $\vec{F}$  (рис. 1.8).

*Свойства момента силы относительно центра:*

1. Момент силы относительно центра не изменяется при переносе силы по линии ее действия в любую точку.

2. Если линия действия силы пересекает центр  $O$  ( $h = 0$ ), то момент силы относительно центра  $O$  равен нулю.

Для плоской системы сил при вычислении моментов сил относительно точки (центра), лежащей в плоскости их действия, пользуются понятием **алгебраического момента силы относительно точки**. Алгебраический момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо:

$$m_O(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (1.14)$$

Момент (4.14) считается положительным, если сила стремится повернуть тело в плоскости вокруг точки  $O$  против хода часовой стрелки, и отрицательным – по ходу часовой стрелки. Например, для сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ , лежащих в плоскости  $OXY$  (рис. 1.9), их алгебраические моменты относительно точки  $B$

$$m_B(\vec{F}_1) = F_1 h_1, \quad m_B(\vec{F}_2) = -F_2 h_2.$$

При вычислении моментов сил удобно пользоваться **теоремой Вариньона**: если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра (точки)  $O$  равен сумме моментов сил системы относительно того же центра (точки):

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \sum_{\kappa=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_\kappa). \quad (1.15)$$

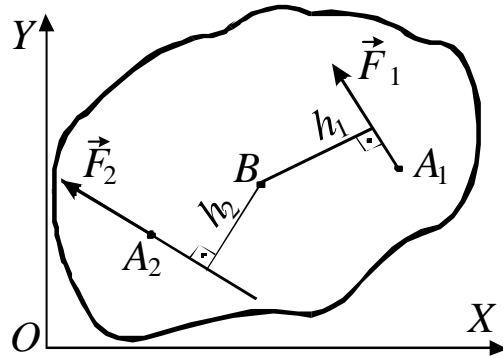


Рис. 1.9

### 1.4. Момент силы относительно оси

Проекция момента  $\vec{m}_O(\vec{F})$  силы  $\vec{F}$  относительно центра (точки)  $O$  на ось  $Z$ , проходящую через этот центр, называется **моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси  $Z$** , т. е.

$$m_Z(\vec{F}) = |\vec{m}_O(\vec{F})| \cos \gamma, \quad (1.16)$$

где  $\gamma$  – угол между вектором  $\vec{m}_O(\vec{F})$  и осью  $Z$  (рисунок 1.10).

Из (1.16) имеем, что  $m_Z(\vec{F})$  – момент силы относительно оси  $Z$  является алгебраической величиной, знак которой определяется знаком  $\cos \gamma$ :

- 1) если  $0 \leq \gamma < 90^\circ$ , то  $m_Z(\vec{F}) > 0$ ;
- 2) если  $90^\circ < \gamma \leq 180^\circ$ , то  $m_Z(\vec{F}) < 0$ ;
- 3) если  $\gamma = 90^\circ$ , т. е. сила  $\vec{F}$  коллинеарна оси  $Z$ , то  $m_Z(\vec{F}) = 0$ .

Величина момента силы относительно оси не зависит от выбора центра (точки)  $O$  на оси.

В декартовой системе координат вектор  $\vec{m}_O(\vec{F})$  можно разложить по трем взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 1.11):

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = m_X(\vec{F})\vec{i} + m_Y(\vec{F})\vec{j} + m_Z(\vec{F})\vec{k},$$

где  $m_X(\vec{F})$ ,  $m_Y(\vec{F})$ ,  $m_Z(\vec{F})$  – моменты силы  $\vec{F}$  относительно осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  соответственно.

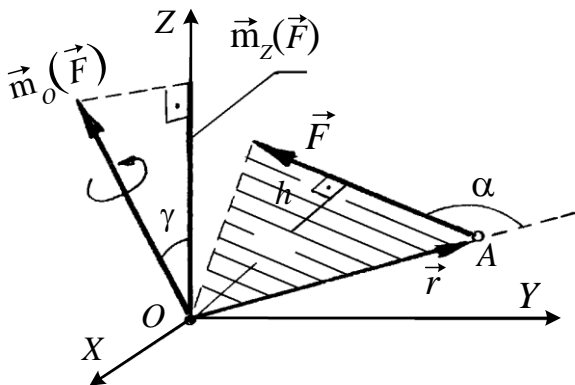


Рис. 1.10

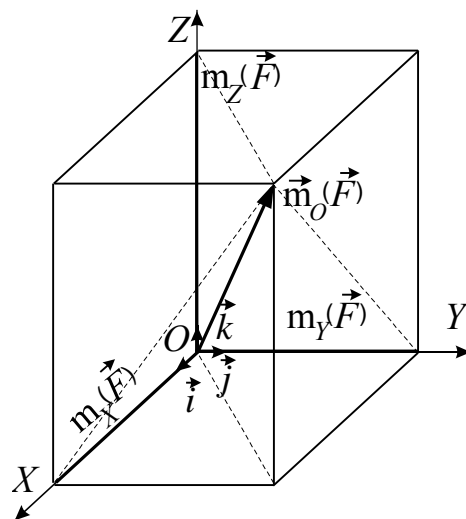


Рис. 1.11

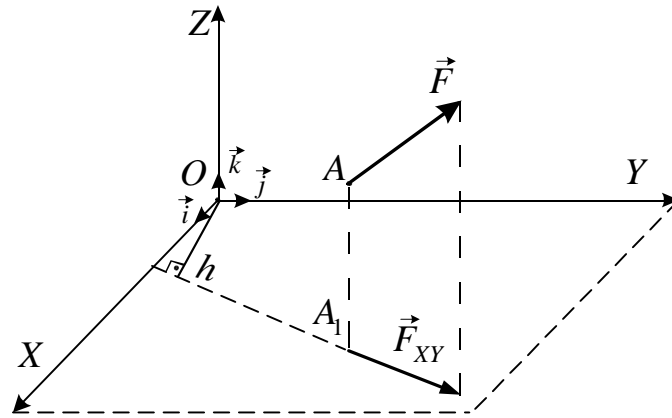


Рис. 1.12

На практике существует простое **правило вычисления момента силы относительно оси**: для определения момента силы относительно оси следует спроецировать силу на плоскость, перпендикулярную оси, и затем определить алгебраический момент полученной проекции силы относительно точки пересечения данной оси с этой плоскостью (рис. 1.12).

Поэтому

$$m_Z(\vec{F}) = m_O(\vec{F}_{XY}) = \pm |\vec{F}_{XY}| h, \quad (1.17)$$

где  $h$  – плечо силы  $\vec{F}_{XY}$  – проекции силы  $\vec{F}$  на плоскость  $OXY$ , перпендикулярную оси  $Z$ , относительно точки  $O$  пересечения оси  $Z$  с этой плоскостью.

В (1.17)  $\vec{m}_Z(\vec{F})$  выбирается знак «+», если с конца оси  $Z$  сила  $\vec{F}_{XY}$  видна стремящейся повернуть тело вокруг оси против хода часовой стрелки, и знак «-» – по ходу часовой стрелки.

**Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект силы вокруг оси.**

Из (1.17) следуют два важных для практики частных случая:

1) если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю ( $|\vec{F}_{XY}| = 0$ );

2) если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно данной оси также равен нулю ( $h = 0$ ).

При вычислении момента силы относительно оси часто пользуются **теоремой Вариньона для моментов силы относительно оси**: момент равнодействующей относительно выбранной оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси.

Проецируя векторное выражение (1.15) на ось  $Z$ , получим

$$m_Z(\vec{R}) = \sum_{\kappa=1}^n m_Z(\vec{F}_\kappa). \quad (1.18)$$

## 1.5. Пара сил. Момент пары

*Парой сил (парой)  $(\vec{F}, \vec{F}')$  называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил  $(\vec{F} = -\vec{F}')$ .*

Плоскость, в которой лежат силы  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$ , называется *плоскостью пары*, а кратчайшее расстояние  $d$  между линиями действия сил пары – *плечом пары* (рисунок 1.13).

Пара сил не имеет равнодействующей, так как  $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}' = 0$ . Поэтому действие пары сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$  на абсолютно твердое тело сводится к вращательному эффекту, который характеризуется *моментом пары*.

*Моментом пары* называется вектор

$$\vec{m} = \vec{F} \times \vec{d}, \quad (1.19)$$

модуль, которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо:

$$|\vec{m}| = Fd.$$

Вектор  $\vec{m}$  направлен перпендикулярно плоскости пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки (рис. 1.13). Момент пары есть *вектор свободный*, т. е. он может быть приложен в любой точке тела.

Для системы сил, лежащих в одной плоскости, можно не прибегать к векторной символике, а пользоваться понятием алгебраического момента пары. *Алгебраический момент пары сил* равен взятому с соответствующим знаком произведению

*модуля одной из сил пары на плечо пары:*

$$m = \pm Fd. \quad (1.20)$$

Знак «+» в формуле (1.20) соответствует повороту тела в плоскости под действием пары сил против хода часовой стрелки, знак «-» – по ходу часовой стрелки.

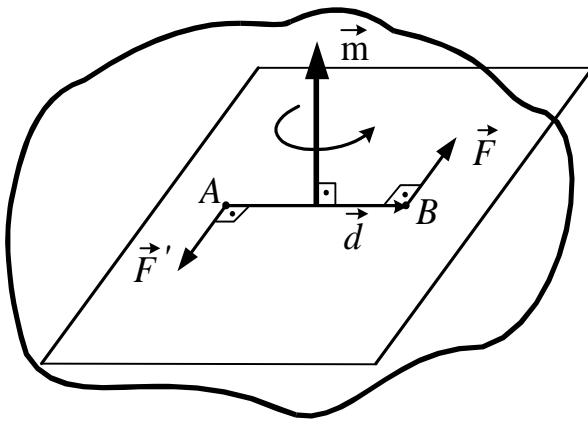


Рис. 1.13

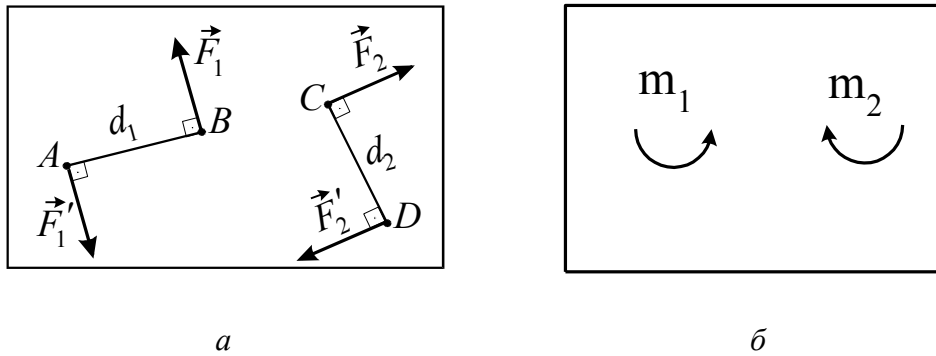


Рис. 1.14

Например, для системы пар, лежащих в одной плоскости, изображенной на рис. 1.14, *a*, алгебраические моменты пар

$$m_1 = F_1 d_1, \quad m_2 = -F_2 d_2.$$

Следовательно, момент пары равен алгебраическому моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы пары, т. е.

$$m_1 = m_A(\vec{F}_1) = m_B(\vec{F}_1'),$$

$$m_2 = m_D(\vec{F}_2) = m_C(\vec{F}_2').$$

Поскольку такие пары сил характеризуются только величиной момента, то пары сил, лежащие в одной плоскости, часто изображаются дуговыми стрелками, показывающими направление поворота тела при действии пар, как это представлено на рис. 1.14, *б*.

*Системой пар* называется совокупность нескольких пар, действующих на тело.

Согласно **теореме о сложении пар**, систему пар сил с моментами  $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$  можно заменить одной парой, момент  $\vec{M}$  которой равен геометрической сумме моментов данных пар:

$$\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \sum_{k=1}^n \vec{m}_k. \quad (1.21)$$

Если под действием системы пар с моментами  $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$  тело находится в равновесии, то момент результирующей пары  $\vec{M} = 0$ . Тогда согласно (1.21) условие равновесия абсолютно твердого тела, находящегося под действием только системы пар имеет вид:

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_k = 0.$$

## 1.6. Приведение произвольной системы сил

Задача о приведении произвольной системы сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  к центру (точке)  $O$ , т. е. о замене данной системы сил другой, более простой, ей эквивалентной, решается применением **теоремы Пуансо**: *любая система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ , действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольному центру  $O$  заменяется одной силой  $\vec{R}$ , равной главному вектору системы сил, приложенной в точке  $O$ , и парой сил с моментом  $\vec{M}_O$ , равным главному моменту системы сил относительно центра  $O$ :*

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{R}, \vec{M}_O\}.$$

Следовательно, действие исходной системы сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  на твердое тело (рис. 1.15, а) эквивалентно действию на него одной силы  $\vec{R}$ , равной геометрической сумме всех сил системы:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{\kappa=1}^n \vec{F}_\kappa, \quad (1.22)$$

называемой *главным вектором*, и одной пары с моментом  $\vec{M}_O$ , равным сумме моментов всех сил относительно центра  $O$ :

$$\vec{M}_O = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_n) = \sum_{\kappa=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_\kappa), \quad (1.23)$$

называемым *главным моментом системы сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  относительно этого центра* (рисунок 1.15, б).

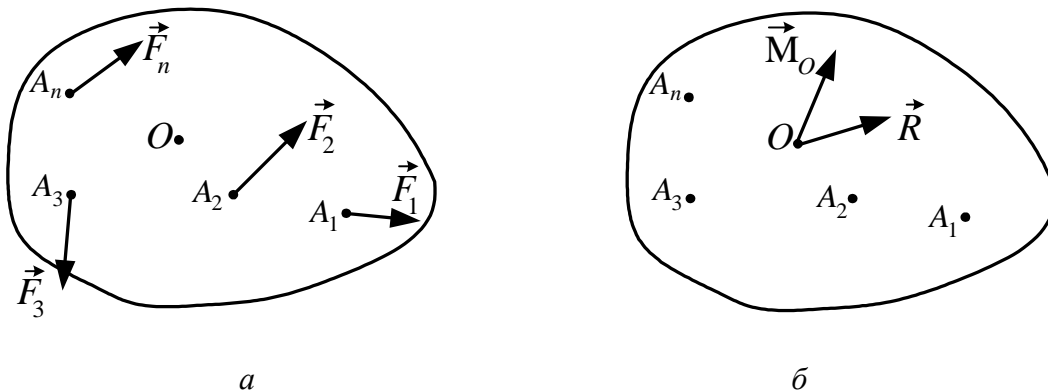


Рис. 1.15



Согласно (1.22) и (1.23) вектор  $\vec{R}$  от выбора центра  $O$  не зависит, а момент  $\vec{M}_O$  результирующей пары при изменении положения центра  $O$  может изменяться вследствие изменения моментов отдельных сил.

Главный вектор  $\vec{R}$  (1.22) произвольной системы сил в декартовых координатах определяется по модулю и направлению применением полученных выше формул (1.6)–(1.9).

Для вычисления главного момента  $\vec{M}_O$  (1.23) системы сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  относительно центра (точки)  $O$  следует начало декартовой системы координат  $OXYZ$  поместить в центре приведения  $O$  и затем вектор  $\vec{M}_O$  разложить по трем взаимно перпендикулярным декартовым осям:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = M_X \vec{i} + M_Y \vec{j} + M_Z \vec{k}. \quad (1.24)$$

Здесь  $M_X, M_Y, M_Z$  – главные моменты системы сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  относительно осей  $OX, OY, OZ$  соответственно, определяются как проекции главного момента  $\vec{M}_O$  на эти координатные оси:

$$M_X = \sum_{k=1}^n m_X(\vec{F}_k), \quad M_Y = \sum_{k=1}^n m_Y(\vec{F}_k), \quad M_Z = \sum_{k=1}^n m_Z(\vec{F}_k). \quad (1.25)$$

Модуль и направление главного момента вычисляются по формулам:

$$M_O = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}; \quad (1.26)$$

$$\cos \left( \vec{M}_O \hat{=} \vec{i} \right) = \frac{M_X}{M_O}; \quad \cos \left( \vec{M}_O \hat{=} \vec{j} \right) = \frac{M_Y}{M_O}; \quad \cos \left( \vec{M}_O \hat{=} \vec{k} \right) = \frac{M_Z}{M_O}.$$

*Для равновесия абсолютно твердого тела, находящегося под действием произвольной системы сил, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю, т. е.*

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0. \quad (1.27)$$

Условия (1.27) являются необходимыми и достаточными условиями равновесия абсолютно твердого тела под действием произвольной системы сил, т. е. *необходимыми и достаточными условиями, чтобы данная система сил являлась уравновешенной.*

## 1.7. Системы сил и аналитические условия равновесия

**Произвольная пространственная система сил.** Если абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием произвольной пространственной системы сил (рис. 1.16), то условие (1.27) означает, что при равновесии тела проекции векторов  $\vec{R}$  и  $\vec{M}_O$  на оси декартовой системы координат  $OXYZ$  должны быть равны нулю. С учетом (1.6) и (1.25) получим шесть скалярных уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa X} &= 0; & 4) \quad \sum_{\kappa=1}^n m_X(\vec{F}_\kappa) &= 0; \\
 2) \quad \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Y} &= 0; & 5) \quad \sum_{\kappa=1}^n m_Y(\vec{F}_\kappa) &= 0; \\
 3) \quad \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Z} &= 0; & 6) \quad \sum_{\kappa=1}^n m_Z(\vec{F}_\kappa) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Уравнения (1.28) называются **аналитическими условиями равновесия для произвольной пространственной системы сил**: для равновесия твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

**Пространственная система параллельных сил.** Для определенности выберем систему координат так, чтобы ось  $OZ$  была направлена параллельно силам (рис. 1.17). В этом случае уравнения 1, 2 и 6 в (1.28) отсутствуют, так как обращаются в тождества, и аналитические условия равновесия принимают вид

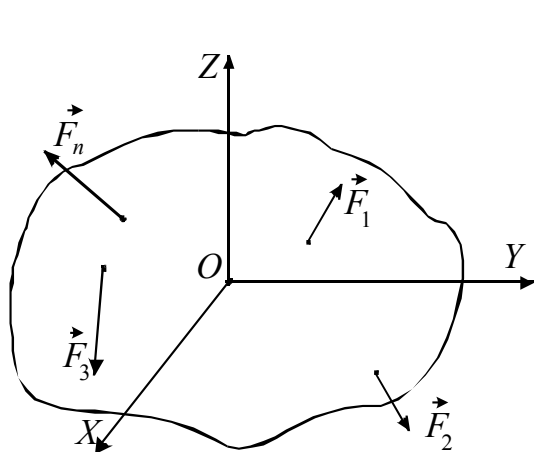


Рис. 1.16

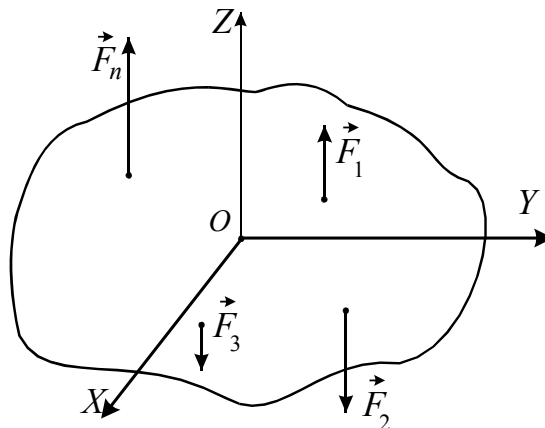


Рис. 1.17

$$\sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Z} = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^n m_X(\vec{F}_\kappa) = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^n m_Y(\vec{F}_\kappa) = 0. \quad (1.29)$$

Для равновесия твердого тела под действием пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций сил на ось, параллельную силам, и суммы их моментов относительно двух других координатных осей были равны нулю.

**Пространственная система сходящихся сил.** В этом случае за центр приведения выберем точку  $O$ , в которой пересекаются линии действия сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  (рис. 1.18). Тогда уравнения 4, 5 и 6 в (1.28) отсутствуют, и аналитические условия равновесия для пространственной системы сходящихся сил имеют вид системы (1.11):

$$\sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa X} = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Y} = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Z} = 0. \quad (1.30)$$

Для равновесия твердого тела под действием пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

**Плоская система сходящихся сил.** Если система сходящихся сил находится в плоскости  $OXY$ , то третье уравнение системы (1.30) обращается в тождество и аналитические условия равновесия принимают вид

$$\sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa X} = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Y} = 0.$$

Для равновесия твердого тела под действием плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на каждую из двух координатных осей были равны нулю.

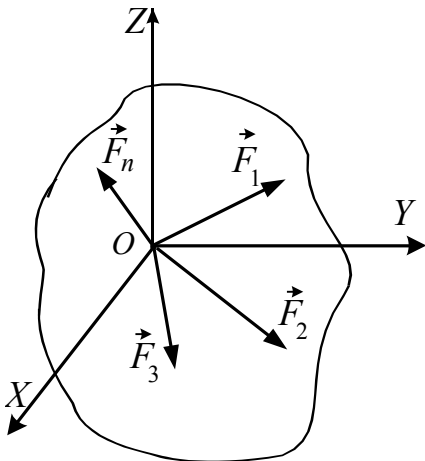


Рис. 1.18

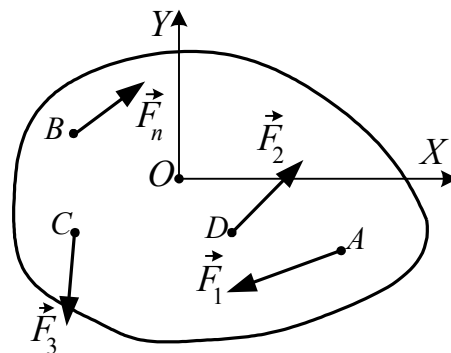


Рис. 1.19

**Плоская произвольная система сил.** Пусть твердое тело находится в равновесии под действием системы сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ , лежащих в одной плоскости, совмещенной с плоскостью  $OXY$  (рис. 1.19). В этом случае уравнения 3, 4 и 5 в (1.28) отсутствуют, а уравнение 6 с учетом (1.17) можно заменить уравнением алгебраических моментов сил относительно точки  $O$  пересечения оси  $OZ$  с плоскостью  $OXY$ . Тогда аналитические условия равновесия можно записать в виде трех уравнений:

$$\sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa X} = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Y} = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^n m_O(\vec{F}_\kappa) = 0. \quad (1.31)$$

*Для равновесия твердого тела под действием произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций сил на каждую из двух координатных осей и сумма моментов относительно любой точки, лежащей на плоскости действия сил, были равны нулю.*

Уравнения (1.31) называются *первой (основной) формой* аналитических условий равновесия для плоской произвольной системы сил.

Отметим, что в математическом отношении система уравнений равновесия (1.31) будет проще, если в ней в качестве точки  $O$ , относительно которой составляется третье уравнение моментов, выбрать точку пересечения линий действия двух искомых сил.

*Вторая форма* уравнений равновесия, эквивалентная системе (1.31), имеет вид

$$\sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa X} = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^n m_A(\vec{F}_\kappa) = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^n m_B(\vec{F}_\kappa) = 0.$$

При этом ось  $OX$  не перпендикулярна прямой  $AB$ , проходящей через точки плоскости  $OXY$ , относительно которых составляются уравнения моментов.

*Третья форма* уравнений равновесия для плоской произвольной системы сил не содержит уравнений проекций сил на оси:

$$\sum_{\kappa=1}^n m_A(\vec{F}_\kappa) = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^n m_B(\vec{F}_\kappa) = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^n m_C(\vec{F}_\kappa) = 0.$$

При этом предполагается, что точки  $A, B$  и  $C$  плоскости  $OXY$ , относительно которых составляются уравнения моментов, не лежат на одной прямой.

**Плоская система параллельных сил.** В случае системы параллельных сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ , лежащих в плоскости  $OXY$ , выберем ось  $OX$ , параллельную силам (рис. 1.20). Тогда в системе (1.31) останется два уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kX} = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_O(\vec{F}_k) = 0. \quad (1.32)$$

Уравнения (1.32) являются *первой формой* аналитических условий равновесия для плоской системы параллельных сил.

Для равновесия твердого тела под действием плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций сил на ось, параллельную силам, и сумма моментов относительно любой точки, лежащей на плоскости действия сил, были равны нулю.

Вторая форма уравнений равновесия для плоской системы параллельных сил не содержит уравнения проекций сил на ось:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_B(\vec{F}_k) = 0.$$

При этом предполагается, что точки  $A, B$  плоскости  $OXY$ , относительно которых составляются уравнения моментов, не лежат на прямой, параллельной данным силам. Например, прямая  $AB$  не должна быть параллельна оси  $OX$  для сил, изображенных на рис. 1.20.

**Распределенные силы.** При расчетах иногда встречаются нагрузки, распределенные вдоль поверхности твердого тела по определенному закону.

1) *Равномерно-распределенная нагрузка* – простейший пример распределенных сил, лежащих в одной плоскости (рис. 1.21, а). Такая система распределенных сил характеризуется постоянной по величине интенсивностью  $q$  – значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного участка  $AB$ . Размерность интенсивности нагрузки  $[q] = F/L$ , где  $F$  – сила,  $L$  – длина. Единица измерения интенсивности нагрузки – ньютон на метр (Н/м).

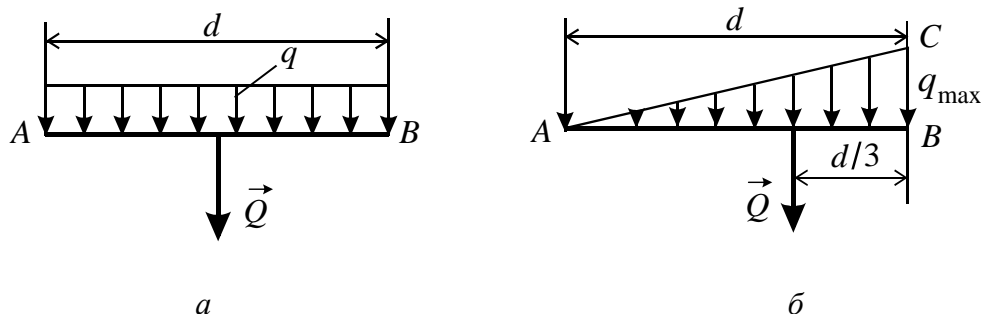


Рис. 1.21

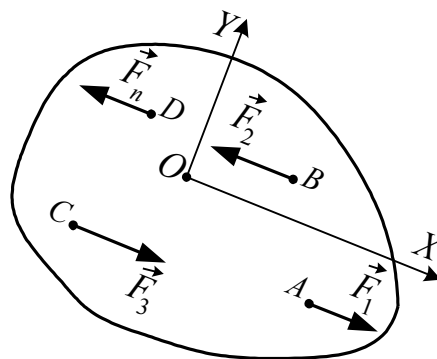


Рис. 1.20

При статических расчетах эту систему параллельных сил можно заменить равнодействующей  $\vec{Q}$ , приложенной в середине отрезка  $AB = d$  (рис. 1.21, а), модуль которой

$$Q = qd. \quad (1.33)$$

2) *Силы, распределенные вдоль отрезка  $AB$  по линейному закону.* Для этих сил интенсивность  $q$  является переменной величиной, изменяющейся от нуля до максимального значения  $q_{\max}$  (рис. 1.21, б).

Модуль равнодействующей  $\vec{Q}$  таких сил равен площади треугольника  $ABC$

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} d. \quad (1.34)$$

Линия действия силы  $\vec{Q}$  проходит через центр тяжести этого треугольника, т. е. на расстоянии  $d/3$  от основания  $BC$  треугольника  $ABC$  (рис. 1.21, б).

**Методические указания.** При решении задач на равновесие твердого тела необходимо придерживаться следующего *порядка действий*:

1. Выделить тело, равновесие которого следует рассмотреть для определения искомых величин.

2. Приложить к телу активные (заданные) силы.

3. Ввести декартову систему координат.

4. Отбросить наложенные на тело связи, заменив их действие реакциями связей.

5. Определить систему сил, под действием которой тело находится в равновесии, и записать в общем виде аналитические условия равновесия для данной системы сил.

6. Составить соответствующие уравнения равновесия для сил, приложенных к рассматриваемому телу.

7. Решить полученную систему уравнений и найти искомые величины.

**Пример 1.1.** Определить реакции связей балки  $AB$ , находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$  и пары сил с моментом  $m$  (рис. 1.22, а).

Решить задачу при следующих данных:

$$q = 1,5 \text{ кН/м}, \quad m = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad AC = CB = 2 \text{ м}.$$

**Решение**

1. Рассмотрим равновесие балки  $AB$  (рис. 1.22, б).

2. Изобразим действующие на балку силы: пару сил с моментом  $m$  и равнодействующую  $\vec{Q}$  равномерно распределенной нагрузки, приложенную в середине участка  $AC$ , численно  $Q = q AC = 3 \text{ кН}$ .

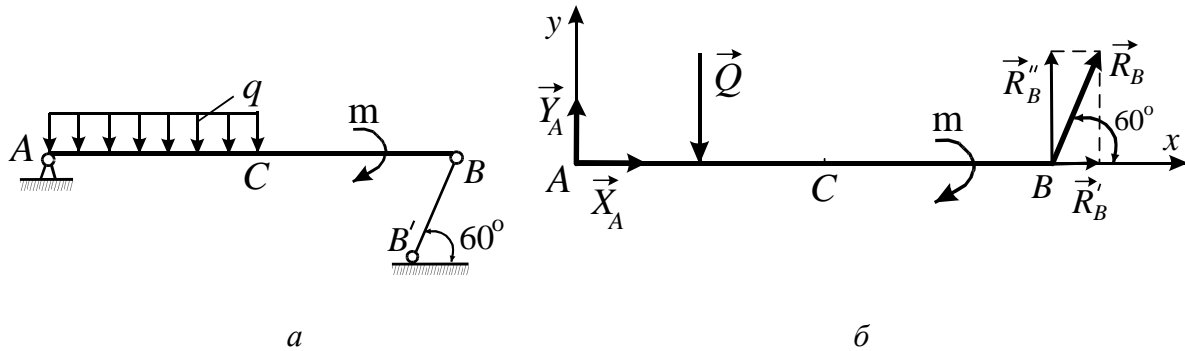


Рис. 1.22

3. Введем декартову систему координат  $Ax$ .

4. Отбросим связи, заменив их действие реакциями связей: реакцию подшипника  $A$  разложим по координатным осям на две составляющие  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$ , а реакцию  $\vec{R}_B$  шарнира  $B$  направим вдоль невесомого стержня  $BB'$ , предполагая, что стержень сжат (рис. 1.22, б).

5. Система сил, приложенная к балке  $AB$ , является плоской произвольной системой сил.

Согласно (1.31) аналитические условия равновесия имеют вид

$$\sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa x} = 0, \quad \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa y} = 0, \quad \sum_{\kappa=1}^n m_A(\vec{F}_\kappa) = 0. \quad (1.35)$$

Поскольку количество уравнений равновесия (1.35) равно числу неизвестных реакций  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ ,  $\vec{R}_B$ , то данная балка является статически определимой.

6. Запишем уравнения равновесия (1.35) для данной задачи:

$$\begin{aligned} X_A + R_B \cos 60^\circ &= 0; \\ Y_A - Q + R_B \sin 60^\circ &= 0; \\ -Q \frac{AC}{2} - m + R_B'' AB &= 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

При вычислении момента силы  $\vec{R}_B$  относительно точки  $A$  разложим ее в точке  $B$  на составляющие  $\vec{R}'_B$  и  $\vec{R}''_B$  ( $R'_B = R_B \cos 60^\circ$ ,  $R''_B = R_B \sin 60^\circ$ ) и применим теорему Вариньона (1.15):  $m_A(\vec{R}_B) = m_A(\vec{R}'_B) + m_A(\vec{R}''_B) = m_A(\vec{R}''_B)$ , поскольку  $m_A(\vec{R}'_B) = 0$ , так как линия действия составляющей  $\vec{R}'_B$  пересекает точку  $A$  и плечо силы  $\vec{R}'_B$  относительно этой точки равно нулю.

7. Решив систему уравнений (1.36) и подставив исходные данные задачи, определим искомые реакции связей:

$$R_B = \frac{Q \frac{AC}{AB} + m}{\sin 60^\circ} = 4,4 \text{ кН};$$

$$Y_A = Q - R_B \sin 60^\circ = 1,8 \text{ кН};$$

$$X_A = -R_B \cos 60^\circ = -2,2 \text{ кН}.$$

Здесь знак «-» указывает, что в равновесии составляющая  $\vec{X}_A$  направлена противоположно оси  $Ox$ .

*Ответ:*  $R_B = 4,4 \text{ кН}; Y_A = 1,8 \text{ кН}; X_A = -2,2 \text{ кН}.$

**Пример 1.2.** Однородная тонкая прямоугольная плита  $ABLD$  весом  $P$  закреплена в точке  $A$  сферическим, а в точке  $B$  цилиндрическим шарнирами и удерживается в горизонтальном положении веревкой  $LE$ , привязанной в точке  $L$  плиты и к гвоздю  $E$ , вбитому в стену на одной вертикали с точкой  $B$  (рис. 1.23, *a*).

На плиту действует пара сил с моментом  $m$ , лежащая в плоскости плиты, и сила  $\vec{F}$ , приложенная в точке  $D$ , находящаяся в плоскости параллельной плоскости  $xOz$  и составляющая со стороной  $LD$  угол  $45^\circ$ .

Определить реакции связей в точках  $A$  и  $B$  плиты и натяжение веревки  $LE$ .

Решить задачу при следующих данных:

$P = 3 \text{ кН}, m = 4 \text{ кН м}, F = 8 \text{ кН}, AB = 1,2 \text{ м}, AD = 1,8 \text{ м}.$

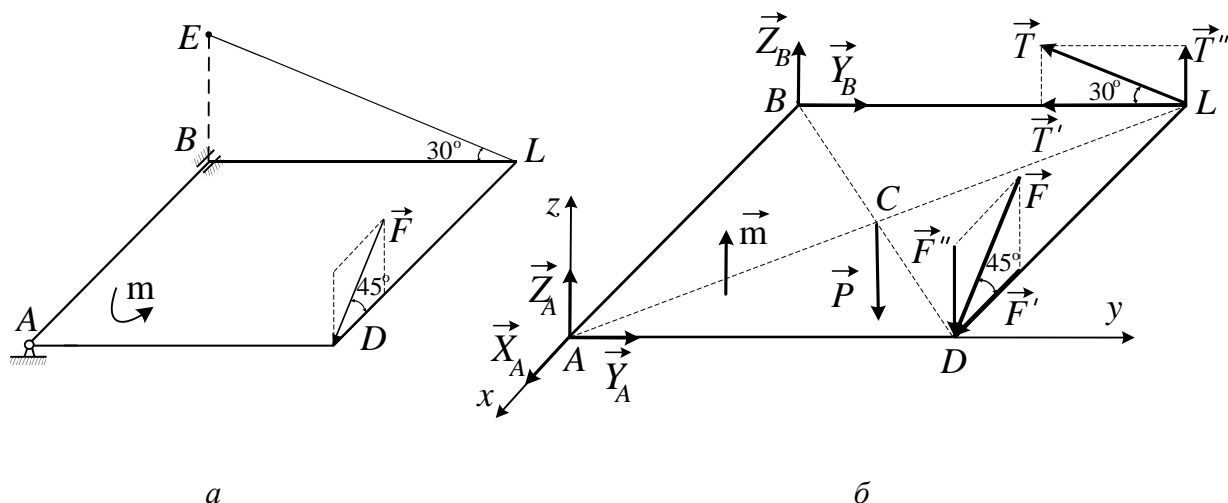


Рис. 1.23



Решение

1. Рассмотрим равновесие плиты  $ABLD$  (рис. 1.23, б).
2. На нее действуют сила тяжести  $\vec{P}$ , приложенная в центре тяжести  $C$  плиты, сила  $\vec{F}$  и пара сил, момент  $\vec{m}$  которой направим перпендикулярно плоскости пары  $ABLD$ .
3. В точке  $A$  введем декартову систему координат  $Axyz$ .
4. Отбросим связи, заменив их действие реакциями связей: реакцию сферического шарнира разложим в точке  $A$  на три составляющие  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ ; реакцию цилиндрического шарнира  $B$  – на две составляющие  $\vec{Y}_B, \vec{Z}_B$  в плоскости перпендикулярной оси  $Ax$  подшипника; натяжение  $\vec{T}$  веревки  $LE$  направим по веревке (рис. 1.23, б).
5. Плита  $ABLD$  находится под действием пространственной произвольной системы сил. Поэтому согласно (1.28) аналитические условия равновесия имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa x} = 0; \\ \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa y} = 0; \\ \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa z} = 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\kappa=1}^n m_x(\vec{F}_\kappa) = 0; \\ \sum_{\kappa=1}^n m_y(\vec{F}_\kappa) = 0; \\ \sum_{\kappa=1}^n m_z(\vec{F}_\kappa) = 0. \end{array} \right.$$

5. Запишем эту систему шести уравнений для данной задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A + F \cos 45^\circ = 0; \\ Y_A + Y_B - T \cos 30^\circ = 0; \\ Z_A + Z_B - P + T \sin 30^\circ - F \sin 45^\circ = 0; \\ -P \frac{AD}{2} - F'' AD + T'' BL = 0; \\ Z_B AB + T'' DL - P \frac{AB}{2} = 0; \\ -Y_B AB + T' AB - F' AD + m = 0. \end{array} \right. \quad (1.37)$$

В (1.37) при вычислении моментов сил  $\vec{F}$  и  $\vec{T}$  относительно координатных осей разложим их на составляющие  $\vec{F}', \vec{F}''$  и  $\vec{T}', \vec{T}''$  и применим теорему Вариньона (1.18), учитывая, что  $F' = F \cos 45^\circ$ ,  $F'' = F \sin 45^\circ$ ,  $T' = T \cos 30^\circ$ ,  $T'' = T \sin 30^\circ$ . На рис. 1.23, б момент  $\vec{m}$  пары

направлен по оси  $z$  и его проекции на оси  $x$  и  $y$  равны нулю. Поэтому он войдет только в уравнение моментов сил относительно оси  $Az$ .

Подставим в систему (1.37) исходные значения величин и решим ее относительно искомых реакций связей. Решение следует начать с четвертого уравнение системы (1.37), в которое входит только одна неизвестная реакция:

$$T = \frac{P \frac{AD}{2} + F \sin 45^\circ \cdot AD}{\sin 30^\circ BL} = 14,3 \text{ кН};$$

$$Z_B = \frac{-T \sin 30^\circ \cdot DC + P \frac{AB}{2}}{AB} = -5,7 \text{ кН};$$

$$Y_B = \frac{T \cos 30^\circ AB - F \cos 45^\circ AD + m}{AB} = 11 \text{ кН};$$

$$X_A = -F \cos 45^\circ = -5,7 \text{ кН};$$

$$Y_A = -Y_B + T \cos 30^\circ = 1,4 \text{ кН};$$

$$Z_A = -Z_B + P - T \sin 30^\circ - F \sin 45^\circ = 7,2 \text{ кН}.$$

Здесь знаки «-» указывают, что в действительности реакции  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Z}_B$  направлены противоположно соответствующим векторам, изображенным на рис. 1.23, б.

*Ответ:*  $X_A = -5,7 \text{ кН}; Y_A = 1,4 \text{ кН}; Z_A = 7,2 \text{ кН};$   
 $Y_B = 11 \text{ кН}; Z_B = -5,7 \text{ кН}; T = 14,3 \text{ кН}.$

### *Вопросы для самопроверки*

1. В чем заключается принцип освобожденности от связей?
2. Как направлена реакция: а) гладкой поверхности; б) опоры на катках; в) шарнира с невесомым стержнем; г) подшипника?
3. Как определяется алгебраический момент силы относительно точки плоскости?
4. Когда момент силы относительно центра (точки) равен нулю?
5. Какая система сил называется парой сил?
6. Как определяется момент пары по модулю и направлению?
7. Как вычисляется момент силы относительно оси?
8. Каковы аналитические условия равновесия для плоской произвольной системы сил?

## 2. КИНЕМАТИКА

*Кинематикой* называется раздел теоретической механики, в котором изучают геометрические свойства механического движения тел без учета действующих на них сил.

Механическое движение происходит в пространстве и во времени. В теоретической механике в качестве моделей реального пространства и времени выбраны *абсолютное пространство* и *абсолютное время*, существование которых постулируется.

*Абсолютное пространство* представляет собой трехмерное однородное и изотропное неподвижное евклидово пространство.

*Абсолютное время* считается непрерывно изменяющейся величиной, оно течет из прошлого в будущее. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материальных тел. Абсолютное пространство и абсолютное время считаются *независимыми* одно от другого.

Движение имеет относительный характер, т. е. изучается движение одного тела относительно другого тела, с которым связывают неподвижную ортогональную систему координат. Такая система отсчета называется *абсолютной*, а движение тела относительно нее – *абсолютным движением*.

**Задачи кинематики** состоят в разработке способов задания движения тел и методов определения основных кинематических величин (скорость, ускорение) как тела в целом, так и каждой его точки в отдельности.

### 2.1. Кинематика точки

Для задания движения материальной точки применяется один из следующих способов: векторный, координатный или естественный.

**Векторный способ.** Рассмотрим движение точки  $M$  относительно заданного неподвижного центра  $O$  (рис. 2.1). Положение точки  $M$  в произвольный момент времени  $t$  можно определить, задав ее радиус-вектор  $\vec{r}$ , проведенный из неподвижного центра  $O$  в точку  $M$ , как вектор-функцию времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) называется *уравнением движения точки в векторной форме*. При движении точки  $M$  конец радиуса-вектора  $\vec{r}$  описывает кривую, называемую *траекторией точки*.

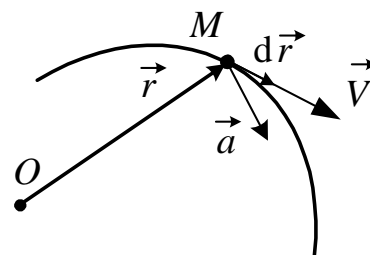


Рис. 2.1

Скоростью точки  $M$  в момент времени  $t$  называется вектор  $\vec{V}$ , равный производной от радиуса-вектора  $\vec{r}$  точки по времени:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.2)$$

Вектор скорости характеризует изменение радиуса-вектора  $\vec{r}$  точки в единицу времени по модулю и направлению. Вектор скорости  $\vec{V}$  направлен так же, как вектор  $d\vec{r}$  элементарного перемещения, т. е. по касательной к траектории в данной точке  $M$  (рис. 2.1). Размерность скорости  $[V] = L/T$ , где  $L$  – длина,  $T$  – время. Единицами измерения скорости могут быть метр в секунду (м/с), сантиметр в секунду (см/с), километр в час (км/ч).

Ускорением точки  $M$  в момент времени  $t$  называется вектор  $\vec{a}$ , равный производной от вектора скорости  $\vec{V}$  точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (2.3)$$

Вектор ускорения характеризует изменение вектора скорости точки в единицу времени по модулю и направлению.

Вектор ускорения  $\vec{a}$  направлен в точке  $M$  в сторону вогнутости траектории (рис. 2.1). Размерность ускорения  $[a] = L/T^2$ , поэтому оно измеряется в метрах за секунду в квадрате (м/с<sup>2</sup>) или в сантиметрах за секунду в квадрате (см/с<sup>2</sup>). Если угол между векторами  $\vec{V}$  и  $\vec{a}$  острый, то движение точки *ускоренное*, а если угол тупой, то – *замедленное*. Если угол между векторами  $\vec{V}$  и  $\vec{a}$  равен 90°, то точка *равномерно движется* по траектории.

**Координатный способ.** С точкой  $O$  свяжем ортогональную декартову

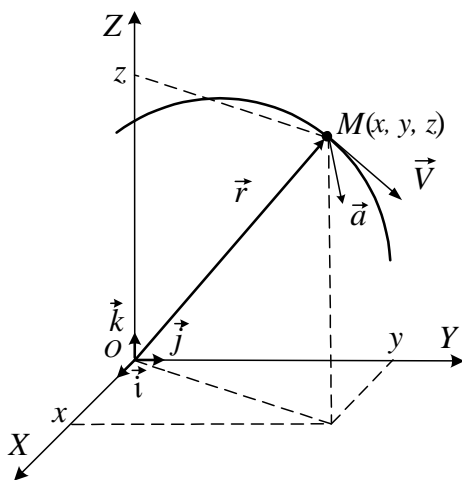


Рис. 2.2

систему координат  $OXYZ$ . Тогда  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , где  $x, y, z$  – декартовы координаты точки  $M$ , а  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты декартовых осей  $OX, OY, OZ$  соответственно (рис. 2.2),  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ .

Зададим координаты точки  $M(x, y, z)$  как функции времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (2.4)$$

Уравнения (2.4) называются *уравнениями движения точки в декартовых координатах*.

Уравнение траектории точки можно определить исключением времени  $t$  как параметра из уравнений (2.4).

Найдем скорость и ускорение точки в декартовых координатах:

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}, \quad (2.5)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что

$$\begin{aligned} V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z}; \\ a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В (2.7) и далее точка, стоящая над величиной, означает производную от нее по времени, например  $\dot{x} \equiv dx/dt$ .

*Проекции вектора скорости точки на декартовы оси равны первым производным, а проекции вектора ускорения – вторым производным от соответствующих координат по времени.*

Величину скорости и ускорения точки определим по формулам:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Направление векторов  $\vec{V}$  и  $\vec{a}$  найдем с помощью косинусов направляющих углов с осями  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ :

$$\begin{aligned} \cos(\vec{V} \wedge \vec{i}) &= \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\vec{V} \wedge \vec{j}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\vec{V} \wedge \vec{k}) = \frac{V_z}{V}; \\ \cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) &= \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = \frac{a_z}{a}. \end{aligned}$$

**Естественный способ.** Для задания движения точки естественным способом необходимо:

- 1) знать траекторию движения точки;
- 2) выбрать на траектории начало отсчета  $O$ ;
- 3) установить положительное и отрицательное направление отсчета криволинейной координаты  $s = \sphericalangle OM$ ;
- 4) задать закон изменения криволинейной координаты  $s$  как функции времени:  $s = s(t)$ .

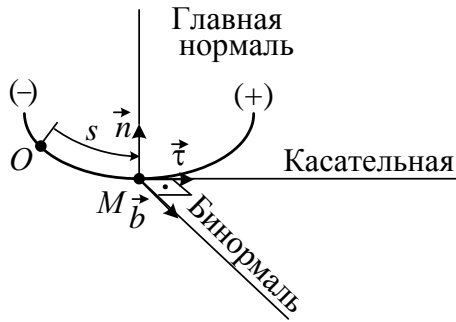


Рис. 2.3

Свяжем с точкой  $M$  ортогональную систему естественных осей – трехгранник, образованный единичными векторами  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$ , составляющими правую тройку ( $|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = |\vec{b}| = 1$ ) (рис. 2.3): вектор  $\vec{\tau}$  направим в точке  $M$  по касательной к траектории в сторону положительного отсчета  $s$ ; вектор  $\vec{n}$  – по главной нормали к центру кривизны траектории; орт  $\vec{b}$  – по бинормали к траектории, ( $\vec{b} \perp$  плоскости

$\tau Mn$ ).

Радиус-вектор  $\vec{r}$  точки  $M$  относительно начала декартовой системы координат будет сложной функцией времени:  $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$ . Поскольку  $|d\vec{r}| = ds$ , то из дифференциальной геометрии известно, что

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}, \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n}, \quad (2.9)$$

где  $\rho$  – радиус кривизны траектории в точке  $M$ . Используя (2.2), (2.9) и правило вычисления производной от сложной функции, получаем

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}$$

или

$$\vec{V} = V \vec{\tau} = \dot{s} \vec{\tau}. \quad (2.10)$$

Здесь числовое значение скорости

$$V = \dot{s}. \quad (2.11)$$

Числовое значение скорости точки равно первой производной от криволинейной координаты  $s$  по времени. Из (2.10) следует, что вектор скорости точки  $\vec{V}$  направлен по касательной к траектории вдоль орта  $\vec{\tau}$  (в сторону положительного отсчета  $s$ ), если  $\dot{s} > 0$  (рис. 2.4), и против орта  $\vec{\tau}$ , если  $\dot{s} < 0$ .

Дифференцируя (2.10) по времени, найдем ускорение точки при естественном способе задания движения:

$$a = \ddot{s} \vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \vec{n}$$

или

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (2.12)$$

Здесь  $\vec{a}_\tau$  – вектор касательного ускорения точки,

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} = \ddot{s} \vec{\tau}, \quad (2.13)$$

его числовое значение  $a_\tau = \dot{V} = \ddot{s}$ ;  
 $\vec{a}_n$  – вектор нормального ускорения точки,

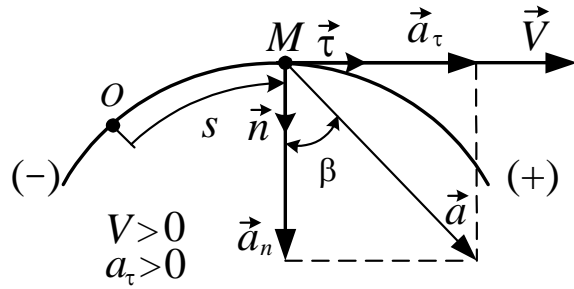


Рис. 2.4

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho} \vec{n}, \quad (2.14)$$

а его числовое значение  $a_n = V^2 / \rho = \dot{s}^2 / \rho$

Формула (2.12) выражает **теорему Гюйгенса**: ускорение точки при криволинейном движении равно геометрической сумме касательного и нормального ускорений. Из (2.12) следует, что проекция ускорения точки на бинормаль всегда равна нулю:  $a_b = 0$ . Вектор касательного ускорения  $\vec{a}_\tau$  направлен в точке  $M$  по касательной к траектории в соответствии со знаком  $\ddot{s}$  (аналогично вектору скорости  $\vec{V}$ ). Вектор нормального ускорения  $\vec{a}_n$  направлен вдоль главной нормали к центру кривизны траектории (рис. 2.4).

Поскольку векторы  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  взаимно перпендикулярны, то вектор ускорения  $\vec{a}$  точки  $M$  изобразим диагональю прямоугольника, построенного на составляющих  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  как на сторонах. Его модуль и направление определяются по формулам

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}; \quad (2.15)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_\tau}{a_n}. \quad (2.16)$$

Если знаки  $a_\tau = \ddot{s}$  и  $V = \dot{s}$  в данный момент времени одинаковые (оба положительные (рис. 2.4) или отрицательные), то точка движется ускоренно, а если знаки противоположные – замедленно.

**Прямолинейное движение точки.** Так как траекторией точки является прямая линия, то  $\rho = \infty$ . Тогда  $a_n = V^2 / \rho = 0$  и  $\vec{a} = \vec{a}_\tau = (dV/dt) \vec{\tau}$ . Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине.

**Равномерное криволинейное движение точки.** При этом движении величина скорости точки остается постоянной ( $V = \text{const}$ ), поэтому

$a_\tau = dV/dt = 0$  и  $\vec{a} = \vec{a}_n = (V^2/\rho)\vec{n}$ , т. е. вектор ускорения точки  $\vec{a}$  направлен по главной нормали. *Нормальное ускорение точки характеризует изменение ее скорости по направлению.* Если при  $t = 0$  длина дуги  $s(0) = s_0$ , то из (2.11) после интегрирования находим

$$s = s_0 + Vt. \quad (2.17)$$

Формула (2.17) выражает закон *равномерного движения точки.*

**Равнопеременное криволинейное движение точки.** При этом движении  $a_\tau = \text{const}$ . Определим скорость точки и закон ее движения по известной кривой.

Пусть при времени  $t = 0$  длина дуги  $s(0) = s_0$ , а скорость точки  $V(0) = V_0$ . Поскольку  $a_\tau = dV/dt$ , то  $dV = a_\tau dt$  и после интегрирования этого выражения находим *зависимость скорости точки от времени  $t$  при равнопеременном движении*

$$V = V_0 \pm |a_\tau|t, \quad (2.18)$$

где знак «+» соответствует равноускоренному движению, а знак «-» – равнозамедленному движению точки.

С учетом (2.11) после интегрирования выражения (2.18) при заданных начальных условиях движения точки получим

$$s = s_0 + V_0 t \pm \frac{|a_\tau|t^2}{2}. \quad (2.19)$$

Формула (2.19) определяет закон *равнопеременного криволинейного движения точки.*

**Равномерное прямолинейное движение точки.** В этом случае вектор скорости не изменяется ни по величине, ни по направлению:  $a_n = a_\tau = 0$  и  $\vec{a} = 0$ . Следовательно, *единственным движением, при котором ускорение точки равно нулю, является равномерное прямолинейное движение.*

Определим касательное и нормальное ускорения точки и значение радиуса кривизны  $\rho$  ее траектории, если движение точки задано координатным способом (2.4):  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Из (2.8) имеем  $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ . Вычислим производную по времени от данного равенства:  $2V\dot{V} = 2V_x\dot{V}_x + 2V_y\dot{V}_y + 2V_z\dot{V}_z$ . Отсюда определяем

$$a_\tau = \dot{V} = (V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z)/V. \quad (2.20)$$

Из (2.15) находим нормальное ускорение точки



$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \quad (2.21)$$

Тогда значение радиуса кривизны траектории в точке  $M$  определим по формуле

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}. \quad (2.22)$$

**Методические указания.** При решении задач по определению траектории, скорости и ускорения точки при координатном способе задания ее движения рекомендуется придерживаться следующего порядка:

- 1) по уравнениям движения точки определить ее траекторию посредством исключения из них параметра времени  $t$  и установления зависимости между координатами точки;
- 2) изобразить точку на траектории в заданный момент времени;
- 4) по уравнениям движения точки вычислить проекции скорости на оси координат и определить скорость точки по величине и направлению;
- 5) по проекциям скорости точки на оси координат найти проекции ускорения точки на эти оси, затем определить модуль и направления вектора ускорения точки.

Если траектория точки задана по условию задачи, то целесообразно применить естественную форму уравнений движения и определить ускорение точки согласно (2.12) через его проекции на оси естественного трёхгранника.

**Пример 2.1.** Движение точки задано уравнениями:

$$x = 2t, \quad y = t^2; \quad (2.23)$$

где  $x$  и  $y$  – в метрах,  $t$  – в секундах. Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки в момент времени  $t = 1$  с.

**Решение**

Движение точки задано координатным способом и происходит в плоскости  $OXY$ . Для определения уравнения траектории выразим время  $t$  из первого уравнения (2.23)  $t = \frac{x}{2} \geq 0$  и подставим во второе уравнение (2.23), получим

$$y = x^2 / 4. \quad (2.24)$$

Следовательно, траекторией точки является ветвь параболы (2.24) при  $x \geq 0$ . В момент времени  $t = 1$  с точка находится в положении  $M(2, 1)$ .

Вычислим проекции скорости и ускорения точки на декартовые оси при  $t = 1$  с:

$$\begin{aligned} V_x = \dot{x} &= 2 \text{ м/с}; & V_y = \dot{y} &= 2t|_{t=1} = 2 \text{ м/с}; \\ a_x = \ddot{x} &= 0 \text{ м/с}^2; & a_y = \ddot{y} &= 2 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Тогда согласно (2.5) и (2.6)

$$\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j}; \quad \vec{a}_1 = 2\vec{j}.$$

По формулам (2.8) найдем модули  $V_1$  и  $a_1$ :

$$V_1 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 2\sqrt{2} \text{ м/с}; \quad a_1 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Используя формулы (2.9), определим направления векторов  $\vec{V}_1$  и  $\vec{a}_1$ :

$$\begin{aligned} \cos(\vec{V}_1 \wedge \vec{i}) &= \frac{V_x}{V_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}; & \cos(\vec{V}_1 \wedge \vec{j}) &= \frac{V_y}{V_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \cos(\vec{a}_1 \wedge \vec{i}) &= \frac{a_x}{a_1} = 0; & \cos(\vec{a}_1 \wedge \vec{j}) &= \frac{a_y}{a_1} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, вектор скорости  $\vec{V}_1$  образует с осями  $Ox$  и  $Oy$  углы равные  $45^\circ$ , а вектор ускорения точки  $\vec{a}_1$  направлен вдоль оси  $Oy$ .

*Ответ:*  $V_1 = 2\sqrt{2}$  м/с;  $a_1 = 2$  м/с<sup>2</sup>.

**Пример 2.2.** Точка  $M$  движется по окружности радиусом  $R = 60$  см по закону  $s = \cup OM = \frac{\pi R}{6}(3t - t^2)$ , где  $s$  – в см,  $t$  – секундах (рис. 2.5).

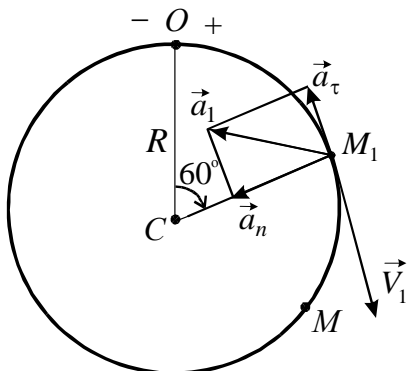


Рис. 2.5

Определить скорость и ускорение точки в момент времени  $t = 1$  с.

**Решение**

Найдем положение точки  $M_1$  на окружности при  $t = 1$  с:

$$s_1 = \cup OM_1 = \frac{\pi R}{6}(3 - 1^2) = \frac{\pi R}{3} \text{ см.}$$

Вычислим угол  $\varphi = \angle OCM_1$ , стягивающий дугу  $OM_1$ ,  $\varphi = s/R = \pi/3 = 60^\circ$ .  
Изобразим на рис. 2.5 точку  $M_1$  в этом положении.

По формуле (2.12) определим скорость точки:

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\pi R}{6} (3t - t^2) \right] = \frac{\pi R}{6} (3 - 2t),$$

при  $t = 1$  с

$$V_1 = \frac{\pi R}{6} = 31,4 \text{ см/с} > 0.$$

На рис. 2.5 вектор  $\vec{V}_1$  направим по касательной к окружности в точке  $M_1$  в направлении положительного отсчета  $s$ .

Согласно (2.13)–(2.15) для определения ускорения точки вычислим числовые значения ее касательного и нормального ускорений:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\pi R}{6} (3 - 2t) \right] = -\frac{\pi R}{3} = -62,8 \text{ см/с}^2 < 0;$$

$$a_n = \frac{V_1^2}{R} = 16,4 \text{ см/с}^2.$$

На рис. 2.5 вектор нормального ускорения  $\vec{a}_n$  направим из точки  $M_1$  по радиусу к центру  $C$  окружности, а вектор касательного ускорения – по касательной к окружности противоположно вектору скорости  $\vec{V}_1$ , так как в данный момент времени точка движется замедленно ( $V_1 > 0$ ,  $a_\tau < 0$ ).

По формуле (2.15) определим величину полного ускорения точки  $M_1$ :

$$a_1 = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(-62,8)^2 + 16,4^2} = 64,9 \text{ см/с}^2.$$

Вектор полного ускорения  $\vec{a}_1$  направим по диагонали прямоугольника, построенного на векторах  $\vec{a}_n$  и  $\vec{a}_\tau$  как на сторонах (рис. 2.5).

*Ответ:*  $V_1 = 31,4 \text{ см/с}$ ;  $a_1 = 64,9 \text{ см/с}^2$ .

### Вопросы для самопроверки

1. Как определить модуль и направление скорости точки при координатном способе задания ее движения?
2. Как определить вектор ускорения точки при естественном способе задания движения?
3. Что характеризует касательное ускорение точки?

4. Как направлен вектор ускорения точки при равномерном криволинейном движении?

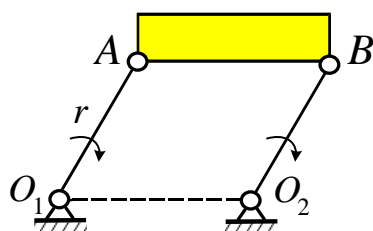


Рис. 2.6

## 2.2. Поступательное движение твердого тела

*Поступательным называется движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается, оставаясь параллельной своему первоначальному положению.*

При поступательном движении точки тела могут двигаться по любым траекториям. Например, кузов автомобиля на прямолинейном горизонтальном участке дороги движется поступательно: траекториями его точек будут прямые линии. Спарник  $AB$  (рис. 2.6) при вращении кривошипов  $O_1A$  и  $O_2B$  ( $O_1A = O_2B = r$ ) движется поступательно: траекториями точек спарника являются окружности радиуса  $r$ .

**Теорема.** *При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.*

Следовательно, изучение поступательного движения твердого тела сводится к задаче кинематики одной любой его точки (см. параграф 2.1).

## 2.3. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

*Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется движение твердого тела, имеющего хотя бы две неподвижные точки (например,  $A$  и  $B$  на рис. 2.7). Прямая  $OZ$ , проходящая через эти точки, называется осью вращения.*

Для определения положения вращающегося тела введем две полуплоскости I и II, ограниченные осью вращения  $OZ$  (рис. 2.7). Полуплоскость I – неподвижная, а полуплоскость II врезана в тело и вращается вместе с ним. Тогда положение тела в произвольный момент времени  $t$  определяют заданием линейного угла  $\varphi$  двухгранного угла между этими полуплоскостями:

$$\varphi = f(t). \quad (2.25)$$

Угол  $\varphi$  называется *углом поворота тела*. Уравнение (2.25) определяет закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

За положительное направление отсчета угла  $\varphi$  выбрано направление против хода часовой стрелки, если смотреть навстречу оси  $OZ$ . В системе СИ угол  $\varphi$  измеряется в радианах.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются *угловая скорость*  $\omega$  и *угловое ускорение*  $\varepsilon$ .

Если за промежуток времени  $\Delta t = t_1 - t$  тело повернется вокруг оси  $OZ$  на угол  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$  (рис.2.7), то *угловой скоростью тела в данный момент времени  $t$*  называется алгебраическая величина

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}. \quad (2.26)$$

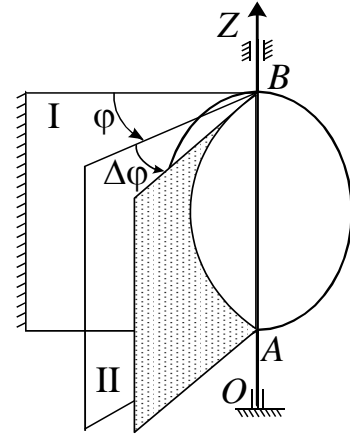


Рис. 2.7

*Числовое значение угловой скорости равно первой производной от угла поворота тела по времени.*

Угловая скорость характеризует изменение угла поворота тела в единицу времени и изображается дуговой стрелкой в направлении вращения тела вокруг оси. Угловая скорость измеряется в рад/с или  $\text{с}^{-1}$ .

Знак в (2.26) определяет направление вращения тела. Если  $\omega > 0$ , то вращение вокруг оси  $OZ$  происходит против хода часовой стрелки (рис. 2.8, а), а если  $\omega < 0$ , тогда – по ходу часовой стрелки (рис. 2.8, б).

Угловую скорость можно изобразить в виде вектора, направленного вдоль оси вращения  $OZ$ :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k}, \quad (2.27)$$

где  $\vec{k}$  – единичный орт оси  $OZ$ . Вектор  $\vec{\omega}$  направлен по оси  $OZ$ , если  $\omega = \dot{\varphi} > 0$ , и против оси  $OZ$ , если  $\omega = \dot{\varphi} < 0$ , т. е. с конца вектора  $\vec{\omega}$  вращение вокруг оси всегда видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 2.8).

Если за время  $\Delta t = t_1 - t$  угловая скорость изменилась на величину  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$ , то

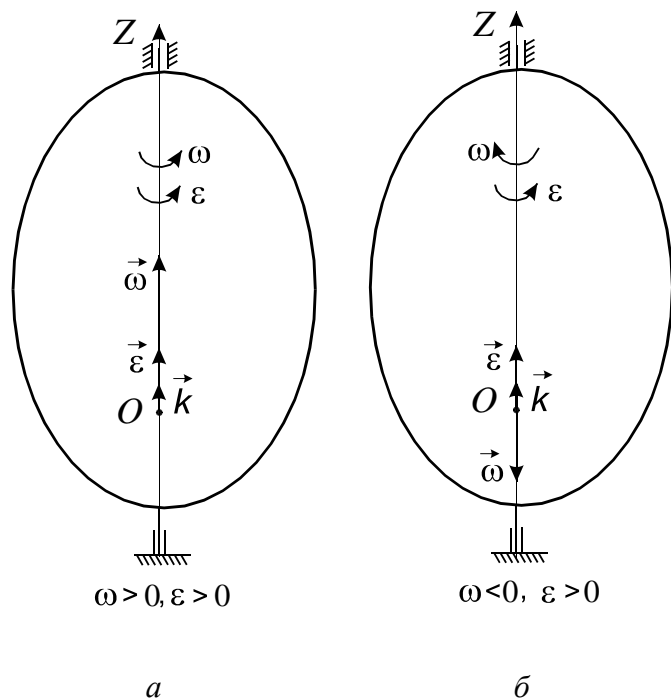


Рис. 2.8

угловым ускорением тела в момент времени  $t$  называется алгебраическая величина

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \equiv \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (2.28)$$

Числовое значение углового ускорения тела равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости тела в единицу времени и, также как  $\omega$ , в соответствии со знаком (2.28) изображается дуговой стрелкой вокруг оси вращения тела (рис. 2.8). В качестве единицы измерения углового ускорения  $\varepsilon$  обычно используется рад/с<sup>2</sup> или с<sup>-2</sup>.

Так же как угловую скорость, угловое ускорение тела можно изобразить в виде вектора  $\vec{\varepsilon}$ , направленного по оси вращения  $OZ$ :

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega} \vec{k} = \ddot{\varphi} \vec{k}. \quad (2.29)$$

Если величина угловой скорости с течением времени возрастает, то вращение тела является *ускоренным*. В этом случае векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varepsilon}$  направлены в одну сторону, а их числовые значения имеют одинаковые знаки ( $\omega > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  (рис. 2.8, а), или  $\omega < 0$ ,  $\varepsilon < 0$ ).

Если величина угловой скорости с течением времени уменьшается, то вращение тела является *замедленным*. Тогда векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varepsilon}$  направлены вдоль оси вращения в противоположные стороны, а их числовые значения имеют противоположные знаки ( $\omega > 0$ ,  $\varepsilon < 0$ , или  $\omega < 0$ ,  $\varepsilon > 0$  (рис. 2.8, б)).

**Равномерное вращение.** Если угловая скорость тела остается при движении постоянной, то вращение тела называется *равномерным*. Если при  $t = 0$   $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 = \text{const}$ , тогда закон равномерного вращения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t. \quad (2.30)$$

**Равнопеременное вращение.** Если угловое ускорение при движении тела остается постоянным по величине ( $\varepsilon = \text{const}$ ), то вращение называется *равнопеременным*. Если при  $t = 0$   $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\omega(0) = \omega_0$ , то формула

$$\omega = \omega_0 \pm |\varepsilon| t. \quad (2.31)$$

выражает зависимость угловой скорости от времени при равнопеременном вращении твердого тела, а

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{|\varepsilon| t^2}{2} \quad (2.32)$$

представляет закон *равнопеременного вращения*.

В (2.31) и (2.32) знак «+» соответствует равноускоренному, а знак «-» – равнозамедленному вращению.

Пусть тело вращается вокруг оси  $OZ$  и имеет в данный момент времени угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  ( $\omega > 0$  на рис. 2.9; и на рис. 2.10  $\omega > 0$  и  $\varepsilon > 0$ ).

При вращении тела вокруг неподвижной оси  $OZ$  траекторией его произвольной точки  $M$  является окружность радиусом  $R$ , лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 2.9).

Определим скорость и ускорение точки  $M$ . Вектор скорости  $\vec{V}$  точки  $M$  часто называют *линейной скоростью*. На рис. 2.9 он направлен по касательной к окружности ( $\vec{V} \perp CM$ ) в направлении вращения тела (в направлении  $\omega$ ) и величина скорости точки  $M$  определяется по формуле

$$V = \omega R. \quad (2.33)$$

*Числовое значение скорости точки вращающегося тела равно произведению угловой скорости тела на радиус описываемой ею окружности.*

Поскольку при вращении тела вокруг неподвижной оси  $OZ$  точка  $M$  движется по окружности, то для определения вектора ее ускорения воспользуемся теоремой Гюйгенса (2.12)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (2.34)$$

С учетом (2.33) найдем числовые значения касательного и нормального ускорений точки  $M$  вращающегося тела:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R, \quad (2.35)$$

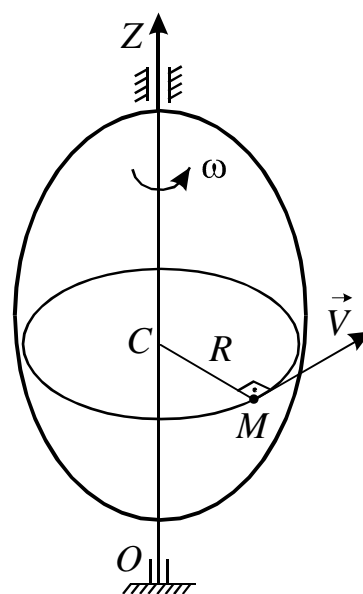


Рис. 2.9

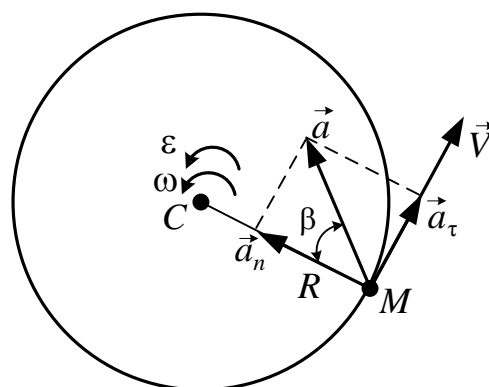


Рис. 2.10

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R. \quad (2.36)$$

Следовательно, *числовое значение касательного ускорения точки вращающегося тела равно произведению углового ускорения тела на радиус, описываемой ею окружности, а числовое значение нормального ускорения точки равно произведению квадрата угловой скорости тела на тот же радиус.*

Вектор касательного ускорения  $\vec{a}_\tau$  направлен по касательной к траектории в точке  $M$  (по  $\vec{V}$  при ускоренном вращении и против вектора  $\vec{V}$  при замедленном вращении); вектор нормального ускорения  $\vec{a}_n$  всегда направлен по радиусу вращения  $MC = R$  к оси вращения тела (рис. 2.10).

Вектор полного ускорения  $\vec{a}$  точки  $M$  вращающегося тела определяется диагональю прямоугольника, а его величина вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.37)$$

Отклонение вектора полного ускорения  $\vec{a}$  от радиуса  $R$ , описываемой точкой  $M$  окружности, определяется углом  $\beta$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (2.38)$$

Поскольку точка  $M$  тела выбрана произвольно, то из (2.37) и (2.38) следует, что *ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям до оси вращения и в данный момент времени образуют одинаковые углы  $\beta$  с радиусами описываемых ими окружностей.*

**Методические указания.** Задачи на определение угловой скорости и углового ускорения, а также на вычисление скоростей и ускорений точек вращающегося тела целесообразно решать в следующем порядке:

1) дифференцированием по времени известного закона вращательного движения тела  $\varphi = \varphi(t)$  найти зависимости угловой скорости  $\omega = \omega(t)$  и углового ускорения  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  от времени  $t$  и вычислить их числовые значения в заданный момент времени;

2) определить скорость точки и ее ускорение (по нормальной и касательной составляющим), а также числовые значения этих величин для заданного момента времени.

**Пример 2.3.** Диск радиуса  $R$  вращается вокруг оси, проходящей через центр диска  $O$  перпендикулярно его плоскости по закону  $\varphi = \varphi(t)$  радиан (рис. 2.11). Определить в начальный момент времени угловую



скорость и угловое ускорение диска, а также скорость и ускорение любой точки  $M$  на его ободе.

Решить задачу при следующих данных:  $R = 2$  м,  $\varphi = 2e^{-2t}$ .

**Решение**

1, По формулам (2.26) и (2.28) вычислим угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  диска в произвольный момент времени  $t$ :

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d}{dt}(2e^{-2t}) = -4e^{-2t} \text{ с}^{-1};$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d}{dt}(-4e^{-2t}) = 8e^{-2t} \text{ с}^{-2}.$$

При  $t=0$   $\omega_0 = -4 \text{ с}^{-1}$ ,  $\varepsilon_0 = 8 \text{ с}^{-2}$ . Поскольку  $\omega_0 < 0$ , а  $\varepsilon_0 > 0$ , то в начальный момент времени диск вращается замедленно вокруг оси  $O$  по ходу часовой стрелки (рис. 2.11).

2. Определим скорость точки  $M$  при  $t=0$ :

$$V_0 = \omega_0 R = -4 \cdot 2 = -8 \text{ м/с}.$$

На рис. 2.11 вектор  $\vec{V}_0$  направим по касательной к траектории в точке  $M$  в сторону вращения диска (в направлении  $\omega_0$ ).

По формулам (2.35) и (2.36) вычислим числовые значения касательного и нормального ускорений точки при  $t=0$ :

$$a_0^\tau = \varepsilon_0 R = 8 \cdot 2 = 16 \text{ м/с}^2;$$

$$a_0^n = \omega_0^2 R = (-4)^2 \cdot 2 = 32 \text{ м/с}^2.$$

Так как тело вращается замедленно ( $V_0 < 0$ ,  $a_0^\tau > 0$ ), то на рис. 2.11 в точке  $M$  вектор касательного ускорения  $\vec{a}_0^\tau$  направим по касательной противоположно вектору скорости  $\vec{V}_0$ , а вектор нормального ускорения  $\vec{a}_0^n$  – по радиусу  $MO$  к оси вращения  $O$  диска.

Вектор полного ускорения  $\vec{a}_0$  точки  $M$  находим геометрическим сложением векторов  $\vec{a}_0^\tau$  и  $\vec{a}_0^n$ , а его модуль определяем по формуле (2.37):

$$a_0 = \sqrt{(a_0^n)^2 + (a_0^\tau)^2} = 35,78 \text{ м/с}^2.$$

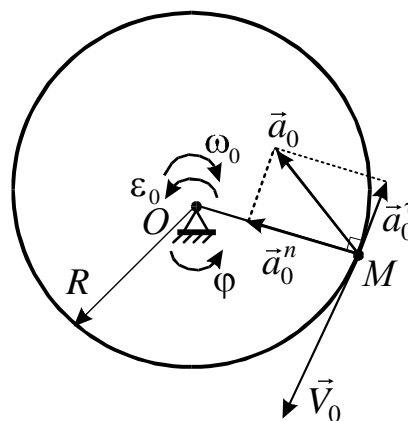


Рис. 2.11

Следовательно, в начальный момент времени диск вращается замедленно и величина скорости любой точки  $M$  на его ободе равна  $8 \text{ м/с}$ , а модуль ее полного ускорения  $35,78 \text{ м/с}^2$ .

*Ответ:*  $V_0 = -8 \text{ м/с}$ ,  $a_0 = 35,78 \text{ м/с}^2$ .

**Пример 2.4.** Механизм состоит из колес  $1$  и  $2$ , находящихся зацеплении друг с другом и с зубчатой рейкой  $3$ , движущейся в вертикальных направляющих (рис. 2.12). Радиусы ступеней колес соответственно равны  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $r_2$ . Определить в момент времени  $t_1$  скорость и ускорение рейки  $3$ , а также ускорение точки  $A$  на ободе колеса  $2$  радиусом  $R_2$ , если колесо  $1$  вращается по закону  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ . Найти промежутки времени ускоренного и замедленного вращения колеса  $1$ .

Решить задачу при следующих данных:  $\varphi_1(t) = 4t - t^2$  рад;  $t_1 = 1 \text{ с}$ ;  $R_1 = 4 \text{ см}$ ;  $R_2 = 2 \text{ см}$ ;  $r_2 = 1 \text{ см}$ .

**Решение**

1. Механизм состоит из колес  $1$  и  $2$ , совершающих вращательное движение, и зубчатой рейки  $3$ , движущейся поступательно в вертикальных направляющих.

2. Зная закон вращения колеса  $1$ , при  $t = t_1 = 1 \text{ с}$  находим числовые значения его угловой скорости и углового ускорения:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = 4 - 2t \Big|_{t=1\text{с}} = 2 \text{ с}^{-1},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = -2 \text{ с}^{-2}.$$

Так как  $\omega_1 > 0$ , а  $\varepsilon_1 = \text{const} < 0$ , то в при  $t_1 = 1 \text{ с}$  колесо  $1$  вращается против хода часовой стрелки равнозамедленно (рис. 2.12).

3. В точке  $K$  колесо  $1$  находится в зацеплении с колесом  $2$ , поэтому согласно (2.33)

$$V_K = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2.$$

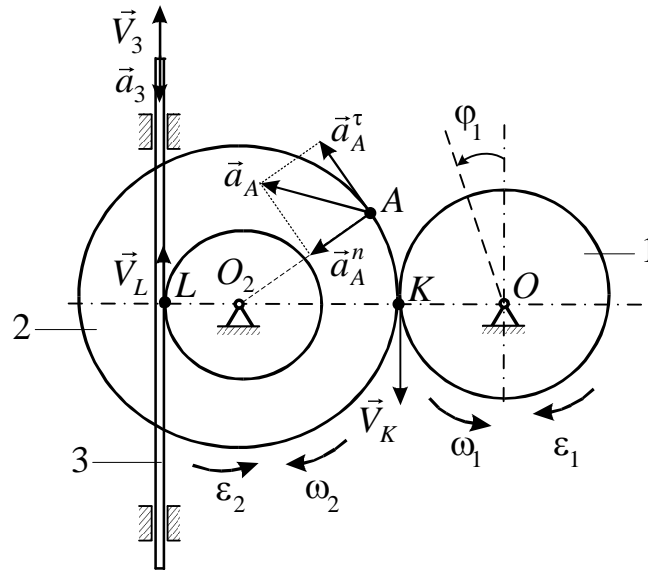


Рис. 2.12

Вычислив производную по времени от этого равенства, получим

$$a_K^\tau = \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2.$$

Тогда при  $t_1 = 1$  с находим угловую скорость и угловое ускорение колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2} = 4 \text{ с}^{-1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 R_1}{R_2} = -4 \text{ с}^{-2}.$$

Направление вектора  $\vec{V}_K$  задает направление вращения колеса 2; его угловую скорость  $\omega_2$  изобразим дуговой стрелкой по часовой стрелке, а угловое ускорение  $\varepsilon_2$  – против хода часовой стрелки (рис. 2.12).

4. Поскольку рейка 3 находится в зацеплении с колесом 2 в точке L, то

$$V_3 = V_L = \omega_2 r_2 = 4 \text{ см/с} > 0;$$

$$a_3 = \frac{dV_3}{dt} = \frac{dV_L}{dt} = a_L^\tau = \varepsilon_2 r_2 = -4 \text{ см/с}^2 < 0.$$

В данный момент времени  $t_1 = 1$  с рейка 3 совершает равнозамедленное поступательное движение вверх.

5. Ускорение точки  $A$  колеса 2 определяем по формулам (2.34) – (2.37):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau,$$

где

$$a_A^n = \omega_2^2 R_2 = 32 \text{ см/с}^2,$$

и на рис. 2.12 вектор нормального ускорения  $\vec{a}_A^n$  направим из точки  $A$  по радиусу к оси вращения  $O_2$  колеса 2;

$$a_A^\tau = \varepsilon_2 R_2 = -8 \text{ см/с}^2,$$

и вектор касательного ускорения  $\vec{a}_A^\tau$  изобразим в точке  $A$  по касательной к окружности по  $\varepsilon_2$  ( $\vec{a}_A^\tau \perp \vec{a}_A^n$ ). Геометрически складывая векторы  $\vec{a}_A^n$  и  $\vec{a}_A^\tau$ , получаем вектор полного ускорения  $\vec{a}_A$  точки  $A$  (рис. 2.12) и по формуле (2.37) вычисляем его модуль:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = 33 \text{ см/с}^2.$$

6. Теперь определим промежутки времени, когда колесо  $I$  вращается ускоренно, а когда замедленно. Поскольку угловое ускорение колеса  $I$   $\varepsilon_1 = \text{const} < 0$ , то оно будет вращаться равнозамедленно для промежутка времени, когда  $\omega_1 > 0$ , т. е.  $\omega_1 = 4 - 2t > 0$  при  $0 \leq t < 2$  с. Когда  $t = 2$  с,  $\omega_1 = 0$ , и колесо  $I$  остановится. В дальнейшем при  $t > 2$  с  $\omega_1 < 0$  и  $\varepsilon_1 = \text{const} < 0$ , и колесо  $I$  будет вращаться равноускоренно по ходу часовой стрелки.

$$\text{Ответ: } V_3 = 4 \text{ см/с}, a_3 = -4 \text{ см/с}^2, a_A = 33 \text{ см/с}^2.$$

### *Вопросы для самопроверки*

1. Какие кинематические характеристики являются одинаковыми для всех точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

2. Как определяются угловая скорость и угловое ускорение тела при вращательном движении?

1. Как определить, является ли в данный момент времени вращательное движение тела ускоренным (замедленным)?

2. Как направляется вектор угловой скорости вращающегося тела?

3. Как определяются скорость и ускорение точки вращающегося тела по модулю и направлению?

## 2.4. Плоскопараллельное движение твердого тела

*Плоскопараллельным (плоским) называется движение твердого тела, все точки которого движутся в плоскостях, параллельных неподвижной плоскости.*

Качение цилиндра по плоскости  $OXZ$  является плоскопараллельным движением, если плоскости его оснований  $S$  и  $S_1$  остаются параллельными неподвижной плоскости  $OXY$  (рис. 2.13). При этом любая образующая  $MM_1$  цилиндра совершает поступательное движение, т. е. кинематические характеристики ее точек в произвольный момент времени одинаковы ( $\vec{V}_M = \vec{V}_{M_1}$ ,  $\vec{a}_M = \vec{a}_{M_1}$ ) и точки  $M$  и  $M_1$  описывают тождественные траектории.

Следовательно, изучение плоскопараллельного движения твердого тела сводится к изучению движения плоского сечения  $S$  в его плоскости.

Положение плоского сечения  $S$  в плоскости  $OXY$  (рис. 2.14) определяется положением любого отрезка  $AM$ , проведенного в этом сечении. Для этого необходимо задать координаты  $x_A$ ,  $y_A$  какой-нибудь точки  $A$ , называемой *полюсом*, и угол  $\varphi$ , который отрезок  $AM$  образует с

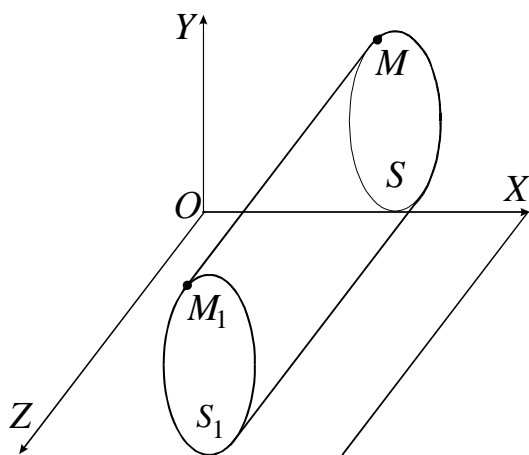


Рис. 2.13

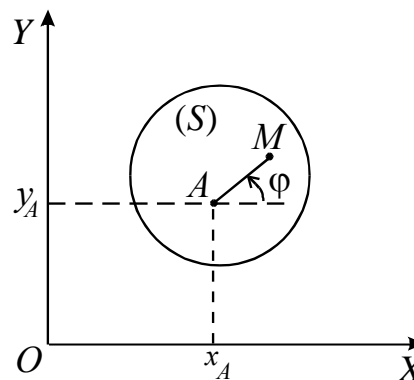


Рис. 2.14

осью  $OX$ .

При движении плоской фигуры (сечения  $S$ ) координаты  $x_A$ ,  $y_A$  и угол  $\varphi$  будут изменяться во времени:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (2.39)$$

Зависимости (2.39) называются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела*.

Из (2.39) следует, что изменение только координат  $x_A$  и  $y_A$  приводит к поступательному движению плоской фигуры вместе с полюсом  $A$ , а изменение только угла  $\varphi$  – к вращательному движению плоской фигуры вокруг оси, проходящей через полюс  $A$  и перпендикулярной плоскости движения  $OXY$ .

Тогда, движение плоской фигуры (сечения  $S$ ) в ее плоскости можно представить как совокупность поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Отметим, что угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  при плоскопараллельном движении тела от выбора полюса не зависят.

По заданным уравнениям плоского движения тела (2.39) можно найти скорость и ускорение полюса  $A$ , а также угловую скорость и угловое ускорение тела по формулам

$$\begin{aligned} \vec{V}_A &= \dot{x}_A \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j}; & V_A &= \sqrt{(\dot{x}_A)^2 + (\dot{y}_A)^2}; \\ \vec{a}_A &= \ddot{x}_A \vec{i} + \ddot{y}_A \vec{j}; & a_A &= \sqrt{(\ddot{x}_A)^2 + (\ddot{y}_A)^2}; \\ \omega &= \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}; & \varepsilon &= \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  изображаются дуговыми стрелками (например,  $\omega$  на рис. 2.15).

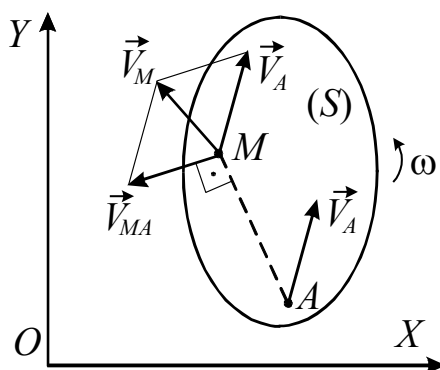


Рис. 2.15

Скорость любой точки тела, совершающего плоскопараллельное движение, определяется по **теореме о скоростях точек плоской фигуры**: скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки при вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.

Согласно этой теореме, приняв точку  $A$  за полюс, можно найти скорость любой точки  $M$  тела по формуле

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}. \quad (2.41)$$

Здесь  $\vec{V}_M$  и  $\vec{V}_A$  – скорости точек  $M$  и  $A$  соответственно. Вектор  $\vec{V}_{MA}$  – скорость точки  $M$  при вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса  $A$ , которая согласно (2.33)

$$V_{MA} = \omega AM. \quad (2.42)$$

Вектор  $\vec{V}_{MA}$  изображается (рис. 2.15) в точке  $M$  перпендикулярно  $AM$  ( $\vec{V}_{AM} \perp AM$ ) по направлению вращения плоской фигуры (в направлении угловой скорости  $\omega$ ).

Согласно (2.41) вектор скорости  $\vec{V}_M$  определяется диагональю параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_{MA}$  как на сторонах, а его модуль

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2 + 2V_A V_{MA} \cos(\vec{V}_A \wedge \vec{V}_{MA})}. \quad (2.43)$$

Когда уравнения (2.40) неизвестны, из формулы (2.42) определяют угловую скорость плоской фигуры по известным величинам скорости  $V_{MA}$  и расстояния  $AM$ :  $\omega = V_{MA}/AM$ .

Соотношение между величинами скоростей точек  $A$  и  $M$  плоской фигуры можно найти более простым способом – по **теореме о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры**: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны.

Действительно, проецируя векторное равенство (2.41) на ось  $AX$ , проходящую через точки  $A$  и  $M$  (рис. 2.16), и учитывая, что вектор  $\vec{V}_{MA}$  перпендикулярен  $AM$ , получим

$$V_M \cos \beta = V_A \cos \alpha. \quad (2.44)$$

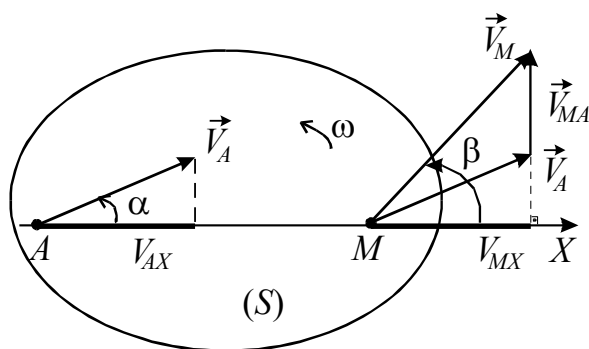


Рис. 2.16

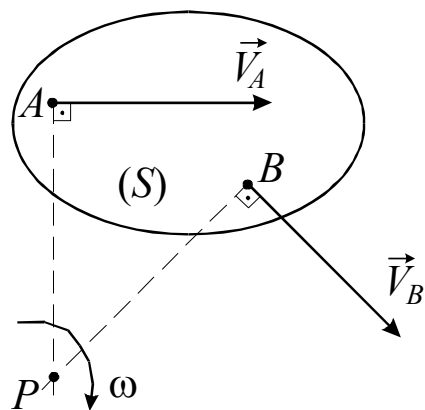


Рис. 2.17

Теорема (2.44) позволяет находить скорость любой точки  $M$  плоской фигуры, если известно ее направление и скорость другой точки  $A$  по модулю и направлению. Отметим, что теорема (2.44) имеет место для любого движения абсолютно твердого тела.

Скорости точек тела при плоскопараллельном движении можно определить с помощью **мгновенного центра скоростей (МЦС)** – точки  $P$

плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю ( $V_P = 0$ ).

Примем МЦС, т. е. точку  $P$ , за полюс. Тогда по теореме о скоростях (2.41) для любых точек  $A$  и  $B$  плоской фигуры  $S$ , поскольку  $\vec{V}_P = 0$ , имеем:

$$\begin{aligned}\vec{V}_A &= \vec{V}_P + \vec{V}_{AP} = \vec{V}_{AP}; & \vec{V}_A &\perp AP; \\ \vec{V}_B &= \vec{V}_P + \vec{V}_{BP} = \vec{V}_{BP}; & \vec{V}_B &\perp BP.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Следовательно, скорость любой точки тела, лежащей в сечении  $S$ , равна ее скорости при вращении сечения  $S$  вокруг мгновенного центра скоростей  $P$ .

Мгновенный центр скоростей является центром вращения плоской фигуры (сечения  $S$ ) в данный момент времени и находится в точке пересечения перпендикуляров  $AP$  и  $BP$ , восстановленных в точках  $A$  и  $B$  к их скоростям  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  (рис. 2.17).

Тогда из (2.42) модули скоростей точек определяются по формулам

$$V_A = \omega AP, \quad V_B = \omega BP.\tag{2.46}$$

Из равенств (2.46) следует пропорция

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}.\tag{2.47}$$

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

Соотношение (2.46) позволяет определить угловую скорость тела при плоском движении:

$$\omega = \frac{V_A}{AP}.\tag{2.48}$$

Угловая скорость плоской фигуры в каждый момент времени равна отношению величины скорости любой точки плоской фигуры к расстоянию от точки до мгновенного центра скоростей.

Для применения формул (2.47) и (2.48) при решении задач необходимо уметь определять положение мгновенного центра скоростей в данный момент времени.

Кроме способа нахождения МЦС, представленного на рис. 2.17, рассмотрим еще некоторые частные случаи:

1. Если скорости  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  двух точек  $A$  и  $B$  плоской фигуры параллельны между собой и перпендикулярны прямой  $AB$ , то МЦС находится



в точке пересечения прямой  $AB$  с прямой, соединяющей концы векторов скоростей точек (рис. 2.18).

2. Если скорости  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  двух точек  $A$  и  $B$  плоской фигуры параллельны между собой и не перпендикулярны прямой  $AB$  (рис. 2.19, *a*) или скорости двух точек фигуры параллельны, равны и перпендикулярны отрезку  $AB$  (рис. 2.19, *б*), то МЦС находится в бесконечности. Угловая скорость плоской фигуры в данный момент времени равна нулю ( $\omega = 0$ ), и тело имеет *мгновенно-поступательное распределение скоростей*, т. е. в этот момент времени скорости всех точек плоской фигуры геометрически равны:  $\vec{V}_A = \vec{V}_B$ .

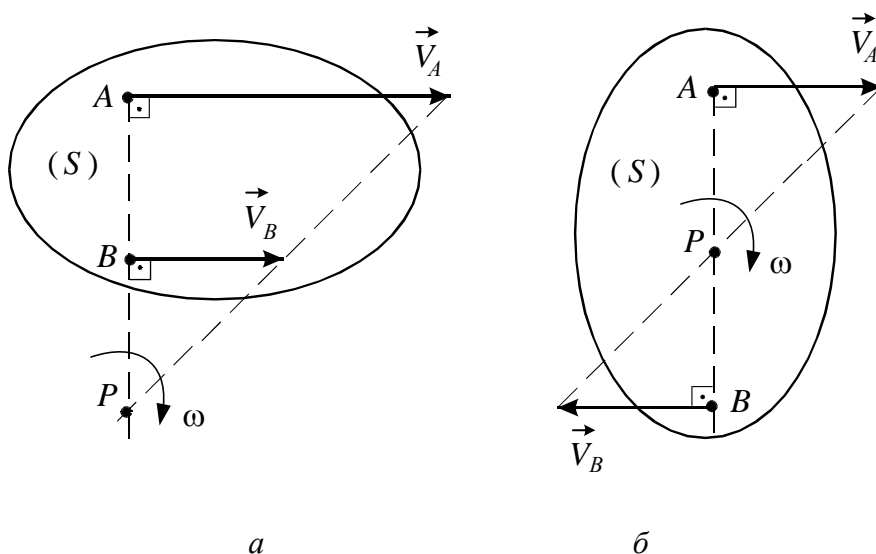


Рис. 2.18

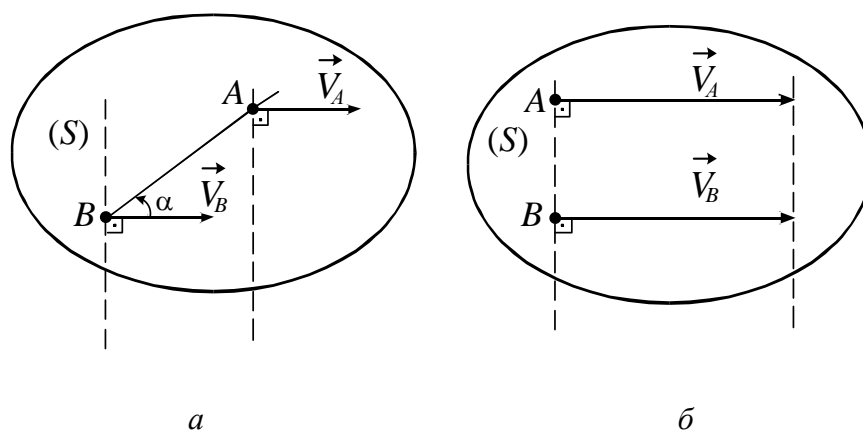


Рис. 2.19

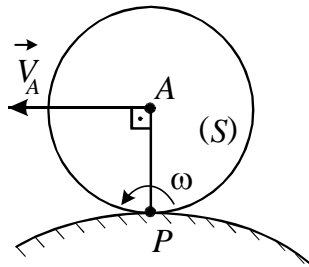


Рис. 2.20

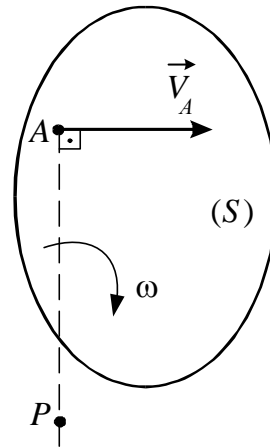


Рис. 2.21

3. При качении без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого, неподвижного тела (рис. 2.20) точка касания  $P$  катящегося тела о неподвижную поверхность имеет в данный момент времени скорость, равную нулю ( $\vec{V}_P = 0$ ), и является мгновенным центром скоростей.

4. Если известны вектор скорости  $\vec{V}_A$  точки  $A$  плоской фигуры и ее угловая скорость  $\omega$ , то для определения МЦС (точки  $P$ ) следует вектор  $\vec{V}_A$  повернуть вокруг точки  $A$  на  $90^\circ$  в направлении  $\omega$  и на этой полуоси отложить расстояние  $AP$ , которое, согласно (2.46) определяется равенством  $AP = V_A/\omega$  (рис. 2.21).

Ускорение любой точки тела, совершающего плоскопараллельное движение, определяется по **теореме об ускорениях точек плоской фигуры**: ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.

Приняв точку  $A$  за полюс, согласно этой теореме можно найти ускорение любой точки  $M$  тела по формуле

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA} \quad (2.49)$$

Здесь  $\vec{a}_M$  и  $\vec{a}_A$  – ускорения точек  $M$  и  $A$  соответственно. Вектор  $\vec{a}_{MA}$  – ускорение точки  $M$  при вращении с плоской фигурой вокруг полюса  $A$ , которое согласно (2.34) можно разложить на нормальное и касательное ускорения:

$$\vec{a}_{MA} = \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^\tau \quad (2.50)$$

В (2.50)  $\vec{a}_{MA}^n$  – нормальное ускорение, а  $\vec{a}_{MA}^\tau$  – касательное ускорение точки  $M$  при вращении плоской фигуры вокруг полюса  $A$ .

С учетом (2.35) и (2.36) численные значения  $\vec{a}_{MA}^n$  и  $\vec{a}_{MA}^\tau$  вычисляются по формулам:

$$a_{MA}^n = \omega^2 AM, \quad (2.51)$$

$$a_{MA}^\tau = \varepsilon AM. \quad (2.52)$$

На рис. 2.22, а вектор нормального ускорения  $\vec{a}_{MA}^n$  направлен из  $M$  к полюсу  $A$  по радиусу  $AM$  вращения точки  $M$  вокруг полюса  $A$ , а вектор касательного ускорения  $\vec{a}_{MA}^\tau$  изображается в точке  $M$  перпендикулярно вектору  $\vec{a}_{MA}^n$  в направлении углового ускорения  $\varepsilon$  плоской фигуры ( $S$ ).

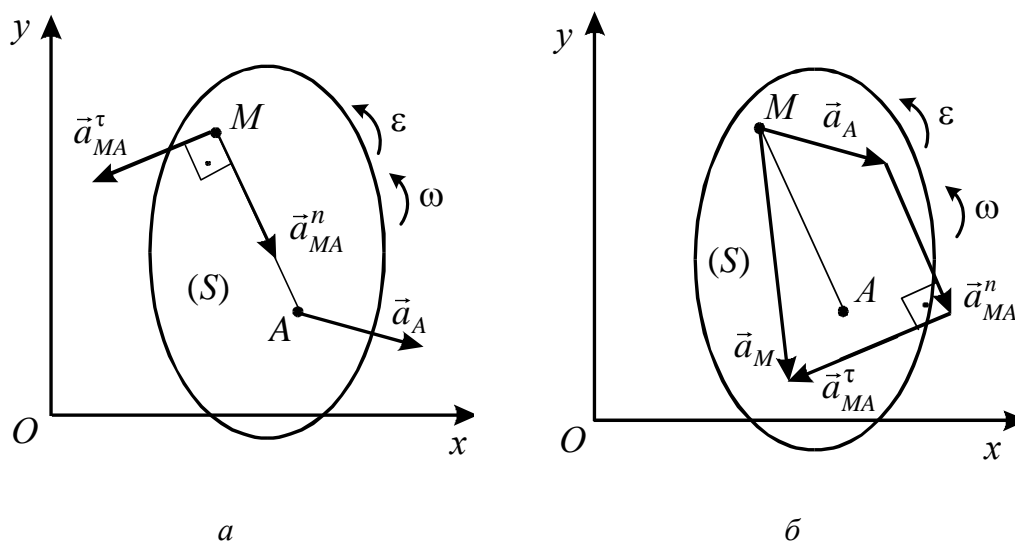


Рис. 2.22

С учетом (2.50) теорема об ускорениях точек плоской фигуры (2.49) принимает вид

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^\tau. \quad (2.53)$$

Согласно (2.53) вектор полного ускорения  $\vec{a}_M$  точки  $M$  плоской фигуры определяется построением многоугольника ускорений (2.53): начало вектора  $\vec{a}_M$  совпадает с началом вектора ускорения  $\vec{a}_A$  полюса  $A$ , а его конец – с концом вектора  $\vec{a}_{MA}^\tau$  (рис. 2.22, б).

Во многих задачах кинематики встречаются механизмы со звеньями, называемыми «кривошип», «ползун», «кулиса» и т. д. Дадим краткое описание строения механизмов и название их звеньев.

Все механизмы состоят из твердых тел (*звеньев*), совершающих различные движения, и одного неподвижного звена, называемого *стойкой* (*корпусом*). Звенья между собой соединяются либо шарнирами, допускающими их относительное вращение, либо поступательными кинематическими парами, допускающими движение одного звена вдоль другого.

На рис. 2.23 представлена схема кривошипно-ползунного механизма. Звено 1, совершающее вращательное движение вокруг неподвижного цилиндрического шарнира  $O$ , точка  $A$  которого описывает окружность радиуса  $OA$ , называется *кривошипом*. Звено 2, соединенное со звеньями 1 и 3 с помощью цилиндрических шарниров  $A$  и  $B$  и совершающее плоскопараллельное (плоское) движение, называется *шатуном*. Звено 3, которое перемещается вдоль неподвижной направляющей 4, называется *ползуном*.

На рис. 2.24 показана схема кривошипно-коромыслового механизма. В нем звено 3, называемое *коромыслом*, совершает вращательное движение вокруг неподвижного шарнира  $O_1$ , но при этом его точка  $B$  описывает не полную окружность, а только часть ее дуги радиусом  $O_1B$ .

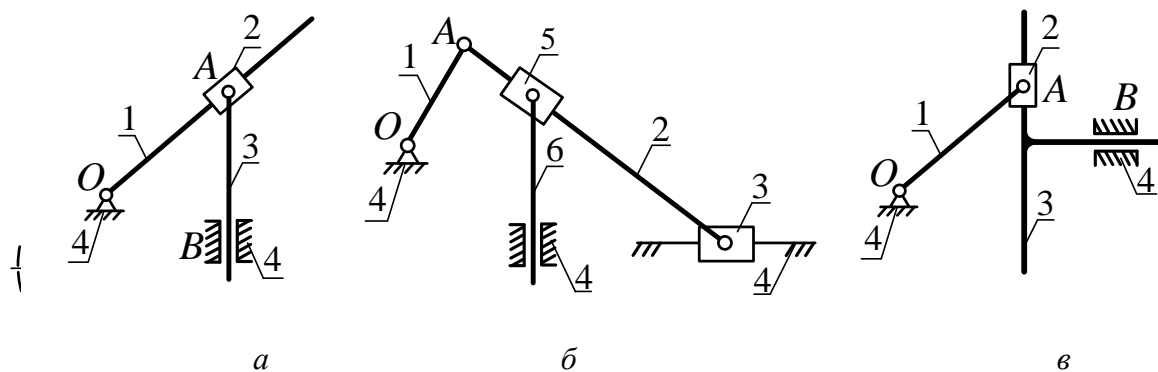


Рис. 2.25

На рис. 2.25, а, б, в изображены варианты кулисных механизмов. Подвижные направляющие (1 – на рис. 2.25, а; 2 – на рис. 2.25, б; 3 – на рис. 2.25, в) называются *кулисами*, а ползуны, совершающие движения вдоль этих кулис, – *кулисными камнями*.

**Методические указания.** Если в задаче имеется тело (звено механизма), совершающее плоскопараллельное движение, то при определении кинематических характеристик этого тела или его точек следует придерживаться следующего порядка.

**I.** При нахождении угловой скорости тела и скоростей его точек при помощи МЦС:

1) определить величину и изобразить на рисунке вектор скорости точки тела, движение которого задано по условию задачи (для многосвязного механизма обычно задано вращение кривошипа и такой точкой является шарнир, соединяющий кривошип с шатуном или коромысло с шатуном);

2) найти другую точку тела, совершающего плоскопараллельное движение, направление скорости которой известно, и изобразить вектор ее скорости;

3) определить положение МЦС, т. е. найти точку пересечения перпендикуляров к направлениям скоростей этих двух точек;

4) вычислить в данный момент времени угловую скорость тела, разделив скорость точки, модуль которой известен, на ее расстояние до МЦС;

5) по формуле (2.46) определить величину скорости любой точки тела при плоскопараллельном движении умножением угловой скорости тела на расстояние от этой точки до МЦС, а вектор ее скорости провести из точки перпендикулярно к отрезку, соединяющему эту точку с МЦС, в направлении угловой скорости тела.

**II. При нахождении скоростей точек при помощи теоремы о проекциях скоростей двух точек тела:**

1) выполнить действия пунктов 1 и 2, приведенных выше;

2) провести через эти точки ось;

3) проецируя векторы скоростей этих точек на ось, по формуле (2.44) вычислить величину скорости второй точки тела.

Подчеркнём, что этот способ позволяет определить величину скорости точки, если только известно направление ее скорости, но этим методом невозможно определить угловую скорость тела.

**Пример 2.5.** Определить скорость ползуна  $B$  и угловую скорость шатуна  $AB$  кривошипно-ползунного механизма в положении, изображенном на рис. 2.26, если кривошип  $OA$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ .

Решить задачу при следующих данных:  $\omega = 2$  рад/с;  $OA = 0,2$  м;  $AB = 0,8$  м;  $\alpha = 30^\circ$ .

**Р е ш е н и е**

1. Механизм состоит из звена  $I$ , вращающегося вокруг оси  $O$ ; звена  $2$ , совершающего плоскопараллельное движение, и ползуна  $B$ , движущегося поступательно в вертикальных направляющих.

2. Определим скорость точки  $A$  звена  $I$ , движение которого задано:

$$V_A = \omega OA = 0,4 \text{ м/с}.$$

Так как траекторией точки  $A$  является окружность радиусом  $OA$ , то на рис. 2.26 вектор  $\vec{V}_A$  изобразим в точке  $A$  перпендикулярно радиусу  $OA$  ( $\vec{V}_A \perp OA$ ) в сторону вращения звена 1.

3. Найдем скорость ползуна  $B$ . Вектор скорости  $\vec{V}_B$  ползуна  $B$  изобразим на рис. 2.26 вдоль его направляющих вертикально вверх.

Для определения величины скорости точки  $B$  построим МЦС (точку  $P$ ) для звена 2, восстановив в точках  $A$  и  $B$  перпендикуляры к их скоростям  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  до их пересечения. На рис. 2.26 направление вектора скорости  $\vec{V}_A$  точки  $A$  определяет направление поворота звена 2 с угловой скоростью  $\omega_2$  по ходу часовой стрелки вокруг его МЦС (точки  $P$ ) в данный момент времени. Запишем формулу (2.48) для этой задачи:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (2.54)$$

В прямоугольном треугольнике  $ABP$  найдем  $AP = AB \cos \alpha = 0,693$  м,  $BP = AB \sin \alpha = 0,4$  м.

Тогда из (2.54) вычислим угловую скорость шатуна  $AB$  и величину скорости точки  $B$  для заданного положения механизма:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = 0,577 \text{ с}^{-1},$$

$$V_B = \omega_2 BP = 0,23 \text{ м/с}.$$

*Ответ:*  $V_B = 0,23$  м/с,  $\omega_2 = 0,577$  с<sup>-1</sup>.

### Вопросы для самопроверки

1. На какие движения раскладывается движение плоской фигуры, если какую-либо ее точку принять за полюс?
2. Что необходимо знать для определения скорости точки плоской фигуры с помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек?
3. Как определить скорость точки и угловую скорость плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей?

## 2.5. Сложное (составное) движение точки

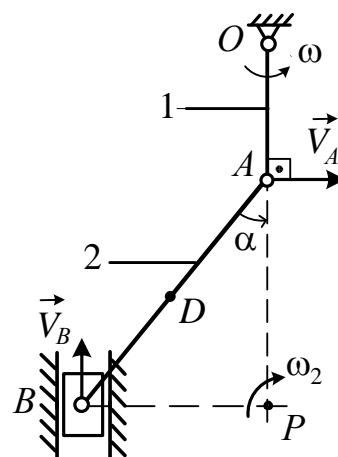


Рис. 2.26

Сложное (составное) движение точки – это такое движение точки, при котором она одновременно участвует в двух или более движениях.

Для характеристики сложного движения точки вводятся две системы отсчета:  $OXYZ$  – неподвижная и  $Axyz$  – подвижная, связанная с движущимся телом  $D$ , относительно которого перемещается точка  $M$  (рис. 2.27).

Движение точки  $M$  по отношению к подвижной системе отсчета  $Axyz$  называется *относительным движением*. Скорость и ускорение точки  $M$  при этом движении называются соответственно *относительной скоростью*  $\vec{V}_r$  и *относительным ускорением*  $\vec{a}_r$ .

Движение тела  $D$  и связанного с ним подвижного трехгранника  $Axyz$  относительно неподвижного трехгранника  $OXYZ$  называется *переносным движением точки  $M$* . Скорость и ускорение точки подвижного тела  $D$ , с которой в данный момент времени совпадает точка  $M$ , являются соответственно *переносной скоростью*  $\vec{V}_e$  и *переносным ускорением*  $\vec{a}_e$ .

Движение точки  $M$  относительно неподвижной системы координат  $OXYZ$  называется *абсолютным движением*. Скорость и ускорение точки  $M$  относительно неподвижного трехгранника  $OXYZ$  называются соответственно *абсолютной скоростью*  $\vec{V}_a$  и *абсолютным ускорением*  $\vec{a}_a$ .

Основная задача сложного движения точки заключается в установлении связей между основными кинематическими характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений точки.

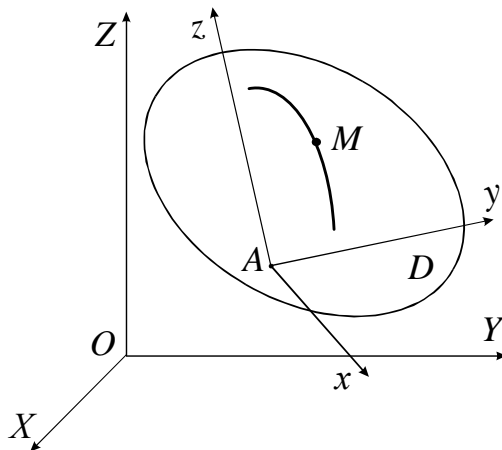


Рис. 2.27

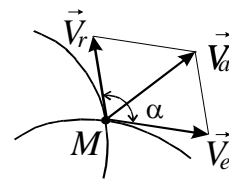


Рис. 2.28

Связь между относительной, переносной и абсолютной скоростями точки выражается **теоремой о сложении скоростей**: абсолютная скорость точки при сложном движении равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r, \quad (2.55)$$

где вектор абсолютной скорости  $\vec{V}_a$  определяется диагональю параллелограмма, построенного на векторах переносной и относительной скоростей как на сторонах (рис. 2.28).

Модуль абсолютной скорости определяется по теореме косинусов:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2|V_e| |V_r| \cos \alpha}, \quad (2.56)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{V}_e$  и  $\vec{V}_r$ .

Из (3.2) следуют частные случаи:

- 1) если  $\alpha = 0$ , то  $V_a = |V_e| + |V_r|$ ;
- 2) если  $\alpha = \pi$ , то  $V_a = \left| |V_e| - |V_r| \right|$ ;
- 3) если  $\alpha = \pi/2$ , то  $V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$ .

Следовательно, для определения абсолютной скорости необходимо знать модули и направления переносной и относительной скоростей.

Абсолютное ускорение точки при сложном движении определяется при помощи **теоремы Кориолиса**: абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного ускорений и ускорения Кориолиса:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C, \quad (2.57)$$

где  $\vec{a}_C$  – ускорение Кориолиса;

$$\vec{a}_C = 2 \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r. \quad (2.58)$$

Появление ускорения Кориолиса связано с изменением абсолютной скорости, обусловленным двумя причинами:

1) влиянием переносного движения на относительную скорость (при  $\vec{\omega}_e \neq 0$  вектор  $\vec{V}_r$  поворачивается относительно абсолютной системы координат за счет вращения подвижной системы – тела  $D$ );

2) влиянием относительного движения на переносную скорость (при  $\vec{V}_r \neq 0$  положение точки в подвижной системе координат изменяется и, следовательно, изменяется переносная скорость).

Модуль ускорения Кориолиса (2.58) вычисляется по формуле

$$a_C = 2 |\vec{\omega}_e| |\vec{V}_r| \sin \alpha. \quad (2.59)$$



Согласно (2.58) вектор ускорения Кориолиса  $\vec{a}_C$  направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{V}_r$  в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение первого вектора со вторым видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 2.28).

Из (2.59) следуют частные случаи, когда ускорение Кориолиса равно нулю:

- 1)  $a_C = 0$ , если  $\vec{\omega}_e \neq 0$ , т. е. переносное движение поступательное;
- 2)  $a_C = 0$ , если  $|\vec{V}_r| = 0$ , т. е. в точках остановки относительного движения;
- 3)  $a_C = 0$ , если  $\sin \alpha = 0$ , т. е. векторы  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{V}_r$  коллинеарные.

Во всех этих случаях теорема Кориолиса (2.57) принимает более простой вид:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r.$$

Приведем еще одно правило построения вектора ускорения Кориолиса. Направление вектора ускорения  $\vec{a}_C$  можно также найти **по правилу Н. Е. Жуковского**. Для этого следует (см. рис. 2.29):

1) спроецировать вектор относительной скорости  $\vec{V}_r$  на плоскость  $Q$ , перпендикулярную вектору угловой скорости  $\vec{\omega}_e$  переносного движения;

2) повернуть эту проекцию  $\vec{V}_{r\perp}$  в плоскости  $Q$  на  $90^\circ$  в направлении переносного вращения (по  $\omega_e$ ).

В случае, когда вектор относительной скорости  $\vec{V}_r$  лежит в плоскости  $Q$  ( $\angle \alpha = 90^\circ$ ), для определения направления вектора  $\vec{a}_C$  достаточно повернуть вектор относительной скорости  $\vec{V}_r$  в плоскости  $Q$  на  $90^\circ$  в сторону переносного вращения (по направлению  $\omega_e$ ).

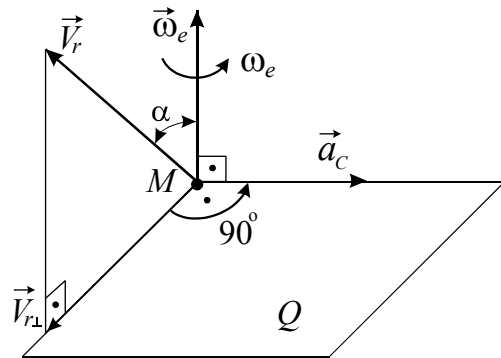


Рис. 2.29

Модуль абсолютного ускорения точки при сложном движении определяется аналитически. Для этого сначала находят модули и направления векторов  $\vec{a}_e$ ,  $\vec{a}_r$  и  $\vec{a}_C$ , затем проецируют равенство (2.57) на оси неподвижного трехгранника  $OXYZ$  и по найденным проекциям абсолютного ускорения  $a_{ax}$ ,  $a_{ay}$  и  $a_{az}$  на декартовы оси согласно (2.8) вычисляют модуль абсолютного ускорения точки по формуле

$$a_a = \sqrt{a_{aX}^2 + a_{aY}^2 + a_{aZ}^2}. \quad (2.60)$$

**Методические указания.** При решении задач по кинематике сложного движения точки рекомендуется придерживаться следующего порядка:

I. Если точка совершает сложное движение и составляющие движения, в которых она одновременно участвует, заданы, то для определения кинематических характеристик ее абсолютного движения следует придерживаться следующего порядка:

1) ввести две системы координат: неподвижную и подвижную, связанную с телом, относительно которого движется точка, и разложить движение точки на составляющие, определив ее траектории в относительном, переносном и абсолютном движениях;

2) мысленно остановив переносное движение, найти положение точки в заданный момент времени на траектории относительного движения и определить её скорость и ускорение в относительном движении;

3) мысленно остановив относительное движение, по угловой скорости и угловому ускорению переносного движения определить скорость и ускорение точки в переносном движении в заданный момент времени;

4) вычислить модуль ускорения Кориолиса и найти его направление, воспользовавшись правилом Н. Е. Жуковского;

5) применив теорему о сложении скоростей, определить абсолютную скорость точки;

6) найти проекции абсолютного ускорения точки на оси неподвижной системы отсчета и по ним определить искомое абсолютное ускорение точки по модулю и направлению.

II. Для определения одной из скоростей точки при сложном движении с помощью теоремы о сложении скоростей, если известны направления ее абсолютной, относительной и переносной скоростей и модуль одной из этих скоростей, следует придерживаться следующего порядка:

1) ввести две системы координат: неподвижную и подвижную, связанную с телом, относительно которого движется точка;

2) разложить движение точки на составляющие и определить ее траектории в относительном, переносном и абсолютном движениях;

3) воспользовавшись теоремой о сложении скоростей (2.55), построить в этой точке треугольник скоростей: построение следует начинать с вектора скорости, известной по модулю и направлению; затем через его конец и начало провести прямые, параллельные соответственно двум другим векторам до их пересечения; при обходе полученного треугольника скоростей векторы, определяющие направления относительной

и переносной скоростей, изображаются в одном направлении, а вектор абсолютной скорости – в противоположном;

4) найти модули неизвестных по величине скоростей, определив длины сторон в построенном треугольнике скоростей.

**Пример 2.6.** Пластина  $ABC$  равномерно вращается вокруг оси  $OZ$  с угловой скоростью  $\omega_e$  (рис. 2.30). По ее стороне  $AC$  движется точка  $M$  согласно уравнению  $s = s(t) = AM(t)$ .

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t_1$ .

Решить задачу при следующих данных:  $\omega_e = -10 \text{ с}^{-1}$ ,  $s = AM = 4t^3 \text{ м}$ ,  $t_1 = 0,5 \text{ с}$ .

**Р е ш е н и е**

Точка  $M$  совершает сложное движение, поскольку она одновременно участвует в двух движениях. Свяжем с осью вращения  $OZ$  неподвижную систему координат  $OXYZ$ , предполагая, что пластина  $ABC$  в рассматриваемый момент времени  $t_1$  находится в плоскости  $YOZ$  (рис. 2.30). Подвижную систему отсчета  $Axyz$  (на рис. 2.30 не изображена) мысленно свяжем с пластиной  $ABC$ , относительно которой движется точки  $M$ .

Тогда движение точки  $M$  по стороне  $AC$  вращающейся пластины  $ABC$  является для неё относительным движением, а вращение вместе с пластиной  $ABC$  вокруг неподвижной оси  $OZ$  – переносным движением (так как по исходным данным задачи  $\omega_e < 0$ , то на рис. 2.30 пластина  $ABC$  вращается вокруг оси  $OZ$  по ходу часовой стрелки).

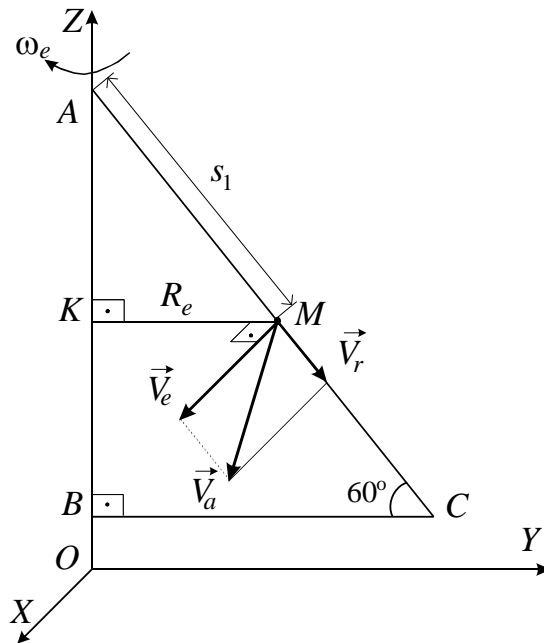


Рис. 2.30

Абсолютная скорость точки  $M$  вычисляется по теореме о сложении скоростей (2.55):

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Сначала определим кинематические характеристики относительного движения точки. Это движение задано естественным способом и представляет собой прямолинейное движение точки  $M$  по стороне  $AC$  пластины  $ABC$  по закону  $s = AM = 4t^3$ .

Найдем положение точки  $M$  на траектории относительного движения в момент времени  $t_1 = 0,5$  с. Для этого вычислим расстояние  $s_1 = AM|_{t_1=0,5} = 0,5$  м.

По формуле (2.11) определим относительную скорость точки  $M$  и ее численное значение:

$$V_r = \frac{ds}{dt} = 12t^2,$$

при  $t_1 = 0,5$  с  $V_r = 3$  м/с. Поскольку  $V_r > 0$ , то на рис. 2.30 вектор относительной скорости  $\vec{V}_r$  направим из точки  $M$  в сторону увеличения расстояния  $s = AM$ , т. е. из точки  $M$  к точке  $C$ .

Вычислим величину переносной скорости точки  $M$  по формуле (2.33) как скорость точки вращающейся пластины  $ABC$ :

$$V_e = \omega_e R_e = \omega_e s_1 \cos 60^\circ = 2,5 \text{ м/с}, \quad (2.61)$$

где  $R_e = MK$ , т. е. длина перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на ось вращения  $OZ$ , другими словами,  $R_e$  – радиус окружности, которую описывала бы точка  $M$  при переносном вращении вместе с пластиной  $ABC$  вокруг оси  $OZ$  в данный момент времени  $t_1 = 0,5$  с. На рис. 2.30 направим вектор  $\vec{V}_e$  из точки  $M$  перпендикулярно отрезку  $MK$  в направлении  $\omega_e$ , т. е. параллельно оси  $OX$ .

Геометрически складывая векторы  $\vec{V}_r$  и  $\vec{V}_e$ , определяем вектор абсолютной скорости  $\vec{V}_a$  точки  $M$ . Так как угол между ними  $\alpha = 90^\circ$ , то из (2.56) модуль абсолютной скорости находим по формуле:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 3,9 \text{ м/с.}$$

Для определения абсолютного ускорения точки  $M$  воспользуемся теоремой Кориолиса (2.57). Найдем векторы относительного, переносного ускорений и ускорения Кориолиса.

Так как относительное движение точки  $M$  задано естественным способом, то вектор относительного ускорения  $\vec{a}_r$  определяется по теореме Гюйгенса (2.12):

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$$

Однако, поскольку траекторией этого движения является прямая линия  $AC$  ( $\rho = \infty$ ), то в этом случае величина нормального ускорения в относительном движении  $a_r^n = V_r^2 / \rho = 0$  и  $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau$ .

Поэтому значение относительного ускорения точки  $M$  вычислим по формуле (2.13)

$$a_r = a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = 24 t,$$

и при  $t = 0,5$  с  $a_r = 12 \text{ м/с}^2 > 0$ . Так как в данный момент времени знаки числовых значений  $V_r$  и  $a_r$  одинаковые (оба положительные), то относительное движение точки ускоренное, и на рис. 2.31 вектор относительного ускорения  $\vec{a}_r$  направим так же как вектор относительной скорости  $\vec{V}_r$ , т. е. из точки  $M$  к точке  $C$ .

Переносное ускорение  $\vec{a}_e$  точки  $M$  определим как ускорение точки пластины  $ABC$ , равномерно вращающейся вокруг неподвижной оси  $OZ$ .

По формулам (2.34)–(2.36) находим

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau,$$

где

$$a_e^n = \omega_e^2 R_e = 25 \text{ м/с}^2,$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e R_e = 0,$$

так как по условию задачи переносное движение – равномерное вращение ( $\omega_e = \text{const}$ ) и поэтому  $\varepsilon_e = d\omega_e/dt = 0$ . Следовательно, переносное ускорение точки  $M$  равно нормальному переносному ускорению  $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n$ , и на рис. 2.31 направим этот вектор из точки  $M$  по отрезку (радиусу переносного вращения)  $MK$  к оси  $OZ$ .

Согласно (2.59) вычислим модуль ускорения Кориолиса

$$a_C = 2 |\vec{\omega}_e| |\vec{V}_r| \sin \alpha = 30 \text{ м/с}^2,$$

где  $\alpha = 30^\circ$  – угол между векторами  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{V}_r$  на рис. 2.31.

Направление вектора  $\vec{a}_C$  найдем по правилу Н. Е. Жуковского: спроецируем вектор относительной скорости  $\vec{V}_r$  точки  $M$  на плоскость

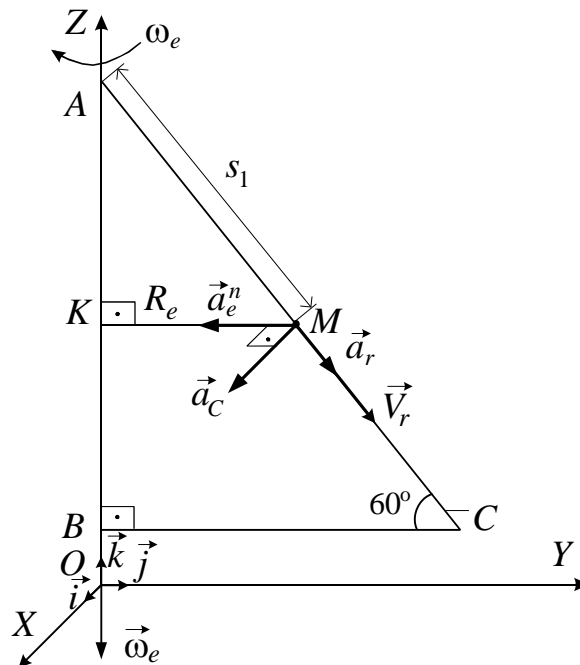


Рис. 2.31

$OXY$ , перпендикулярную вектору  $\vec{\omega}_e$ , а затем повернём эту проекцию в этой плоскости на  $90^\circ$  в направлении  $\omega_e$ , т. е. по ходу часовой стрелки.

На рис. 2.30 изобразим вектор ускорения Кориолиса  $\vec{a}_C$ , направив его из точки  $M$  параллельно оси  $OX$ .

Для определения абсолютного ускорения точки  $M$  запишем теорему Кориолиса (2.57) для данной задачи:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_C.$$

Поскольку направление вектора абсолютного ускорения  $\vec{a}_a$  точки  $M$  неизвестно, то в данном равенстве, используя формулу (2.6), разложим его на составляющие векторы по осям декартовой системы  $OXYZ$ :

$$a_{aX}\vec{i} + a_{aY}\vec{j} + a_{aZ}\vec{k} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_C. \quad (2.62)$$

Здесь  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты неподвижного трёхгранника  $OXYZ$  (рис. 2.31), а  $a_{aX}, a_{aY}$  и  $a_{aZ}$  – проекции вектора  $\vec{a}_a$  на эти оси.

Проецируя полученное векторное равенство (2.62) на оси  $OX, OY, OZ$  и подставляя модули найденных выше векторов ускорений, получаем:

$$\begin{aligned} a_{aX} &= a_C = 30 \text{ м/с}^2; \\ a_{aY} &= -a_e^n + a_r \cos 60^\circ = -19 \text{ м/с}^2; \\ a_{aZ} &= -a_r \sin 60^\circ = -10,4 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Тогда модуль абсолютного ускорения точки  $M$  найдем по формуле (2.60):

$$a_a = \sqrt{a_{aX}^2 + a_{aY}^2 + a_{aZ}^2} = \sqrt{30^2 + (-19)^2 + (-10,4)^2} \approx 37 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, при  $t = 0,5$  с модуль абсолютной скорости точки  $M$  равен  $V_a = 3,9$  м/с, а величина ее абсолютного ускорения  $a_a = 37$  м/с<sup>2</sup>.

*Ответ:*  $V_a = 3,9$  м/с,  $a_a = 37$  м/с<sup>2</sup>.

**Пример 2.7.** В кулисном механизме при вращении кривошипа  $OL$  вокруг оси  $O$ , перпендикулярной плоскости рисунка, ползун  $A$ , перемещающаяся вдоль кривошипа  $OL$ , приводит в движение стержень  $AB$ , движущийся в вертикальных направляющих  $K$  (рис. 2.32).

Определить абсолютную скорость  $\vec{V}_a$  точки  $A$  в функции от угловой скорости  $\omega$  и угла поворота  $\varphi$  кривошипа  $OL$ , если  $OK = d$ .

## Решение

Точка  $A$  ползуна совершает сложное движение, поскольку она одновременно участвует в двух движениях.

Свяжем с точкой  $O$  и направляющими  $K$  неподвижную систему координат  $OXY$  (рис. 2.32). Тогда движение точки  $A$  вместе с поступательно движущимся в вертикальных направляющих  $K$  стержнем  $AB$  является для неё абсолютным движением и поэтому вектор  $\vec{V}_a$  абсолютной скорости точки  $A$  направлен вдоль направляющих по вертикали (параллельно оси  $OY$ ).

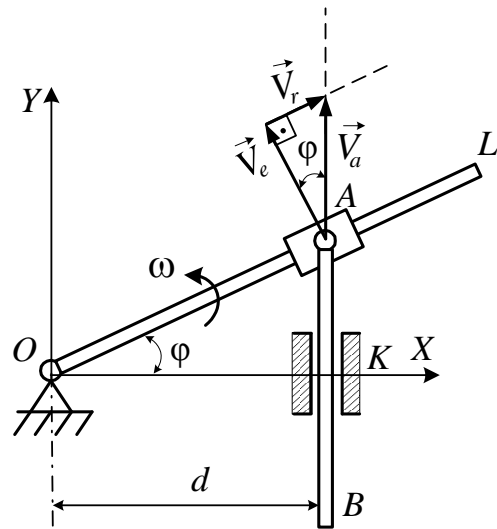


Рис. 2.32

Подвижную систему отсчета  $Oxy$  мысленно свяжем с вращающимся кривошипом  $OL$ , по которому движется ползун  $A$  (на рис. 2.32 не изображена).

Тогда скорость той точки вращающегося кривошипа  $OL$ , с которой в данном положении механизма совпадает точка  $A$ , является для нее переносной скоростью  $\vec{V}_e$ . Поэтому вектор  $\vec{V}_e$  направлен из точки  $A$  перпендикулярно кривошипу  $OL$  в направлении его вращения с угловой скоростью  $\omega$ .

Определим модуль переносной скорости точки  $A$  по формуле (2.33):  $V_e = \omega OA = \omega d / \cos \varphi$ .

Движение точки  $A$  вместе с поступательно движущимся по кривошипу  $OL$  ползуном является для неё относительным движением со скоростью  $\vec{V}_r$ , направленной вдоль кривошипа из точки  $A$  к точке  $L$ .

Для определения величины абсолютной скорости  $\vec{V}_a$  точки  $A$  воспользуемся теоремой о сложении скоростей (2.55):

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Для этого построим в точке  $A$  векторный треугольник скоростей.

На рис. 2.32 построение начинаем из точки  $A$  с известного по модулю и направлению вектора переносной скорости  $\vec{V}_e$ . Через его конец и начало проводим прямые, параллельные соответственно векторам  $\vec{V}_r$  и  $\vec{V}_a$ . Вектор, проведенный из точки  $A$  в точку пересечения этих прямых, является абсолютной скоростью  $\vec{V}_a$  точки  $A$ .



Полученный треугольник скоростей – прямоугольный, так как  $\vec{V}_e \perp \vec{V}_r$ . Угол между векторами  $\vec{V}_e$  и  $\vec{V}_a$  равен  $\varphi$ , как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами ( $\vec{V}_e \perp OA$ , а  $\vec{V}_a \perp OK$ ).

Определим модуль абсолютной скорости  $\vec{V}_a$  точки  $A$  как гипотенузу данного прямоугольного треугольника по известной величине катета  $V_e$  и углу  $\varphi$ :

$$V_a = \frac{V_e}{\cos \varphi} = \frac{\omega d}{\cos^2 \varphi}.$$

*Ответ:*  $V_a = \omega d / \cos^2 \varphi$ .

### *Вопросы для самопроверки*

1. Какие движения точки называются абсолютным, относительным и переносным?
2. Как найти абсолютную скорость точки при сложном движении?
3. В чем заключается теорема Кориолиса?
4. Как найти направление вектора ускорения Кориолиса?
5. В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?

## 3. ДИНАМИКА

### 3.1. Динамика материальной точки

*Динамикой* называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел под действием сил.

Первоначально при изучении динамики, для того чтобы отвлечься от учета влияния формы тела на его движение, рассмотрим динамику материальной точки. В ее основе лежат законы (*аксиомы динамики*), впервые наиболее полно сформулированные Исааком Ньютоном в его сочинении «Математические начала натуральной философии».

**I закон (принцип инерции):** *изолированная от внешнего воздействия материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения.* При изучении движения материальных тел важным обстоятельством является выбор системы отсчета. Согласно принципу инерции существует система отсчета, в которой материальная точка находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно, если на нее не действуют силы. Система отсчета, в которой выполняется принцип инерции, называется *инерциальной* (иногда ее условно называют абсолютно неподвижной).

**II закон (основной закон динамики):** сила, действующая на свободную материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально величине силы и имеет направление силы (рис. 3.1):

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (3.1)$$

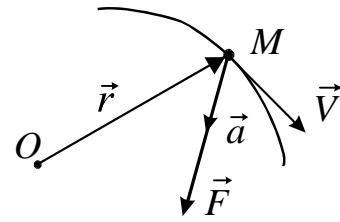


Рис. 3.1

где  $\vec{F}$  – вектор силы, действующей на точку;  $m$  – ее масса;  $\vec{a}$  – ускорение точки.

Уравнение (3.1) называется *основным уравнением динамики точки*. Масса  $m$  является, мерой инертности, т. е. способности точки «сопротивляться» изменению ее скорости. Масса представляет собой основную динамическую характеристику материальной точки.

Согласно закону (3.1) устанавливается соотношение между массой  $m$  тела и его весом  $P$ :

$$mg = P, \quad (3.2)$$

где  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

**III закон (закон равенства действия и противодействия):** две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

**IV закон (закон независимости действия сил):** если на материальную точку действует несколько сил, то ускорение точки складывается из тех ускорений, которые имела бы точка под действием каждой из этих сил в отдельности:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \quad (3.3)$$

где  $\vec{a}$  – полное ускорение точки;  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  – ускорения, сообщаемые точке силами  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  соответственно.

Из II и IV законов можно сделать вывод о том, что если на материальную точку действует  $n$  сил, то точка получает ускорение, пропорциональное геометрической сумме этих сил и направленное так же, как и их равнодействующая  $\vec{R}$  (для  $n=3$  см. рис. 3.2):

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{R}. \quad (3.4)$$

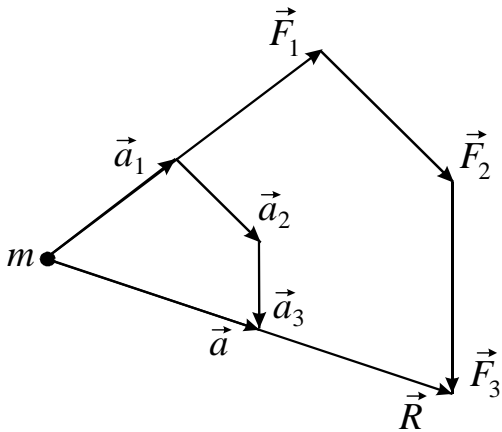


Рис. 3.2

Движение материальной точки под действием сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  будет таким же, как и при действии на нее их равнодействующей  $\vec{R}$ .

В динамике изучается движение свободных материальных тел. Поэтому если движущееся тело является несвободным, то, применяя принцип освобожденности от связей, его можно рассматривать как свободное, включив в состав действующих на него активных (заданных) силы и реакции отброшенных связей.

В этом случае для материальной точки справедливы указанные выше законы динамики. В частности уравнение (3.4) принимает вид  $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}$ , где  $\vec{F}, \vec{N}$  – соответственно равнодействующие активных сил и реакций связей, действующих на точку.

Получим дифференциальные уравнения движения материальной точки. Пусть положение материальной точки массой  $m$  в инерциальной системе отсчета задано радиус-вектором  $\vec{r}$  (рис. 3.1). В общем случае равнодействующая сил  $\vec{R}$ , действующих на точку, может зависеть от положения точки, ее скорости и времени, т. е.

$$\vec{R} = \vec{R}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right). \quad (3.5)$$

По определению (2.3) ускорение точки относительно неподвижного полюса  $O$ :

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}. \quad (3.6)$$

С учетом (3.5) и (3.6) основное уравнение динамики (3.1) можно записать в виде

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{R}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) называется *дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме*.

При решении задач обычно от векторного уравнения (3.7) переходят к скалярным дифференциальным уравнениям движения материальной точки. Для этого проецируют векторное уравнение (3.7) на оси выбранной системы координат.

В проекциях на декартовы оси уравнение (3.7) имеет вид

$$m\ddot{x} = R_x; \quad m\ddot{y} = R_y; \quad m\ddot{z} = R_z, \quad (3.8)$$

где  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  и  $R_x, R_y, R_z$  – проекции ускорения точки и равнодействующей сил, действующих на точку, соответственно на оси  $x, y, z$ . С учетом (3.4) возможна другая запись уравнений (3.8):

$$m\ddot{x} = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa x}; \quad m\ddot{y} = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa y}; \quad m\ddot{z} = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa z}. \quad (3.9)$$

Уравнения (3.8), (3.9) называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки в декартовых координатах*.

При криволинейном движении материальной точки удобно пользоваться системой осей естественного трехгранника: касательной, главной нормалью и бинормалью с ортами  $\vec{\tau}, \vec{n}$  и  $\vec{b}$  соответственно. Проецируя уравнение (3.4) на эти оси, получим

$$ma_{\tau} = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa\tau}; \quad ma_n = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa n}; \quad ma_b = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa b}, \quad (3.10)$$

где  $a_{\tau}, a_n, a_b$  – соответственно касательное, нормальное и бинормальное ускорения точки;  $F_{\kappa\tau}, F_{\kappa n}, F_{\kappa b}$  – проекции  $\kappa$ -й силы, действующей на точку, на касательную, главную нормаль и бинормаль.

Из кинематики известно, что

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad a_b = 0, \quad (3.11)$$

где  $V = \dot{s}$  – числовое значение скорости точки;  $s$  – криволинейная координата;  $\rho$  – радиус кривизны траектории точки в данный момент времени.

Подставив (3.11) в (3.10), получим

$$m \frac{dV}{dt} = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa\tau}; \quad m \frac{V^2}{\rho} = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa n}; \quad 0 = \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa b}. \quad (3.12)$$

Уравнения (3.12) являются дифференциальными уравнениями движения точки в системе естественных осей и называются *естественными уравнениями движения*. Ими удобно пользоваться для определения неизвестных реакций связей в случае криволинейного движения точки.

Рассматривая движение материальной точки под действием системы сил, динамика ставит целью решение двух основных задач.

**Первая задача динамики** заключается в определении силы по известному закону движения точки.

Для нахождения модуля и направления силы  $\vec{F}$  (равнодействующей  $\vec{R}$ ), действующей на материальную точку, необходимо определить проекции этой силы на оси декартовой системы координат или на оси естественного трехгранника (в зависимости от способа задания движения точки). Согласно уравнениям (3.8) и (3.12), эта задача сводится к нахождению проекций ускорения точки, которые определяются дифференцированием по времени соответствующих функций.

1. Пусть движение точки массой  $m$  задано координатным способом, т. е. известны зависимости координат точки от времени:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (3.13)$$

Для определения силы  $\vec{F}$ , под действием которой происходит движение, следует:

1) найти проекции ускорения точки на декартовы оси, продифференцировав дважды по времени уравнения движения (3.13):

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}; \quad (3.14)$$

2) вычислить по формулам (3.8) проекции силы  $\vec{F}$  на оси координат:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}; \quad (3.15)$$

3) найти модуль силы  $\vec{F}$ :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = m\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (3.16)$$

Направление силы  $\vec{F}$  относительно декартовых осей определяется с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\vec{F} \wedge \vec{i}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\vec{F} \wedge \vec{j}) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\vec{F} \wedge \vec{k}) = \frac{F_z}{F}.$$

2. При естественном способе задания движения, когда известна траектория точки и зависимость криволинейной координаты  $s$  от времени:

$$s = s(t), \quad (3.17)$$

для определения силы  $\vec{F}$ , под действием которой происходит движение, следует

1) найти числовые значения касательного и нормального ускорений точки, вычислив соответствующие производные по времени от закона движения (3.17):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho};$$

2) согласно (3.12) определить проекции силы  $\vec{F}$  на оси естественного трехгранника:

$$F_\tau = m\ddot{s}, \quad F_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad F_b = 0; \quad (3.18)$$

3) вычислить модуль силы  $\vec{F}$  по формуле

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m\sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2}}. \quad (3.19)$$

**Вторая (основная) задача динамики** заключается в определении уравнений движения точки, если известны действующие на нее силы.

При движении точки относительно декартовой системы координат согласно (3.8) дифференциальные уравнения ее движения имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = R_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t); \\ m\ddot{y} = R_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t); \\ m\ddot{z} = R_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{cases} \quad (3.20)$$

Для определения уравнений движения точки  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$  необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (3.20), применив методы высшей математики.

Если удастся это сделать, то получим общее решение системы (3.20):

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ y &= y(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_6$  – произвольные постоянные интегрирования.

Дифференцированием по времени решения (3.21) можно также определить проекции скорости точки на декартовые оси:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, \dots, C_6).\end{aligned}\tag{3.22}$$

Для того чтобы из многообразия решений системы (3.21) выбрать то, которое соответствует данной задаче, необходимо задать начальные условия движения, т. е. в начальный момент времени зафиксировать положение точки и проекции её скорости на декартовые оси:

$$\begin{aligned}t = 0; \quad x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0; \quad z(0) = z_0; \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0; \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Совокупность данных (3.23) называется *начальными условиями движения*.

Нахождение значений постоянных интегрирования  $C_1, C_2, \dots, C_6$  проводится подстановкой начальных условий движения (3.23) в совокупность выражений (3.21) и (3.22)

$$\left\{ \begin{aligned}x_0 &= x(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ y_0 &= y(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ z_0 &= z(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ \dot{x}_0 &= \dot{x}(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ \dot{y}_0 &= \dot{y}(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ \dot{z}_0 &= \dot{z}(0, C_1, C_2, \dots, C_6)\end{aligned}\right.\tag{3.24}$$

и решения полученной системы шести алгебраических уравнений относительно шести неизвестных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_6$ .

#### **Методические указания.**

**I.** Первую (прямую) задачу динамики несвободной материальной точки, в которой требуется определить активную силу или реакцию связи, рекомендуется решать в следующем порядке:

1) принять тело за материальную точку и изобразить ее на рисунке в произвольном положении;

2) приложить к точке активные силы и, применив принцип освобожденности от связей, – соответствующие реакции связей;

3) выбрать систему отсчета, приняв за одну из осей направление скорости точки;

4) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки в выбранной системе координат;

5) определить по данным задачи проекции ускорения точки на координатные оси;

6) из системы составленных уравнений определить искомую силу.

**II.** Вторую (основную) задачу динамики материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) принять тело за материальную точку и изобразить ее в произвольном положении;

2) выбрать систему координат, направив одну из осей по вектору скорости точки и записать начальные условия ее движения;

3) изобразить приложенные к точке активные силы и, отбросив связи, – реакции связей;

4) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекции на выбранные оси;

5) проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения и, используя начальные условия движения, определить постоянные интегрирования.

**Пример 3.1.** Определить угол отклонения  $\alpha$  от вертикали и величину силы давления  $\vec{Q}$  вагона на рельс подвесной дороги при движении вагона по закруглению радиуса  $R$  со скоростью  $V$ , если масса вагона равна  $m$ .

Решить задачу при следующих данных:  $m = 1500$  кг,  $R = 30$  м,  $V = 10$  м/с.

**Решение**

Данная задача относится к первой задаче динамики точки.

1. Примем вагон за материальную точку  $B$  и рассмотрим ее в произвольном положении на дуге окружности радиусом  $R$  (рис. 3.3).

2. Изобразим действующие на точку  $B$  силы: силу тяжести  $\vec{P}$  и нормальную реакцию  $\vec{N}$  рельса. Согласно III закона Ньютона искомая сила давления на рельс  $\vec{Q} = -\vec{N}$ .

Следовательно, в задаче требуется найти величину реакции  $\vec{N}$  рельса.

3. Поскольку точка  $B$  движется по криволинейной траектории, то свяжем с ней систему естественных осей  $B\tau nb$ , направив касательную  $B\tau$  по скорости  $\vec{V}$  точки, главную нормаль  $Bn$  – к центру  $C$  дуги окружности радиусом  $R$ , а бинормаль  $Bb$  – по

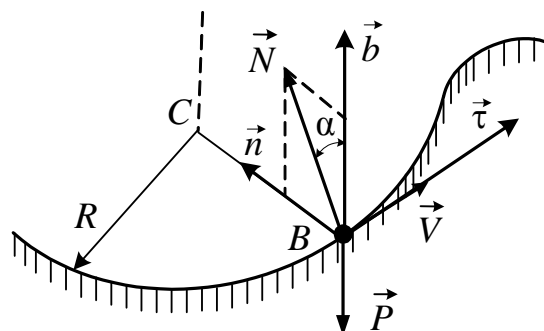


Рис. 3.3



вертикали перпендикулярно плоскости движения  $B\tau n$  (рис. 3.3).

4. Запишем естественные уравнения движения (3.12) для точки  $B$ :

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= N_\tau, \\ m \frac{V^2}{R} &= N_n, \\ 0 &= N_b - P, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $N_\tau, N_n, N_b$  – проекции реакции  $\vec{N}$  на касательную, главную нормаль и бинормаль соответственно.

5. По условию задачи вагон совершает равномерное криволинейное движение ( $V = \text{const}$ ), поэтому  $a_\tau = dV/dt = 0$ , и из первого уравнения (3.25) получаем, что  $N_\tau = 0$ . Следовательно, реакция  $\vec{N}$  рельса находится в нормальной к рельсу в точке  $B$  плоскости  $nBb$ .

Пусть вектор  $\vec{N}$  составляет с бинормалью  $Bb$  угол  $\alpha$  (рис. 3.3). Тогда  $N_n = N \sin \alpha$ ,  $N_b = N \cos \alpha$ , и так как  $P = mg$ , то второе и третье уравнения (3.25) запишем в виде

$$mV^2/R = N \sin \alpha, \quad 0 = N \cos \alpha - mg;$$

или

$$mV^2/R = N \sin \alpha, \quad mg = N \cos \alpha. \quad (3.26)$$

6. Система уравнений (3.26) содержит два неизвестных  $N$  и  $\alpha$ . Для определения  $N$  возведем оба уравнения (3.26) в квадрат и сложим, получим

$$m^2V^4/R^2 + m^2g^2 = N^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = N^2,$$

так как  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Отсюда, подставляя исходные данные задачи, находим модуль  $N$ :

$$N = \sqrt{m^2V^4/R^2 + m^2g^2} = m\sqrt{V^4/R^2 + g^2} = 15527 \text{ (Н)}.$$

Тогда величина силы давления вагона на рельс  $Q = N = 15527 \text{ Н}$ .

Из второго уравнения (3.26) определяем угол  $\alpha$

$$\cos \alpha = mg/N = 0,9267.$$

Следовательно,  $\alpha = 18^\circ 47'$ .

*Ответ:*  $Q = 15527 \text{ (Н)}$ ,  $\alpha = 18^\circ 47'$ .

**Пример 3.2.** Груз  $D$  массой  $m$  движется под действием силы  $\vec{F}$  вверх по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $\alpha$  (рис. 3.4). Найти уравнение движения груза  $D$ , если в начальный момент времени его скорость была равна  $V_0$ .

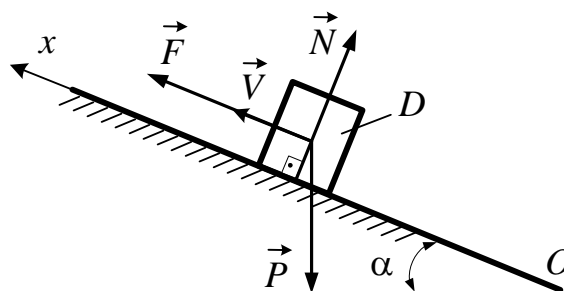


Рис. 3.4

Решить задачу при следующих данных:

$$m = 2 \text{ кг}, \quad F_x = 12 \cos(3t) \text{ Н}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad V_0 = 4 \text{ м/с}.$$

**Решение**

Для определения уравнения движения груза  $D$  решим вторую (основную) задачу динамики.

1. Примем груз  $D$  за материальную точку и изобразим ее в произвольном положении на наклонной плоскости (рис. 3.4).

2. Поскольку движение груза прямолинейное, то проведем ось  $Ox$  по его скорости  $\vec{V}$ , поместив начало отсчета  $O$  в начальный момент времени и запишем начальные условия движения (3.23) для данной задачи:

$$t = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = V_0 = 4 \text{ м/с}. \quad (3.27)$$

3. На груз действуют силы: сила тяжести  $\vec{P} = m\vec{g}$ , переменная сила  $\vec{F}$  и реакция  $\vec{N}$  гладкой плоскости (рис. 3.4).

4. Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось  $Ox$ :

$$ma_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}$$

или

$$ma_x = -P \sin \alpha + F_x.$$

Поскольку  $a_x = dV_x/dt$ , то с учетом исходных данных задачи это уравнение принимает вид

$$2 \frac{dV_x}{dt} = -9,8 + 12 \cos(3t). \quad (3.28)$$

5. Уравнение движения (3.28) для груза  $D$  является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Действительно, разделив (3.28) на 2 и одновременно умножив на  $dt$ , получим

$$dV_x = -4,9 dt + 6 \cos(3t) dt. \quad (3.29)$$

Вычисляя неопределенные интегралы от (3.29), определим скорость груза  $D$

$$V_x = -4,9t + 2\sin(3t) + C_1. \quad (3.30)$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  найдем, подставив в (3.30) начальные условия движения (3.27):

$$V_0 = 0 + 2\sin 0^\circ + C_1,$$

отсюда  $C_1 = V_0 = 4$  (м/с). Тогда скорость груза  $D$  в произвольный момент времени  $t$  определяется согласно (3.30) выражением

$$V_x = -4,9t + 2\sin(3t) + 4. \quad (3.31)$$

Поскольку  $V_x = dx/dt$ , то зависимость (3.31) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = 4 - 4,9t + 2\sin(3t).$$

Умножая это уравнение на  $dt$ , и вновь интегрируя, получим

$$x = 4t - 2,45t^2 - 0,67\cos(3t) + C_2. \quad (3.32)$$

Постоянную интегрирования  $C_2$  определим подстановкой начальных условий движения (3.27) в (3.32):

$$0 = -0,67\cos 0^\circ + C_2.$$

Отсюда  $C_2 = 0,67$ . Тогда уравнение движения груза  $D$  принимает вид

$$x = 4t - 2,45t^2 - 0,67[\cos(3t) - 1],$$

где  $x$  – в метрах,  $t$  – в секундах.

$$\text{Ответ: } x = 4t - 2,45t^2 - 0,67[\cos(3t) - 1] \text{ м.}$$

### *Вопросы для самопроверки*

1. Какая система отсчета называется инерциальной?
2. Какой вид имеет основной закон динамики для несвободной материальной точки?
2. В чем заключается первая задача динамики точки?
3. Как решается вторая (основная) задача динамики точки?

### 3.2. Введение в динамику механической системы

*Механической системой называется совокупность материальных точек (тел), движение которых изучается.*

Системы материальных точек бывают неизменяемые и изменяемые. Система называется *неизменяемой*, если расстояние между любыми двумя ее точками остается постоянным при движении (например, абсолютно твердое тело). Если расстояние между двумя точками системы изменяется при ее движении, то система называется *изменяемой*.

Для механической системы, состоящей из  $n$  материальных точек, действующие на нее активные (заданные) силы  $\vec{F}_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, n$ ) и реакции связей  $\vec{N}_\kappa$ , разделяются на *внутренние* и *внешние* силы. *Внутренними силами*  $\vec{F}_\kappa^i$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, n$ ) называются силы взаимодействия между точками (телами) системы. *Внешними силами*  $\vec{F}_\kappa^e$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, n$ ) называются силы, действующие на точки системы со стороны точек (тел), не входящих в состав рассматриваемой системы. Такое деление является условным и зависит от того, какая механическая система изучается.

Основные *свойства внутренних сил*.

1. *Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю:*

$$\vec{F}^i = \sum_{\kappa=1}^n \vec{F}_\kappa^i = 0. \quad (3.33)$$

2. *Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно произвольного центра или оси равняется нулю:*

$$\vec{M}_O^i = \sum_{\kappa=1}^n \vec{m}_O (\vec{F}_\kappa^i) = 0 \quad \text{и} \quad M_z^i = \sum_{\kappa=1}^n m_z (\vec{F}_\kappa^i) = 0. \quad (3.34)$$

Отметим, что согласно (3.33) и (3.34) внутренние силы образуют уравновешенную систему сил только для неизменяемой системы (абсолютно твердое тело). Для изменяемой системы внутренние силы, приложенные к разным материальным точкам (телам), могут привести к их взаимным перемещениям, и в этом случае система внутренних сил не будет уравновешенной.

Движение механической системы зависит от ее суммарной массы и распределения масс точек системы в пространстве. *Масса системы*  $M$  равна сумме масс всех точек (тел), входящих в систему:  $M = \sum_{\kappa=1}^n m_\kappa$ .

**Центром масс (центром инерции) механической системы** называется геометрическая точка  $C$ , положение которой определяется радиус-вектором:

$$\vec{r}_C = \sum_{\kappa=1}^n m_{\kappa} \vec{r}_{\kappa} / M. \quad (3.35)$$

Проецируя (3.35) на декартовы оси, получим декартовы координаты центра масс  $C$ :

$$x_C = \sum_{\kappa=1}^n m_{\kappa} x_{\kappa} / M, \quad y_C = \sum_{\kappa=1}^n m_{\kappa} y_{\kappa} / M, \quad z_C = \sum_{\kappa=1}^n m_{\kappa} z_{\kappa} / M. \quad (3.36)$$

В (3.35) и (3.36)  $\vec{r}_{\kappa}$  и  $x_{\kappa}, y_{\kappa}, z_{\kappa}$  – соответственно радиус-вектор и декартовы координаты  $\kappa$ -й материальной точки системы. При непрерывном распределении массы системы (сплошное абсолютно твердое тело) суммы в формулах (3.35), (3.36) переходят в соответствующие интегралы.

В однородном поле сил тяжести, когда размеры частиц твердого тела много меньше радиуса Земли, *центр масс твердого тела совпадает с его центром тяжести*. Действительно, если умножить числитель и знаменатель правой части (3.35) на величину ускорения силы тяжести  $g$ , то получим формулу

$$\vec{r}_C = \sum_{\kappa=1}^n m_{\kappa} g \vec{r}_{\kappa} / Mg = \sum_{\kappa=1}^n p_{\kappa} \vec{r}_{\kappa} / P,$$

которая определяет положение центра тяжести твердого тела. Здесь  $p_{\kappa} = m_{\kappa} g$  и  $P = Mg$  – вес  $\kappa$ -й точки и вес всего тела соответственно.

В отличие от центра тяжести понятие о центре масс сохраняет свой смысл для твердого тела, находящегося в произвольном силовом поле. Следовательно, центр масс как характеристика распределения массы в пространстве имеет смысл для любой механической системы.

Кроме координат центра масс (3.36) суммарными характеристиками распределения масс в пространстве являются **осевые моменты инерции**.

*Моментом инерции системы (тела) относительно оси  $z$  (осевым моментом инерции) называется положительная величина, равная сумме произведений масс точек системы (тела) на квадрат их расстояний до этой оси:*

$$I_z = \sum_{\kappa=1}^n m_{\kappa} h_{\kappa z}^2. \quad (3.37)$$

Здесь  $h_{\kappa z}$  – длина перпендикуляра, опущенного из  $\kappa$ -й точки с массой  $m_{\kappa}$  на ось  $z$ . В системе СИ единицей измерения осевого момента инерции является  $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии  $h$  от оси,  $I_z = m h^2$ . Для тел сложной формы момент инерции  $I_z$  можно записать в виде

$$I_z = M \rho_z^2,$$

где  $\rho_z$  – положительная величина, называемая *радиусом инерции тела относительно оси z*;  $M$  – масса тела.

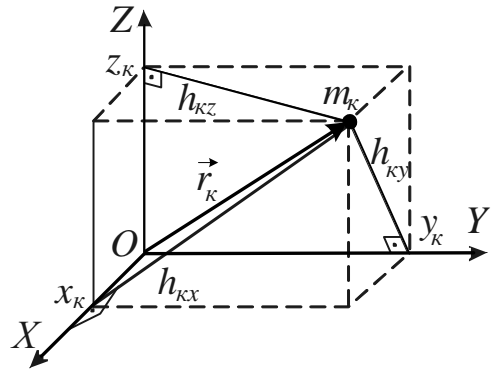


Рис. 3.5

При вычислении осевых моментов инерции тела (системы) относительно декартовых осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  квадраты расстояний от точек до осей следует выразить через их координаты: для  $k$ -й точки системы массой  $m_k$  с координатами  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$ :  $h_{kx}^2 = y_k^2 + z_k^2$ ,  $h_{ky}^2 = x_k^2 + z_k^2$ ,  $h_{kz}^2 = x_k^2 + y_k^2$  (рис. 3.5). Тогда согласно определению (3.37) получим

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{k=1}^n m_k h_{kx}^2 = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2); \\ I_y &= \sum_{k=1}^n m_k h_{ky}^2 = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2); \\ I_z &= \sum_{k=1}^n m_k h_{kz}^2 = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{aligned} \quad (3.38)$$

В случае сплошного твердого тела объема  $V$ , разбивая его на элементарные объемы с массой  $\Delta m_k$  и устремляя их к нулю находим, например,  $I_z$ :

$$I_z = \lim_{\Delta m_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta m_k (x_k^2 + y_k^2) = \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm = \int_{(V)} \gamma (x^2 + y^2) dV, \quad (3.39)$$

где  $dm = \gamma dV$ ; а  $\gamma$  – объемная плотность вещества.

Для сплошных однородных тел ( $\gamma = \text{const}$ ) формулы (3.38) с учетом (3.39) принимают более простой вид

$$I_x = \gamma \int_{(V)} (y^2 + z^2) dV; \quad I_y = \gamma \int_{(V)} (x^2 + z^2) dV; \quad I_z = \gamma \int_{(V)} (x^2 + y^2) dV. \quad (3.40)$$

Приведем формулы моментов инерции некоторых однородных тел.

1. Для тонкого круглого однородного кольца массой  $M$  радиусом  $R$  момент инерции относительно оси  $Cz$ , перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр  $C$  (рис. 3.6, а),

$$I_{Cz} = MR^2. \quad (3.41)$$

Такой же результат можно получить для момента инерции тонкой однородной цилиндрической оболочки массой  $M$  и радиусом  $R$  относительно ее центральной оси симметрии.

2. Для круглой однородной пластины массой  $M$  и радиусом  $R$  момент инерции относительно центральной оси  $Cz$ , перпендикулярной пластине (рис. 3.6, б), определяется по формуле

$$I_{Cz} = \frac{MR^2}{2}. \quad (3.42)$$

Аналогичный результат можно получить при вычислении момента инерции однородного цилиндра массой  $M$  и радиусом  $R$  относительно центральной оси симметрии.

3. Для однородного прямоугольного параллелепипеда массой  $M$  со сторонами  $l$ ,  $a$ ,  $b$  (рис. 3.6, в) моменты инерции относительно осей  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$ , проходящих через центр масс  $C$  и параллельных его ребрам, вычисляются по формулам

$$I_{Cx} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2); \quad I_{Cy} = \frac{M}{12}(l^2 + b^2); \quad I_{Cz} = \frac{M}{12}(l^2 + a^2). \quad (3.43)$$

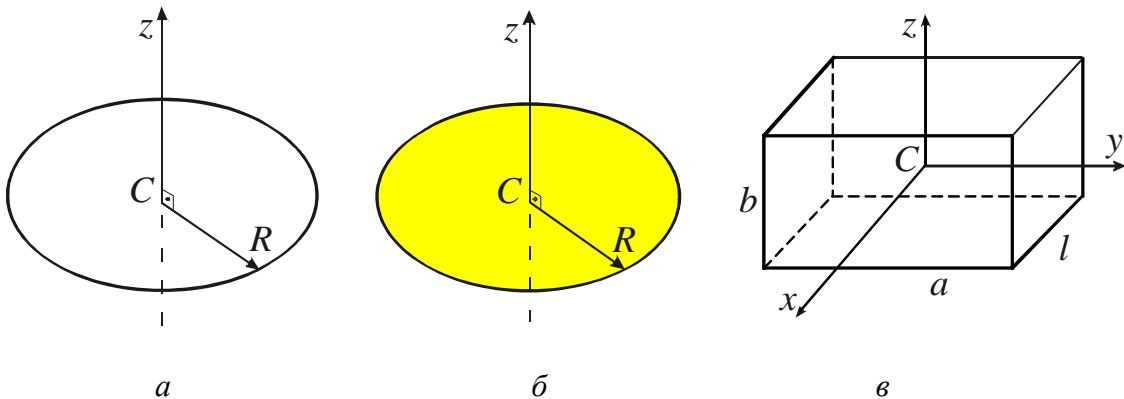


Рис. 3.6

4. Чтобы получить момент инерции *тонкого однородного стержня* массой  $M$ , длиной  $l$  относительно оси  $Cz$ , перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс  $C$ , достаточно в третьей формуле (3.43) положить  $a = 0$ :

$$I_{Cz} = \frac{M l^2}{12}.$$

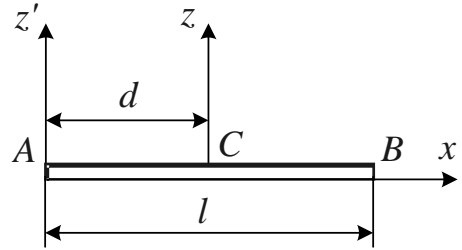


Рис. 3.7

(3.44)

Иногда для определения моментов инерции твердых однородных тел удобно пользоваться **теоремой Гюйгенса – Штейнера**: *момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс  $C$  тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями*:

$$I_{Az'} = I_{Cz} + Md^2,$$

(3.45)

где  $d$  – расстояние между осями  $Az'$  и  $Cz$  (рис. 3.7).

Получим дифференциальные уравнения движения механической системы. Рассмотрим несвободную систему, состоящую из  $n$  материальных точек. Воспользуемся принципом освобождения от связей и заменим их действие реакциями связей  $\vec{N}_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, n$ ). Для произвольной  $\kappa$ -й точки системы с массой  $m_\kappa$  обозначим через  $\vec{F}_\kappa^e$  равнодействующую всех внешних сил (активных и реакций связей), действующих на точку:  $\vec{F}_\kappa^e = \vec{F}_\kappa^a + \vec{N}_\kappa$ ; а через  $\vec{F}_\kappa^i$  – равнодействующую приложенных к ней внутренних сил. Запишем для каждой точки системы основной закон динамики в форме (3.7):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i; \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i; \\ \dots\dots\dots \\ m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \end{cases} \quad (3.46)$$

Уравнения (3.46) называются *дифференциальными уравнениями движения механической системы в векторной форме*.



В проекциях на оси неподвижной декартовой системы координат уравнения (3.46) принимают вид

$$\begin{cases} m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \\ m_k \ddot{y}_k = \vec{F}_{ky}^e + \vec{F}_{ky}^i, \\ m_k \ddot{z}_k = \vec{F}_{kz}^e + \vec{F}_{kz}^i. \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.47)$$

В общем случае силы, входящие в скалярные уравнения (3.47), могут быть функциями времени, координат и скоростей точек системы.

**Основная задача динамики системы** заключается в определении закона движения каждой точки системы и нахождении реакций наложенных на нее связей. Для ее решения требуется проинтегрировать систему  $3n$  дифференциальных уравнений (3.47) и найти  $6n$  постоянных интегрирования по начальным условиям движения (задача Коши).

*Основными недостатками* такого метода изучения движения механической системы являются:

1. Число уравнений системы (3.47) зависит от количества  $n$  материальных точек, входящих в механическую систему. Найти общее решение уравнений (3.47) в аналитическом виде удастся лишь в частных случаях, когда число точек системы мало. Если  $n$  велико, то для решения задачи приходится использовать численные методы.

2. Правые части уравнений (3.47) содержат внутренние силы и реакции связей, аналитические выражения для которых, как правило, не известны.

Однако при практическом исследовании движения часто нет необходимости решать уравнения (3.46) и (3.47), а достаточно знать изменение со временем некоторых величин, общих для всей механической системы. Такие величины, являющиеся в общем случае функциями координат, скоростей, времени и остающиеся постоянными при движении системы, называются *первыми интегралами уравнений движения* (3.46).

Знание первых интегралов позволяет получить существенные сведения относительно физической картины изучаемого движения, и эти сведения в ряде случаев могут иметь даже больший интерес, нежели точное решение системы (3.46).

Первые интегралы можно найти из так называемых *общих теорем динамики*, когда выполняются дополнительные условия для действующих сил (см. [1-3]). Кроме того, общие теоремы динамики, являющиеся следствиями уравнений (3.46), дают сведения о движении механической системы в целом.

**Пример 3.3.** Определить момент инерции тонкого стержня  $AB$  массой  $M$  и длиной  $l$  относительно оси  $Az'$ , перпендикулярной стержню и проходящей через его конец  $A$  (рис. 3.7).

**Решение**

Воспользуемся теоремой Гюйгенса – Штейнера (3.45) при  $d = l/2$ :

$$I_{Az'} = I_{Cz} + M(l/2)^2.$$

Из (3.44)  $I_{Cz} = M l^2 / 12$ , тогда

$$I_{Az_1} = M l^2 / 12 + M l^2 / 4 = M l^2 / 3. \quad (3.48)$$

*Ответ:*  $I_{Az_1} = M l^2 / 3$ .

*Вопросы для самопроверки*

1. Что называется центром масс механической системы?
2. Какие свойства внутренних сил вам известны?
3. В каком случае момент инерции материальной точки относительно оси равен нулю?
4. Как должна быть расположена ось, для которой момент инерции тела принимает наименьшее значение?

### 3.3 Работа силы. Мощность

Рассмотрим систему материальных точек  $B_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, n$ ), движущуюся относительно инерциальной системы отсчета  $Oxyz$  под действием сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  соответственно. Пусть  $m_\kappa$  – масса,  $\vec{r}_\kappa$  – радиус-вектор точки  $B_\kappa$  в системе координат  $Oxyz$ ,  $\vec{F}_\kappa$  – равнодействующая всех сил (внутренних и внешних), приложенных к этой точке,  $d\vec{r}_\kappa$  – элементарное перемещение точки  $B_\kappa$  вдоль ее траектории за время  $dt$  (рис. 3.8).

*Элементарной работой силы  $\vec{F}_\kappa$  называется скалярное произведение силы на вектор элементарного перемещения  $d\vec{r}_\kappa$  точки ее приложения:*

$$dA_\kappa = \vec{F}_\kappa \cdot d\vec{r}_\kappa, \quad (3.49)$$

или

$$dA_\kappa = F_\kappa ds_\kappa \cos \alpha_\kappa, \quad (3.50)$$

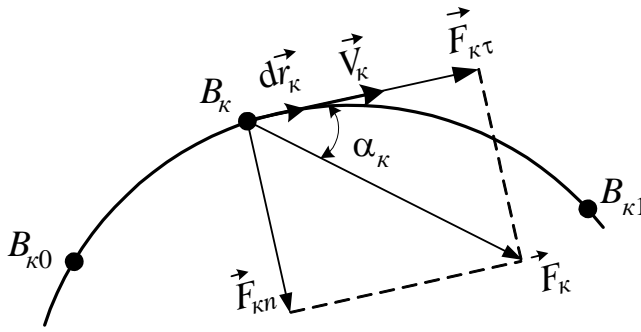


Рис. 3.8

Здесь  $F_k$  – модуль силы  $\vec{F}_k$ ,  $ds_k = |d\vec{r}_k|$  – модуль элементарного перемещения точки,  $\alpha_k$  – угол между векторами  $\vec{F}_k$  и  $d\vec{r}_k$ . Так как  $F_k \cos \alpha_k = F_{k\tau}$ , то (3.50) принимает вид:  $dA_k = F_{k\tau} ds_k$ .

Следовательно, *элементарную работу совершает касательная составляющая силы*  $F_{k\tau} = m_k a_{k\tau} = m_k dV_k / dt$ .

Знак элементарной работы определяется знаком  $\cos \alpha_k$ :

- 1) если  $0 \leq \alpha_k < \frac{\pi}{2}$ ,  $F_{k\tau} > 0$ ,  $dA_k > 0$  – сила  $\vec{F}_k$  ускоряет движение точки;
- 2) если  $\frac{\pi}{2} < \alpha_k \leq \pi$ ,  $F_{k\tau} < 0$ ,  $dA_k < 0$  – сила  $\vec{F}_k$  замедляет движение точки;
- 3) если  $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$ ,  $F_{k\tau} = 0$ ,  $dA_k = 0$  – точка движется равномерно.

Следовательно, *если сила перпендикулярна элементарному перемещению, то ее элементарная работа равна нулю.*

В декартовой системе координат поскольку

$$\vec{F}_k = F_{kx} \vec{i} + F_{ky} \vec{j} + F_{kz} \vec{k},$$

$$d\vec{r}_k = dx_k \vec{i} + dy_k \vec{j} + dz_k \vec{k},$$

то в силу ортогональности ортов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  выражение (3.49) принимает вид

$$dA_k = F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k, \quad (3.51)$$

где  $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}$  и  $dx_k, dy_k, dz_k$  – проекции векторов  $\vec{F}_k$  и  $d\vec{r}_k$  на оси  $x, y, z$  соответственно

Пусть материальная точка  $B_k$  совершает конечное перемещение из начального положения  $B_{k0}$  в положение  $B_{k1}$ , описывая дугу  $\cup B_{k0} B_{k1}$  (рис. 3.8). Работа силы  $\vec{F}_k$  на конечном перемещении  $\cup B_{k0} B_{k1}$  равна криволинейному интегралу, взятому от элементарной работы вдоль этого перемещения:

$$A_{B_{k0} B_{k1}} = \int_{B_{k0}}^{B_{k1}} dA_k = \int_{B_{k0}}^{B_{k1}} \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k = \int_{B_{k0}}^{B_{k1}} F_{k\tau} ds_k \quad (3.52)$$

или в декартовых координатах

$$A_{B_{\kappa 0} B_{\kappa 1}} = \int_{B_{\kappa 0}}^{B_{\kappa 1}} (F_{\kappa x} dx_{\kappa} + F_{\kappa y} dy_{\kappa} + F_{\kappa z} dz_{\kappa}). \quad (3.53)$$

В системе СИ единицей измерения работы является 1 джоуль (1 Дж = 1 Н·м).

*Мощностью*  $W$  называется величина, определяющая работу, совершаемую силой  $\vec{F}$  в единицу времени:

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_{\tau} ds}{dt} = F_{\tau} V. \quad (3.54)$$

*Мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость.* Если работа совершается равномерно, то мощность

$$W = \frac{A}{t_1}, \quad (3.55)$$

где  $t_1$  – время в течение которого, совершена работа  $A$ . Единицей измерения мощности в системе СИ является ватт (1 Вт = 1 Дж/с). Из (3.55) следует, что  $A = W t_1$ , и работу, произведенную машиной, измеряют в киловатт-часах (1кВ ч = 3,6 10<sup>6</sup> Дж).

Часто для вычисления работы сил удобно использовать готовые формулы. Приведем некоторые из них.

**Работа постоянной силы  $\vec{F} = \text{const}$  на прямолинейном перемещении  $B_0 B_1$ .** (рис. 3.9) определяется по формуле:

$$A_{B_0 B_1} = F \cos \alpha s_1, \quad (3.56)$$

где  $s_1$  – расстояние между точками  $B_0$  и  $B_1$ .

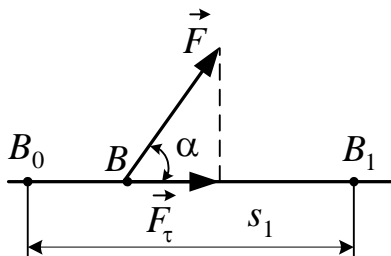


Рис. 3.9

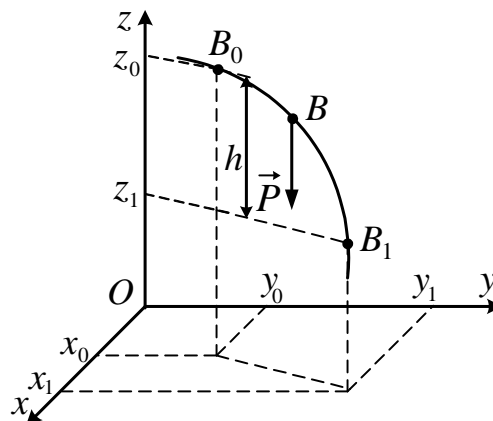


Рис. 3.10

**Работа силы тяжести** равна взятому со знаком «+» или «-» произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения:

$$A(\vec{P}) = P(z_0 - z_1) = \pm Ph. \quad (3.57)$$

Работа положительна, если точка  $B$  приложения силы  $\vec{P}$  опускается, и отрицательна, если точка  $B$  поднимается над земной поверхностью (рис. 3.10).

**Работа силы упругости** равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начальной и конечной деформаций (удлинений или сжатий) пружины:

$$A(\vec{F}_{\text{упр}}) = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2),$$

где  $c$  – жесткость пружины;  $\lambda_0$  – начальная деформация (удлинение или сжатие) пружины;  $\lambda_1$  – деформация пружины в конечном положении.

Работа будет положительной, если  $\lambda_0 > \lambda_1$ , т. е. когда деформация пружины после совершения работы уменьшается, и работа будет отрицательная, если  $\lambda_0 < \lambda_1$ , т. е. когда за счет работы деформация пружины увеличивается.

**Работа реакции шероховатой поверхности.** При движении точки  $B$  по шероховатой поверхности или кривой из положения  $B_0$  в  $B_1$  (рис.3.11) реакция шероховатой поверхности заменяется двумя составляющими: нормальной реакцией  $\vec{N}$  поверхности и силой трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , модуль которой  $F_{\text{тр}} = fN$ , где  $f$  – коэффициент трения скольжения.

*Работа нормальной реакции  $\vec{N}$  всегда равна нулю, так как из (3.50)*

$$dA(N) = N ds \cos 90^\circ = 0. \quad (3.58)$$

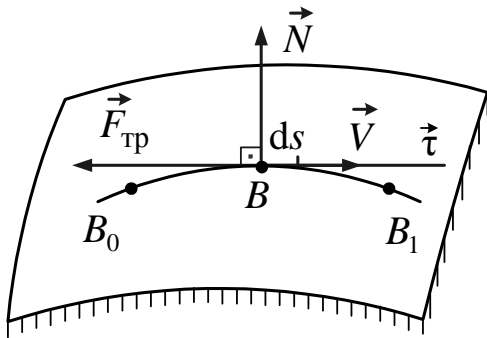


Рис. 3.11

*Работа силы трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  при движении материальной точки по шероховатой поверхности из положения  $B_0$  в положение  $B_1$  (рис. 3.11) определяется по формуле*

$$A(\vec{F}_{\text{тр}}) = \int_{B_0}^{B_1} F_{\text{тр}} ds = - \int_{B_0}^{B_1} fN ds.$$

Если величина силы трения постоянная:  $F_{\text{тр}} = fN = \text{const}$ , то ее работа

$$A(\vec{F}_{\text{тр}}) = -fNs_1, \quad (3.59)$$

где  $s_1$  – длина дуги кривой  $B_0B_1$ , по которой перемещается точка  $B$ . Следовательно, работа силы трения всегда отрицательна.

**Работа силы, приложенной к вращающемуся телу.** Элементарная работа силы  $\vec{F}$ , приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота тела (рис. 3.12), т. е.

$$dA = \pm M_z d\varphi, \quad (3.60)$$

где  $M_z = F_\tau h$  – момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$ ;  $d\varphi$  – элементарный угол поворота тела. Аналогично по формуле (3.60) вычисляется элементарная работа пары сил с моментом  $M_z$  относительно оси вращения  $Oz$ .

В (3.60) элементарная работа положительна, если  $M_z$  – вращающий момент, т. е.  $M_z$  и  $d\varphi$  направлены в одну сторону; работа – отрицательна, если  $M_z$  – момент сопротивления вращению, т. е.  $M_z$  и  $d\varphi$  направлены в противоположные стороны.

Работа силы (пары сил) при повороте тела на угол  $\varphi_1$  определяется по формуле

$$A = \pm \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi.$$

Если момент силы относительно оси вращения является постоянной величиной  $M_z = \text{const}$ , то работа определяется выражением

$$A = \pm M_z \varphi_1. \quad (3.61)$$

Вычислим теперь мощность  $W$  силы, вращающей тело вокруг неподвижной оси. С учетом (3.54) получим

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega.$$

Следовательно, при действии силы на вращающееся тело мощность равна произведению вращающего момента на угловую скорость тела.

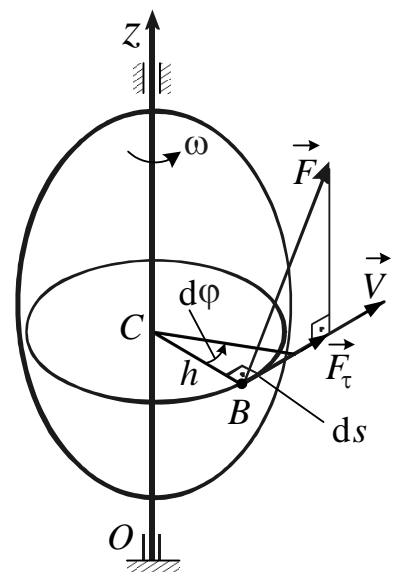


Рис. 3.12

**Работа системы сил.** Если на материальную точку  $B_k$  действует система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , то полная работа определяется как алгебраическая сумма работ каждой из сил в отдельности:

$$A = \sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa} = \sum_{\kappa=1}^n \int_{B_{\kappa 0}}^{B_{\kappa 1}} (F_{\kappa x} dx + F_{\kappa y} dy + F_{\kappa z} dz). \quad (3.62)$$

### 3.4 Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Основной динамической характеристикой материальной точки и механической системы является их *кинетическая энергия*, как мера механического движения, приводящая к преобразованию механической энергии в другие виды энергий (потенциальную, тепловую, и т. д.).

*Кинетическая энергия материальной точки равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:*

$$T = \frac{mV^2}{2}. \quad (3.63)$$

В системе СИ кинетическая энергия измеряется в джоулях:  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ .

*Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех материальных точек системы:*

$$T = \sum_{\kappa=1}^n T_{\kappa} = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^n m_{\kappa} V_{\kappa}^2. \quad (3.64)$$

Кинетическая энергия положительна, за исключением случая, когда скорости всех точек системы равны нулю.

При вычислении кинетической энергии часто пользуются **теоремой Кёнига**: *кинетическая энергия системы в абсолютном движении равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс:*

$$T = \frac{M V_C^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^n m_{\kappa} V_{\kappa r}^2, \quad (3.65)$$

где  $\vec{V}_C$  – скорость центра масс системы,  $\vec{V}_{\kappa r}$  – относительная скорость  $\kappa$ -й материальной точки по отношению к центру масс  $C$  системы.

Вычислим кинетическую энергию твердого тела при различных видах его движения.

При **поступательном движении твердого тела** все его точки движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс:  $V_k = V_C$ . Поэтому из (3.64) получаем

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n m_k \right) V_C^2 = \frac{M V_C^2}{2}. \quad (3.66)$$

Следовательно, *кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости его центра масс.*

При **вращении тела вокруг неподвижной оси  $Oz$**  (рис. 3.13) скорость любой его  $k$ -й точки  $V_k = \omega h_{kz}$ , где  $\omega$  – угловая скорость тела,  $h_{kz}$  – кратчайшее расстояние от  $k$ -й точки до оси вращения  $Oz$ . С учетом этого формула (3.64) принимает вид

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n m_k h_{kz}^2 \right) \omega^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}, \quad (3.67)$$

где согласно (3.37)  $I_z$  – момент инерции тела относительно оси  $Oz$ .

Следовательно, *кинетическая энергия тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси равна половине произведения осевого момента инерции на квадрат угловой скорости.*

При **плоскопараллельном движении твердого тела** примем его центр масс  $C$  за полюс. Тогда согласно (3.65) кинетическая энергия тела складывается из кинетической энергии поступательного движения тела с центром масс  $C$  и кинетической энергии вращательного движения вокруг оси  $Cz$ , проходящей через центр масс  $C$  перпендикулярно плоскости движения тела:

$$T_{\text{пл}} = \frac{M V_C^2}{2} + \frac{I_{Cz} \omega^2}{2}. \quad (3.68)$$

где  $I_{Cz}$  – момент инерции тела относительно оси  $Cz$ , проходящей через центр масс  $C$  перпендикулярно плоскости его движения.

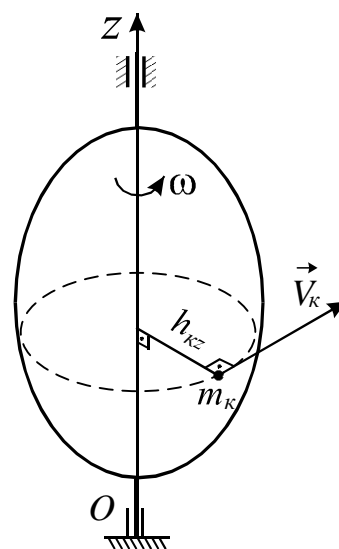


Рис. 3.13



При плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела складывается из кинетической энергии поступательного движения тела с центром масс и кинетической энергии вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Если механическая система состоит из нескольких твердых тел, то следует вычислить кинетическую энергию каждого тела, а затем полученные значения сложить.

Для составления дифференциальных уравнений движения, а также для нахождения ускорений точек или тел следует применять **теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме: дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему**, т. е.

$$dT = \sum_{\kappa=1}^n dA_{\kappa}^e + \sum_{\kappa=1}^n dA_{\kappa}^i, \quad (3.69)$$

где  $dA_{\kappa}^e$  и  $dA_{\kappa}^i$  – элементарные работы соответственно внешних и внутренних сил, действующих на  $\kappa$ -ю точку системы.

Если обе части равенства (3.69) проинтегрировать в пределах, соответствующих перемещению системы из начального положения с кинетической энергией  $T_0$  в конечное положение, в котором кинетическая энергия равна  $T_1$ , то получим уравнение

$$T_1 - T_0 = \sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa}^e + \sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa}^i, \quad (3.70)$$

выражающее **теорему об изменении кинетической энергии системы в конечной форме: изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе на этом перемещении**.

В случае неизменяемой системы (абсолютно твердое тело)  $\sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa}^i = 0$ .

Сумма работ внутренних сил натяжения гибкой нерастяжимой нити, связывающей тела системы, также равна нулю. В этих случаях выражение (3.70) принимает более простой вид:

$$T_1 - T_0 = \sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa}^e, \quad (3.71)$$

Следовательно, для неизменяемой системы в правую часть (3.71) входит только работа внешних сил, действующих на систему. Данное обстоятельство позволяет исключить из рассмотрения внутренние силы, которые обычно неизвестны, что значительно упрощает решение

практических задач на определение скоростей точек или угловых скоростей тел механической системы при ее перемещении из начального в конечное положение.

Для одной материальной точки теорему (3.70) можно записать в виде

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum_{k=1}^n A_k, \quad (3.72)$$

где  $V_0$  и  $V_1$  – величины скорости точки соответственно в начальном и конечном ее положениях.

Теоремой об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме удобно пользоваться для определения линейных скоростей точек и угловых скоростей тел по заданному перемещению механической системы.

**Методические указания.** Решение задач при определении линейных или угловых скоростей тел механической системы, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями (тросами), с помощью теоремы (3.71) рекомендуется проводить в следующем порядке:

- 1) выделить тела, входящие в систему;
- 2) определить кинетическую энергию системы в начальном и конечном ее положениях;
- 3) изобразить на рисунке все действующие на систему внешние силы и вычислить сумму работ этих сил на заданном перемещении тел системы;
- 4) используя результаты вычислений п. 2 и п. 3, записать теорему об изменении кинетической энергии системы (3.71) для данной задачи и определить искомую величину.

**Пример 3.4.** Тяжелый однородный стержень  $OA$  длиной  $l$  подвешен в точке  $O$  на цилиндрическом шарнире (рис. 3.14).

Определить, какую начальную угловую скорость  $\omega_0$  надо сообщить стержню в вертикальном положении I, чтобы он отклонился до горизонтального положения II; трением в шарнире  $O$  пренебречь.

Решение

1. Механическая система состоит одного абсолютно твердого стержня  $OA$ . Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии (3.70):

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i.$$

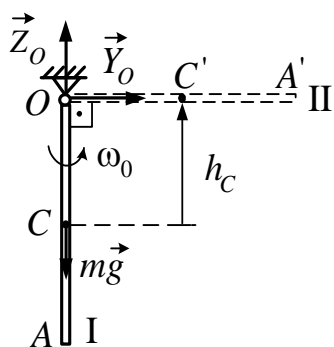


Рис. 3.14

Так как стержень  $OA$  является неизменяемой системой материальных точек, то для него сумма работ внутренних сил равна нулю, т. е.  $\sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa}^i = 0$ .

Тогда теорема принимает вид (3.71):

$$T_1 - T_0 = \sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa}^e.$$

2. Вычислим кинетическую энергию стержня  $OA$  в конечном II и начальном I положениях. Поскольку в конечном положении II стержень остановится, то  $T_1 = 0$ . В начальном положении I выражение для кинетической энергии стержня  $OA$ , вращающегося вокруг неподвижной оси  $O$ , определим по формуле (3.67):

$$T_0 = \frac{I_O \omega_0^2}{2} = \frac{ml^2 \omega_0^2}{6}.$$

Здесь  $m$  – масса стержня  $OA$ , согласно (3.48)  $I_O = ml^2/3$  – момент инерции стержня относительно оси вращения  $O$ . Тогда левая часть теоремы (3.71) принимает вид

$$T_1 - T_0 = -\frac{ml^2 \omega_0^2}{6}. \quad (3.73)$$

3. На стержень действуют внешние силы: активная сила тяжести  $m\vec{g}$ , приложенная в центре масс  $C$  однородного стержня, и  $\vec{Y}_O, \vec{Z}_O$  – реакции цилиндрического шарнира  $O$ .

Вычислим сумму работ внешних сил при перемещении стержня  $OA$  из вертикального положения I в горизонтальное положение II (рис. 3.14). Согласно (3.57) работа силы тяжести

$$A(m\vec{g}) = -mg h_C = -\frac{mgl}{2};$$

работа реакций шарнира  $O$   $A(\vec{Y}_O) = A(\vec{Z}_O) = 0$ , так как точка  $O$  приложения реакций  $\vec{Y}_O$  и  $\vec{Z}_O$  при повороте стержня остается неподвижной. Тогда

$$\sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa}^e = -\frac{mgl}{2}. \quad (3.74)$$

5. С учетом (3.73) и (3.74) теорема (3.71) для данной задачи имеет вид

$$-\frac{ml^2 \omega_0^2}{6} = -\frac{mgl}{2}.$$

Отсюда находим искомую начальную угловую скорость стержня  $OA$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Ответ:  $\omega_0 = \sqrt{3g/l}$ .

### Вопросы для самопроверки

1. Когда элементарная работа силы равна нулю?
2. Как определяется работа силы тяжести?
3. Как вычисляется работа постоянной силы трения скольжения?
4. Как определяется знак работы постоянного момента?
5. Чему равна сумма работ внутренних сил для абсолютно твердого тела при любом его перемещении?
6. Как вычисляется кинетическая энергия при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях абсолютно твердого тела?

## 3.5. Принцип Д'Аламбера

Для несвободной материальной точки массой  $m$ , движущуюся относительно инерциальной системы отсчета с ускорением  $\vec{a}$ , основной закон динамики имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{N}, \quad (3.75)$$

где  $\vec{F}^a$  и  $\vec{N}$  – соответственно равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к точке.

Введем силу инерции для материальной точки:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}. \quad (3.76)$$

Отрицательный знак в (3.76) означает, что сила инерции  $\vec{\Phi}$  направляется противоположно вектору ускорения  $\vec{a}$  точки. С учетом (3.76) основной закон динамики (3.75) запишем в форме равновесия сил:

$$\vec{F}^a + \vec{N} - m\vec{a} = 0$$

или

$$\vec{F}^a + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0. \quad (3.77)$$

Уравнение (3.77) выражает **принцип Д'Аламбера для материальной точки**: в каждый момент движения геометрическая сумма всех приложенных к материальной точке активных сил, реакций связей и силы инерции равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  точек. Для каждой  $k$ -й точки системы с массой  $m_k$ , движущейся под действием равнодействующих внешних сил  $\vec{F}_k^e$  и внутренних сил  $\vec{F}_k^i$ , поскольку  $\vec{F}_k^a + \vec{N}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$ , то принцип Д'Аламбера (3.77) принимает вид

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{\Phi}_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3.78)$$

где согласно (3.76)  $\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{a}_k$  – сила инерции  $k$ -й точки системы.

Таким образом, для каждой  $k$ -й материальной точки силы  $\vec{F}_k^e$ ,  $\vec{F}_k^i$  и  $\vec{\Phi}_k$  образуют уравновешенную систему сил. Следовательно, система этих сил, приложенных к механической системе, состоящей из  $n$  точек, также будет уравновешенной.

Уравнение (3.78) представляет **принцип Д'Аламбера для механической системы**: если в любой момент времени к каждой точке системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной, и к ней можно применять все уравнения статики.

В статике согласно (1.27) необходимыми и достаточными условиями равновесия для системы сил является равенство нулю ее главного вектора и главного момента относительно произвольного центра  $O$ .

Поэтому после приведения по теореме Пуансо системы внешних сил  $\vec{F}_k^e$ , внутренних сил  $\vec{F}_k^i$  и сил инерции  $\vec{\Phi}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) материальных точек к произвольному центру  $O$  (см. параграф 1.6), уравнения равновесия (3.78) принимают вид:

$$\begin{cases} \vec{F}^e + \vec{\Phi} = 0, \\ \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^i = 0. \end{cases} \quad (3.79)$$

Здесь  $\vec{F}^e = \sum_{\kappa=1}^n \vec{F}_{\kappa}^e$  – главный вектор внешних сил системы,  $\vec{\Phi} = \sum_{\kappa=1}^n \vec{\Phi}_{\kappa}$  – главный вектор сил инерции точек системы,  $\vec{M}_O^e = \sum_{\kappa=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_{\kappa}^e)$  – главный момент внешних сил относительно центра  $O$ ,  $\vec{M}_O^i = \sum_{\kappa=1}^n \vec{m}_O(\vec{\Phi}_{\kappa})$  – главный момент сил инерции точек системы относительно центра  $O$ .

В проекциях на оси декартовой системы координат векторные уравнения (3.79) в случае произвольной пространственной системы сил дают шесть скалярных уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} F_x^e + \Phi_x &= 0, & M_x^e + M_x^i &= 0, \\ F_y^e + \Phi_y &= 0, & M_y^e + M_y^i &= 0, \\ F_z^e + \Phi_z &= 0, & M_z^e + M_z^i &= 0. \end{aligned}$$

В случае произвольной плоской системы сил число скалярных уравнений равновесия сократится до трёх:

$$F_x^e + \Phi_x = 0, \quad F_y^e + \Phi_y = 0, \quad M_O^e + M_O^i = 0. \quad (3.80)$$

Для практического применения принципа Д'Аламбера необходимо уметь вычислять главный вектор  $\vec{\Phi}$  и главный момент  $\vec{M}_O^i$  сил инерции точек механической системы (твёрдого тела).

Из первого уравнения системы (3.79) имеем

$$\vec{\Phi} = -\vec{F}^e = -\sum_{\kappa=1}^n \vec{F}_{\kappa}^e.$$

По теореме о движении центра масс системы (см. [1-3])  $M\vec{a}_C = \sum_{\kappa=1}^n \vec{F}_{\kappa}^e$ , где  $M$  – масса системы;  $\vec{a}_C$  – ускорение ее центра масс  $C$  относительно инерциальной системы отсчета. Тогда получаем

$$\vec{\Phi} = -M\vec{a}_C. \quad (3.81)$$

*Главный вектор сил инерции механической системы (твёрдого тела) равен произведению массы системы (тела) на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.*

Поскольку главный вектор внешних сил  $\vec{F}^e$  приложен в центре приведения  $O$ , то из первого уравнения (3.78) следует, что и главный вектор сил инерции  $\vec{\Phi}$  также приложен в центре  $O$ .

Если центр масс точка  $C$  движется по криволинейной траектории, то  $\vec{a}_C = \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau$ , где  $\vec{a}_C^n$  и  $\vec{a}_C^\tau$  – соответственно нормальное и касательное ускорения точки  $C$ . Поэтому главный вектор сил инерции  $\vec{\Phi}$  следует в точке  $O$  разложить на нормальную и касательную составляющие:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau,$$

где

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_n &= -M \vec{a}_C^n, & \vec{\Phi}_\tau &= -M \vec{a}_C^\tau, \\ \Phi &= \sqrt{\Phi_n^2 + \Phi_\tau^2} = M \sqrt{(a_C^n)^2 + (a_C^\tau)^2}.\end{aligned}$$

Отметим, что главный вектор сил инерции механической системы (твердого тела) от выбора центра приведения не зависит.

Из второго уравнения системы (3.79) и шестого уравнения системы (3.80) имеем

$$\vec{M}_O^n = -\vec{M}_O^e, \quad M_z^n = -M_z^e.$$

По теореме об изменении кинетического момента для механической системы (см. [1-3])

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e,$$

где  $\vec{K}_O$  и  $K_z$  – кинетические моменты механической системы соответственно относительно центра  $O$  и оси  $Oz$ .

Тогда получаем

$$\vec{M}_O^n = -\frac{d\vec{K}_O}{dt}, \quad M_z^n = -\frac{dK_z}{dt}. \quad (3.82)$$

*Главный момент сил инерции механической системы (твердого тела) относительно центра  $O$  или оси  $Oz$  равен взятой с противоположным знаком производной по времени от кинетического момента системы (тела) относительно того же центра или оси.*

Главный момент сил инерции механической системы (твердого тела) зависит от выбора центра приведения  $O$ .

Воспользовавшись теоремой Пуансо, рассмотрим приведение сил инерции точек твердого тела к центру  $O$  при различных видах его движения.

1. *Поступательное движение.* При поступательном движении силы инерции точек тела образуют систему параллельных сил, которая всегда приводится к равнодействующей  $\vec{\Phi} = -M\vec{a}_C$ , приложенной в центре масс  $C$  тела.

2. *Вращательное движение.* Если тело имеет плоскость материальной симметрии  $Oxy$  и вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$ , перпендикулярной этой плоскости, то при приведении сил инерции точек тела к центру  $O$  они заменяются главным вектором  $\vec{\Phi} = -M\vec{a}_C$ , приложенным в центре  $O$ , и парой сил с моментом  $M_z^и$ , лежащей в плоскости симметрии  $Oxy$  (на рис. 3.15 изображено сечение тела плоскостью  $Oxy$ ). Поскольку для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси  $Oz$ ,  $K_z = I_z\omega$ , где  $I_z = \text{const}$  – осевой момент инерции тела, то из (3.82)

$$M_z^и = -\frac{dK_z}{dt} = -I_z \frac{d\omega}{dt} = -I_z \varepsilon. \quad (3.83)$$

Знак « $-$ » в (3.83) показывает, что момент сил инерции  $M_z^и$  на рис. 3.15 направляется противоположно угловому ускорению  $\varepsilon$  тела.

В случае когда ось вращения  $z$  проходит через центра масс  $C$  тела перпендикулярно плоскости материальной симметрии  $Oxy$ , поскольку  $a_C = 0$ , то силы инерции точек тела приводятся только к паре, лежащей в плоскости симметрии тела с моментом  $M_{Cz}^и$ , определяемом согласно (3.83):

$$M_{Cz}^и = -I_{Cz} \varepsilon.$$

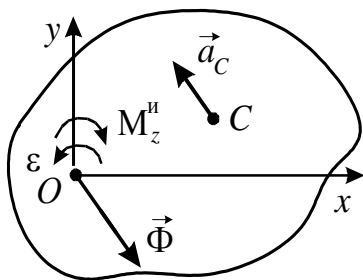


Рис. 3.15

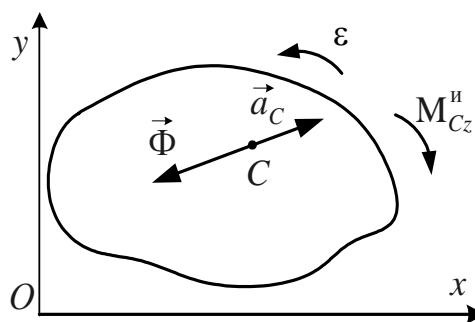


Рис. 3.16



3. *Плоскопараллельное движение.* При плоскопараллельном движении тела, имеющего плоскость материальной симметрии  $Oxy$  и движущегося параллельно этой плоскости, силы инерции точек тела приводятся к главному вектору  $\vec{\Phi}$ , приложенному в центре масс  $C$  тела и к паре с моментом  $M_{Cz'}^i$ , лежащей в плоскости симметрии тела (рис. 3.16). При этом

$$\vec{\Phi} = -M \vec{a}_C,$$

$$M_{Cz'}^i = -I_{Cz'} \varepsilon,$$

где  $I_{Cz'}$  – момент инерции тела относительно оси  $Cz'$ , проходящей через центр масс  $C$  тела перпендикулярно плоскости его движения.

**Пример 3.5.** К середине вертикального вала  $AB$ , вращающегося равномерно с угловой скоростью  $\omega$ , приварен перпендикулярно к его оси невесомый стержень с точечными массами  $m_1$  и  $m_2$  на концах (рис. 3.17).

Пренебрегая весом вала, определить опорные реакции подпятника  $A$  и подшипника  $B$ .

Решить задачу при следующих данных:  $\omega = 2 \text{ рад/с} = \text{const}$ ,  $m_1 = 6 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 4 \text{ кг}$ ,  $l_1 = 0,4 \text{ м}$ ,  $l_2 = 0,2 \text{ м}$ ,  $AD = DB = 0,4 \text{ м}$ .

**Решение**

1. Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из невесомого вала  $AB$  и двух точечных масс, соединенных невесомым стержнем. Применим принцип Д'Аламбера.

2. Проведем вращающиеся вместе с валом  $AB$  оси  $Axyz$  так, чтобы точечные массы  $m_1$  и  $m_2$  в каждый момент движения находились в плоскости  $Axy$  (рис. 3.17).

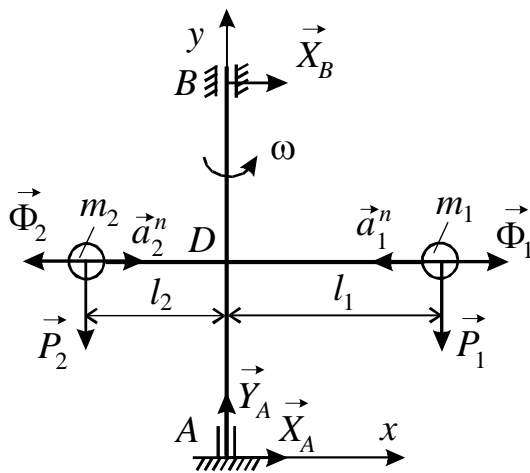


Рис. 3.17

3. На рис. 3.17 изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести  $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$ ,  $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$ , составляющие реакции  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$  подпятника  $A$  и реакцию  $\vec{X}_B$  подшипника  $B$ .

Присоединим к этим силам силы инерции точечных масс  $\vec{\Phi}_1$  и  $\vec{\Phi}_2$ . Поскольку вал вращается равномерно ( $\omega = \text{const}$ ,  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$ ), точечные массы имеют только нормальные ускорения  $\vec{a}_1^n$  и  $\vec{a}_2^n$  направленные к оси вращения

вала  $AB$ , тогда силы инерции  $\vec{\Phi}_1 = -m\vec{a}_1^n$  и  $\vec{\Phi}_2 = -m\vec{a}_2^n$  приложены к точечным массам и направлены от оси вращения.

Вычислим модули этих сил:

$$\Phi_1 = m_1 a_1^n = m_1 \omega^2 l_1 = 9,6 \text{ Н};$$

$$\Phi_2 = m_2 a_2^n = m_2 \omega^2 l_2 = 3,2 \text{ Н}.$$

Поскольку активные силы и силы инерции в каждый момент движения вала лежат в плоскости  $Axy$ , то реакции подпятника  $A$  и подшипника  $B$  тоже лежат в той же плоскости. Следовательно, составляющие реакций  $Z_A = Z_B = 0$ , поэтому на рис. 3.17 они не изображены.

Согласно принципу Даламбера (3.79) приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Поскольку в каждый момент движения вала все активные силы, реакции связей и силы инерции точечных масс лежат в одной плоскости  $Axy$ , то эта система сил является плоской произвольной системой сил. Поэтому аналитические условия равновесия имеют вид:

$$\sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa x} = 0, \quad \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa y} = 0, \quad \sum_{\kappa=1}^n m_A(\vec{F}_\kappa) = 0.$$

или для данной задачи

$$\begin{cases} X_A + X_B + \Phi_1 - \Phi_2 = 0, \\ Y_A - P_1 - P_2 = 0, \\ -X_B AB - \Phi_1 AD - P_1 l_1 + P_2 l_2 + \Phi_2 AD = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений относительно искомых реакций, получим

$$X_B = \frac{1}{AB} [(\Phi_2 - \Phi_1) AD + (m_2 l_2 - m_1 l_1) g],$$

$$Y_A = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2) g,$$

$$X_A = \Phi_2 - \Phi_1 - X_B.$$

Подставив в эти выражения исходные данные задачи, находим реакции подшипника  $B$  и подпятника:  $A$   $X_B = -22,8 \text{ Н}$ ,  $X_A = 16,4 \text{ Н}$ ,  $Y_A = 98 \text{ Н}$ . Знак «-» для  $X_B$  означает, что в действительности реакция  $\vec{X}_B$

подшипника  $B$  направлена противоположно вектору, изображенному на рис. 3.17.

*Ответ:*  $X_A = 16,4$  Н,  $Y_A = 98$  Н,  $X_B = -22,8$  Н.

### *Вопросы для самопроверки*

1. Как определяется сила инерции материальной точки по модулю и направлению?
2. В чем заключается принцип Д'Аламбера для механической системы?
3. Как определяется главный вектор сил инерции твердого тела?
4. В какой точке приложен главный вектор сил инерции твердого тела при плоскопараллельном движении?
5. Как направлена сила инерции материальной точки равномерно движущейся по окружности?

## 3.6. Уравнения Лагранжа второго рода

В аналитической механике рассматриваются наиболее общие методы изучения равновесия и движения материальных систем. Остановимся на основных понятиях аналитической механики.

Объектом исследования является система материальных точек или тел. Система материальных точек называется *свободной*, если положения ее отдельных точек и их скорости могут принимать произвольные значения.

Материальная система называется *несвободной*, если вследствие каких-либо ограничений (связей) точки системы не могут занять произвольного положения в пространстве и иметь произвольные скорости.

Аналитически связи выражаются уравнениями или неравенствами, т. е. соотношениями между радиус-векторами точек системы, их скоростями и временем.

Связи, выраженные уравнениями, называются *удерживающими*, а выраженные неравенствами – *неудерживающими*.

В общем случае для материальной системы, состоящей из  $n$  точек, наложенные на нее  $k$  удерживающие связи можно записать системой уравнений вида

$$f_j(x_v, y_v, z_v, \dot{x}_v, \dot{y}_v, \dot{z}_v, t) = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, n), \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (3.84)$$

где  $x_v, y_v, z_v, \dot{x}_v, \dot{y}_v, \dot{z}_v$  – соответственно проекции радиус-вектора  $\vec{r}_v$  и скорости  $\vec{V}_v$   $v$ -й точки на декартовы оси.

Если уравнения связей (3.84) содержат явно время  $t$ , то связь называется *нестационарной*. Если уравнение связи не содержит явно время  $t$ , то связь называется *стационарной*.

Связь, накладывающая ограничение только на координаты точек системы, называется *геометрической* или *голономной*. Уравнения связей в этом случае имеют вид

$$f_j(x_v, y_v, z_v, t) = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, n), \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (3.85)$$

Связь называется *неголономной* (*кинематической*), если уравнения связей содержат неинтегрируемым образом производные от координат по времени или дифференциалы координат.

Материальная система, на которую наложены голономные связи, называется *голономной*, а материальная система с неголономными связями – *неголономной*.

Введение понятий о связях и их реакциях позволяет сформулировать основную задачу механики несвободной голономной системы точек в форме задачи об отыскании закона движения системы и реакций связей  $\vec{N}_v$  по заданным активным силам  $\vec{F}_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) и уравнениям голономных связей (3.85). Она сводится к совместному решению уравнений движения и уравнений связей:

$$\begin{cases} m_v \ddot{\vec{r}}_v = \vec{F}_v + \vec{N}_v, & (v = 1, 2, \dots, n), \\ f_j(x_v, y_v, z_v, t) = 0, & (j = 1, 2, \dots, k). \end{cases} \quad (3.86)$$

При этом начальные условия задаются в соответствии с уравнениями связей в (3.86).

Из (3.86) следует, что связи вносят в решение задач механики две трудности. Первая состоит в том, что не все координаты точек систем являются независимыми, так как они связаны определенными соотношениями (3.85). Вторая трудность заключается в том, что реакции связей не заданы: они являются независимыми величинами данной задачи и подлежат определению.

В случае голономных связей первая трудность преодолевается введением обобщенных координат. Для преодоления второй трудности необходимо так поставить задачу, чтобы реакции связей были внутренними силами системы. Таким образом, от характера связей зависит не только вид движения системы, но и выбор приемов для изучения этого движения.

Введем понятия действительного и возможного перемещений на примере одной материальной точки ( $v = 1$ ), подчиненной одной голономной связи ( $j = 1$ ):

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (3.87)$$

*Действительным перемещением  $d\vec{r}$  точки* называется бесконечно малое перемещение этой точки под действием активных сил и реакций связи. Действительное перемещение происходит за время  $dt$  в соответствии с дифференциальным уравнением движения точки и уравнением связи (3.87).

Дифференциальное уравнение в частных производных, которому подчинено действительное перемещение  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  точки в положении  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , получим, вычислив дифференциал от уравнения (3.87):

$$df_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 dt = 0. \quad (3.88)$$

*Возможным перемещением  $\delta\vec{r}$  точки* называется воображаемое бесконечно малое перемещение точки, допускаемое связью (3.87) в фиксированный момент времени. Возможное перемещение не обладает длительностью и не происходит под действием сил.

Дифференциальное уравнение в частных производных, которому подчинены возможные перемещения точки  $\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$  в положении  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  получим, вычислив дифференциал от уравнения (3.87) при фиксированном времени, т. е. определив изохронную вариацию функции  $f(x, y, z, t)$  и приравняв ее к нулю:

$$\delta f_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z = 0. \quad (3.89)$$

Сравнивая (3.88) и (3.89), можно сделать вывод, что действительное перемещение  $d\vec{r}$  совпадает с возможным перемещением  $\delta\vec{r}$  точки только в случае стационарных связей, когда  $\partial f/\partial t = 0$ .

Вводя вектор-градиент функции при фиксированном времени

$$\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \vec{k},$$

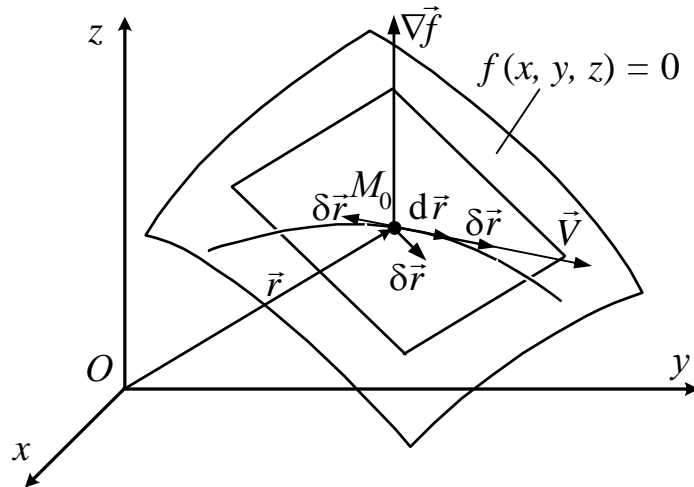


Рис. 3.18

можно условие (3.89) записать в форме скалярного произведения векторов  $\vec{\nabla}f$  и  $\delta\vec{r}$ :

$$\vec{\nabla}f \cdot \delta\vec{r} = 0.$$

Следовательно, возможные  $\delta\vec{r}$  точки представляют собой векторы, расположенные в касательной плоскости, проведенной в той точки  $M_0$  поверхности, определяемой уравнением (3.87), в котором в данный момент времени находится материальная точка, и при стационарной связи (рис. 3.18) действительное перемещение  $d\vec{r}$  совпадает в фиксированный момент времени с одним из возможных перемещений  $\delta\vec{r}$ . Так как  $d\vec{r} = \vec{V}dt$ , то при стационарной связи вектор возможного перемещения точки  $\delta\vec{r}$  можно направлять в данный момент времени, также как вектор ее скорости  $\vec{V}$  или противоположно ему. При нестационарной связи вектор действительного перемещения  $d\vec{r}$  точки в положении  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  не совпадает ни с одним из векторов ее возможных перемещений  $\delta\vec{r}$ .

*Возможными перемещениями точек системы называется совокупность воображаемых бесконечно малых векторов  $\delta\vec{r}_v = \delta x_v \vec{i} + \delta y_v \vec{j} + \delta z_v \vec{k}$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ), удовлетворяющих связям (3.85), наложенным на механическую систему в фиксированный момент времени.*

Пусть в данный момент времени на каждую  $v$ -ю материальную точку системы действует сила  $\vec{F}_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ). Сообщим точкам системы возможные перемещения  $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_n$  соответственно.

Возможной работой называется элементарная работа сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  на возможных перемещениях  $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_n$  точек системы:

$$\delta A = \vec{F}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 + \dots + \vec{F}_n \cdot \delta\vec{r}_n = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \cdot \delta\vec{r}_v. \quad (3.90)$$

В декартовой системе координат

$$\delta A = \sum_{v=1}^n (F_{vx} \delta x_v + F_{vy} \delta y_v + F_{vz} \delta z_v). \quad (3.91)$$

Связи, для которых возможная работа реакций  $\vec{N}_v$  связей на любом возможном перемещении системы равна нулю, называются *идеальными*:

$$\sum_{v=1}^n \vec{N}_v \cdot \delta\vec{r}_v = 0. \quad (3.92)$$

Для одной материальной точки, движущейся по поверхности связи (3.87) условие (3.92) принимает вид  $\vec{N} \cdot \delta\vec{r} = 0$ . Следовательно, при идеальной связи реакция  $\vec{N}$  поверхности перпендикулярна любому возможному перемещению  $\delta\vec{r}$ .

Поскольку вектор  $\delta\vec{r}$  лежит в касательной плоскости в точке  $M_0$  поверхности связи (3.87), то реакция  $\vec{N}$  направлена по нормали к поверхности связи. Поэтому в случае идеальной связи точка движется по поверхности связи без трения. Условие (3.92) является обобщением для случая системы, состоящей из  $n$  точек. Можно убедиться, что примерами идеальной связи являются гладкая поверхность, шарнир без трения, связь при качении без скольжения.

*Число степеней свободы голономной материальной системы называется число  $S$  независимых параметров (координат), полностью определяющих ее положение, совместимое с наложенными на нее связями.*

Если на материальную систему, состоящую из  $n$  точек, наложено  $k$  голономных связей (3.85), то это значит, что не все декартовы координаты точек системы являются независимыми друг от друга. Действительно, независимыми являются только  $(3n - k)$  координат, так как  $k$  координат можно выразить через остальные  $(3n - k)$  координат с помощью уравнений связей (3.85). Следовательно, число степеней свободы такой системы

$$S = 3n - k.$$

Для описания движения системы материальных точек в независимых переменных введем понятие **обобщенных координат**:  $S$  независимых параметров  $q_1, q_2, \dots, q_S$ , однозначно определяющих положение точек материальной системы, совместимое с наложенными на нее связями, называются обобщенными координатами.

Отметим, что независимые координаты  $q_m$  ( $m = 1, 2, \dots, S$ ) – это не обязательно набор  $S$  переменных из числа декартовых координат  $x_v, y_v, z_v$ , ими могут быть переменные другой природы.

Производные от обобщенных координат по времени  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S$  называются *обобщенными скоростями* ( $\dot{q}_m \equiv dq_m/dt$ ).

Размерность обобщенной скорости зависит от размерности обобщенной координаты: если  $q_m$  – линейная величина, то  $\dot{q}_m$  – линейная скорость; если  $q_m$  – угол, то  $\dot{q}_m$  – угловая скорость; если  $q_m$  – площадь сектора, то  $\dot{q}_m$  – секторная скорость и т. д. Следовательно, понятие обобщенной скорости охватывает все известные в механике понятия о скоростях.

Пусть система имеет  $S$  степеней свободы, и ее положение определяется обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_S$ . Сообщим системе в фиксированный момент времени такое возможное перемещение, при котором обобщенная координата  $q_m$  получит положительное приращение  $\delta q_m > 0$ , а остальные обобщенные координаты не изменятся.

Тогда радиус-вектор  $\vec{r}_v$  каждой точки системы получит возможное перемещение  $(\delta \vec{r}_v)_m$ , которое вычисляется как частный дифференциал:

$$(\delta \vec{r}_v)_m = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_m} \delta q_m$$

Согласно (3.90) возможную работу всех активных сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  при  $\delta q_m > 0$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta A_m &= \vec{F}_1 \cdot (\delta \vec{r}_1)_m + \vec{F}_2 \cdot (\delta \vec{r}_2)_m + \dots + \vec{F}_n \cdot (\delta \vec{r}_n)_m = \\ &= \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \cdot (\delta \vec{r}_v)_m = \left( \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_m} \right) \delta q_m = Q_m \delta q_m, \end{aligned}$$

где

$$Q_m = \frac{\delta A_m}{\delta q_m} = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_m}. \quad (3.93)$$

Величина  $Q_m$  называется *обобщенной силой*, соответствующей обобщенной координате  $q_m$ .



Если всем  $S$  обобщенным координатам в данный момент времени сообщить положительные приращения (вариации)  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_S$ , то в обобщенных координатах полная возможная работа всех активных сил имеет вид

$$\delta A = \sum_{m=1}^S \delta A_m = \sum_{m=1}^S Q_m \delta q_m = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_S \delta q_S. \quad (3.94)$$

Из выражения (3.94) следует, что *обобщенные силы представляют собой коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для полной возможной работы*. Число обобщенных сил равно числу  $S$  обобщенных координат. Отметим, что согласно (3.93) размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность обобщенной координаты.

Для голономной системы с  $S$  степенями свободы, подчиненной идеальным связям (3.92), дифференциальные уравнения ее движения в обобщенных координатах  $q_1, q_2, \dots, q_S$  имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m \quad (m = 1, 2, \dots, S). \quad (3.95)$$

Уравнения (3.95) называются *уравнениями Лагранжа второго рода*. Они содержат  $(S + 1)$  функций, которыми являются кинетическая энергия  $T$  системы и обобщенные силы  $Q_1, Q_2, \dots, Q_S$ . Чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа (3.95), следует выразить эти функции через обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_S$  и обобщенные скорости  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S$ .

В математическом отношении уравнения (3.95) представляют собой систему  $S$  дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат. Нетрудно показать, что эта система может быть представлена в форме Коши, т. е. разрешена относительно старших производных. Для таких систем имеет место теорема о существовании и единственности решения, из которой следует детерминированность движения материальной системы, как только заданы начальные условия движения, т. е. в начальный момент времени зафиксированы значения обобщенных координат и обобщенных скоростей:

$$\begin{aligned} t &= 0, \\ q_1(0) &= q_1^0, \quad q_2(0) = q_2^0, \quad \dots, \quad q_S(0) = q_S^0, \\ \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_1^0, \quad \dot{q}_2(0) = \dot{q}_2^0, \quad \dots, \quad \dot{q}_S(0) = \dot{q}_S^0. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Решение основной задачи динамики голономной системы заключается в интегрировании уравнений Лагранжа (3.95), т. е. в нахождении обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_S$  как функций времени  $t$ :

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(t, C_1, C_2, \dots, C_{2S}), \\ q_2 &= q_2(t, C_1, C_2, \dots, C_{2S}), \\ &\dots\dots\dots \\ q_S &= q_S(t, C_1, C_2, \dots, C_{2S}). \end{aligned} \tag{3.97}$$

В (3.97)  $C_1, C_2, \dots, C_{2S}$  – постоянные интегрирования, значения которых определяются по начальным условиям движения (3.96) системы. Отметим, что рациональный выбор обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_S$  может существенно упростить конкретный вид уравнений Лагранжа (3.95) и тем самым облегчить процедуру интегрирования этой системы дифференциальных уравнений.

*Основные преимущества уравнений Лагранжа второго рода:*

- по форме уравнения (3.95) записываются одинаково в любой системе координат, и различие в выборе координат сказывается лишь на виде  $(S + 1)$  функций, входящих в эти уравнения;
- число уравнений (3.95) не зависит ни от количества материальных точек, входящих в систему, ни от характера их движения, а определяется только числом  $S$  ее степеней свободы;
- для системы с идеальными связями правые части уравнений (3.95) содержат только обобщенные активные силы, и из рассмотрения исключаются реакции связей, которые, как правило, неизвестны.

**Методические указания.** Для составления уравнений Лагранжа второго рода (3.95) рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Выбрать обобщенные координаты, количество которых должно равняться числу  $S$  степеней свободы голономной системы.
2. Выразить кинетическую энергию системы через обобщенные координаты и обобщенные скорости.
3. Вычислить все производные от кинетической энергии, входящие в левую часть уравнений (3.95).
4. По формуле (3.93) найти обобщенные силы
5. С учетом пунктов 3 и 4 составить уравнение Лагранжа второго рода (3.95).

**Пример 3.6.** Каток  $C$  массой  $m_1$ , скатываясь без скольжения вниз по наклонной плоскости, поднимает посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок  $B$ , груз  $A$  массой  $m_2$  (рис. 3.19). Каток  $C$  и блок  $B$  – однородные круглые диски с одинаковыми массами и радиусами. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол  $\alpha$ .

С помощью уравнения Лагранжа второго рода определить ускорение центра масс  $C$  катка; массой нити пренебречь.

**Решение**

1. Рассматриваемая механическая система, состоящая из катка  $C$ , блока  $B$  и груза  $A$ , имеет одну степень свободы ( $S = 1$ ), так как перемещение любого тела системы приводит к однозначному перемещению всех других ее тел. Поэтому ее положение определяется одной обобщенной координатой  $q_1$ .

Принимаем за  $q_1 = x$  – перемещение центра масс  $C$  катка, отсчитываемое в сторону его движения (рис. 3.19); а  $\dot{x}$  – обобщенная скорость.

Тогда уравнение Лагранжа (3.95) будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1. \quad (3.98)$$

Здесь  $Q_1$  – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $x$ .

2. Для составления уравнения (3.98) вычислим кинетическую энергию  $T$  системы, состоящей из трех масс, как функцию  $x$  и  $\dot{x}$ :

$$T = T_C + T_B + T_A, \quad (3.99)$$

где  $T_C$ ,  $T_B$ ,  $T_A$  – кинетические энергии соответственно катка  $C$ , блока  $B$  и груза  $A$ .

Так как каток  $C$  совершает плоскопараллельное движение, блок  $B$  вращается вокруг оси  $B$ , а груз  $A$  движется поступательно, то

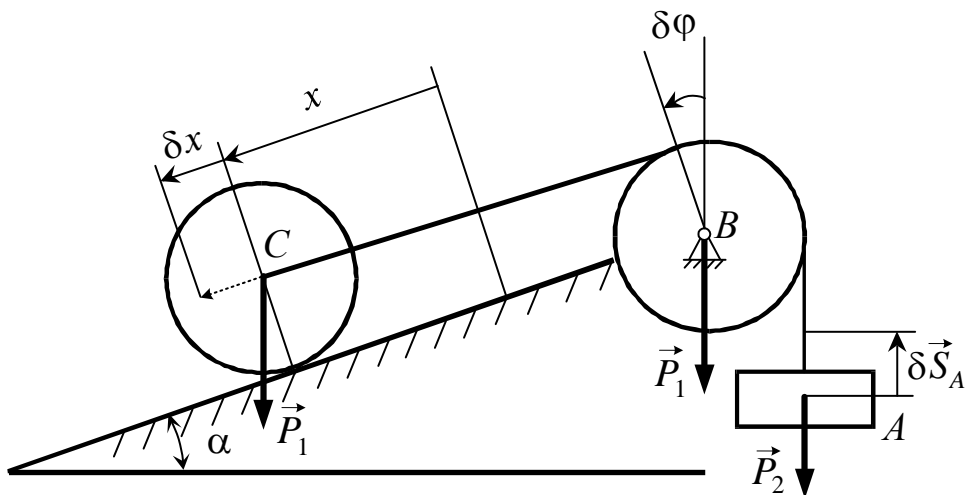


Рис. 3.19

$$\begin{aligned}
T_C &= \frac{1}{2} m_1 V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_C^2, \\
T_B &= \frac{1}{2} I_B \omega_B^2, \\
T_A &= \frac{1}{2} m_2 V_A^2,
\end{aligned} \tag{3.100}$$

где

$$I_C = I_B = \frac{m_1 R^2}{2}. \tag{3.101}$$

Выразим входящие в (3.100) скорости через обобщенную скорость  $\dot{x}$ :

$$V_C = \dot{x}, \quad \omega_C = \frac{V_C}{R} = \frac{\dot{x}}{R}, \quad \omega_B = \frac{V_C}{R} = \frac{\dot{x}}{R}, \quad V_A = V_C = \dot{x}. \tag{3.102}$$

С учетом (3.100)–(3.102) получим окончательное выражение для кинетической энергии системы (3.99):

$$T = \frac{1}{2} (2m_1 + m_2) \dot{x}^2. \tag{3.103}$$

3. Вычислим все производные от кинетической энергии (3.103), входящие в уравнение Лагранжа (3.98):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (2m_1 + m_2) \dot{x}, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= (2m_1 + m_2) \ddot{x}.
\end{aligned} \tag{3.104}$$

4. Найдем обобщенную силу  $Q_1$ . Для этого изобразим на рис. 3.19 все активные силы, действующие на систему: силы тяжести  $\vec{P}_1$  для катка  $C$  и блока  $B$  и  $\vec{P}_2$  для груза  $A$ .

Сообщим обобщенной координате  $x$  в данный момент времени положительное приращение  $\delta x > 0$  и вычислим возможную работу  $\delta A_1$  всех активных сил на возможных перемещениях точек их приложения (рис. 3.18):

$$\delta A_1 = P_1 \sin \alpha \delta x - P_2 \delta S_C = g (m_1 \sin \alpha - m_2) \delta x,$$

так как  $\delta S_C = \delta x$ .

Согласно (3.93), находим  $Q_1$ :

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta x} = g(m_1 \sin \alpha - m_2). \quad (3.105)$$

5. С учетом (3.104) и (3.105) запишем уравнение Лагранжа (3.98) для рассматриваемой системы:

$$(2m_1 + m_2)\ddot{x} = g(m_1 \sin \alpha - m_2).$$

Отсюда находим искомое ускорение центра масс  $C$  катка

$$a_C = \ddot{x} = \frac{g(m_1 \sin \alpha - m_2)}{(2m_1 + m_2)}.$$

*Ответ:*  $a_C = g(m_1 \sin \alpha - m_2)/(2m_1 + m_2)$ .

#### *Вопросы для самопроверки*

1. Какие связи называются голономными?
2. Что называется возможным перемещением точки?
3. При каких связях действительное перемещение точки совпадает с одним из ее возможных перемещений?
4. Что называется возможной работой сил, приложенных к точкам механической системы?
5. Что такое обобщенная сила и как ее можно вычислить?
6. Какова размерность обобщенной силы?
7. Каков вид уравнений Лагранжа второго рода для голономной системы с  $S$  степенями свободы?

#### 4. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для допуска к экзамену (зачету) по дисциплине «Теоретическая механика» студент должен выполнить контрольную работу. К каждой задаче контрольной работы дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столце таблицы.

*Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра (номера его зачетной книжки), а номер условия в таблице – по последней; например, если номер шифра оканчивается числом 14, то берется вариант 1 рисунка и условие 4 (строка 4) из таблицы.*

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, фамилия и инициалы студента, его адрес, учебный шифр, специальность и институт СФУ. На первой странице тетради записываются номера решаемых задач.

*Решение каждой задачи следует обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (лучше карандашом) и кратко записывается, что в задаче дано и что требуется определить.*

*Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем указываются все углы, действующие силы, число тел и их расположение должны соответствовать данным вашего варианта. В результате в целом ряде задач чертеж получается более простой, чем общий.*

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все векторы сил или скоростей, ускорений и др.; *необходимо обязательно изображать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин в решении.*

Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов.* В конце каждой задачи должны быть даны ответы.

На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

*Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, не проверяются и будут возвращены для переделки.*

К работе, высылаемой на повторную проверку должна обязательно прилагаться незачтенная работа, если она выполнена в другой тетради.

На экзамене (зачете) необходимо представить зачтенную по дисциплине «Теоретическая механика» контрольную работу, в которой все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

### 4.1. Задача С1

Жесткая рама (рис. 4.1, табл. С1) закреплена в точке  $A$  шарнирно, а в точке  $B$  прикрепена или к шарнирной опоре на катках; или к невесомому стержню  $BB_1$ ; который прикреплен к раме и неподвижной опоре шарнирами.

На раму действуют: пара сил с моментом  $M = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ; равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q = 40 \text{ Н/м}$ , приложенная на участке, указанном в табл. С1 (столбец «Нагруженный участок»); две силы, величины, направления и точки приложения которых заданы в табл. С1.

Определить реакции связей в точках  $A$  и  $B$  рамы, вызванные нагрузками. При расчетах принять  $l = 0,5 \text{ м}$ . Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках показано в табл. С1.

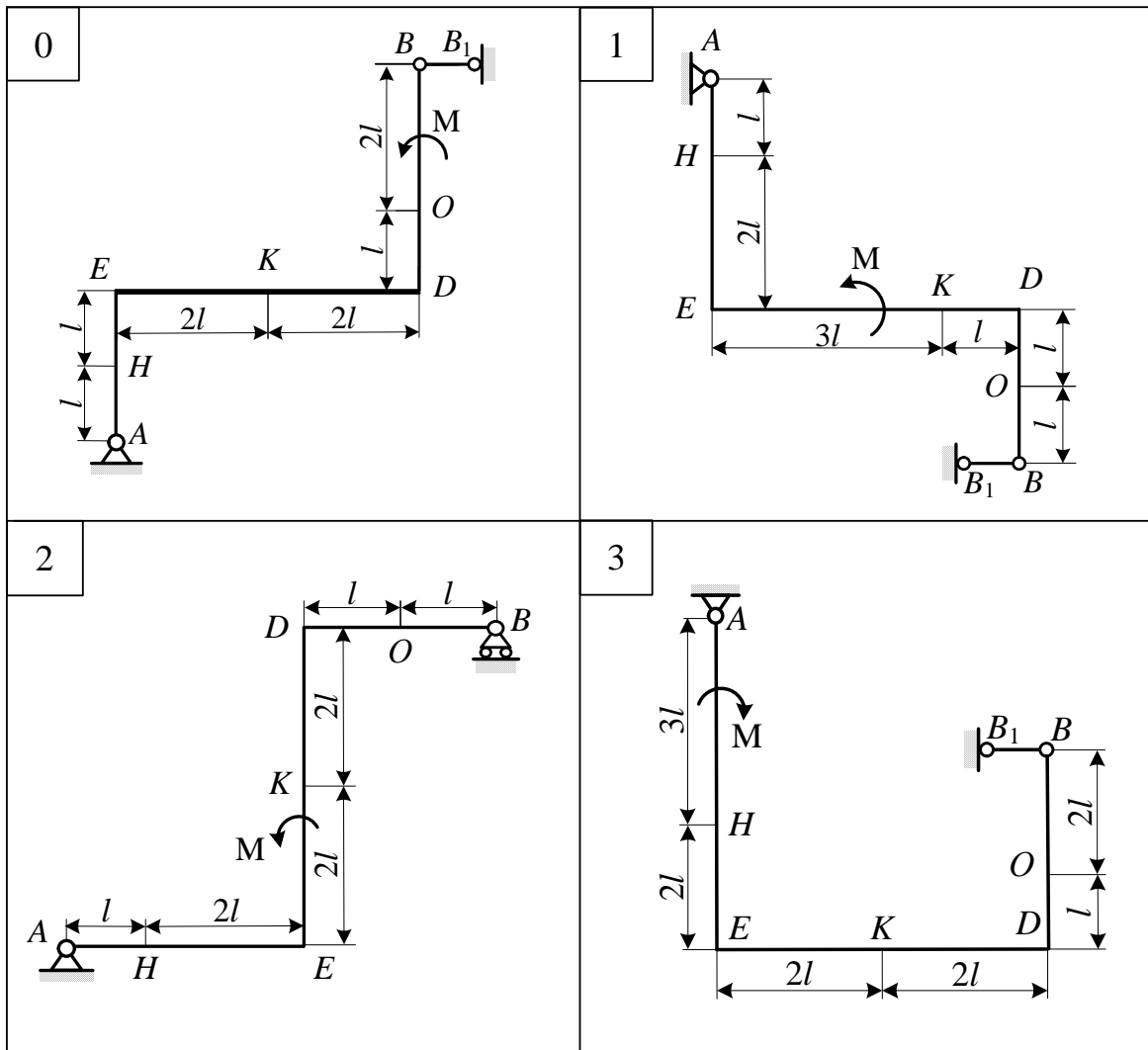


Рис. 4.1

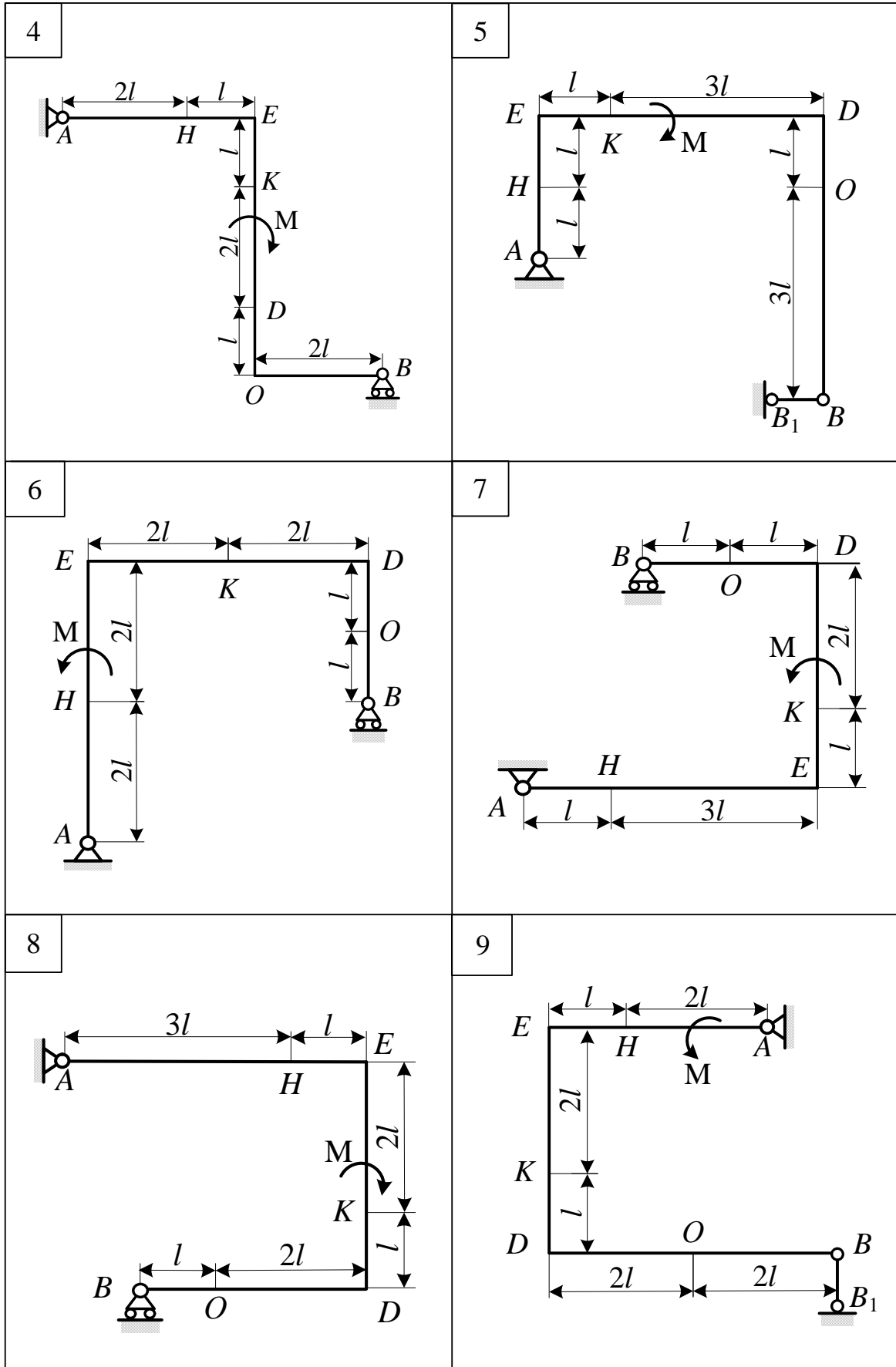
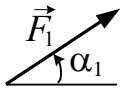
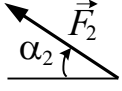



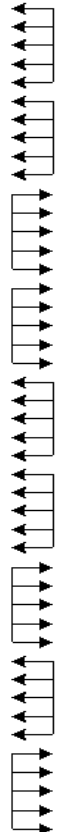

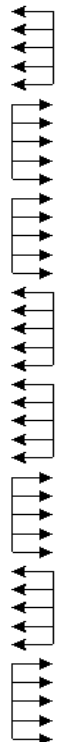



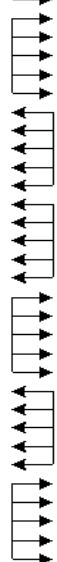



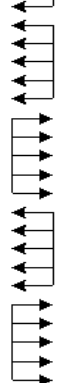

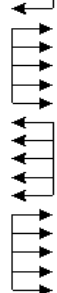

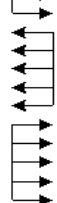
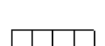
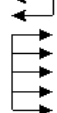


Рис. 4.1. Окончание



Таблица С1

Номер условия	Сила				Нагруженный участок	Направление распределенной нагрузки	
	$F_1 = 10 \text{ Н}$		$F_2 = 20 \text{ Н}$			горизонтальное	вертикальное
							
	Точка приложения	$\alpha_1$ , град	Точка приложения	$\alpha_2$ , град			
0	<i>H</i>	30	<i>D</i>	45	<i>AE</i>		
1	<i>O</i>	60	<i>E</i>	15	<i>DK</i>		
2	<i>D</i>	45	<i>H</i>	60	<i>EK</i>		
3	<i>E</i>	30	<i>D</i>	90	<i>OB</i>		
4	<i>K</i>	15	<i>O</i>	30	<i>EH</i>		
5	<i>H</i>	75	<i>K</i>	45	<i>OD</i>		
6	<i>D</i>	30	<i>O</i>	60	<i>AH</i>		
7	<i>K</i>	60	<i>H</i>	45	<i>ED</i>		
8	<i>O</i>	90	<i>K</i>	15	<i>AE</i>		
9	<i>E</i>	45	<i>O</i>	60	<i>DK</i>		

*Методические указания.* Задача С1 – на равновесие тела под действием плоской произвольной системы сил. При ее выполнении следует учесть, что уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если вычислять моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух искомых реакций связей.

При вычислении момента силы  $\vec{F}$  удобно разложить ее на составляющие  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона (1.18):  $m_o(\vec{F}) = m_o(\vec{F}') + m_o(\vec{F}'')$ . Порядок действий для решения задачи С1 был изложен выше на стр. 24.

## 4.2. Пример решения задачи С1

Жесткая рама (рис. 4.2, *a*) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* – шарнир с невесомым стержнем *BB*<sub>1</sub>. На раму действуют: силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , пара сил с моментом *M*, а на участке *DO* – равномерно–распределенная нагрузка интенсивности *q*. Определить реакции связей в точках *A* и *B* рамы, вызванные заданными нагрузками.

Решить задачу при следующих данных:  $F_1 = 30$  Н;  $F_2 = 25$  Н;  $\alpha_1 = 60^\circ$ ;  $\alpha_2 = 75^\circ$ ;  $M = 40$  Н·м;  $q = 60$  Н/м;  $l = 0,2$  м.

Р е ш е н и е

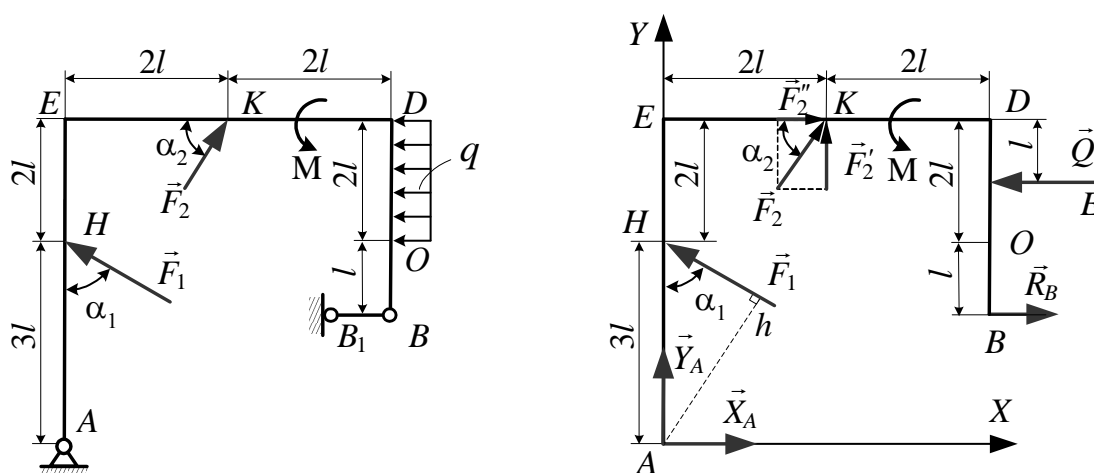
1. Рассмотрим равновесие рамы *AEDB*.

2. Рама находится под действием активных сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , пары сил с моментом *M* и равномерно распределенной нагрузки интенсивности *q*. На рис. 4.2, *б* распределенную нагрузку заменим равнодействующей силой  $\vec{Q}$ , приложенной в середине участка *DO*:  $Q = q \cdot 2l = 24$  Н.

3. В точке *A* введем декартову систему координат *AXY*.

4. Отбросим связи и заменим их действие реакциями связей. Согласно рис. 1.2 реакцию неподвижного цилиндрического шарнира *A* разложим на две взаимно перпендикулярные составляющие  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$  по декартовым осям; реакцию  $\vec{R}_B$  цилиндрического шарнира *B* направим вдоль невесомого стержня *BB*<sub>1</sub>, предполагая, что стержень сжат.

Теперь раму можно рассматривать как свободное тело, находящееся в равновесии под действием заданных сил и реакций связей (рис. 4.2, *б*). Неизвестными в данной задаче являются три силы:  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$  и  $\vec{R}_B$ .



*a*

*б*

Рис. 4.2

5. Система сил, приложенных к раме  $AEDB$ , является плоской произвольной системой сил. В этом случае согласно (1.31) аналитические условия равновесия имеют вид

$$\begin{cases} \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa X} = 0; \\ \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Y} = 0; \\ \sum_{\kappa=1}^n m_A(\vec{F}_{\kappa}) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь при составлении уравнения моментов в качестве центра выбрана точка  $A$ , где пересекаются линии действия двух искомых реакций  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$ .

Поскольку количество уравнений системы (4.1) равно числу неизвестных задачи, то рама  $AEDB$  является статически определимым телом.

6. Запишем уравнения равновесия (4.1) для рассматриваемой задачи:

$$X_A - F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 - Q + R_B = 0; \quad (4.2)$$

$$Y_A + F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 = 0; \quad (4.3)$$

$$M + F_1 h + F_2 \sin \alpha_2 2l - F_2 \cos \alpha_2 5l + Q 4l - R_B 2l = 0. \quad (4.4)$$

В (4.4)  $h = 3l \sin \alpha_1$  - плечо силы  $\vec{F}_1$  относительно точки  $A$ , а при вычислении алгебраического момента силы  $\vec{F}_2$  относительно этой точки пользуемся теоремой Вариньона (1.18):

$$m_A(\vec{F}_2) = m_A(\vec{F}'_2) + m_A(\vec{F}''_2) = F'_2 2l - F''_2 5l,$$

где модули составляющих сил  $F'_2 = F_2 \sin \alpha_2$ ,  $F''_2 = F_2 \cos \alpha_2$ .

7. Из уравнения (4.4) с учетом исходных данных находим

$$R_B = \frac{M + F_1 \sin \alpha_1 3l + F_2 \sin \alpha_2 2l - F_2 \cos \alpha_2 5l + Q 4l}{2l} = 194,93 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.3) определяем

$$Y_A = -F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \sin \alpha_2 = -39,15 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4.2) получаем

$$X_A = F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2 + Q - R_B = -151,4 \text{ Н.}$$

Знаки «—» в ответах указывают, что реакции  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$  направлены противоположно векторам, показанным на рис. 4.2, б.

*Проверка.* Для проверки правильности решения вычислим сумму моментов всех сил относительно точки  $B$  и подставим исходные данные и найденные значения реакций в это выражение:

$$\begin{aligned} \sum m_B(\vec{F}_k) &= M + Q \cdot 2l - F_2 \cos \alpha_2 \cdot 3l - F_2 \sin \alpha_2 \cdot 2l - \\ &\quad - F_1 \cos \alpha_1 \cdot 4l + F_1 \sin \alpha_1 \cdot l - Y_A \cdot 4l + X_A \cdot 2l = \\ &= 40 + 24 \cdot 2 \cdot 0,2 - 25 \cdot 0,259 \cdot 3 \cdot 0,2 - 25 \cdot 0,966 \cdot 2 \cdot 0,2 - \\ &\quad - 30 \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 0,2 + 30 \cdot 0,867 \cdot 0,2 = 0. \end{aligned}$$

Обращение в нуль  $\sum m_B(\vec{F}_k)$  свидетельствует о правильности решения задачи.

*Ответ:*  $X_A = -151,4 \text{ Н}$ ;  $Y_A = -39,15 \text{ Н}$ ;  $R_B = 194,93 \text{ Н}$ .

### 4.3. Задача К1

Плоский механизм (схемы 0–9 на рис. 4.3) состоит из стержней  $I$ – $4$  и катка  $B$ , катящегося по неподвижной плоскости без скольжения. На рис. 4.3 тела соединены друг с другом и с неподвижными опорами  $O_1$  и  $O_2$  цилиндрическими шарнирами. Длины стержней:  $l_1 = 0,4$  м,  $l_2 = 1,2$  м,  $l_3 = 1,4$  м,  $l_4 = 0,8$  м; радиус катка  $R = 0,2$  м.

Положение механизма определяется углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ , значения которых заданы в табл. К1. Точка  $D$  на всех схемах и точка  $K$  для схем 7–9 на рис. 4.3 находятся в середине соответствующего стержня.

Определить величины, указанные в столбце «Найти» табл. К1, а также угловую скорость катка  $B$  и ускорение точки  $A$ , если в данный момент времени стержень  $I$  имеет угловое ускорение  $\varepsilon_1 = 10 \text{ с}^{-2}$ .

Таблица К1

Номер условия	Углы, град					$\omega_1$ , 1/с	$\omega_4$ , 1/с	$V_B$ , м/с	Найти	
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varphi$	$\theta$				$V$ точек	$\omega$ звена
0	30	150	120	0	60	2	–	–	$B, E, L$	2
1	60	60	60	90	120	–	3	–	$A, D, L$	3
2	0	120	90	90	60	–	–	10	$A, E, L$	2
3	90	120	30	0	60	3	–	–	$B, E, L$	2
4	0	150	30	0	60	–	4	–	$A, B, L$	2
5	60	150	120	90	30	–	–	8	$A, E, L$	3
6	30	120	30	0	60	5	–	–	$B, E, L$	3
7	90	150	120	90	30	–	5	–	$A, D, L$	3
8	0	60	30	0	120	–	–	6	$A, E, L$	2
9	30	120	120	0	60	4	–	–	$B, E, L$	3

*Указания.* Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом  $\alpha$ . Дуговые стрелки на схемах показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы, т. е. по ходу или против хода часовой стрелки. Заданную в табл. К1 угловую скорость считать направленной против хода часовой стрелки, а заданную скорость  $\vec{V}_B$  шарнира  $B$  – в сторону  $b$  параллельно неподвижной плоскости. Порядок решения задачи К1 изложен в пунктах I и II методических указаний на стр. 54.

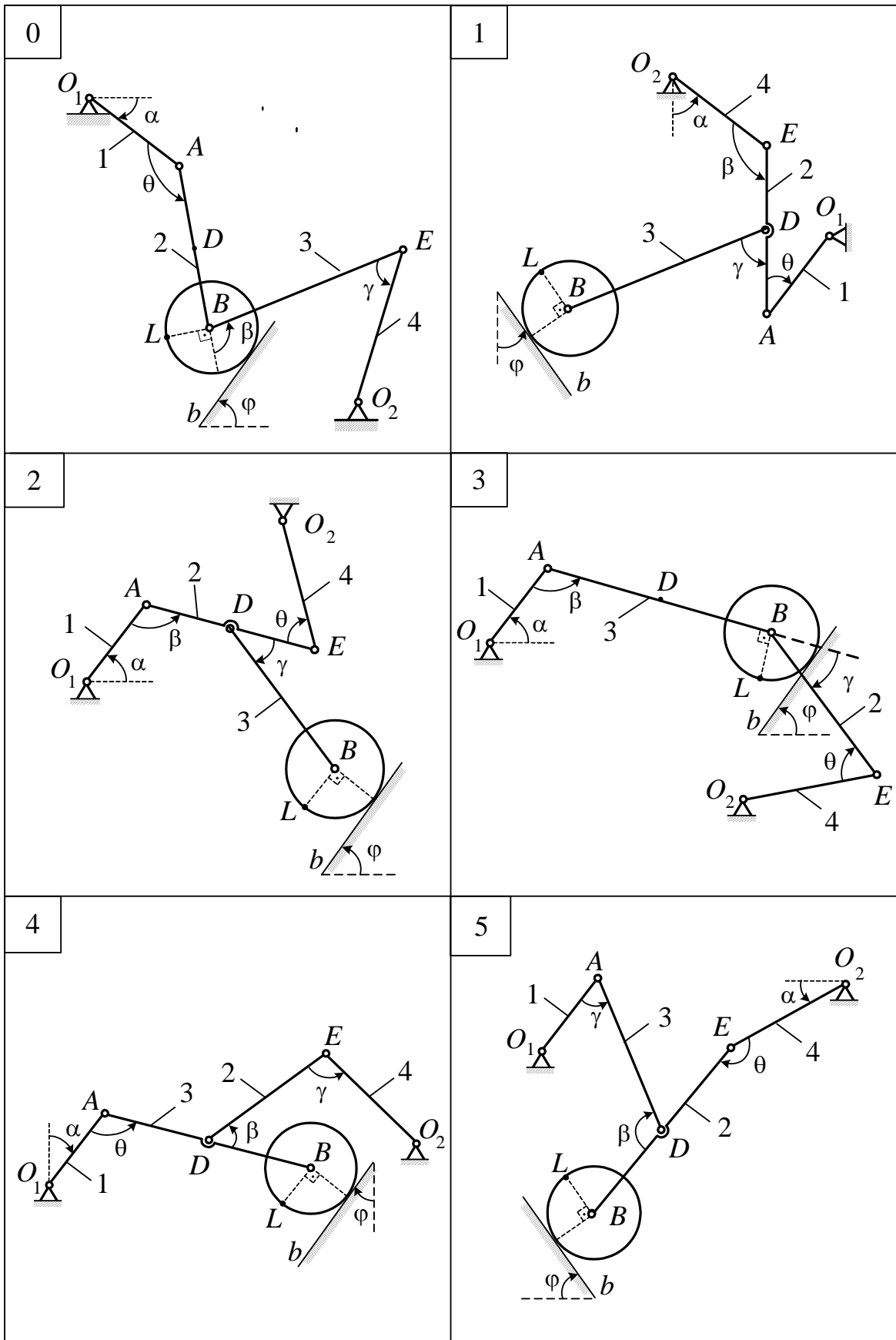


Рис. 4.3

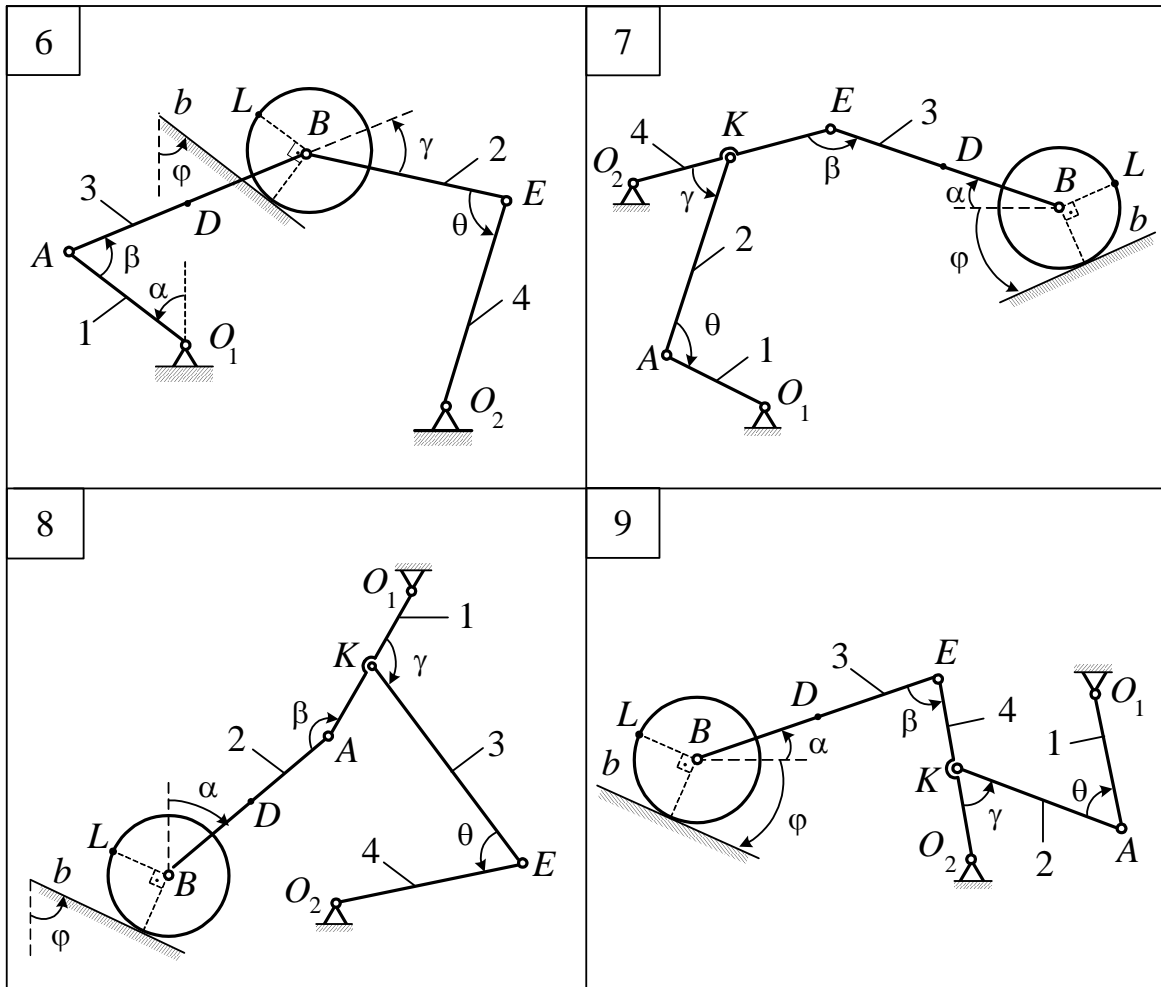


Рис. 4.3 Окончание

#### 4.4. Пример решения задачи К1

Плоский механизм (рис. 4.4). состоит из четырех стержневых звеньев, соединенных между собой и с неподвижными опорами  $O_1$  и  $O_2$  цилиндрическими шарнирами, и катка  $B$ , катящегося по неподвижной плоскости без скольжения

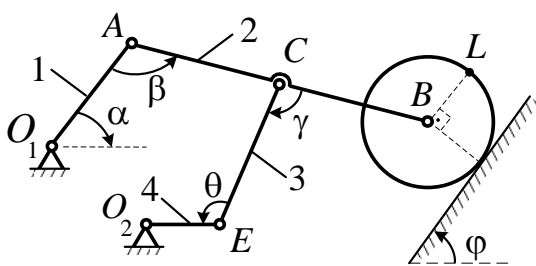


Рис. 4.4

Длины стержней соответственно равны  $l_1, l_2, l_3, l_4$ , радиус катка –  $R$ , а положение механизма определяется углами  $\alpha, \beta, \gamma, \phi, \theta$ ; точка  $C$  находится в середине стержня 2.

Найти скорости точек  $B, C, L, E$  и угловые скорости всех звеньев механизма, если звено 1 (кривошип  $O_1A$ ) имеет в заданном положении механизма угловую скорость  $\omega_1$ . Определить также

ускорение точки  $A$  кривошипа  $O_1A$ , если в данный момент его угловое ускорение  $\varepsilon_1$ .

Решить задачу при следующих данных:  $\omega_1 = 4$  рад/с;  $\varepsilon_1 = 4$  рад/с<sup>2</sup>;  $l_1 = 0,4$  м;  $l_2 = 0,8$  м;  $l_3 = 0,6$  м;  $l_4 = 0,2$  м;  $R = 0,2$  м;  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\theta = 60^\circ$ .

**Решение**

При движении рассматриваемого механизма стержни  $1$  и  $4$  совершают вращательные движения вокруг неподвижных осей  $O_1$  и  $O_2$  соответственно, стержни  $2, 3$  и каток  $B$  – плоскопараллельные движения.

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$  (рис. 4.5).

2. Определим скорости точек механизма. Модуль скорости точки  $A$  вычислим как скорость точки вращающегося кривошипа  $O_1A$ . Согласно (2.33)

$$V_A = \omega_1 l_1 = 1,6 \text{ м/с}, \quad \vec{V}_A \perp O_1A.$$

Вектор  $\vec{V}_A$  скорости точки  $A$  направим перпендикулярно к кривошипу  $O_1A$  в сторону его вращения (на рис. 4.5 в направлении угловой скорости  $\omega_1$ , изображенной дуговой стрелкой).

Определяем  $V_B$ . Вектор  $\vec{V}_B$  скорости точки  $B$  известен по направлению, так как эта точка кроме стержня  $2$  принадлежит катку, катящемуся без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости, и траекторией

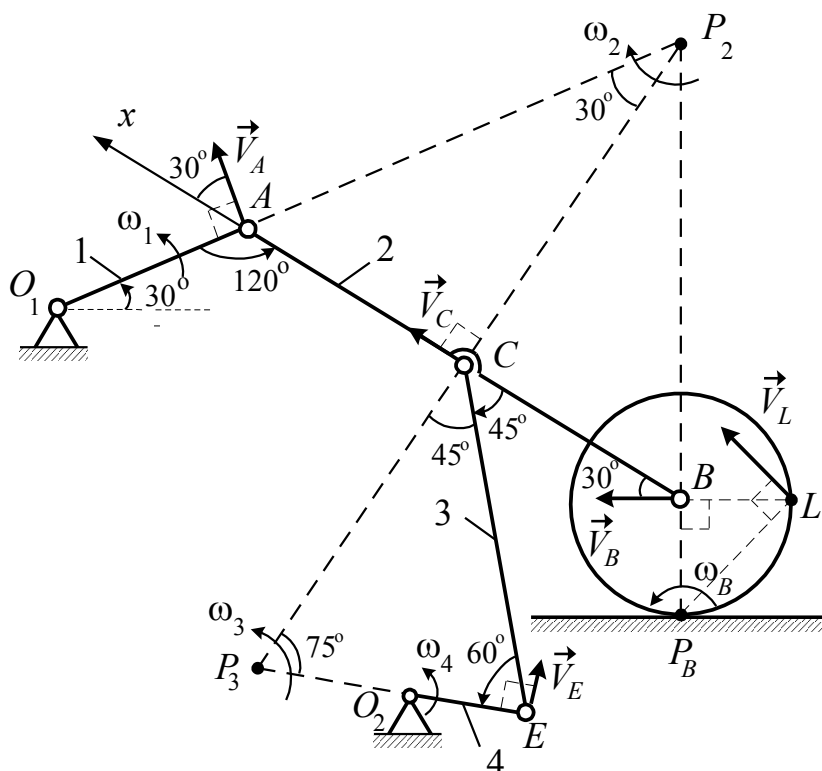


Рис. 4.5



точки  $B$  является прямой. Поэтому вектор  $\vec{V}_B$  направим параллельно неподвижной плоскости в сторону движения катка.

Теперь, зная направления  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$ , воспользуемся теоремой (2.44) о проекциях скоростей двух точек тела (стержня  $AB$ ) на ось, проходящую через эти точки (на ось  $x$ , проведенную вдоль стержня 2). Вычислив эти проекции, получим

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 30^\circ,$$

отсюда

$$V_B = V_A = 1,6 \text{ м/с}.$$

Находим  $\vec{V}_C$ . Поскольку точка  $C$  принадлежит стержню 2, то для определения ее скорости по модулю и направлению строим МЦС стержня  $AB$ . Для этого на рис. 4.5 восстановим перпендикуляры в точках  $A$  и  $B$  к скоростям  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  до их пересечения и найдем точку  $P_2$  – МЦС стержня 2. Направление вектора  $\vec{V}_A$  определяет направление поворота стержня  $AB$  вокруг  $P_2$  ( $\vec{V}_{P_2} = 0$ ). Вектор  $\vec{V}_C$  перпендикулярен отрезку  $P_2C$ , и, так как треугольник  $AP_2B$  является равносторонним (медиана  $CP_2$  является биссектрисой и высотой этого треугольника), в заданном положении механизма вектор  $\vec{V}_C$  направлен по стержню  $AB$  в сторону поворота звена 2 вокруг его МЦС –  $P_2$ . Величину  $V_C$  получим из пропорции (2.47) для МЦС:

$$\frac{V_C}{V_A} = \frac{CP_2}{AP_2}.$$

Отсюда

$$V_C = V_A \frac{CP_2}{AP_2} = V_A \cos 30^\circ \approx 1,39 \text{ м/с}, \quad \vec{V}_C \perp P_2C.$$

Определим скорость точки  $L$ . Так как точки  $B$  и  $L$  принадлежат катку, совершающему плоскопараллельное движение, то для определения скорости точки  $L$  по модулю и направлению воспользуемся методом МЦС, т. е. найдем точку катка, скорость которой равна нулю. Для катка, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости, такой точкой всегда является точка его касания  $P_B$  с этой плоскостью. Величину  $V_L$  получим из пропорции для МЦС –  $P_L$ :

$$\frac{V_L}{V_B} = \frac{LP_B}{BP_B},$$

тогда

$$V_L = V_B \frac{LP_B}{BP_B} = 1,6 \frac{R\sqrt{2}}{R} \approx 2,26 \text{ м/с} \quad \vec{V}_L \perp LP_B.$$

Направление вектора  $\vec{V}_B$  определяет в заданном положении направление поворота катка вокруг его МЦС –  $P_B$ , поэтому на рис. 4.5 вектор  $\vec{V}_L$  изобразим перпендикулярным расстоянию  $LP_B$  в направлении этого поворота.

Находим скорость  $\vec{V}_E$ . Поскольку кроме стержня 3 точка  $E$  принадлежит звену 4, совершающему вращательное движение вокруг оси  $O_2$ , поэтому траекторией точки  $E$  является окружность радиусом  $O_2E$  и на рис. 4.5 вектор  $\vec{V}_E$  ее скорости изобразим перпендикулярно радиусу  $O_2E$ .

Так как точки  $E$  и  $C$  принадлежат одному звену 3, совершающему плоскопараллельное движение, то для определения величины скорости точки  $E$  строим МЦС для этого звена. На рис. 4.5 восстановим в точках  $E$  и  $C$  перпендикуляры к их скоростям  $\vec{V}_E$  и  $\vec{V}_C$  до их пересечения и найдем точку  $P_3$  – МЦС стержня 3. По направлению вектора  $\vec{V}_C$  установим направление поворота стержня  $CE$  вокруг его мгновенного центра скоростей  $P_3$  для заданного положения механизма. Значение скорости точки  $E$  определим из пропорции (2.47) для  $P_3$ :

$$\frac{V_E}{V_C} = \frac{EP_3}{CP_3},$$

откуда

$$V_E = V_C \frac{EP_3}{CP_3}.$$

Расстояния  $EP_3$  и  $CP_3$  найдем из треугольника  $CP_3E$  по теореме синусов:

$$\frac{EP_3}{\sin 45^\circ} = \frac{CP_3}{\sin 60^\circ} = \frac{CE}{\sin 75^\circ}.$$

Отсюда

$$EP_3 = \frac{CE \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 0,439 \text{ м}; \quad CP_3 = \frac{CE \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 0,538 \text{ м}.$$

Тогда

$$V_E = V_C \frac{EP_3}{CP_3} \approx 1,13 \text{ м/с}.$$

3. Определим угловые скорости всех звеньев рассматриваемого плоского механизма. Вычислим  $\omega_2$ . Так как МЦС стержня 2 известен ( $P_2$ ) и  $AP_2 = BP_2 = AB = l_2 = 0,8$  м (треугольник  $AP_2B$  является равносторонним), то согласно (2.48)

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Каток  $B$  совершает мгновенный поворот вокруг его МЦС –  $P_B$ , поэтому согласно (2.48)

$$\omega_B = \frac{V_B}{BP_B} = \frac{V_B}{R} = 8 \text{ с}^{-1}.$$

Аналогично находим угловую скорость  $\omega_3$  для стержня 3:

$$\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} \approx 2,58 \text{ с}^{-1}.$$

Стержень 4 совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси  $O_2$ , поэтому согласно (2.33)

$$\omega_4 = \frac{V_E}{EO_2} = \frac{V_E}{l_4} \approx 5,65 \text{ с}^{-1}.$$

4. Найдем ускорение  $\vec{a}_A$ . Точка  $A$  принадлежит звену 1, вращающемуся вокруг неподвижной оси  $O_1$ . Следовательно, ее ускорение определяется согласно (2.34) как ускорение точки вращающегося тела:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n.$$

По формулам (2.35) и (2.36) определим числовые значения касательного  $a_A^\tau$  и нормального  $a_A^n$  ускорений:

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 0,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 6,4 \text{ м/с}^2.$$

Тогда согласно (2.37) находим модуль полного ускорения точки  $A$ :

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} \approx 6,45 \text{ м/с}^2.$$

*Ответ:*  $V_B = 1,6$  м/с;  $V_C = 1,39$  м/с;  $V_L = 2,26$  м/с;  $V_E = 1,13$  м/с;  
 $\omega_2 = 2 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_B = 8 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_3 = 2,58 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_4 = 5,65 \text{ с}^{-1}$ ;  $a_A = 6,45 \text{ м/с}^2$ .

### 4.5. Задача К2

Прямоугольная пластина (схемы 0–5) или круглая пластина радиусом  $R = 60$  см (схемы 6–9) на рис. 4.6 вращаются вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , заданной в табл. К2 (при знаке « $\rightarrow$ » направление  $\omega$  противоположно показанному на рисунке). Ось вращения на схемах 0–3 и 8–9 перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку  $O$  (пластина вращается в своей плоскости); на схемах 4–7 ось вращения  $O_1O$  лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой  $BD$  (схемы 0–5) или по окружности радиусом  $R$  (схемы 6–9), т. е. по ободу пластины, движется точка  $M$ . Закон ее относительного движения, т. е. зависимость  $s = AM = f(t)$  ( $s$  – в сантиметрах,  $t$  – в секундах) задана в табл. К2 отдельно для схем 0–4 и для схем 5–9; там же даны размеры  $b$  и  $l$ . На всех схемах рис. 4.6 точка  $M$  показана в положении, при котором  $s = AM > 0$  (при  $s < 0$  точка  $M$  находится по другую сторону от точки  $A$ ).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t = 1$  с.

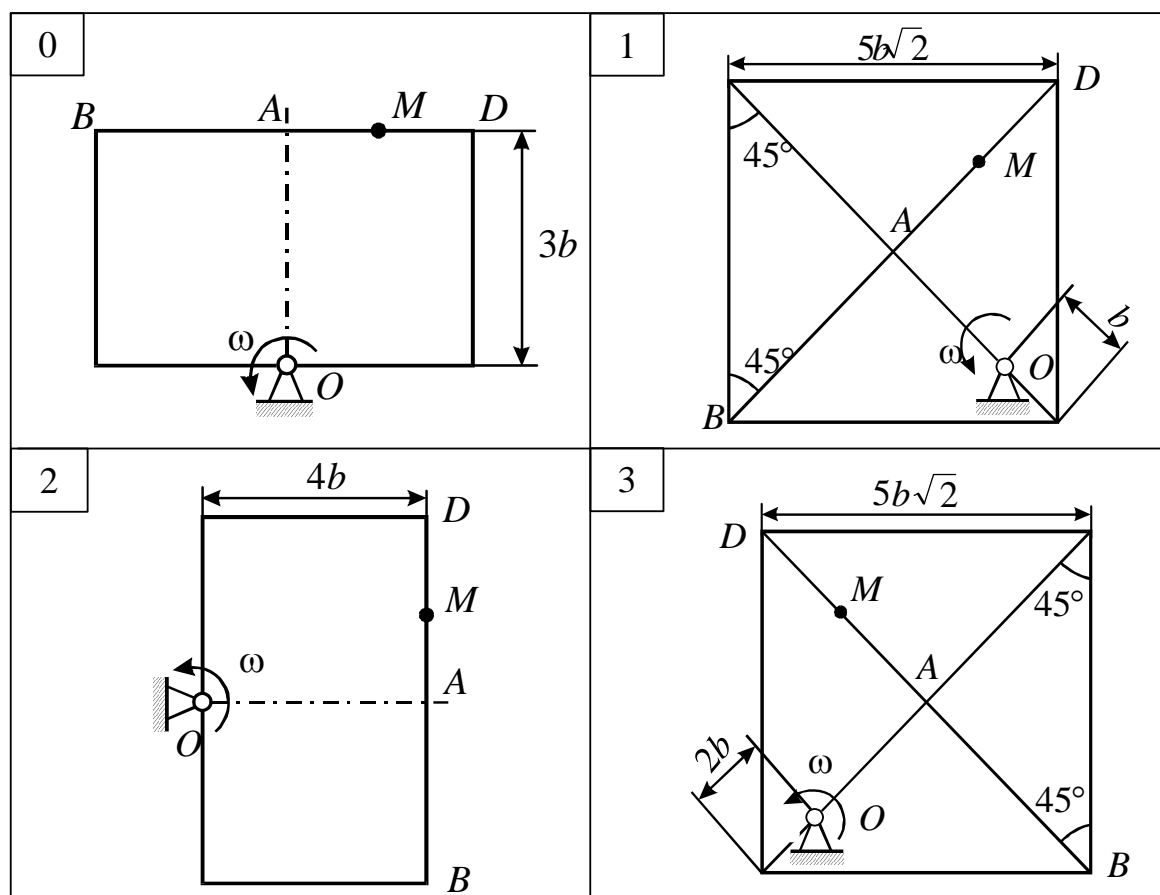


Рис. 4.6

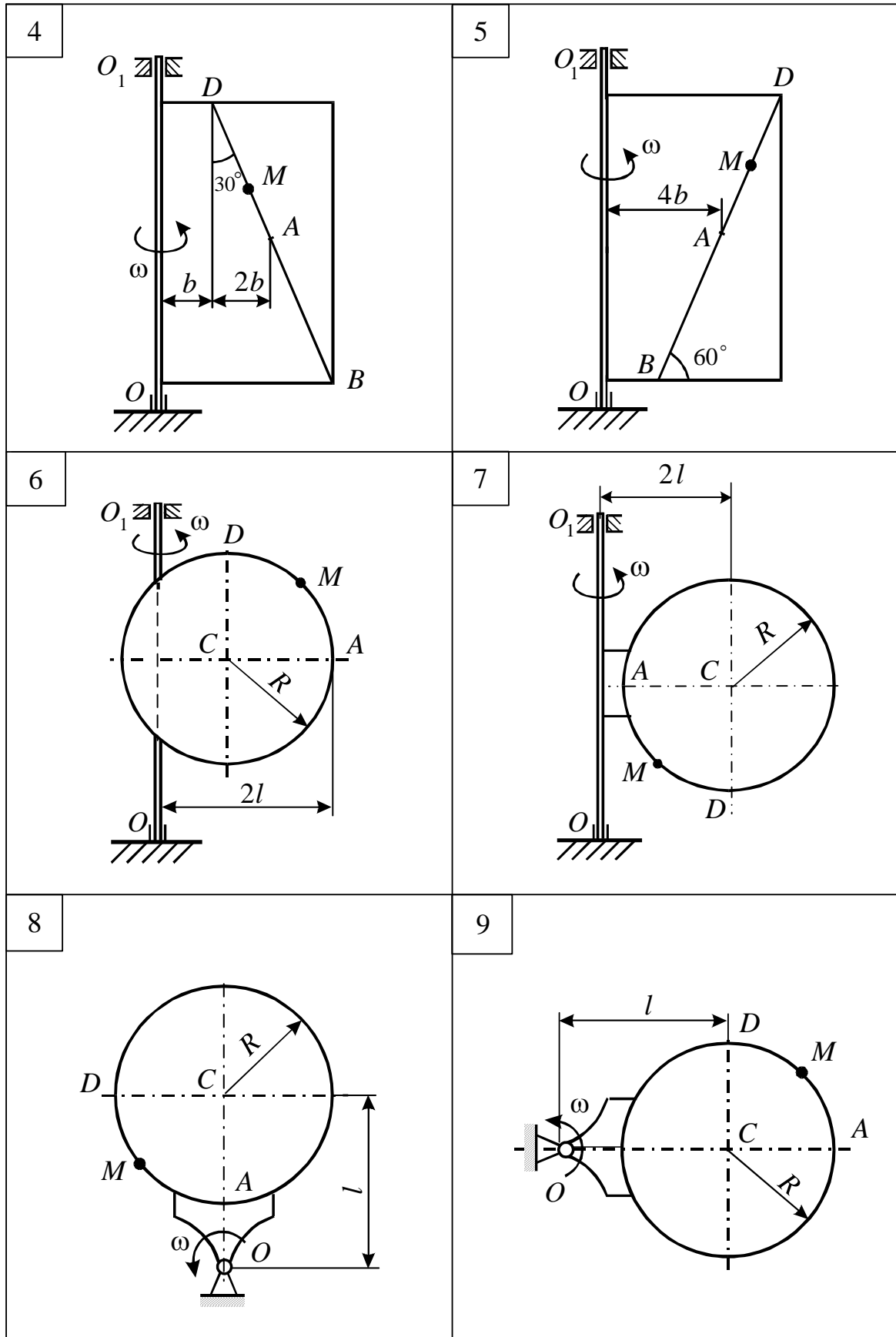


Рис. 4.6. Окончание

Таблица К2

Номер условия	Для всех схем $\omega, 1/c$	Для схем 0–5		Для схем 6–9	
		$b, \text{ см}$	$s = AM = f(t), \text{ см}$	$l, \text{ см}$	$s = \cup AM = f(t), \text{ см}$
0	-4	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$3R/4$	$\pi R(t^3 - 2t^2)/2$
1	2	12	$50(3t - t^2) - 64$	$R$	$\pi R(4t^2 - 2t^3)/3$
2	-2	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	$R$	$\pi R(t^4 - 3t^2)/3$
3	3	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	$R$	$\pi R(3t - t^2)/6$
4	4	20	$60(t^3 - 2t^2)$	$R$	$\pi R(t^3 - 2t)/3$
5	-5	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$4R/3$	$\pi R(2t^2 - t^3)/2$
6	2	8	$60(t^2 - t) + 24$	$R$	$\pi R(t - 5t^2)/6$
7	-3	10	$50(t^3 - t) - 30$	$R$	$\pi R(3t^2 - t)/3$
8	4	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$4R/3$	$\pi R(t - 2t^2)/2$
9	-5	10	$80(t^2 - t) + 40$	$R$	$\pi R(2t^2 - t)/3$

Указания. Порядок решения задачи К2 изложен в пункте I на стр. 59.

#### 4.6. Примеры решения задачи К2

**Пример К2.1.** Пластина  $OEAD$  ( $OE = OD$ ) равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega_e$  вокруг оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости пластины (рис. 4.7, а). По дуге окружности радиусом  $R$  движется точка  $M$  по закону  $s = \cup AM = f(t)$ , где  $s$  – в сантиметрах,  $t$  – в секундах (положительное направление отсчета  $s$  – от точки  $A$  к  $M$ ).

Определить абсолютной скорости и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t_1$ .

Решить задачу при следующих данных:  $R = 0,5$  м;  $\omega_e = -2$  рад/с;  $s = f(t) = \pi R \cos(\pi t/3)$  м;  $t_1 = 2$  с.

Решение

1. Точка  $M$  совершает сложное движение, поскольку она одновременно участвует в двух движениях. Свяжем с точкой  $O$  неподвижную систему координат  $OXYZ$ , направив  $OZ$  по оси вращения пластины  $OEAD$ , т. е. пластина всегда находится в плоскости  $OXY$  (рис. 4.7, б). Подвижную систему отсчета  $S_{xyz}$  (на рис. 4.7 не изображена) мысленно свяжем с вращающейся вокруг оси  $OZ$  пластиной  $OEAD$ , по которой движется точки  $M$ .

Тогда (см. определения на стр. 56) для точки  $M$  движение по пластине  $OEAD$  является относительным движением, а вращение вместе с пластиной  $OEAD$  вокруг перпендикулярной ей оси  $OZ$  – переносным движением.

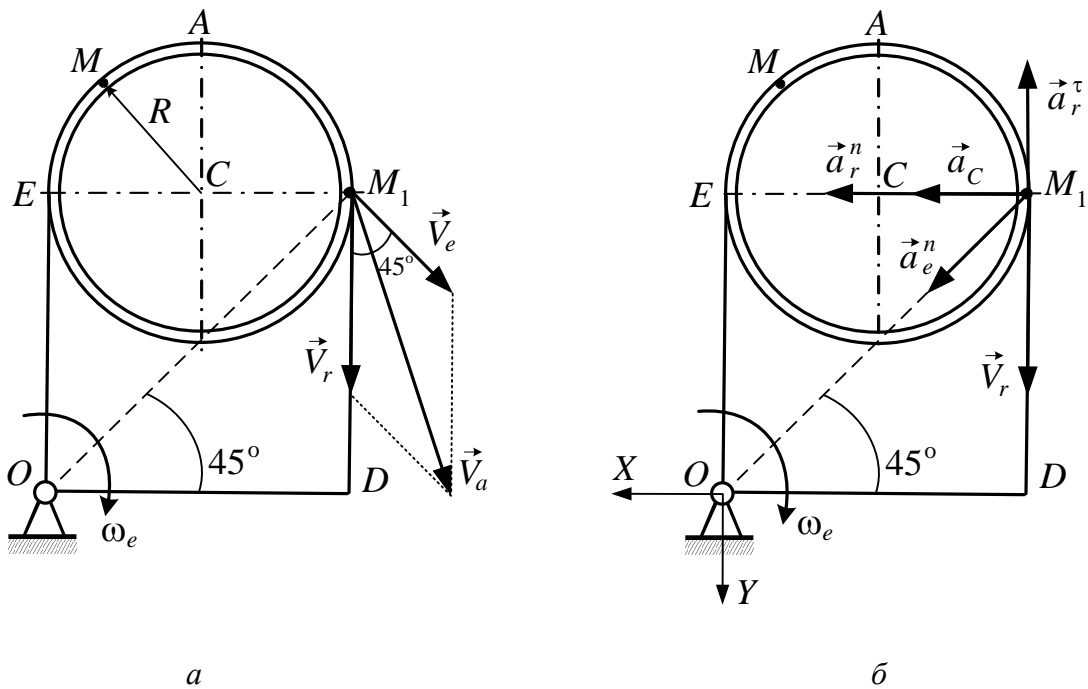


Рис. 4.7

Для определения абсолютной скорости  $\vec{V}_a$  точки  $M$  воспользуемся теоремой о сложении скоростей (2.55)

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r,$$

а ее абсолютного ускорения  $\vec{a}_a$  – теоремой Кориолиса (2.57)

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C.$$

2. Определим кинематические характеристики относительного движения точки  $M$ . Оно задано естественным способом (см. стр. 31-33) и представляет собой движение точки  $M$  по дуге окружности радиусом  $R$  пластины  $OEAD$  согласно закону

$$s = \overset{\circ}{AM} = \pi R \cos(\pi t/3). \quad (4.5)$$

Установим положение точки  $M$  на траектории относительного движения в момент времени  $t_1$ . Полагая в уравнении (4.5)  $t = 2$  с, получаем

$$s_1 = \pi R \cos(2\pi/3) = -0,5\pi R.$$

Тогда

$$\angle ACM_1 = \frac{s_1}{R} = -\frac{\pi}{2}.$$

Здесь знак « $\rightarrow$ » свидетельствует о том, что в заданный момент времени  $t_1$  точка  $M$  находится в положении отрицательных значений  $s$ , т. е. по другую сторону от точки  $A$ . Изобразим ее на рис. 4.7 при  $t_1 = 2$  с в этом положении (точка  $M_1$ ).

По формуле (2.11) определим числовое значение относительной скорости точки  $M$ :

$$V_r = \frac{ds}{dt} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin(\pi t/3),$$

и при  $t = t_1 = 2$  с

$$V_r = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin(2\pi/3) = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{12} \approx -1,42 \text{ м/с.} \quad (4.6)$$

Так как  $V_r < 0$ , то на рис. 4.7, *а* относительную скорость  $\vec{V}_r$  изобразим в точке  $M_1$  по касательной к окружности ( $\vec{V}_r \perp CM_1$ ) в сторону отрицательных  $s$ , т. е. вектор  $\vec{V}_r$  направим из точки  $M_1$  к точке  $D$ .

Поскольку траекторией относительного движения точки является окружность, то согласно (2.12) полное относительное ускорение  $\vec{a}_r$  точки  $M_1$  разложим на касательное и нормальное ускорения:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n. \quad (4.7)$$

Их числовые значения

$$a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos(\pi t/3), \quad a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = \frac{V_r^2}{R};$$

где  $\rho$  – радиус кривизны траектории относительного движения равен радиусу окружности  $R$ .

Для момента времени  $t = t_1 = 2$  с, учитывая, что  $R = 0,5$  м, получим

$$a_r^\tau = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos(2\pi/3) = \frac{\pi^3}{36} = 0,86 \text{ м/с}^2; \quad (4.8)$$

$$a_r^n = \frac{\pi^4}{24} = 4,06 \text{ м/с}^2.$$

Так как  $a_r^\tau > 0$ , то на рис. 4.7, *б* вектор  $\vec{a}_r^\tau$  изобразим в точке  $M_1$  по касательной к окружности в сторону положительного отсчета криволинейной координаты  $s$ , т. е. противоположно вектору относительной скорости  $\vec{V}_r$ , поскольку  $V_r < 0$  (при  $t_1 = 2$  с относительное движение замедленное); вектор  $\vec{a}_r^n$  направим из точки  $M_1$  к центру  $C$  окружности.



3. Определим кинематические характеристики переносного движения точки. Это движение для точки  $M_1$  – равномерное вращение вместе с пластиной  $OEAD$  вокруг оси  $OZ$  с угловой скоростью  $\omega_e = -2 \text{ с}^{-1} = \text{const}$  (на рис. 4.7 изобразим  $\omega_e$  с учетом знака по ходу часовой стрелки). Поэтому угловое ускорение переносного движения  $\varepsilon_e = d\omega_e / dt = 0$ .

Вычислим числовое значение переносной скорости  $\vec{V}_e$  точки  $M_1$  по формуле (2.33) как скорости точки вращающейся пластины  $OEAD$ :

$$V_e = \omega_e R_e = \omega_e OM_1 = -2 \frac{2R}{\cos 45^\circ} \approx -2,83 \text{ м/с.}, \quad (4.9)$$

где  $R_e = OM_1 = 2R\sqrt{2} = 1,41 \text{ м}$  – радиус окружности, которую описывала бы точка  $M_1$  при переносном вращении вместе с пластиной  $OEAD$  вокруг оси  $OZ$  в данный момент времени  $t_1 = 2 \text{ с}$ . На рис. 4.7, а изобразим вектор переносной скорости  $\vec{V}_e$  из точки  $M_1$  перпендикулярно радиусу  $OM_1$  в направлении  $\omega_e$ .

Полное переносное ускорение  $\vec{a}_e$  точки  $M_1$  найдем как ускорение точки равномерно вращающейся пластины  $OEAD$ . Согласно (2.34)

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n,$$

где числовые значения касательного  $\vec{a}_e^\tau$  и нормального  $\vec{a}_e^n$  ускорений переносного вращения при  $t_1 = 2 \text{ с}$  определяем по формулам (2.35) и (2.36):

$$a_e^\tau = \varepsilon_e R_e = 0; \quad a_e^n = \omega_e^2 R_e = 5,64 \text{ м/с}^2. \quad (4.10)$$

Следовательно,

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n. \quad (4.11)$$

На рис. 4.7, б в точке  $M_1$  изобразим вектор нормального ускорения  $\vec{a}_e^n$ , направив его из точки  $M_1$  по радиусу  $OM_1$  к оси  $OZ$ .

4. Определим ускорение Кориолиса  $\vec{a}_C$ . Вычислим модуль ускорения Кориолиса по формуле (2.59)

$$a_C = 2 |\vec{\omega}_e| |\vec{V}_r| \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{V}_r$  и  $\vec{\omega}_e$ .

В нашем случае угол  $\alpha$  равен  $90^\circ$ , так как ось  $OZ$ , по которой направлен вектор  $\vec{\omega}_e$  (см. стр. 39), перпендикулярна плоскости пластины  $OEAD$ , где

лежит вектор  $\vec{V}_r$ . В данный момент времени  $t_1 = 2$  с, так как  $|\vec{V}_r| = 1,42$  м/с, а  $|\vec{\omega}_e| = 2$  с<sup>-1</sup>, получим величину ускорения Кориолиса

$$a_C = 5,68 \text{ м/с}^2. \quad (4.12)$$

Направление вектора ускорения Кориолиса  $\vec{a}_C$  найдем по правилу Н. Е. Жуковского (см. стр. 58-59). Так как вектор  $\vec{V}_r$  уже лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{\omega}_e$ , то повернем его в точке  $M_1$  на  $90^\circ$  в направлении  $\omega_e$ , т. е. по ходу часовой стрелки, и изобразим вектор  $\vec{a}_C$  на рис. 4.7, б. (Направление  $\vec{a}_C = 2 \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$  можно найти по правилу построения вектора равного векторному произведению двух других векторов).

5. По теореме (2.55), геометрически складывая на рис. 4.7, а векторы относительной  $\vec{V}_r$  и переносной  $\vec{V}_e$  скоростей, определим вектор абсолютной скорости  $\vec{V}_a$ . Так как угол между векторами  $\vec{V}_r$  и  $\vec{V}_e$  равен  $45^\circ$ , то с учетом (4.6) и (4.9) модуль абсолютной скорости точки  $M_1$  находим по формуле (2.56):

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2|V_e||V_r|\cos 45^\circ} \approx 3,95 \text{ м/с.}$$

6. Определим абсолютное ускорение точки  $M_1$ . С учетом (4.7) и (4.11) теорема Кориолиса (2.57) для данной задачи принимает вид

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_C. \quad (4.13)$$

Поскольку все векторы, входящие в правую часть (4.13), лежат в плоскости  $OXY$  и направление вектора абсолютного ускорения  $\vec{a}_a$  точки  $M_1$  неизвестно, то в (4.13), используя формулу (2.6), разложим  $\vec{a}_a$  по декартовым осям:

$$a_{aX} \vec{i} + a_{aY} \vec{j} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_C. \quad (4.14)$$

Здесь  $a_{aX}$ ,  $a_{aY}$  – проекции вектора  $\vec{a}_a$  на декартовы оси  $OX$  и  $OY$  соответственно.

Проецируя векторное равенство (4.14) на оси  $OX$ ,  $OY$  и подставляя модули найденных в (4.8), (4.10) и (4.12) векторов ускорений, получим:

$$\begin{aligned} a_{aX} &= a_r^n + a_C + a_e^n \cos 45^\circ = 13,7 \text{ м/с}^2; \\ a_{aY} &= a_e^n \cos 45^\circ - |a_r^\tau| = 3,6 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Тогда величину абсолютного ускорения точки  $M_1$  найдем по формуле (2.60):

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} \approx 14,17 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, при  $t_1 = 2$  с модуль абсолютной скорости точки  $M_1$  равен  $V_a = 3,9$  м/с, а величина ее абсолютного ускорения  $a_a = 14,17$  м/с<sup>2</sup>.

*Ответ:*  $V_a = 3,95$  м/с;  $a_a = 37$  м/с<sup>2</sup>.

**Пример К2.2.** Круглая пластина радиусом  $R$  равномерно вращается вокруг оси  $OO_1$  с угловой скоростью  $\omega_e$ ; ось вращения  $OO_1$  лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве) (рис. 4.8). По ободу пластины движется точка  $M$  по закону  $s = \cup AM = f(t)$  ( $s$  – в сантиметрах,  $t$  – в секундах); на рис. 4.8 точка  $M$  изображена при  $s > 0$ .

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t = 1$  с.

Решить задачу при следующих данных:  $R = 60$  см;  $\omega_e = 2$  рад/с;  $s = f(t) = \pi R (3t - t^2) / 6$  см;  $h = R$ .

**Решение**

1. Точка  $M$  совершает сложное движение, поскольку она одновременно участвует в двух движениях: в относительном движении по ободу пластины вокруг центра  $C$  и в переносном вращении вместе с пластиной вокруг неподвижной оси  $OO_1$ .

Введем неподвижную декартову систему координат  $OXYZ$ , связанную с осью  $OO_1$  так, что при  $t = 1$  с пластина находится в плоскости  $OYZ$ .

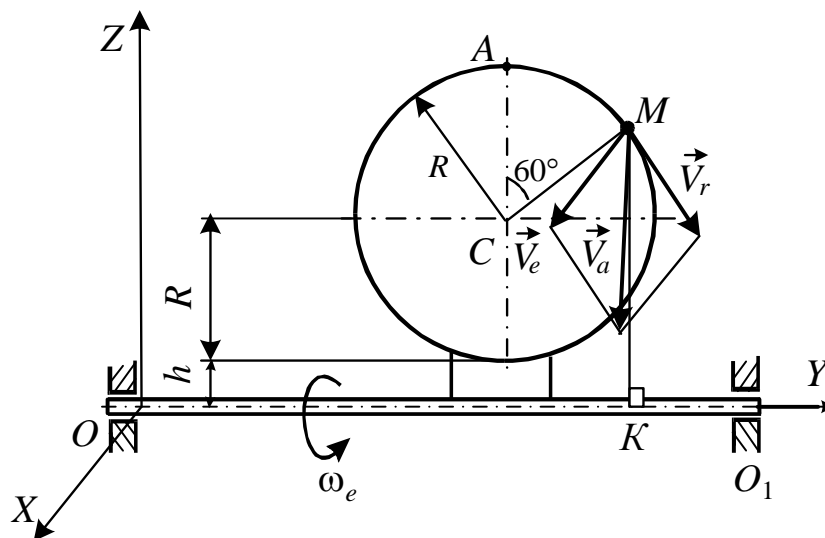


Рис. 4.8

Тогда абсолютную скорость точки  $\vec{V}_a$  и ее абсолютное ускорение  $\vec{a}_a$  можно найти по формулам (2.55) и (2.57):

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r,$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C, .$$

2. Рассмотрим относительное движение точки, заданное естественным способом:

$$s = \cup AM = \frac{\pi R}{6} (3t - t^2).$$

В момент времени  $t = 1$  с определим положение точки  $M$  на траектории относительного движения – окружности радиусом  $R$ . Для этого вычислим длину дуги  $AM$  при  $t = 1$  с:

$$s_1 = \cup AM = \frac{\pi R}{6} (3 \cdot 1 - 1^2) = \frac{\pi R}{3} \text{ см.}$$

Тогда центральный угол, стягивающий дугу  $AM$ ,

$$\angle ACM = \frac{S_1}{R} = \frac{\pi}{3} \text{ рад,}$$

т. е.  $\angle ACM = 60^\circ$ . На рис. 4.8 и 4.9 изобразим точку  $M$  в этом положении.

По формуле (2.11) находим относительную скорость точки  $M$ :

$$V_r = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\pi R}{6} (3t - t^2) \right] = \frac{\pi R}{6} (3 - 2t).$$

При  $t = 1$  с

$$V_r = \frac{\pi R}{6} (3 - 2 \cdot 1) = 31,4 \text{ см/с.}$$

Так как числовое значение относительной скорости в данный момент величина положительная ( $V_r > 0$ ), то на рис. 4.8 вектор относительной скорости  $\vec{V}_r$  направим по касательной к окружности в точке  $M$  ( $\vec{V}_r \perp MC$ ) в сторону положительного отсчета криволинейной координаты  $s$ .

Поскольку траекторией относительного движения точки  $M$  является окружность радиусом  $R$ , то по теореме Гюйгенса (2.12) имеем

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n,$$

где числовые значения касательного и нормального ускорений в относительном движении точки  $M$  вычисляем по формулам:

$$a_r^{\tau} = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\pi R}{6} (3 - 2t) \right] = -\frac{\pi R}{3} = -62,8 \text{ см/с}^2,$$

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{31,4^2}{60} = 16,4 \text{ см/с}^2.$$

На рис. 4.9, поскольку  $a_r^{\tau} < 0$ , то вектор ускорения  $\vec{a}_r^{\tau}$  направим по касательной к окружности в точке  $M$  в сторону отрицательного отсчета криволинейной координаты  $s$ , т. е. противоположно вектору  $\vec{V}_r$ , так как  $V_r > 0$  (в данный момент времени  $t = 1$  с относительное движение – замедленное). Вектор нормального ускорения  $\vec{a}_r^n$  изобразим из точки  $M$  по радиусу к центру  $C$  окружности.

3. Определим кинематические характеристики переносного движения точки  $M$ . Это движение – вращение вместе с круглой пластиной вокруг неподвижной оси  $OO_1$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_e = 2 \text{ с}^{-1} = \text{const} > 0$ ; на рис. 4.8 и 4.9 изобразим угловую скорость  $\omega_e$  дуговой стрелкой в направлении против хода часовой стрелки вокруг оси  $OY$ . Поэтому угловое ускорение переносного вращения  $\varepsilon_e = d\omega_e / dt = 0$ .

Определим переносную скорость  $\vec{V}_e$  точки  $M$ . Переносной скоростью точки  $M$  является скорость той точки круглой пластины, с которой при  $t = 1$  с совпадает точка  $M$ .

При переносном вращении с пластиной точка  $M$  описывает окружность радиусом  $MK$  в плоскости, перпендикулярной оси вращения  $OY$ . Поэтому величина переносной скорости определяется по формуле (2.33) как скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$V_e = |\omega_e| R_e.$$

Найдем радиус  $R_e$  траектории переносного движения точки  $M$  при  $t = 1$  с (см. рис. 4.8):  $R_e = MK = h + R + R \cos 60^\circ = 5R/2 = 150$  см. Тогда при  $t = 1$  с величина  $V_e = 300$  см/с. На рис. 4.8 изобразим вектор  $\vec{V}_e$  перпендикулярно радиусу  $MK$  в направлении переносного вращения (по  $\omega_e$ ), т. е. параллельно оси  $OX$ .

Переносное ускорение точки  $M$  определяется согласно (2.34) как ускорение точки пластины, вращающейся вокруг неподвижной оси:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^n,$$

Величины нормальной и касательной составляющих переносного ускорения точки  $M$  вычислим по формулам (2.35) и (2.36):

$$a_e^\tau = \omega_e^2 R_e = 600 \text{ см/с}^2, \quad a_e^n = \varepsilon_e R_e = 0.$$

Следовательно, переносное ускорение точки  $M$  равно нормальному ускорению:  $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n$ . На рис. 4.9 вектор  $\vec{a}_e^n$  направим из точки  $M$  по радиусу  $MK$  к оси переносного вращения  $OY$ .

4. Определим ускорение Кориолиса  $\vec{a}_C$ . Вычислим модуль ускорения Кориолиса по формуле (2.59)

$$a_C = 2 |\vec{\omega}_e| |\vec{V}_r| \sin \alpha.$$

Здесь  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{V}_r$  и  $\vec{\omega}_e$ , равен  $60^\circ$  (см. рис. 4.9). В момент времени  $t = 1$  с, так как  $|\vec{V}_r| = 31,4$  см/с,  $|\vec{\omega}_e| = 2$  с $^{-1}$ , а  $\sin 60^\circ = 0,866$ , то величина ускорения Кориолиса  $a_C = 108,8$  см/с $^2$ .

Направление вектора  $\vec{a}_C$  найдем по правилу Н. Е. Жуковского (см. стр. 58-59): спроецируем вектор относительной скорости точки  $\vec{V}_r$  на плоскость  $OXZ$ , перпендикулярную оси  $OY$  (перпендикулярную вектору  $\vec{\omega}_e$ ), а затем повернем эту проекцию в плоскости  $OXZ$  на  $90^\circ$  в направлении переносного вращения (по  $\omega_e$ ). На рис. 4.9 изобразим вектор  $\vec{a}_C$  в точке  $M$ , направив его противоположно оси  $OX$ ; (направление ускорения  $\vec{a}_C$  можно найти, учитывая, что  $\vec{a}_C = 2 \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$ ).

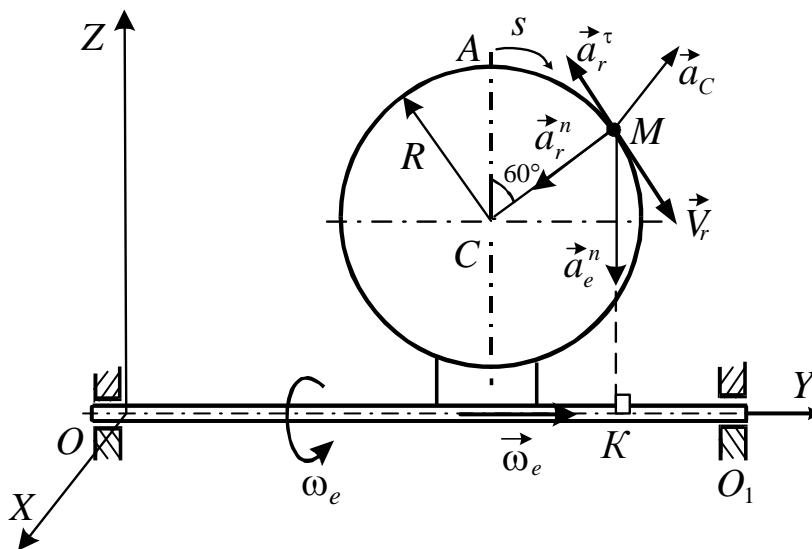


Рис. 4.9

5. Определим абсолютную скорость точки  $M$ . По теореме (2.55) геометрически складывая векторы  $\vec{V}_e$  и  $\vec{V}_r$  (рис. 4.8), найдем вектор абсолютной скорости  $\vec{V}_a$  точки  $M$ . Так как вектор относительной скорости  $\vec{V}_r$  лежит в плоскости  $OYZ$ , а вектор переносной скорости  $\vec{V}_e$  направлен вдоль оси  $OX$ , то угол между ними  $\alpha = 90^\circ$ . Поэтому находим модуль абсолютной скорости точки  $M$  по формуле (2.56)

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{300^2 + 31,4^2} = 301,6 \text{ см/с.}$$

6. Для определения абсолютного ускорения точки  $M$  запишем теорему Кориолиса (2.57) в развернутом виде для данной задачи:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_C.$$

Поскольку направление вектора абсолютного ускорения  $\vec{a}_a$  точки  $M$  неизвестно, то в данном равенстве, используя формулу (2.6), разложим его на составляющие векторы по осям декартовой системы  $OXYZ$ :

$$a_{aX}\vec{i} + a_{aY}\vec{j} + a_{aZ}\vec{k} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_C. \quad (4.15)$$

Здесь  $a_{aX}$ ,  $a_{aY}$  и  $a_{aZ}$  – проекции вектора абсолютного ускорения  $\vec{a}_a$  точки  $M$  на оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  соответственно.

Проецируя векторное равенство (4.15) на оси неподвижного трехгранника  $OXYZ$  и подставляя модули найденных выше векторов ускорений, получаем:

$$a_{aX} = -a_C = -108,8 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{aY} = -a_r^n \cos 30^\circ - |a_r^\tau| \cos 60^\circ = -45,6 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{aZ} = -a_e^n - a_r^n \cos 60^\circ + |a_r^\tau| \cos 30^\circ = -553,8 \text{ см/с}^2.$$

Тогда модуль абсолютного ускорения точки  $M$  при  $t = 1$  с найдем по формуле (2.60):

$$a_a = \sqrt{a_{aX}^2 + a_{aY}^2 + a_{aZ}^2} = 566,2 \text{ см/с}^2.$$

Следовательно, в момент времени  $t = 1$  с вектор абсолютного ускорения точки  $M$   $\vec{a}_a = -108,8\vec{i} - 45,6\vec{j} - 553,8\vec{k}$ , а его модуль  $a_a = 566,2 \text{ см/с}^2$ .

*Ответ:*  $V_a = 301,6 \text{ см/с}$ ,  $a_a = 566,2 \text{ см/с}^2$ .

**Примечание.** Случай, когда в задаче К2 точка  $M$  движется по пластине вдоль прямой  $BD$ , был рассмотрен выше в примере 2.6 на стр. 60.

### 4.7. Задача Д1

Груз  $D$  массой  $m$ , получив в точке  $A$  начальную скорость  $V_0$ , движется в изогнутой трубе  $ABC$ , расположенной в вертикальной плоскости (рис. 4.10, табл. Д1).

На участке  $AB$  на груз кроме силы тяжести действует постоянная сила  $\vec{Q}$  (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды  $\vec{R}$ , зависящая от скорости груза (направленная против движения).

В точке  $B$  груз, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок  $BC$ , где на него кроме силы тяжести действует переменная сила  $\vec{F}$ , параллельная оси  $x$ , проекция которой  $F_x$  на ось  $x$  задана в табл. Д1.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние  $AB = l$  или время  $t_1$  движения от точки  $A$  до точки  $B$ , найти закон движения груза  $D$  на участке  $BC$ , т. е.  $x = f(t)$ , где  $x = BD$ . Трением груза о трубу пренебречь.

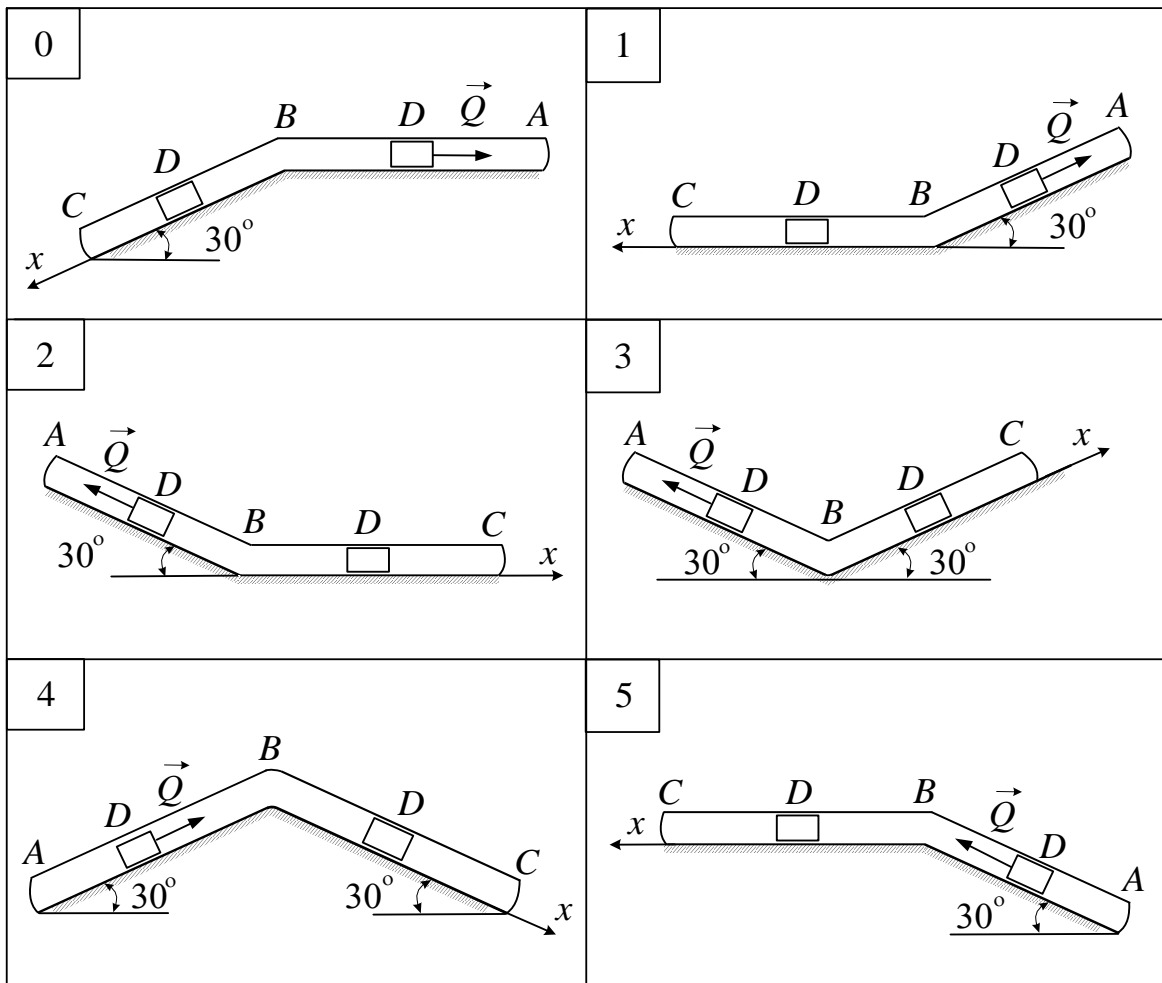


Рис. 4.10



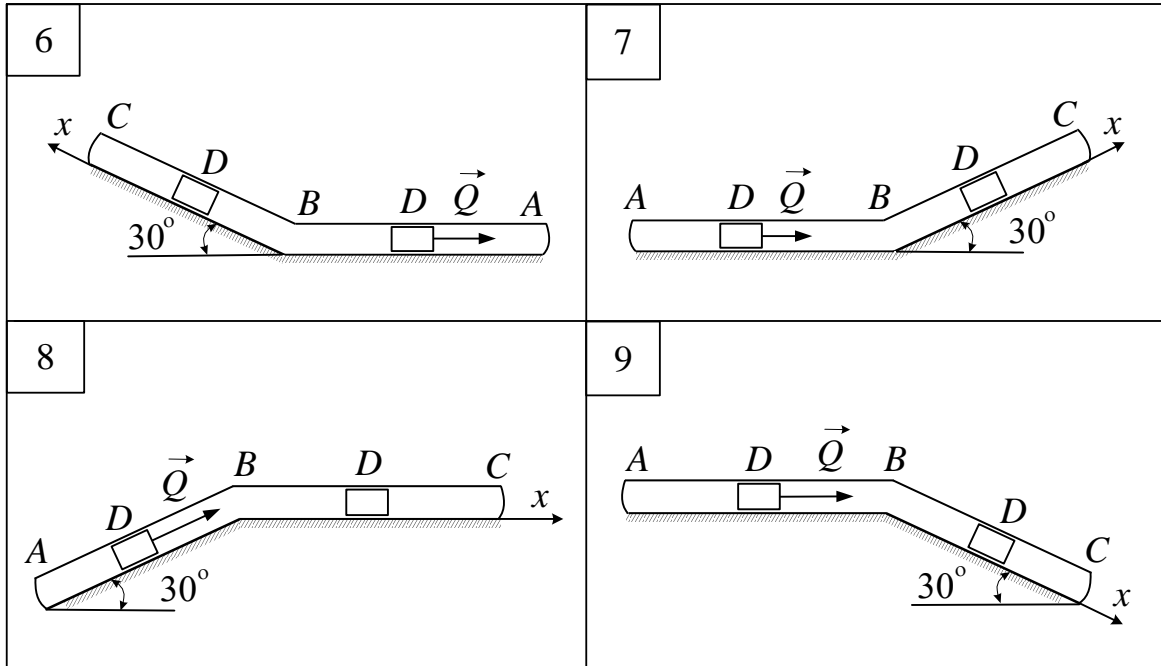


Рис. 4.10. Окончание

Таблица Д1

Номер условия	$m$ , кг	$V_0$ , м/с	$Q$ , Н	$R$ , Н	$l$ , м	$t_1$ , с	$F_x$ , Н
0	8,0	10	16,0	$0,5V^2$	4,0	–	$12\sin(2t)$
1	3,0	22	9,0	$0,5V$	–	3,0	$-4\cos(4t)$
2	2,4	12	6,0	$0,8V^2$	1,5	–	$6t$
3	1,8	24	5,0	$0,3V$	–	2,0	$9t^2$
4	4,8	10	12,0	$0,2V^2$	4,0	–	$-6\sin(4t)$
5	1,6	18	4,0	$0,4V$	–	2,0	$4\cos(4t)$
6	6,0	14	22,0	$0,6V^2$	5,0	–	$-3\cos(2t)$
7	2,0	20	6,0	$0,4V$	–	2,5	$2\sin(4t)$
8	4,0	12	12,0	$0,8V^2$	2,5	–	$16\cos(2t)$
9	4,5	24	9,0	$0,5V$	–	3,0	$-9\sin(3t)$

*Указания.* Задача Д1 – на интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки Ее решение следует разбить на две части.

I. Составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения точки (груза  $D$ ) на участке  $AB$ ; затем определив скорость груза в точке  $B$ , принять ее за начальную скорость при движения на участке  $BC$ .

II. Составить и дважды проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза  $D$  на участке  $BC$ , ведя отсчет времени от момента, когда он находился в точке  $B$ , (в этот момент  $t = 0$ ). На участке  $BC$  направление координатной оси  $x$  задано, а на участке  $AB$  координатную ось следует выбрать самостоятельно в направлении движения груза.

Интегрирование производится методами, известными из курса высшей математики и зависящими от вида полученного уравнения. В тех случаях, когда на материальную точку кроме постоянных сил действует одна переменная сила, зависящая или только от времени, или только от координаты, или же только от скорости, уравнение движения можно проинтегрировать методом разделения переменных. При интегрировании дифференциального уравнения на участке  $AB$  в случае, когда в таблице Д1 задана длина  $l$  участка, следует от дифференцирования по времени  $t$  перейти к дифференцированию по координате, например,  $z$ , учитывая что

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = V_z \frac{dV_z}{dz}.$$

Фактически задача Д1 относится ко второй задаче динамики материальной точки, порядок решения которой был изложен на стр. 73.

#### 4.8. Пример решения задачи Д1

Груз  $D$  массой  $m$ , получив в точке  $A$  начальную скорость  $V_0$ , движется в изогнутой трубе  $ABC$ , расположенной в вертикальной плоскости (рис. 4.11). Участок  $AB$  трубы составляет с горизонтом угол  $\alpha$ , а участок  $BC$  – угол  $\beta$ . На участке  $AB$  трубы на груз кроме силы тяжести действует постоянная сила  $\vec{Q}$  и сила сопротивления среды  $\vec{R} = -\mu\vec{V}$ .

В точке  $B$  груз  $D$ , не изменяя величины своей скорости, переходит на участок  $BC$ , где на него кроме силы тяжести действует переменная сила  $\vec{F}$ , проекция  $F_x$  которой на ось  $x$  задана.

Считая груз  $D$  материальной точкой и зная время  $t_1$  его движения от точки  $A$  до точки  $B$ , найти закон движения груза на участке  $BC$ , т. е.  $x = x(t)$ , где  $x = BD$  ( $g = 10 \text{ м/с}^2$ ). Трением груза о трубу пренебречь.

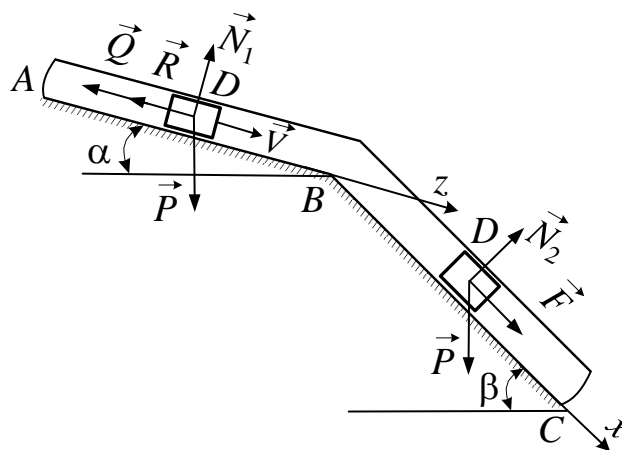


Рис. 4.11

Решить задачу при следующих данных:  $m = 2$  кг;  $\mu = 0,4$  кг/с;  $V_0 = 5$  м/с;  $Q = 6$  Н;  $t_1 = 5$  с;  $F_x = -16\sin(4t)$  Н;  $f = 0,1$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 45^\circ$ .

Р е ш е н и е

I. Рассмотрим движение груза  $D$  на участке  $AB$ .

1. Считая груз  $D$  материальной точкой, изобразим его в произвольном положении.

2. Проведем ось  $Az$  в направлении движения груза  $D$  (из точки  $A$  к точке  $B$ ) и запишем начальные условия движения на участке  $AB$ :

$$t = 0, \quad z(0) = 0, \quad V_z(0) = V_0. \quad (4.16)$$

3. Изобразим на рис. 4.11 действующие на груз силы: силу тяжести  $\vec{P} = m\vec{g}$ , силу  $\vec{Q}$ , силу сопротивления среды  $\vec{R}$ , направив ее против скорости движения груза (против оси  $Az$ ), и нормальную реакцию  $\vec{N}_1$  гладкой наклонной плоскости.

4. Составим дифференциальное уравнение движения точки (груза  $D$ ) в проекции на ось  $Az$ . Для этого спроецируем основной закон динамики (3.4) на эту ось

$$ma_z = \sum F_{kz}$$

или

$$ma_z = P_z + Q_z + R_z.$$

Вычислив проекции действующих сил на ось  $Az$ , находим

$$m \frac{dV}{dt} = P \sin \alpha - Q - R,$$

где  $a_z = dV_z/dt \equiv dV/dt$ . Учитывая, что  $P = mg$ , а  $R = \mu V_z \equiv \mu V$ , получаем

$$m \frac{dV}{dt} = mg \sin \alpha - Q - \mu V.$$

5. Это дифференциальное уравнение, переменными которого являются  $V$  и  $t$ , допускает их разделение:

$$\frac{dV}{\left( V - \frac{mg \sin \alpha - Q}{\mu} \right)} = -\frac{\mu}{m} dt$$

или с учетом исходных данных

$$\frac{dV}{V - 10} = -0,2 dt. \quad (4.17)$$

Вычислим определенные интегралы от левой и правой частей равенства (4.17), в которых нижние пределы соответствуют начальным условиям (4.16), а верхние пределы – значениям скорости  $V_B$  и времени  $t_1$ , когда груз  $D$  окажется в точке  $B$ :

$$\int_{V_0}^{V_B} \frac{dV}{V-10} = -0,2 \int_0^{t_1} dt.$$

Отсюда находим

$$\ln \frac{V_B - 10}{V_0 - 10} = -0,2t_1$$

или, потенцируя это равенство, получим

$$\frac{V_B - 10}{V_0 - 10} = e^{-0,2t_1}.$$

Отсюда вычислим величину скорости груза в точке  $B$ , подставив исходные данные:

$$V_B = 10 + (V_0 - 10)e^{-0,2t_1} = 8,15 \text{ м/с.}$$

II. Рассмотрим движение груза  $D$  на участке  $BC$ .

1. Изобразим на рис 4.11 материальную точку (груз  $D$ ) на участке  $BC$  в произвольном положении.

2. Проведем из точки  $B$  ось  $Bx$  по скорости груза  $D$ , и запишем начальные условия движения (при движении на участке  $BC$  найденная выше скорость  $V_B$  будет начальной скоростью:  $V_0 = V_B$ ):

$$t = 0, \quad x(0) = 0, \quad V_x(0) = V_B = 8,15 \text{ м/с.} \quad (4.18)$$

3. Изобразим на рис. 4.11 действующие на груз  $D$  силы: силу тяжести  $\vec{P} = m\vec{g}$ , нормальную реакцию гладкой наклонной плоскости  $\vec{N}_2$  и переменную силу  $\vec{F}$ , зависящую от времени.

4. Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось  $Bx$ :

$$m \frac{dV_x}{dt} = P_x + N_{2x} + F_x;$$

или

$$m \frac{dV_x}{dt} = P \sin \beta + F_x.$$

Так как  $P = mg$ ,  $F_x = -16\sin(4t)$ , а  $V_x \equiv V$ , то это уравнение примет вид

$$m \frac{dV}{dt} = mg \sin \beta - 16\sin(4t).$$

Разделив обе части данного равенства на  $m = 2$  кг и полагая  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, получим

$$\frac{dV}{dt} = 7,07 - 8\sin(4t). \quad (4.19)$$

Умножая обе части уравнения (4.19) на  $dt$  и интегрируя, находим

$$V = 7,07t + 2\cos(4t) + C_1. \quad (4.20)$$

Для определения постоянной интегрирования  $C_1$  подставим начальные условия (4.18) в найденную зависимость скорости от времени (4.20), получим

$$V_B = 0 + 2\cos(0) + C_1.$$

Отсюда находим

$$C_1 = V_B - 2\cos(0) = 8,15 - 2 = 6,15 \text{ м/с.}$$

Подставив полученное значение  $C_1$ , запишем зависимость (4.20)

$$V = 7,07t + 2\cos(4t) + 6,15$$

или

$$\frac{dx}{dt} = 7,07t + 2\cos(4t) + 6,15.$$

Умножая обе части этого уравнения на  $dt$  и снова интегрируя, находим

$$x = 3,54t^2 + 0,5\sin(4t) + 6,15t + C_2. \quad (4.21)$$

Подставляя в (4.21) начальные условия (4.18), получим  $C_2 = 0$ . Тогда искомый закон движения груза  $D$  вдоль оси  $Bx$  имеет вид

$$x = 3,54t^2 + 0,5\sin(4t) + 6,15t,$$

где  $x$  – в метрах,  $t$  – в секундах.

*Ответ:*  $x = 4,08t^2 + 0,5\sin(4t) + 6,15t$ , м.

### 4.9. Задача Д2

Механическая система (рис. 4.12, табл. Д2) состоит из грузов 1 и 2 (коэффициент трения скольжения грузов о плоскость  $f = 0,1$ ), цилиндрического сплошного однородного катка 3 и ступенчатых шкивов 4 и 5 с радиусами ступеней  $R_4 = 0,3$  м,  $r_4 = 0,1$  м,  $R_5 = 0,2$  м,  $r_5 = 0,1$  м (массу каждого шкива считать распределенной по его внешнему ободу). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

Под действием постоянной силы  $\vec{F}$  система приводится в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 4 и 5 действуют постоянные моменты сил сопротивления, равные соответственно  $M_4$  и  $M_5$ .

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы  $\vec{F}$  равно  $s_1$ . Искомая величина указана в столбце «Найти» табл. Д2, где введены обозначения:  $V_1$  – скорость груза 1,  $V_{C3}$  – скорость центра масс катка 3,  $\omega_4$  – угловая скорость тела 4 и т. д.

Таблица Д2

Номер условия	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$m_3$ , кг	$m_4$ , кг	$m_5$ , кг	$M_4$ , Н·м	$M_5$ , Н·м	$F$ , Н	$s_1$ , м	Найти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	350	1,0	$V_1$
1	6	0	2	0	8	0,6	0	320	1,2	$\omega_5$
2	0	4	6	8	0	0	0,4	380	0,8	$V_{C3}$
3	0	2	4	0	10	0,3	0	340	0,6	$V_2$
4	8	0	2	6	0	0	0,6	330	0,4	$\omega_4$
5	8	0	4	0	6	0,9	0	340	1,2	$V_1$
6	0	6	2	8	0	0	0,8	360	1,0	$\omega_4$
7	0	4	6	0	10	0,6	0	330	0,8	$\omega_5$
8	6	0	4	0	8	0,3	0	340	1,6	$V_{C3}$
9	0	4	6	10	0	0	0,4	350	1,4	$V_2$

*Указания.* Задача Д2 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы (3.71). Порядок решения задачи приведен на стр. 91.

Когда по данным табл. Д2 масса груза 1  $m_1 = 0$  (или  $m_2 = 0$ ), то груз 1 (или 2) на чертеже не изображать. Шкивы 4 и 5 всегда входят в механическую систему (даже если их масса равна нулю). Момент сил сопротивления  $M_4$  (или  $M_5$ ) приложить к шкиву 4 (или 5) в сторону, противоположную его вращению.

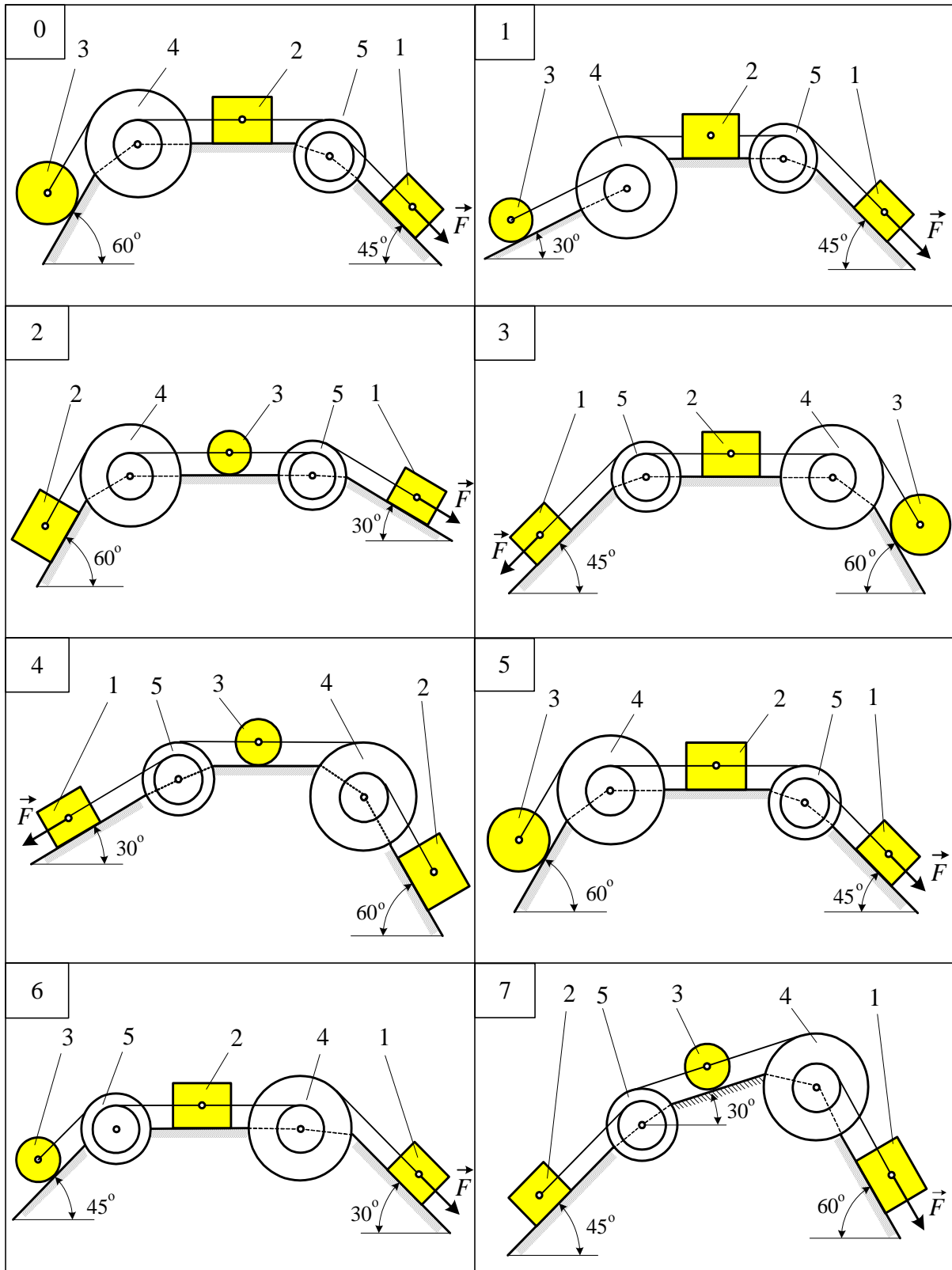


Рис. 4.12

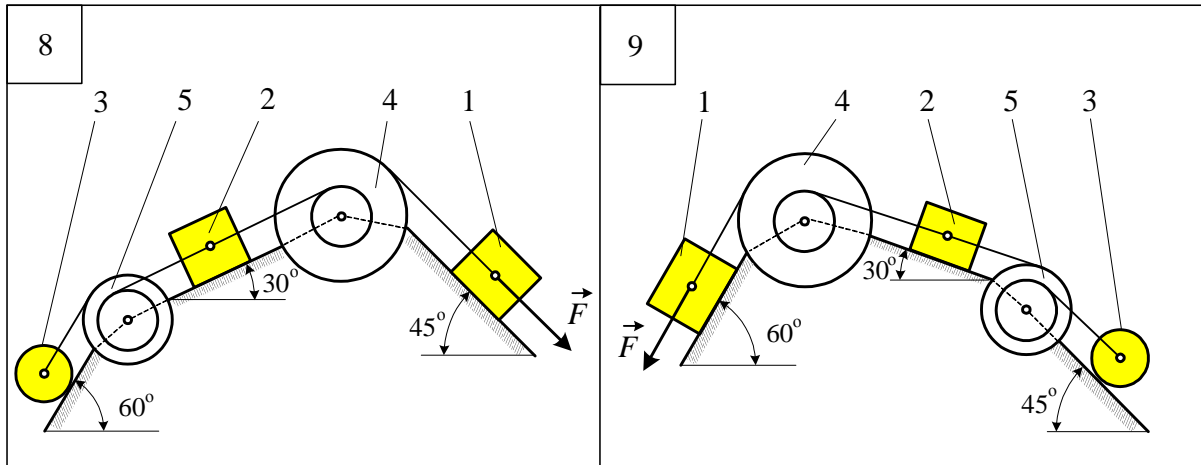


Рис. 4.12. Окончание

### 4.10. Пример решения задачи Д2

Механическая система (рис. 4.13) состоит из грузов  $1$  и  $3$  (коэффициент трения скольжения груза с плоскостью равен  $f$ ), ступенчатого шкива  $2$  с радиусами ступеней  $R_2$  и  $r_2$  (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и сплошного цилиндрического катка  $4$ . Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив  $2$ .

Под действием постоянной силы  $\vec{F}$  система приводится в движение из состояния покоя. При движении на шкив  $2$  действует постоянный момент  $M_2$  сил сопротивления. Определить скорость  $V_1$  груза  $1$ , когда он опустится на высоту, равную  $s_1$ .

Решить задание при следующих данных:  $m_1 = 2$  кг;  $m_2 = 3$  кг;  $m_3 = 2$  кг;  $m_4 = 6$  кг;  $R_2 = 0,2$  м;  $r_2 = 0,1$  м;  $f = 0,2$ ;  $M_2 = 0,5$  Н·м;  $F = 60$  Н;  $s_1 = 1,0$  м.

**Решение**

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из грузов  $1$  и  $3$ , ступенчатого шкива  $2$  и катка  $4$ .

Поскольку тела рассматриваемой системы связаны друг с другом нерастяжимыми нитями, то для определения скорости  $V_1$  груза  $1$  воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы (3.71).

2. Вычислим кинетическую энергию  $T$  системы в положении, когда груз  $1$  опустился на высоту  $s_1$ , как функцию искомой скорости  $V_1$ . Так как в начальный момент система находилась в покое, то  $T_0 = 0$ . В конечный момент движения системы величина ее кинетической энергии  $T$  равна сумме кинетических энергий тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (4.22)$$



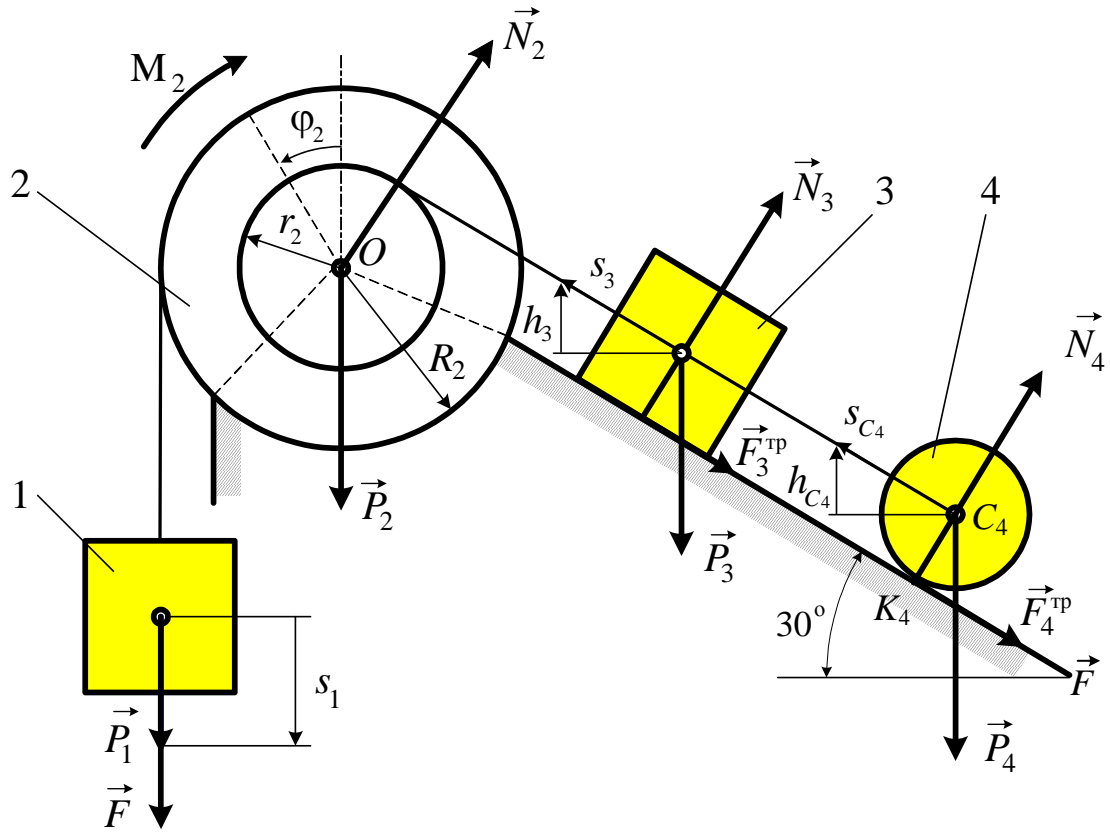


Рис. 4.13

Учитывая, что грузы *1* и *3* совершают поступательное движение, шкив *2* вращается вокруг неподвижной оси *O*, а каток *4* совершает плоскопараллельное движение, по формулам (3.66)–(3.68) получим

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2; & T_2 &= \frac{1}{2} I_O \omega_2^2; \\
 T_3 &= \frac{1}{2} m_3 V_3^2; & T_4 &= \frac{1}{2} m_4 V_{C_4}^2 + \frac{1}{2} I_{C_4} \omega_4^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

Все входящие в (4.23) скорости следует выразить через искомую скорость  $V_1$ . Приняв во внимание, что точка  $K_4$  – мгновенный центр скоростей катка *4*, и обозначив радиус катка через  $r_4$ , получим

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2}; \quad V_3 = \omega_2 r_2 = \frac{V_1}{R_2} r_2; \quad V_{C_4} = V_3; \quad \omega_4 = \frac{V_{C_4}}{C_4 K_4} = \frac{V_1}{R_2 r_4}. \tag{4.24}$$

Поскольку масса шкива *2* распределена по его внешнему ободу, а масса катка *4* – по площади диска радиусом  $r_4$ , по формулам (3.41), (3.42) находим входящие в (4.23) моменты инерции:

$$I_o = m_2 R_2^2; \quad I_{C_4} = m_4 r_4^2 / 2. \quad (4.25)$$

С учетом (4.23)–(4.25) запишем окончательно выражение для кинетической энергии системы (4.22) как функции искомой скорости  $V_1$ :

$$T = \frac{1}{2} \left( m_1 + m_2 + m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} + \frac{3}{2} m_4 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) V_1^2$$

или с учетом исходных данных задачи

$$T = 3,875 V_1^2 \quad (4.26)$$

3. Изобразим все внешние силы действующие на систему: активные  $\vec{F}$ ,  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$ ,  $\vec{P}_3$ ,  $\vec{P}_4$ , момент сопротивления  $M_2$ , реакции  $\vec{N}_2$ ,  $\vec{N}_3$ ,  $\vec{N}_4$ , силу трения скольжения  $\vec{F}_3^{\text{тр}}$  и силу трения покоя (силу сцепления)  $\vec{F}_4^{\text{тр}}$ .

Найдем сумму работ всех действующих внешних сил на перемещениях, которые будут иметь точки их приложения, когда груз  $I$  пройдет путь  $s_1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa}^e = & A(\vec{F}) + A(\vec{P}_1) + A(\vec{P}_2) + A(\vec{P}_3) + A(\vec{P}_4) + A(\vec{N}_2) + A(\vec{N}_3) + \\ & + A(\vec{N}_4) + A(M_2) + A(\vec{F}_3^{\text{тр}}) + A(\vec{F}_4^{\text{тр}}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Запишем выражение работы каждой силы из (4.27):

$$\begin{aligned} A(\vec{F}) &= F s_1 \cos 0^\circ; & A(\vec{P}_1) &= P_1 h_1; \\ A(\vec{P}_3) &= -P_3 h_3; & A(\vec{P}_4) &= -P_4 h_{C_4}; \\ A(M_2) &= -M_2 \varphi_2; & A(\vec{F}_3^{\text{тр}}) &= -F_3^{\text{тр}} s_3, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где  $h_1$ ,  $h_3$ ,  $h_{C_4}$  – вертикальные перемещения точек приложения соответственно сил тяжести  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_3$ ,  $\vec{P}_4$ ;  $\varphi_2$  – угол поворота шкива 2;  $s_3$  – величина перемещения груза 3.

Работа остальных сил в (4.27) равна нулю, потому что точка  $K_4$ , где приложены силы  $\vec{N}_4$  и  $\vec{F}_4^{\text{тр}}$ , является для катка 4 мгновенным центром скоростей ( $V_{K_4} = 0$ ); точка  $O$  приложения сил  $\vec{P}_2$  и  $\vec{N}_2$ , неподвижна, а реакция  $\vec{N}_3$  перпендикулярна элементарному перемещению точки ее приложения.

Выразим все перемещения, входящие в (4.28), через величину заданного перемещения  $s_1$  груза  $I$ . Для этого учтем, что зависимость между

перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями в (4.24):

$$h_1 = s_1; \quad \varphi_2 = \frac{s_1}{R_2}; \quad s_3 = \frac{s_1}{R_2} r_2; \quad h_3 = h_4 = s_3 \sin 30^\circ = \frac{s_1}{R_2} r_2 \sin 30^\circ. \quad (4.29)$$

С учетом (4.29) находим работы сил (4.28):

$$\begin{aligned} A(\vec{F}) &= F s_1; \quad A(\vec{P}_1) = P_1 s_1 = m_1 g s_1; \quad A(M_2) = -M_2 \frac{s_1}{R_2}; \\ A(\vec{P}_3) &= -P_3 \frac{s_1}{R_2} r_2 \sin 30^\circ = -m_3 g s_1 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ; \\ A(\vec{P}_4) &= -P_4 \frac{s_1}{R_2} r_2 \sin 30^\circ = -m_4 g s_1 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ; \\ A(\vec{F}_3^{\text{тр}}) &= -F_3^{\text{тр}} \frac{s_1}{R_2} r_2 = -N_3 f \frac{s_1}{R_2} r_2 = \\ &= -P_3 f \cos 30^\circ \frac{s_1}{R_2} r_2 = -f m_3 g \cos 30^\circ \frac{s_1}{R_2} r_2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Подставив (4.30) в (4.27), вычислим сумму работ всех внешних сил системы:

$$\sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa}^e = s_1 \left[ F + m_1 g - \frac{M_2}{R_2} - m_3 g \frac{r_2}{R_2} (\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ) - m_4 g \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ \right]$$

или учетом исходных данных задачи

$$\sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa}^e = 55,8 \text{ Дж.} \quad (4.31)$$

4. Подставив (4.26) и (4.31) в теорему (3.71), с учетом  $T_0 = 0$  получим

$$3,875 V_1^2 = 55,8.$$

Отсюда находим искомую скорость груза  $1$ , когда он из состояния покоя опустится на высоту  $s_1 = 1$  м:

$$V_1 = \sqrt{\frac{55,8}{3,875}} = 3,8 \text{ м/с.}$$

*Ответ:*  $V_1 = 3,8$  м/с.

### 4.11. Задача Д3

Вертикальный вал  $AK$  (рис. 4.14, таблица Д3), вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$ , закреплен подпятником в точке  $A$  и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д4 в столбце 2.

К валу жестко прикреплены тонкий однородный стержень  $1$  длиной  $l_1 = 0,6 \text{ м}$ , имеющий массу  $m_1 = 4 \text{ кг}$ , и невесомый стержень  $2$  длиной  $l_2 = 0,4 \text{ м}$  с точечной массой  $m_2 = 6 \text{ кг}$  на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней к валу указаны в табл. Д3 в столбцах 3 и 4, а углы  $\alpha$  и  $\beta$  даны в столбцах 5 и 6.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При расчетах принять  $AB = BD = DE = EK = b$ , где  $b = 0,4 \text{ м}$ .

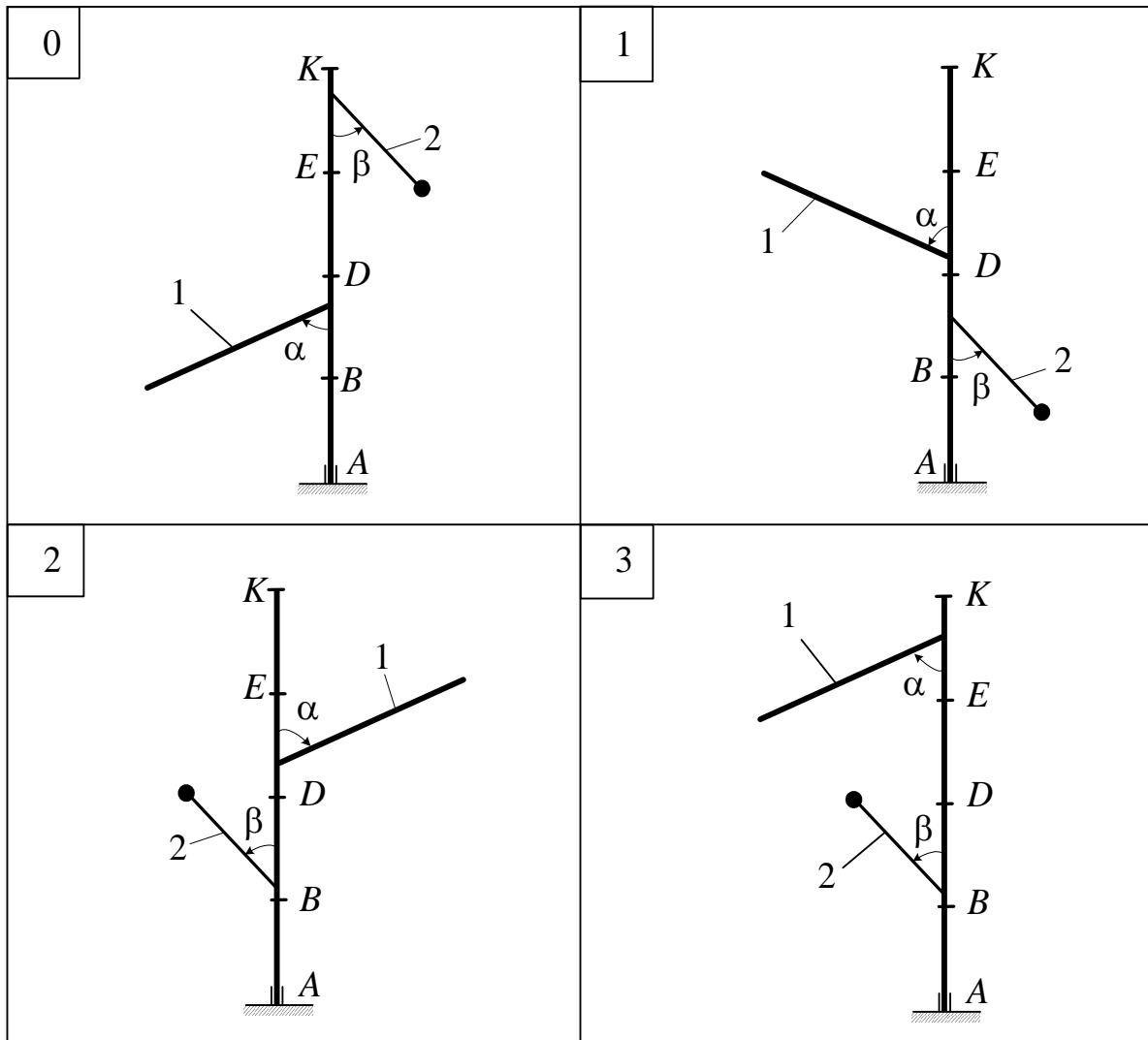


Рис.4.14

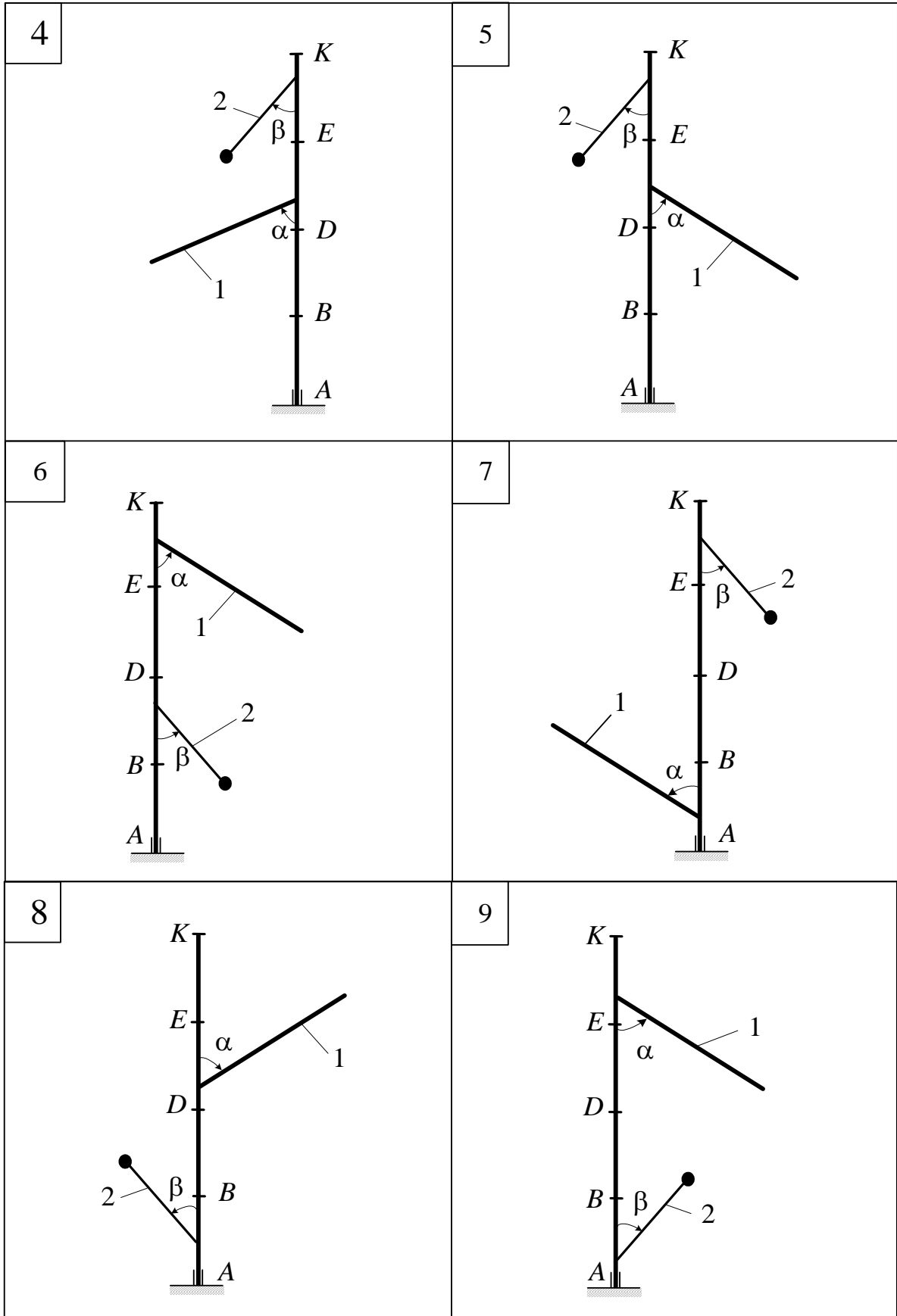


Рис. 4.14. Окончание

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление в точке		$\alpha$ , град	$\beta$ , град
		стержня 1	стержня 2		
0	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	45	60
1	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>K</i>	60	30
2	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	30	45
3	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	30	90
4	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>K</i>	45	90
5	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>B</i>	60	30
6	<i>K</i>	<i>E</i>	<i>B</i>	45	30
7	<i>E</i>	<i>K</i>	<i>D</i>	30	60
8	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	60	45
9	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	60	90

*Указания.* Задача Д3 – на применение принципа Д’Аламбера для определения реакций связей динамической системы.

Применительно ко всем вариантам задачи Д3 рассмотрим случай вращения с постоянной угловой скоростью  $\omega$  однородного стержня, лежащего в одной плоскости с осью вращения  $AZ$  (рис. 4.15).

Пусть однородный стержень  $AB$  длиной  $l$  и массой  $m$  жестко прикреплен в точке  $A$  к валу, вращающемуся вокруг оси  $AZ$  с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$  ( $\varepsilon = d\omega/dt = 0$ ).

При равномерном вращении стержня каждый его  $k$ -й элемент массой  $\Delta m_k$  имеет только нормальное ускорение  $\vec{a}_k^n$ , направленное к оси вращения

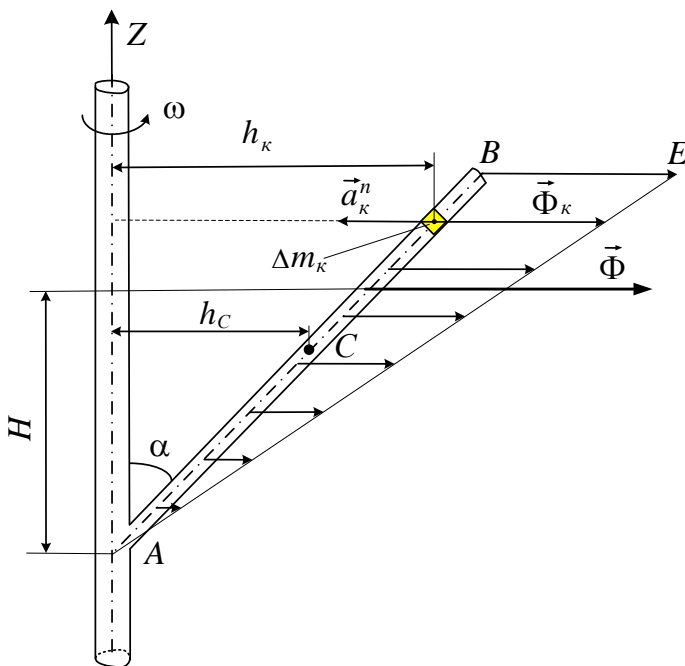


Рис. 4.15

и равное по величине  $a_k^n = \omega^2 h_k$ , где  $h_k$  – расстояние от  $k$ -го элемента до оси вращения. Тогда на рис. 4.15 согласно (3.76) сила инерции  $\vec{\Phi}_k$  каждого элемента стержня направлена от оси вращения и ее модуль равен

$$\Phi_k = \Delta m_k a_k^n = \Delta m_k \omega^2 h_k.$$

В результате на стержень действует система параллельных сил инерции распределенных по линейному закону, равнодействующая  $\vec{\Phi}$  которых проходит через центр параллельных

сил, который совпадает с центром тяжести треугольника  $ABE$  сил инерции элементов стержня  $AB$ , т. е. линия действия равнодействующей  $\vec{\Phi}$  находится на расстоянии  $H = \frac{2}{3}l \cos \alpha$  от вершины  $A$  треугольника  $ABE$  (рис. 4.15). Величина этой равнодействующей равна модулю главного вектора сил инерции элементов стержня  $AB$ , т. е. с учетом (3.81)

$$\Phi = \Phi_n = ma_C^n = m\omega^2 h_C = m\omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

Задачу ДЗ с помощью принципа Д'Аламбера рекомендуется решать в следующем порядке:

- 1) выделить тела, входящие в данную механическую систему;
- 2) выбрать систему координат;
- 3) изобразить активные силы, приложенные к системе;
- 4) добавить силы инерции тел (материальных точек) системы;
- 5) применив принцип освобожденности от связей, изобразить реакции связей;
- 6) составить уравнения (3.80) для уравновешенной системы сил; приложенной к механической системе в данный момент ее движения;
- 7) решив полученную систему уравнений, определить искомые реакции связей.

## 4.12. Пример решения задачи ДЗ

Вертикальный вал длиной  $3b$  ( $AB = BD = DE = b$ ), закрепленный подпятником  $A$  и цилиндрическим подшипником  $D$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . (рис. 4.16., *a*)

К валу в точке  $E$  жестко прикреплен тонкий однородный стержень  $1$  длиной  $l_1$ , имеющий массу  $m_1$ , а в точке  $B$  – невесомый стержень  $2$  длиной  $l_2$  с точечной массой  $m_2$  на конце. Стержни  $1$  и  $2$  лежат в одной плоскости и составляют с валом  $AB$  углы  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника  $A$  и подшипника  $D$ .

Решить задачу при следующих данных:  $\omega = 8 \text{ с}^{-1}$ ,  $m_1 = 10 \text{ кг}$ ,  $l_1 = 0,6 \text{ м}$ ;  $m_2 = 3 \text{ кг}$ ,  $l_2 = 0,4 \text{ м}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $b = 0,3 \text{ м}$ .

**Р е ш е н и е**

1. Рассмотрим механическую систему, состоящую из невесомого вала  $AB$ , тонкого однородный стержень  $1$  длиной  $l_1$ , имеющий массу  $m_1$ , и невесомого стержня  $2$  длиной  $l_2$  с точечной массой  $m_2$  на конце.

Изобразим на рис. 4.16, *б* вал и с учетом заданных углов прикрепленные к нему в точках  $B$  и  $E$  стержни.

Для определения искомых реакций применим принцип Д'Аламбера для заданной механической системы.

2. Проведем вращающиеся вместе с валом  $AE$  координатные оси  $AXYZ$  так, чтобы стержни всегда лежали в плоскости  $AXY$  (ось  $AZ$  на рис. 4.16, б не изображена) и рассмотрим механическую систему в произвольный, но фиксированный момент времени.

3. Изобразим действующие активные силы тяжести  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$ , приложенные в центрах тяжести  $C_1$  и  $C_2$  соответствующих тел, причем  $P_1 = m_1g = 98$  Н, а  $P_2 = m_2g = 29,4$  Н.

4. Согласно принципу Д'Аламбера, присоединим к этим активным силам силы инерции элементов однородного стержня  $l$  и точечной массы  $m_2$ , считая ее материальной точкой.

Поскольку вал вращается равномерно ( $\omega = \text{const}$ ,  $\varepsilon = d\omega/dt = 0$ ), то на элементы стержня  $l$ , имеющих только нормальные ускорения, направленные к оси вращения  $AU$ , действуют силы инерции, направленные от оси вращения, образующие систему параллельных сил, распределенных по линейному закону. На рис. 4.16, б равнодействующая  $\vec{\Phi}_1$  этой системы параллельных сил проходит через центр параллельных сил, совпадающий с центром тяжести треугольника  $EKL$  (см. указания к задаче Д3). Поэтому систему параллельных сил инерции элементов стержня  $l$  заменим их

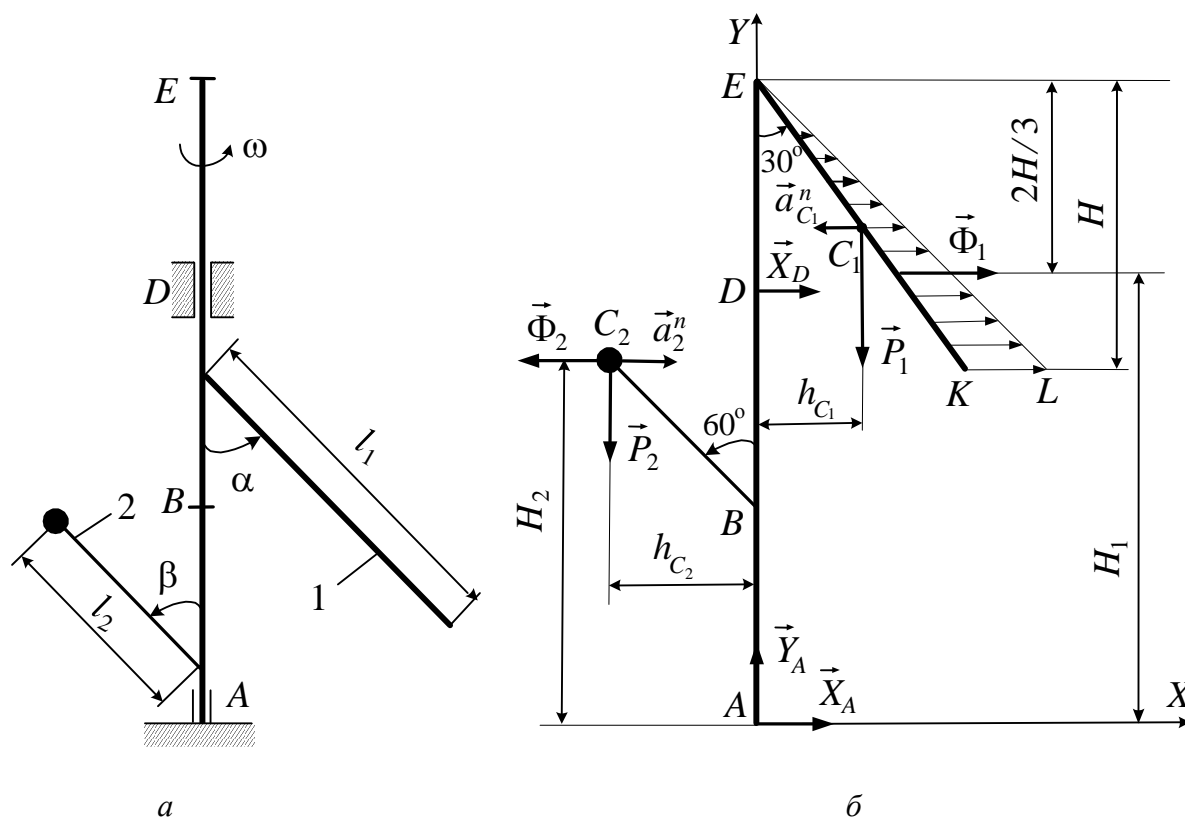


Рис. 4.16



равнодействующей  $\vec{\Phi}_1$ , равной главному вектору. Так как согласно (3.81) модуль главного вектора сил инерции любого тела равен  $\Phi = m a_C$ , где  $m$  – масса тела,  $a_C$  – ускорение его центра масс, поэтому для стержня  $I$

$$\Phi_1 = m_1 a_{C_1}^n. \quad (4.32)$$

Сила инерции точечной массы  $m_2$  приложена в точке  $C_2$  и согласно (3.76) направлена в сторону, противоположную ее нормальному ускорению  $\vec{a}_2^n$ , т. е. от оси вращения  $AU$ , и численно равна

$$\Phi_2 = m_2 a_2^n. \quad (4.33)$$

Модули ускорений центра масс  $C_1$  стержня  $I$  и точечной массы в точке  $C_2$  вычислим по формулам:

$$a_{C_1}^n = \omega^2 h_{C_1}, \quad a_2^n = \omega^2 h_{C_2}, \quad (4.34)$$

где  $h_{C_1}$   $h_{C_2}$  – расстояния от центра масс  $C_1$  стержня  $I$  и точечной массы  $m_2$  до оси вращения  $AU$  соответственно:

$$\begin{aligned} h_{C_1} &= l_1 \sin 30^\circ = 0,15 \text{ м;} \\ h_{C_2} &= l_2 \sin 60^\circ = 0,346 \text{ м;} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Подставив в (4.32) и (4.33) значения (4.34) с учетом (4.35), вычислим модули сил инерции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= m_1 \omega^2 h_{C_1} = 96 \text{ Н;} \\ \Phi_2 &= m_2 \omega^2 h_{C_2} = 88,58 \text{ Н.} \end{aligned} \quad (4.36)$$

При этом линии действия равнодействующей  $\vec{\Phi}_1$  проходит на расстоянии  $\frac{2}{3}H$  от вершины  $E$  треугольника  $EKL$ , где его высота  $H = l_1 \cos 30^\circ \approx 0,26$  м.

5. Отбросим связи и изобразим на рис. 4.16, б реакции связей. Поскольку активные силы тяжести  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$  и силы инерции  $\vec{\Phi}_1$ ,  $\vec{\Phi}_2$  в любой момент времени лежат в плоскости  $AXY$ , то реакции подпятника  $A$  и подшипника  $D$  также должны находиться в этой же плоскости. Поэтому реакция подпятника  $A$  имеет только две составляющие  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ , а реакция цилиндрического подшипника  $D$  – только одну составляющую  $\vec{X}_D$ , лежа-

щих в плоскости  $AXY$ . Следовательно, в каждый момент вращения вала составляющие реакций связей вдоль оси  $AZ$  равны нулю ( $Z_A = 0, Z_D = 0$ ).

6. Согласно принципу Д'Аламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Согласно (1.31) составим для этой плоской произвольной системы сил три уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa X} = 0, \\ \sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa Y} = 0, \\ \sum_{\kappa=1}^n m_A(\vec{F}_{\kappa}) = 0; \end{cases}$$

которые для данной задачи принимают вид

$$\begin{cases} X_A + X_D + \Phi_1 - \Phi_2 = 0; \\ Y_A - P_1 - P_2 = 0; \\ -X_D AD - P_1 h_{C1} + P_2 h_{C2} - \Phi_1 H_1 + \Phi_2 H_2 = 0. \end{cases} \quad (4.37)$$

Здесь  $H_1, H_2$  – плечи соответственно сил  $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2$  относительно точки  $A$ :

$$\begin{aligned} H_1 &= 3b - \frac{2}{3}H \approx 0,73 \text{ м}; \\ H_2 &= b + l_2 \cos 60^\circ = 0,5 \text{ м}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Подставим в уравнения (4.37) величины из (4.35), (4.36), (4.38) и, решив полученную систему уравнений (4.37), найдем искомые реакции подшипника  $D$  и подпятника  $A$ :

$$X_D = \frac{1}{AD} \left[ -P_1 h_{C1} + P_2 h_{C2} - \Phi_1 H_1 + \Phi_2 H_2 \right] = -19,7 \text{ Н};$$

$$Y_A = P_1 + P_2 = 127,4 \text{ Н};$$

$$X_A = \Phi_2 - \Phi_1 - X_D = 12,28 \text{ Н}.$$

Здесь знак «-» указывает, что в действительности реакция  $\vec{X}_D$  подшипника  $D$  направлена противоположно вектору на рис. 4.16, б.

*Ответ:*  $X_A = 12,28 \text{ Н}; Y_A = 127,4 \text{ Н}; X_D = -19,7 \text{ Н}.$

### 4.13. Задача Д4

Механическая система (рис. 4.17, табл. Д4) состоит из грузов  $1$  и  $2$  (коэффициент трения скольжения грузов о плоскость  $f = 0,1$ ), цилиндрического сплошного однородного катка  $3$  и ступенчатых шкивов  $4$  и  $5$  с радиусами ступеней  $R_4 = 0,3$  м,  $r_4 = 0,1$  м,  $R_5 = 0,2$  м,  $r_5 = 0,1$  м (массу каждого шкива считать распределенной по его внешнему ободу). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

Под действием постоянной силы  $\vec{F}$  система приводится в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы  $4$  и  $5$  действуют постоянные моменты сил сопротивления, равные соответственно  $M_4$  и  $M_5$ .

Для рассматриваемой механической системы составить уравнение Лагранжа второго рода и определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы  $\vec{F}$  равно  $s_1$ . Искомая величина указана в столбце «Найти» табл. Д4, где введены обозначения:  $V_1$  – скорость груза  $1$ ,  $V_{C3}$  – скорость центра масс катка  $3$ ,  $\omega_4$  – угловая скорость тела  $4$  и т. д.

Таблица Д4

Номер условия	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$m_3$ , кг	$m_4$ , кг	$m_5$ , кг	$M_4$ , Н·м	$M_5$ , Н·м	$F$ , Н	$s_1$ , м	Найти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	350	1,0	$V_1$
1	6	0	2	0	8	0,6	0	320	1,2	$\omega_5$
2	0	4	6	8	0	0	0,4	380	0,8	$V_{C3}$
3	0	2	4	0	10	0,3	0	340	0,6	$V_2$
4	8	0	2	6	0	0	0,6	330	0,4	$\omega_4$
5	8	0	4	0	6	0,9	0	340	1,2	$V_1$
6	0	6	2	8	0	0	0,8	360	1,0	$\omega_4$
7	0	4	6	0	10	0,6	0	330	0,8	$\omega_5$
8	6	0	4	0	8	0,3	0	340	1,6	$V_{C3}$
9	0	4	6	10	0	0	0,4	350	1,4	$V_2$

*Указания.* Задача Д4 – на применение уравнения Лагранжа второго рода (3.95). Порядок решения задачи приведен на стр. 107.

Когда по данным табл. Д4 масса груза  $1$   $m_1 = 0$  (или  $m_2 = 0$ ), то груз  $1$  (или  $2$ ) на чертеже не изображать. Шкивы  $4$  и  $5$  всегда входят в механическую систему (даже если их масса равна нулю). Момент сил сопротивления  $M_4$  (или  $M_5$ ) приложить к шкиву  $4$  (или  $5$ ) в сторону, противоположную его вращению.

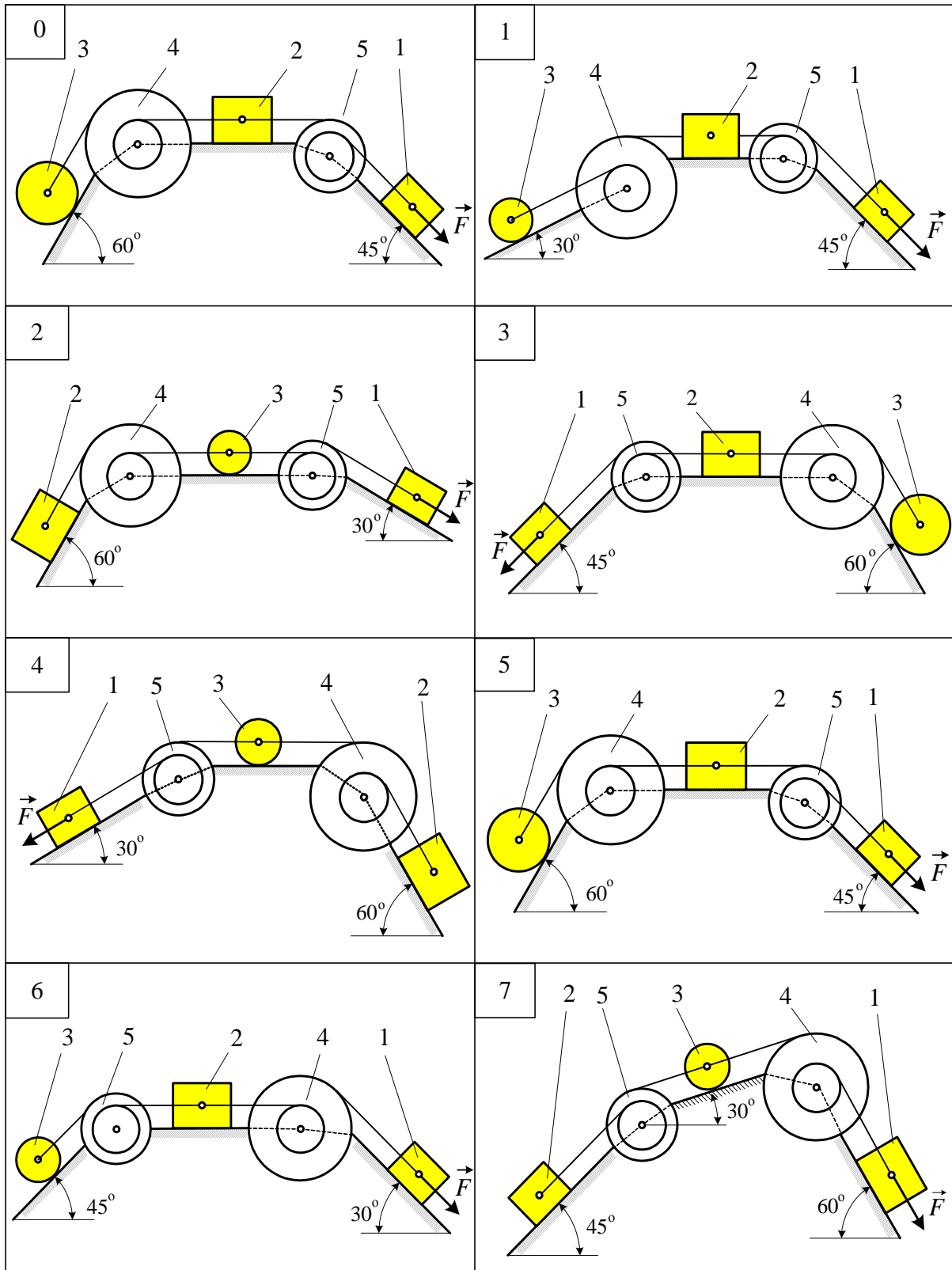


Рис. 4.17

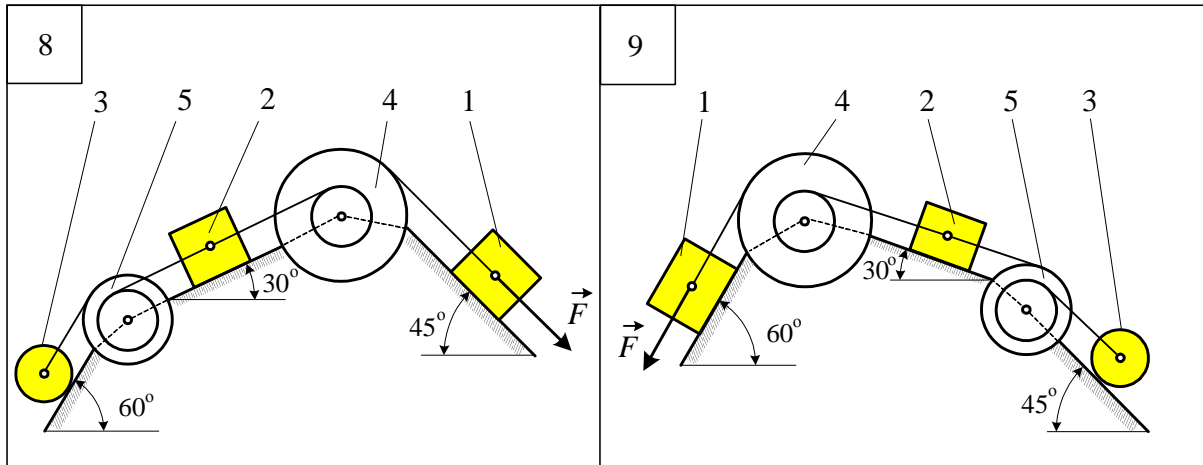


Рис. 4.17. Окончание

#### 4.14. Пример решения задачи Д4

Механическая система (рис. 4.18) состоит из грузов  $1$  и  $3$  (коэффициент трения скольжения груза с плоскостью равен  $f$ ), ступенчатого шкива  $2$  с радиусами ступеней  $R_2$  и  $r_2$  (масса шкива равномерно распределена по его ободу) и сплошного однородного цилиндрического катка  $4$ . Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив  $2$ .

Под действием постоянной силы  $\vec{F}$  система приводится в движение из состояния покоя. При движении на шкив  $2$  действует постоянный момент  $M_2$  сил сопротивления.

Для данной системы составить уравнение Лагранжа второго рода и определить величину  $V_1$  скорости груза  $1$  в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы  $\vec{F}$  равно  $s_1$ , т. е. найти искомую скорость в задаче Д2 еще одним способом (см. стр. 145).

Решить задачу при следующих данных:  $m_1 = 2$  кг;  $m_2 = 3$  кг;  $m_3 = 2$  кг;  $m_4 = 6$  кг;  $R_2 = 0,2$  м;  $r_2 = 0,1$  м;  $f = 0,2$ ;  $M_2 = 0,5$  Н·м;  $F = 60$  Н;  $s_1 = 1,0$  м.

**Решение**

1. Рассматриваемая система (рис. 4.18) имеет одну степень свободы ( $S = 1$ ), так как изменение положения любого тела системы приведет к однозначному перемещению всех других ее тел. Поэтому для характеристики движения данной системы следует ввести одну обобщенную координату и составить одно уравнение Лагранжа второго рода (3.95).

Поскольку в данном примере требуется определить скорость груза  $1$ , то за обобщенную координату примем расстояние  $x$ , пройденное этим грузом от состояния покоя в направлении его движения (вниз). Тогда обобщенная скорость равна искомой скорости груза  $1$ , т. е.  $\dot{x} = V_1$ .

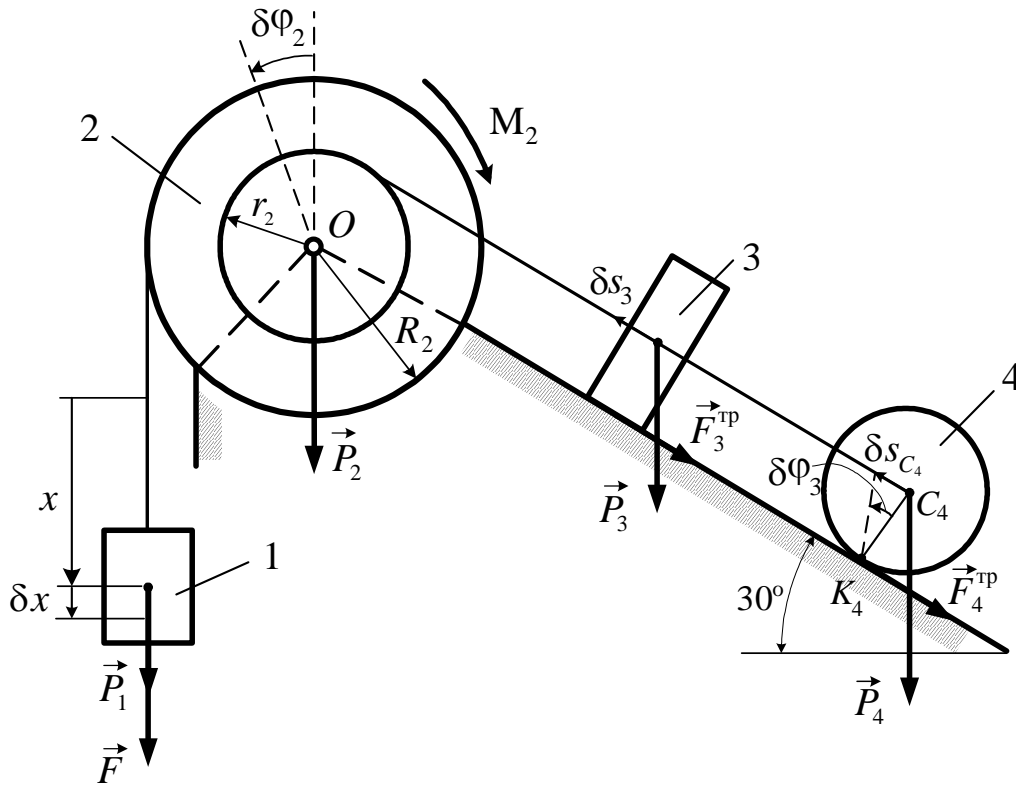


Рис. 4.18

Тогда уравнение Лагранжа второго рода (3.95) для рассматриваемой механической системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1. \quad (4.39)$$

Запишем начальные условия движения (3.96) для данной задачи:

$$t = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = V_0 = 0. \quad (4.40)$$

2. Для нахождения явного вида уравнения (4.39) необходимо определить кинетическую энергию  $T$  механической системы как функцию обобщенной координаты  $x$  и обобщенной скорости  $\dot{x}$ .

В произвольный момент движения системы величина ее кинетической энергии  $T$  равна сумме кинетических энергий тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (4.41)$$

Учитывая, что грузы 1 и 3 совершают поступательное движение, шкив 2 вращается вокруг неподвижной оси  $O$ , а каток 4 совершает плоско-параллельное движение, по формулам (3.66)–(3.68) получим

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2; & T_2 &= \frac{1}{2} I_O \omega_2^2; \\
T_3 &= \frac{1}{2} m_3 V_3^2; & T_4 &= \frac{1}{2} m_4 V_{C4}^2 + \frac{1}{2} I_{C4} \omega_4^2.
\end{aligned}
\tag{4.42}$$

Используя соотношения (4.24), выразим все входящие в (4.42) скорости через обобщенную скорость  $\dot{x}$ :

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{\dot{x}}{R_2}; & V_3 &= \omega_2 r_2 = \frac{\dot{x} r_2}{R_2}; \\
V_{C4} &= V_3 = \frac{\dot{x} r_2}{R_2}; & \omega_4 &= \frac{V_{C4}}{C_4 K_4} = \frac{\dot{x} r_2}{R_2 r_4}.
\end{aligned}
\tag{4.43}$$

Поскольку масса шкива 2 распределена по внешнему ободу, а масса катка 4 – по площади диска радиусом  $r_4$ , по формулам (3.41), (3.42) находим входящие в (4.42) моменты инерции:

$$I_O = m_2 R_2^2; \quad I_{C4} = \frac{1}{2} m_4 r_4^2.
\tag{4.44}$$

С учетом (4.42)-(4.44) запишем окончательно выражение для кинетической энергии системы (4.41) как функции обобщенной скорости  $\dot{x}$ :

$$T = \left( \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} + \frac{3}{4} m_4 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \dot{x}^2,$$

или, подставляя исходные данные задачи, получим

$$T = 3,875 \dot{x}^2.
\tag{4.45}$$

3. Вычислим все производные от кинетической энергии  $T$ , входящие в уравнение (4.39):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 7,75 \dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 7,75 \ddot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.
\tag{4.46}$$

4. Используя формулу (3.93), найдем обобщенную силу  $Q_1$ :

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta x}.
\tag{4.47}$$

Для этого изобразим на рис. 4.18 все действующие на систему активные силы и моменты:  $\vec{F}$ ,  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$ ,  $\vec{P}_3$ ,  $\vec{P}_4$ ,  $M_2$ , включив в их число силы трения  $\vec{F}_3^{\text{тр}}$  и  $\vec{F}_4^{\text{тр}}$ , так как шероховатая наклонная плоскость не является идеальной связью.

Мысленно остановим движение системы и сообщим ей такое возможное перемещение, при котором обобщенная координата  $x$  получит положительное приращение  $\delta x > 0$  в направлении ее отсчета. На рис. 4.18 покажем возможные перемещения каждого из тел системы:

для груза 1 – вертикальное перемещение  $\delta s_1 = \delta x$ ;

для шкива 2 – поворот на угол  $\delta\varphi_2$  вокруг оси  $O$ ;

для груза 3 – перемещение  $\delta s_3$  вверх по наклонной плоскости;

для катка 4 – поворот на угол  $\delta\varphi_4$  вокруг его МЦС – точки  $K_4$ .

При этом центр масс катка 4 – точка  $C_4$  получит возможное перемещение  $\delta s_{C_4}$  вверх по наклонной плоскости.

Вычислим возможную работу (3.90) сил системы на этих возможных перемещениях. Получим

$$\delta A_1 = F \delta x + P_1 \delta x - M_2 \delta\varphi_2 - P_3 \delta s_3 \sin 30^\circ - F_3^{\text{тр}} \delta s_3 - P_4 \delta s_{C_4} \sin 30^\circ. \quad (4.48)$$

Входящие в (4.48) возможные перемещения следует выразить через независимое возможное перемещение  $\delta x$ . Отметим, что зависимость между возможными перемещениями будет такой же, какая существует между скоростями точек и угловыми скоростями тел при движении склярономной механической системы. Из (4.43) следует, что

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{R_2}, \quad \delta s_3 = \frac{\delta x r_2}{R_2}, \quad \delta s_{C_4} = \frac{\delta x r_2}{R_2}. \quad (4.49)$$

Подставляя (4.49) в (4.48) и вынося  $\delta x$  как общий множитель за скобки, находим

$$\delta A_1 = \left( F + P_1 - \frac{M_2}{R_2} - P_3 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ - F_3^{\text{тр}} \frac{r_2}{R_2} - P_4 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ \right) \delta x.$$

По формуле (4.47) вычислим обобщенную силу:

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta x} = F + P_1 - \frac{M_2}{R_2} - P_3 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ - F_3^{\text{тр}} \frac{r_2}{R_2} - P_4 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ.$$



Учитывая  $F_3^{\text{TP}} = f N_3 = f m_3 g \cos 30^\circ$ ,  $P_\kappa = m_\kappa g$  ( $\kappa = 1, \dots, 4$ ) и исходные данные задачи, получим

$$Q_1 = 55,8 \text{ Н.} \quad (4.50)$$

Подставив (4.46) и (4.50) в (4.39), находим явный вид уравнения Лагранжа второго рода для рассматриваемой системы:

$$7,75 \ddot{x} = 55,8. \quad (4.51)$$

Понизим порядок дифференциального уравнения (4.51), представив ускорение груза  $I$  в виде производной от сложной функции:

$$\ddot{x} = a_1 = \frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} V. \quad (4.52)$$

С учетом (4.52) запишем уравнение (4.51) в виде уравнения с разделяющимися переменными:

$$7,75 V \frac{dV}{dx} = 55,8. \quad (4.53)$$

Умножим (4.53) на  $dx$  и вычислим от частей полученного уравнения определенные интегралы, при этом нижние пределы интегрирования соответствуют начальным условиям движения (4.40), а верхние – конечным условиям  $x = s_1$ ,  $V = V_1$ :

$$7,75 \int_0^{V_1} V dV = 55,8 \int_0^{s_1} dx$$

или

$$3,875 V_1^2 = 55,8 s_1.$$

Отсюда находим искомую скорость груза  $I$ , когда перемещение точки приложения силы  $\vec{F}$  равно  $s_1 = 1$  м:

$$V_1 = \sqrt{\frac{55,8}{3,875}} = 3,8 \text{ м/с.} \quad (4.54)$$

Сравнивая результат (4.54) с ответом примера задачи Д2, приходим к выводу, что задача Д4 решена верно.

*Ответ:*  $V_1 = 3,8$  м/с.

## 5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. На балку  $AB$  действуют равномерно-распределенная нагрузка интенсивностью  $q = 10 \text{ Н/м}$  и сосредоточенная сила  $F = 20 \text{ Н}$  (рис. 5.1).

Определить опорные реакции балки при равновесии, взяв размеры с рисунка. ( $X_A = 7,5 \text{ Н}$ ;  $Y_A = 6,7 \text{ Н}$ ;  $R_B = 49,8 \text{ Н}$ )

2. Определить реакции заделки  $A$  угольника  $AB$ , находящегося в равновесии под действием силы  $F = 50 \text{ Н}$  и пары сил с моментом  $M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (рис. 5.2); размеры взять с рисунка. ( $X_A = -43,5 \text{ Н}$ ;  $Y_A = -25 \text{ Н}$ ;  $M_A = -167 \text{ Н}\cdot\text{м}$ )

3. На балку  $AB$  действуют распределенная нагрузка интенсивностью  $q = 40 \text{ Н/м}$ , сосредоточенная сила  $P = 50 \text{ Н}$  и пара сил с моментом  $M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (рис. 5.3). Взяв размеры с рисунка, определить реакции балки  $AB$  в положении равновесия. ( $X_A = 23,95 \text{ Н}$ ;  $Y_A = 88,3 \text{ Н}$ ;  $R_B = 47,9 \text{ Н}$ )

4. На балку  $AB$  действуют распределенная нагрузка интенсивности  $q = 50 \text{ Н/м}$  и сосредоточенная сила  $F = 200 \text{ Н}$  (рис. 5.4).

Определить в положении равновесия опорные реакции; размеры взять с рисунка. ( $R_A = 178,1 \text{ Н}$ ;  $X_B = -24,7 \text{ Н}$ ;  $Y_B = 85 \text{ Н}$ )

5. Балка  $AB$  находится в равновесии под действием силы  $F = 2 \text{ кН}$  и распределенной нагрузка интенсивности  $q = 0,5 \text{ кН/м}$  (рис. 5.5).

Определить опорные реакции балки, если  $l = 0,5 \text{ м}$ . ( $X_A = 0,43 \text{ кН}$ ;  $Y_A = 3,25 \text{ кН}$ ;  $R_B = -0,86 \text{ кН}$ )

6. Определить реакции заделки  $A$  угольника  $AB$ , находящегося в равновесии под действием сил  $F_1 = 50 \text{ Н}$  и  $F_2 = 100 \text{ Н}$  (рис. 5.6); размеры указаны на рисунке. ( $X_A = 65 \text{ Н}$ ,  $Y_A = 26,1 \text{ Н}$ ,  $M_A = -43,4 \text{ Н}\cdot\text{м}$ )

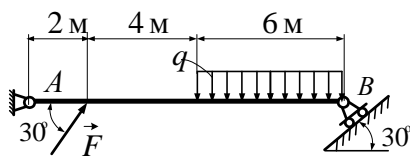


Рис. 5.1

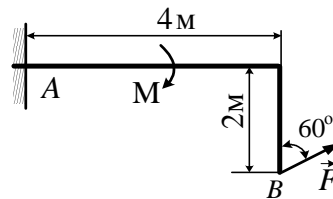


Рис. 5.2

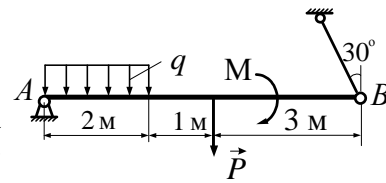


Рис. 5.3

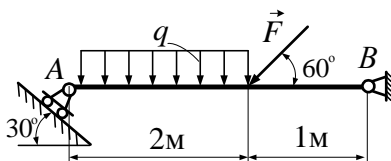


Рис. 5.4

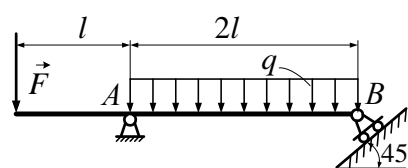


Рис. 5.5

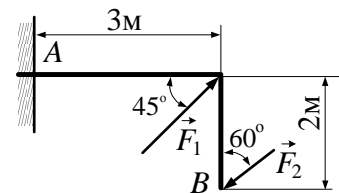


Рис. 5.6

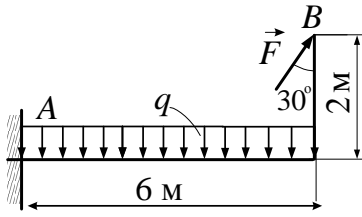


Рис. 5.7

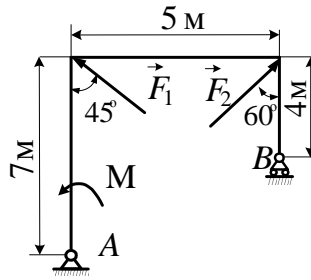


Рис. 5.8

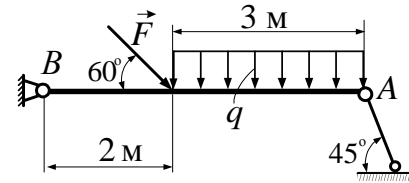


Рис. 5.9

7. Определить реакции заделки  $A$  угольника  $AB$ , находящегося в равновесии под действием распределенной нагрузки интенсивности  $q = 1,5$  кН/м и сосредоточенной силы  $F = 15$  кН (рис. 5.7); размеры даны на рисунке. ( $X_A = -13,05$  кН,  $Y_A = 1,5$  кН,  $M_A = 8,1$  кН·м)

8. На тело  $AB$  действуют сосредоточенные силы  $F_1 = 10$  Н и  $F_2 = 20$  Н и пара сил с моментом  $M = 30$  Н·м (рис. 5.8); размеры даны на рисунке. Определить опорные реакции в положении равновесии тела  $AB$ . ( $X_A = 23,95$  Н;  $Y_A = 88,3$  Н;  $R_B = 47,9$  Н)

9. На балку  $AB$  действуют распределенная нагрузка интенсивности  $q = 0,5$  кН/м и сосредоточенная сила  $F = 2$  кН (рис. 5.9); размеры балки даны на рисунке. Определить опорные при равновесии балки  $AB$ . ( $R_A = 2,5$  кН;  $X_B = 0,75$  кН;  $Y_B = 1,5$  кН)

10. Заданы уравнения движения точки  $x = 3t$ ,  $y = t^2$  (м). Определить расстояние от точки до начала  $O$  декартовой системы координат в момент времени  $t = 2$  с. (7,21 м/с)

11. Движение точки задано векторным способом:  $\vec{r} = t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 3\vec{k}$  (м). Определить модуль скорости точки в момент времени  $t = 2$  с. (4,47 м/с)

12. Вектор ускорения точки равен  $\vec{a} = 0,5t\vec{i} + 0,2t^2\vec{j}$  (м/с<sup>2</sup>). Вычислить модуль ее ускорения в момент времени  $t = 2$  с. (1,28 м/с<sup>2</sup>)

13. Точка движется в плоскости  $Oxy$  согласно уравнениям  $x = 12\sin(\pi t/6)$ ,  $y = 4\cos(\pi t/6)$ , где  $x$ ,  $y$  выражены в сантиметрах,  $t$  – время в секундах. Определить скорость и ускорение точки в момент времени  $t = 1$  с. (8,33 см/с; 1,9 см/с<sup>2</sup>)

14. Вектор ускорения точки  $\vec{a} = 2,5\vec{n} + 3,5\vec{\tau}$  (м/с<sup>2</sup>), где  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$  – орты естественного трехгранника. Определить модуль ускорения точки. (4,3 м/с<sup>2</sup>)

15. Точка движется по окружности радиусом  $R$  согласно уравнению  $s = 5t - 0,4t^2$  (м). Определить время  $t_1$ , когда нормальное ускорение точки равно нулю ( $a_n = 0$ ). (6,25 с)

16. От кривошипа 1 с помощью камня 2 приводится в движение кулиса 3 (рис. 5.10), точка  $A$  которой движется по закону  $x_A = 0,4 - 0,1 \sin t^2$  (м). Определить в момент времени  $t = 2$  с скорость точки  $B$  кулисы 3. (0,261 м/с)

17. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону  $\varphi = 4 + 2t^3$  (рад). Вычислить значение углового ускорения тела в момент времени, когда угловая скорость тела  $\omega_1 = 6$  рад/с. (12 рад/с<sup>2</sup>)

18. Угловая скорость вращающегося тела изменяется по закону  $\omega = -8t$  (рад/с). Определить угол поворота тела в момент времени  $t = 3$  с, если при  $t = 0$  угол поворота тела  $\varphi_0 = 5$  рад. (-31 рад.)

19. Тело вращается из состояния покоя равноускоренно с угловым ускорением  $\varepsilon = 5$  рад/с<sup>2</sup>. Определить в момент времени  $t = 2$  с скорость точки, отстоящей от оси вращения на расстояние  $r = 0,2$  м. (2 м/с)

20. Скорость точки вращающегося тела, находящейся на расстоянии  $r = 0,2$  м от оси вращения, изменяется по закону  $V = 4t^2$  (м/с).

Определить в момент времени  $t = 2$  с угловое ускорение  $\varepsilon$  тела. (80 рад/с<sup>2</sup>)

21. Ускорение точки  $M$  диска, вращающегося вокруг оси  $O$ , равно  $a_M = 4$  м/с<sup>2</sup>. Определить в данный момент времени угловую скорость диска, если его радиус  $R = 0,5$  м, а угол  $\gamma = 60^\circ$  (рис. 5.11). (2 рад/с)

22. Ускорение точки  $M$  диска, вращающегося вокруг оси  $O$ , равно  $a_M = 8$  м/с<sup>2</sup>. Определить в данный момент времени угловое ускорение диска, если его радиус  $R = 0,4$  м, а угол  $\gamma = 30^\circ$  (рис. 5.11). (10 рад/с<sup>2</sup>)

23. Груз 1 поднимается с помощью лебедки, барабан 2 которой вращается по закону  $\varphi = 5 + 2t^3$  (рад) (рис. 5.12). Определить в момент времени  $t = 1$  с скорость груза 1, если диаметр барабана  $d = 0,6$  м. (1,8 м/с)

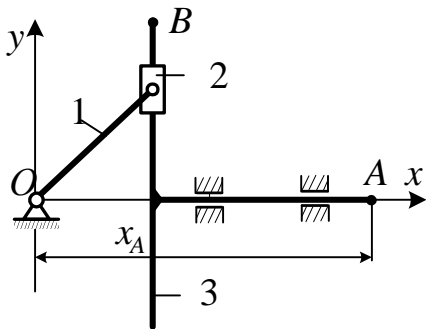


Рис. 5.10

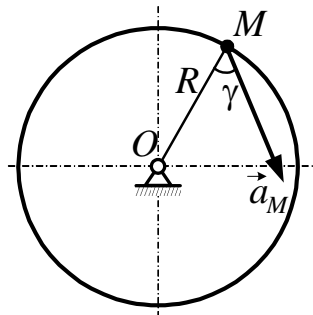


Рис. 5.11

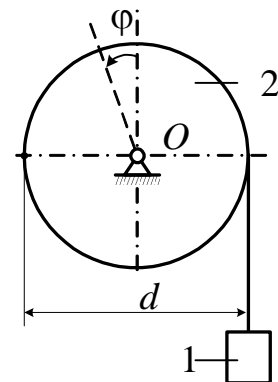


Рис. 5.12

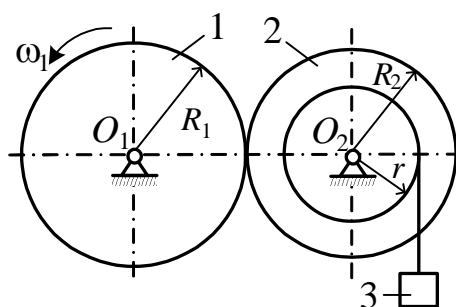


Рис. 5.13

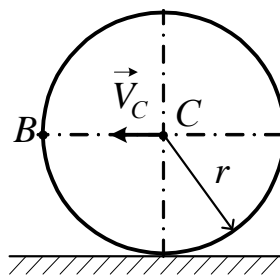


Рис. 5.14

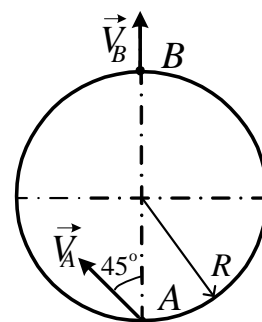


Рис. 5.15

24. Угловая скорость зубчатой шестерни 1 изменяется по закону  $\omega_1 = 2t^2$  (рад/с) (рис. 5.13). Определить в момент времени  $t = 2$  с скорость груза 3, если радиусы зубчатых шестерён  $R_1 = 1$  м,  $R_2 = 0,8$  м, а радиус барабана  $r = 0,4$  м. (4 м/с)

25. Колесо радиусом  $r = 0,5$  м катится без скольжения по горизонтальной плоскости (рис. 5.14). Найти скорость точки B колеса и его угловую скорость  $\omega$ , если центр C колеса перемещается с постоянной скоростью  $V_C = 2$  м/с. (2,83 м/с, 4 рад/с)

26. Диск радиусом  $R = 0,25$  м движется в плоскости рис. 5.15. В некоторый момент времени скорость  $\vec{V}_A$  точки A составляет с диаметром AB диска угол  $45^\circ$  и  $V_A = 4$  м/с; в этот момент времени направление точки B совпадает с направлением диаметра AB. Определить величину скорости точки B и угловую скорость  $\omega$  диска. ( $2\sqrt{2}$  м/с;  $4\sqrt{2}$  рад/с)

27. В положении шарнирного четырехзвенника  $OABO_1$ , изображенного на рис. 5.16, скорость точки A кривошипа OA равна  $V_A = 2$  м/с. Определить скорость точки C шатуна AB и его угловую скорость  $\omega$ , если  $AC = CB = 0,4$  м. (1 м/с; 2,5 рад/с)

28. Стержень AB длиной 0,8 м движется в плоскости рис. 5.17. В заданном положении определить его угловую скорость, если точки A и B стержня имеют скорости  $V_A = 0,2$  м/с и  $V_B = 0,6$  м/с. (0,5 рад/с)

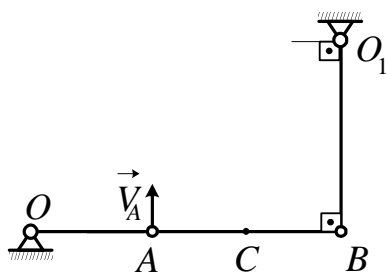


Рис. 5.16

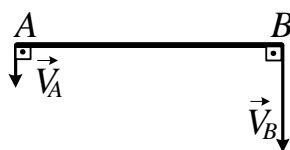


Рис. 5.17

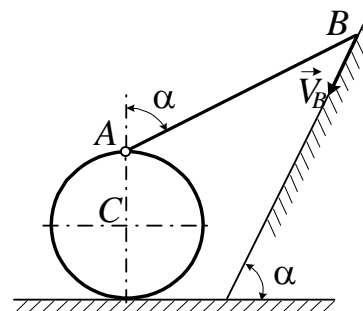


Рис. 5.18

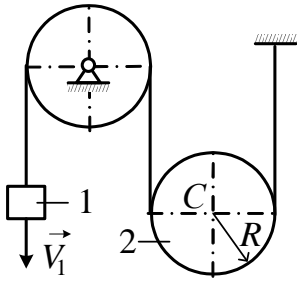


Рис. 5.19

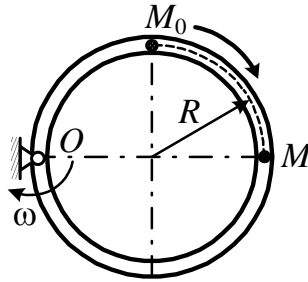


Рис. 5.20

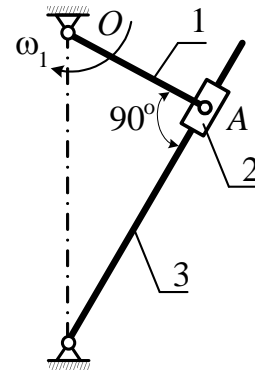


Рис. 5.21

29. Конец  $B$  стрелы  $AB$  скользит со скоростью  $V_B = 1$  м/с по наклонной плоскости (рис. 5.18). Другой его конец  $A$  шарнирно связан с роликом, катящимся без скольжения по горизонтальной плоскости. Определить скорость центра  $C$  ролика, если  $\alpha = 60^\circ$ . (0,5 м/с)

30. Скорость груза  $1$  равна  $V_1 = 0,5$  м/с (рис. 5.19). Определить скорость центра  $C$  подвижного блока  $2$ , и его угловую скорость, если радиус подвижного блока  $R = 0,1$  м. (0,25 м/с, 2,5 рад/с)

31. Тонкое кольцо радиусом  $R = 0,1$  м равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega = 4$  рад/с вокруг оси  $O$ , перпендикулярной его плоскости. Внутри кольца движется шарик  $M$  по закону  $s = \cup M_0M = 0,1t$  (м). Определить абсолютную скорость шарика  $M$  в положении, изображенном на рис. 5.20. (0,9 м/с)

32. Кривошип  $1$  длиной  $OA = 0,1$  м равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega_1 = 0,5$  рад/с вокруг оси  $O$ . В положении, изображенном на рис. 5.21, определить скорость кулисного камня  $2$  относительно кулисы  $3$ . (0,5 м/с)

33. Тележка движется по наклонной плоскости с ускорением  $a_e = 2$  м/с<sup>2</sup> (рис. 5.22). По тележке в плоскости  $O_1x_1y_1$  движется точка  $M$  согласно уравнениям  $x_1 = 3t^2$  (м),  $y_1 = 4t^4$  (м). Определить абсолютное ускорение точки  $M$ . (11,3 м/с<sup>2</sup>)

34. По горизонтальному диаметру диска (рис. 5.23), вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega_e = 2t$  (рад/с), движется точка  $M$  с относительной скоростью  $V_r = 4t$  (м/с). Определить модуль ускорения Кориолиса точки  $M$  в момент времени  $t = 2$  с. (64 м/с<sup>2</sup>)

35. По ободу диска радиуса  $r = 0,5$  м, равномерно вращающемуся вокруг оси  $OY$  с угловой скоростью  $\omega_e = 4$  рад/с, движется точка  $M$  с постоянной по величине скоростью  $V = 2$  м/с. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  в положении, изображенном на рис. 5.24. (16 м/с<sup>2</sup>)

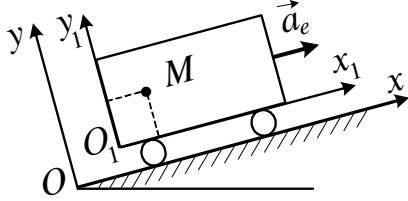


Рис. 5.22

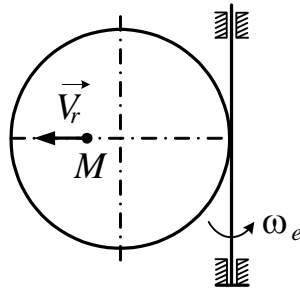


Рис. 5.23

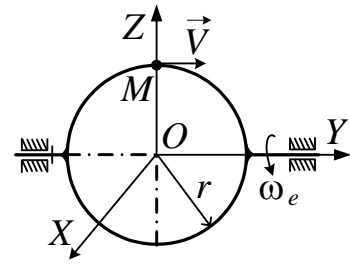


Рис. 5.24

36. Движение точки массой 2 кг задано уравнениям  $x = 2t^2$  (м),  $y = 2t^2$  (м). Найти модуль силы, действующей на точку. ( $8\sqrt{2}$  Н)

37. Материальная точка массой 4 кг движется по окружности радиусом  $R = 3$  м согласно уравнению  $s = 6t - 1$  (м). Определить величину действующей на неё силы. (48 Н)

38. Груз 1 массой 500 кг поднимается с помощью лебедки, барабан 2 которой вращается по закону  $\varphi = 0,2t^3$  рад (рис. 5.25). Определить натяжение троса при  $t = 1$  с, если диаметр барабана  $d = 0,6$  м. (4720 Н)

39. Тело  $D$ , имеющее начальную скорость  $V_0 = 20$  (м/с), скользило вверх по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол  $30^\circ$  с горизонтом, и остановилось (рис. 5.26). Определить время движения тела  $D$  до его остановки, если коэффициент трения скольжения  $f = 0,1$ . (3,48 с)

40. Тело массой  $m = 2$  кг движется по гладкой наклонной плоскости под действием силы  $\vec{F} = (16 - 12t)\vec{i}$  Н (рис. 5.27). Найти закон движения тела вдоль оси  $x$ , если при  $t = 0$   $x_0 = 0,5$  м,  $\dot{x}_0 = 5$  м/с. ( $x = 0,5 + 5t + 1,55t^2 - t^3$  м)

41. Груз  $D$  массой 4 кг движется по гладкой наклонной плоскости под действием силы  $\vec{F} = 4\pi \cos(\pi t/2)\vec{i}$  Н (рис. 5.28). Определить скорость груза через 1 с после начала движения, если его начальная скорость  $V_0 = 3$  м/с. (11,86 м/с)

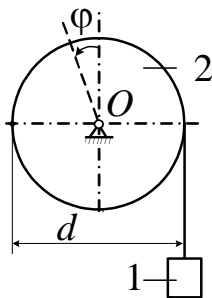


Рис. 5.25

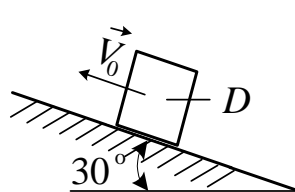


Рис. 5.26

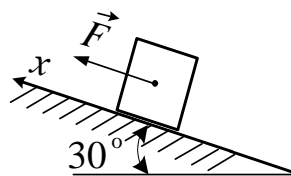


Рис. 5.27

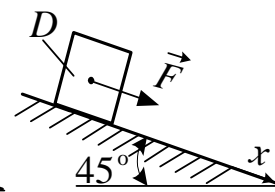


Рис. 5.28

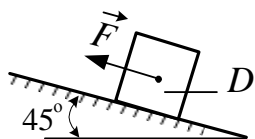


Рис. 5.29

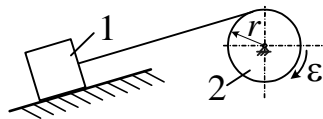


Рис. 5.30

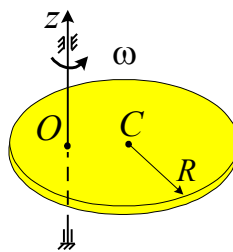


Рис. 5.31

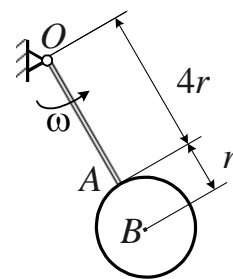


Рис. 5.32

42. Тело массой 2 кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости  $V$  м/с равно  $0,4V$  Н. Найти через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения. (1,71 с)

43. Корабль массы  $10^7$  кг движется с начальной скоростью  $V_0 = 16$  м/с. Сопротивление воды при скорости  $V$  м/с равно  $R = 3 \cdot 10^7 V^2$  Н. Какое расстояние пройдет корабль, прежде чем его скорость станет 4 м/с? За какое время корабль пройдет это расстояние? (46,2 м; 6,25 с)

44. Груз  $D$  массой 1 кг поднимается по гладкой наклонной плоскости под действием силы  $F = 24t$  Н (рис. 5.29). Определить путь  $s$ , пройденный грузом через 2 с после начала действия силы, если его начальная скорость  $V_0 = 2$  м/с. (22 м)

45. Груз  $I$  массой 50 кг поднимается по наклонной плоскости с помощью троса, наматываемого на барабан 2 радиусом  $r = 0,4$  м (рис. 5.30). Найти модуль главного вектора внешних сил, действующих на груз  $I$ , если угловое ускорение барабана  $\epsilon = 5$  рад/с<sup>2</sup>. (100 Н)

46. Диск массой 20 кг радиусом  $R = 1$  м, равномерно вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega = 10$  рад/с (рис. 5.31). Найти модуль главного вектора внешних сил, приложенных к диску, если его центр тяжести  $C$  удален от оси вращения на расстояние  $OC = 0,5 R$ . (10 Н)

47. Определить модуль количества движения однородного диска массой  $m = 40$  кг радиусом  $R = 0,5$  м, вращающегося вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega = 4$  рад/с, если  $OC = R/2$  (рис. 5.31). (40 кг м/с)

48. Определить модуль главного вектора количества движения маятника, состоящего из однородного стержня  $OA$ , массой  $m_1$ , длиной  $4r$  и однородного диска  $B$  массой  $m_2$ , радиусом  $r$ , если угловая скорость маятника в данный момент равна  $\omega$  (рис. 5.3). ( $\omega r [2m_1 + 5m_2]$ )



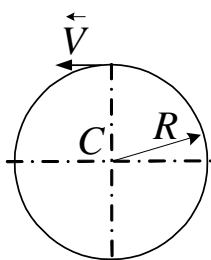


Рис. 5.33

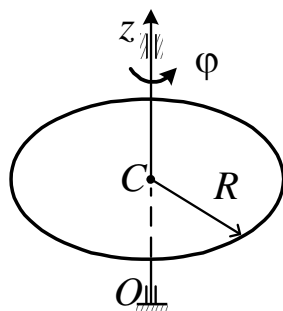


Рис. 5.34

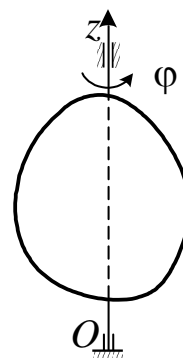


Рис. 5.35

49. Материальная точка массой 3 кг движется со скоростью  $V = 4$  м/с по окружности радиусом  $R = 0,5$  м (рис. 5.33). Определить модуль момента ее количества движения относительно центра  $C$  окружности. (6 кг м<sup>2</sup>/с)

50. Однородный диск массой 10 кг радиусом  $R = 0,5$  м вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$  по закону  $\varphi = 4t^2$  рад (рис. 5.34). Определить величину момента количества движения диска относительно оси вращения в момент времени  $t = 2$  с. (20 кг м<sup>2</sup>/с)

51. Твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$  по закону  $\varphi = 3t^2 + 2$  рад (рис. 5.35). Вычислить величину главного момента внешних сил, приложенных к телу, если момент инерции тела относительно оси вращения  $I_z = 2$  кг·м<sup>2</sup>. (12 Н·м)

52. Грузы 1 и 2 массой  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 1$  кг соответственно подвешены к концам гибкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок (рис. 5.36). Определить скорость груза 1, когда он опустился на высоту  $h = 1$  м, если движение начинается из состояния покоя; массами блока и нити пренебречь. (4,4 м/с)

53. Момент инерции зубчатого колеса 1 относительно оси вращения  $Ox$   $I_{Ox} = 0,1$  кг·м<sup>2</sup>. Масса рейки 2 равна 100 кг (рис. 5.37).

Определить скорость рейки 2 при ее перемещении на расстояние  $s = 0,2$  м, если вначале система находилась в покое, а радиус колеса  $r = 0,1$  м. (1,9 м/с)

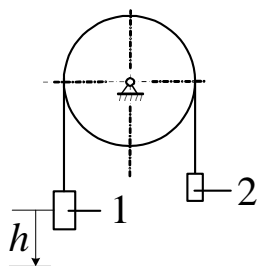


Рис. 5.36

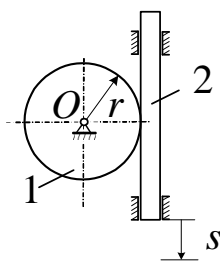


Рис. 5.37

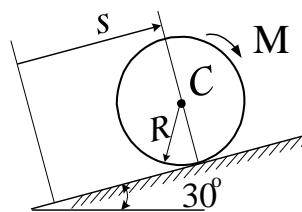


Рис. 5.38

54. Однородный цилиндрический каток массой 4 кг радиусом  $R = 0,2$  м приводится в движение из состояния покоя постоянным моментом  $M = 20$  Н·м (рис. 5.38). Определить скорость центра  $C$  катка при его перемещении на расстояние  $s = 3$  м. (8,9 м/с)

55. Шкив 2 массой 2 кг радиусом 0,2 м и груз 1 массой 1 кг, связанные друг с другом нерастяжимой нитью, движутся из состояния покоя под действием момента  $M = 4$  Н·м (рис. 5.39).

Какую угловую скорость  $\omega$  приобретёт шкив 2, сделав 2 оборота? При вычислении момента инерции шкив считать однородным сплошным цилиндром. (25,3 рад/с)

56. Шкив 2 массой 2 кг радиусом 0,4 м и каток 1 массой 1 кг связаны друг с другом нерастяжимыми невесомыми нитями. Система движется под действием пары сил с моментом  $M = 2$  Н·м, приложенной к шкиву 2 (рис. 5.40).

Какую угловую скорость  $\omega_2$  приобретёт шкив 2, сделав 4 оборота из состояния покоя? При вычислении моментов инерции каток и шкив считать однородными сплошными цилиндрами; каток катится по наклонной плоскости без скольжения. (15,26 рад/с)

57. Груз 1 массой 8 кг, двигаясь вниз по гладкой наклонной плоскости, приводит в движение шкив 2 массой 2 кг радиусом 0,2 м (рис. 5.41).

Определить скорость груза 1 при его перемещении на расстояние  $s = 1,2$  м, если на шкив 2 действует момент сопротивления  $M = 4$  Н·м; при вычислении момента инерции массу шкива считать распределенной по его ободу. (1,2 м/с)

58. Шкив 2 массой 4 кг радиусом 0,2 м и груз 1 массой 2 кг, связанные друг с другом нерастяжимой нитью, движутся из состояния покоя под действием момента  $M = 2$  Н·м (рис. 5.42). Определить скорость груза 1 при перемещении его на расстояние  $s = 1$  м, если коэффициент трения груза о горизонтальную плоскость  $f = 0,1$ ; при вычислении момента инерции шкив считать однородным сплошным цилиндром. (2,3 м/с)

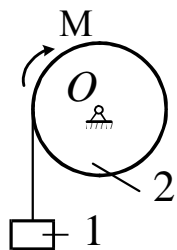


Рис. 5.39

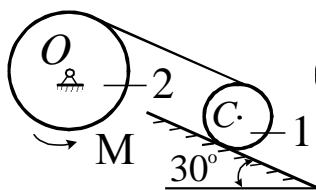


Рис. 5.40

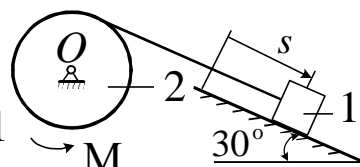


Рис. 5.41

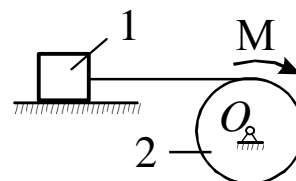


Рис. 5.42

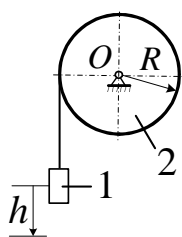


Рис. 5.43

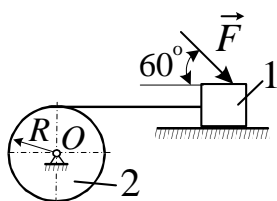


Рис. 5.44

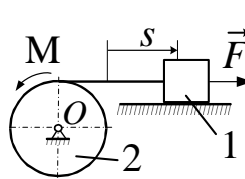


Рис. 5.45

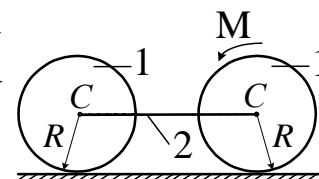


Рис. 5.46

59. Груз 1 массой 4 кг связан невесомой нерастяжимой нитью, намотанной на блок 2 массой 3 кг радиусом  $R = 0,5$  м (рис. 5.43).

Определить угловую скорость блока 2, считая его однородным круглым цилиндром, в положении, когда груза 1 опустится на высоту  $h = 1,5$  м; движение системы начинается из состояния покоя. (9,3 рад/с)

60. Груз 1 массой 3 кг связан невесомой нерастяжимой нитью с блоком 2 массой 4 кг радиусом  $R = 0,5$  м (рис. 5.44). Система движется из состояния покоя под действием постоянной силы  $F = 100$  Н.

Определить угловую скорость блока 2 при перемещении груза 1 на расстояние  $s = 2$  м по гладкой горизонтальной плоскости; блок 2 считать однородным круглым цилиндром. (12,7 рад/с)

61. Груз 1 массой 3 кг и блок 2 массой 4 кг радиусом  $R = 0,4$  м движутся из состояния покоя под действием переменной силы  $F = 8s + 1$  Н, где  $s$  – перемещение груза 1 в метрах (рис. 5.45).

Какую скорость приобретёт груз 1, переместившись по гладкой горизонтальной плоскости на расстояние  $s = 2$  м, если на блок 2 действует постоянный момент сопротивления  $M = 2$  Н·м; блок 2 считать однородным круглым цилиндром. (1,5 м/с)

62. Однородные цилиндрические катки 1 каждый массой 2 кг и радиусом 0,2 м соединены тонким однородным стержнем 2 массой 4 кг (рис. 5.46). Система приводится в движение из состояния покоя постоянным моментом  $M = 12$  Н·м. Определить скорость оси С катка при ее перемещении по горизонтальной плоскости на расстояние  $s = 4$  м. (6,9 м/с)

63. Материальная точка массой 9 кг движется прямолинейно вдоль оси  $Ox$  согласно уравнению  $x = 0,4t^3 - 2t + 9$  м. Определить модуль ее силы инерции в момент времени  $t = 2$  с. (43,2 Н)

64. Движение точки массой 2 кг задано уравнениями  $x = 2t^2$  м,  $y = 2t^2$  м. Найти величину силы инерции точки. ( $8\sqrt{2}$  Н)

65. Материальная точка массой 2 кг движется по окружности радиусом  $R = 2,25$  м со скоростью  $V = 3t$  (м/с). Определить величину силы инерции точки в момент времени  $t = 1$  с. (10 Н)

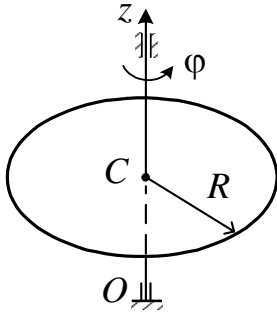


Рис. 5.47

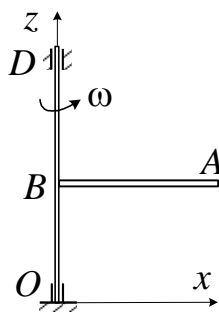


Рис. 5.46

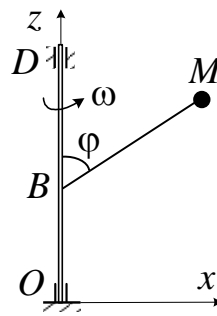


Рис. 5.47

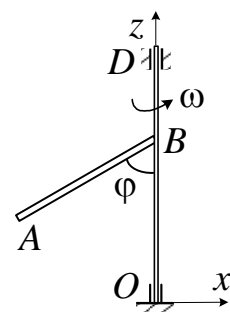


Рис. 5.48

66. Однородный круглый диск массой 2 кг радиусом  $R = 0,2$  м вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр масс  $C$ , по закону  $\varphi = 20t^2 + 3$  рад. (рис. 5.47). Определить величину главного момента сил инерции диска относительно оси вращения. (1,6 Н·м)

67. Тонкий однородный горизонтальный стержень  $AB$  массой 4 кг длиной  $l = 0,2$  м равномерно вращается вокруг вертикальной оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega = 2$  рад/с (рис. 5.46). Пренебрегая весом вала  $OD$ , определить величину реакции подшипника  $D$ , если  $OB = BD = l$ , полагая  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. (10,8 Н)

68. Тонкий однородный горизонтальный стержень  $AB$  массой 4 кг длиной  $l = 0,2$  м равномерно вращается вокруг вертикальной оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega = 10$  рад/с (рис. 5.46). Пренебрегая весом вала  $OD$ , определить величину давления в подпятнике  $O$ , если  $OB = BD = l$ , полагая  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. (41,2 Н)

69. К вертикальному валу  $OD$  ( $OB = BD = l = 0,5$  м) равномерно вращающемуся вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega = 10$  рад/с (рис. 5.47), жестко прикреплен стержень  $BM$  длиной  $l$  с точечной массой  $M = 2$  кг на конце. Пренебрегая весом вала и стержня  $BM$ , определить реакцию подшипника  $D$ , если стержень составляет с валом  $OD$  угол  $\varphi = 45^\circ$ . (67,2 Н)

70. К вертикальному валу  $OD$  ( $OB = 2 BD = 2l = 1$  м), равномерно вращающемуся вокруг вертикальной оси  $Oz$  с угловой скоростью 10 рад/с, жестко прикреплен однородный стержень  $BA$  длиной  $l$  массой 6 кг, составляющий с валом угол  $\varphi = 60^\circ$  (рис. 5.48). Пренебрегая весом вала  $OD$ , определить величину давления на подпятник  $O$ . (77,5 Н)

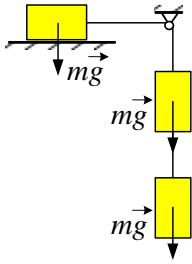


Рис. 5.49

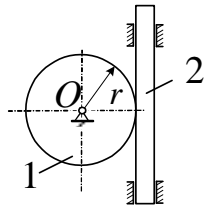


Рис. 5.50

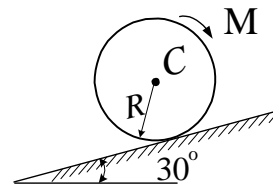


Рис. 5.51

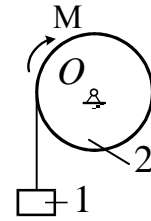


Рис. 5.52

71. Грузы 1 и 2 массой  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 1$  кг соответственно подвешены к концам гибкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок массой  $m_3 = 4$  кг (рис. 5.36). Составить уравнение Лагранжа второго рода и найти ускорения грузов, считая массу блока распределенной по его ободу и пренебрегая массой нити. ( $1,4 \text{ м/с}^2$ )

72. Три груза одинаковой массы  $m$  связаны друг с другом невесомой нерастяжимой нитью (рис. 5.49). Составить уравнение Лагранжа второго рода, и определить ускорение нижнего груза, приняв за обобщенную координату его вертикальное перемещение. ( $6,53 \text{ м/с}^2$ )

73. Рейка 2 массой 100 кг опускаясь, приводит в движение зубчатое колесо 1 радиусом колеса  $r = 0,1$  м с моментом инерции относительно его оси вращения  $Ox$   $I_{Ox} = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  (рис. 5.50). Составить уравнение Лагранжа второго рода и найти ускорение рейки 2, приняв за обобщенную координату ее вертикальное перемещение ( $8,9 \text{ м/с}^2$ )

74. Однородный цилиндрический каток массой 4 кг радиусом  $R = 0,2$  м при действии постоянного момента  $M = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$  движется вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом  $30^\circ$  к горизонту (рис. 5.51).

Составить уравнение Лагранжа второго рода и определить ускорение центра  $C$  катка, приняв за обобщенную координату перемещение центра  $C$  вверх по наклонной плоскости. ( $5 \text{ м/с}^2$ )

75. Шкив 2 массой 2 кг радиусом 0,2 м и груз 1 массой 1 кг, связанные друг с другом нерастяжимой нитью, движутся в вертикальной плоскости под действием постоянного момента  $M = 4 \text{ Н} \cdot \text{м}$  (рис. 5.52). Составить уравнение Лагранжа второго рода и определить угловое ускорение  $\varepsilon$  шкива 2, приняв за обобщенную координату угол  $\varphi$  поворота шкива. При вычислении момента инерции шкив считать однородным сплошным диском. ( $13 \text{ рад/с}^2$ )

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современный этап развития науки и техники, характеризующийся гигантским ростом новейших видов производства и технических средств, ставит перед инженерами сложнейшие проблемы, решение которых требует научного прогнозирования и строгого предварительного расчета, основанных на фундаментальных знаниях и, в первую очередь на знании дисциплины «Теоретическая механика».

Специалисты, работающие в разных областях техники, должны владеть общими методами теоретической механики, которые дают универсальный аналитический аппарат для исследования сложных задач, относящихся не только к чисто механическим, но и к электрическим, электромеханическим и теплоэнергетическим явлениям.

Курс «Теоретическая механика» является фундаментальным, т. е. основой для многих дисциплин, в дальнейшем изучаемых студентами технических специальностей в СФУ. В результате изучения этой дисциплины каждый студент *должен знать*:

- основные понятия и определения;
- условия равновесия твердых тел;
- способы нахождения положения центра тяжести твердого тела;
- способы задания движения точки;
- общие геометрические свойства движения тел и виды их движения;
- законы динамики и вытекающие из них общие теоремы для материальной точки и механической системы;
- принципы механики и основы аналитической механики.

На основе полученных знаний студент *обязан уметь*:

- понимать физический смысл явлений при механическом движении и равновесии материальных тел;
- определять силы взаимодействия между телами при их равновесии;
- находить силы, под действием которых материальное тело (точка) совершает то или иное движение;
- определять движение материальных тел (точек) и тел под действием приложенных к ним сил.

Таким образом, изучение курса «Теоретическая механика» способствует формированию у студентов диалектико-материалистического мировоззрения, развитию их логического мышления и дает им понимание весьма широкого круга явлений, относящихся к одной из форм движения материи – к механическому движению.

Овладение методами моделирования при решении задач механики и умение самостоятельно и математически корректно их решать потребуются студентам не только для дальнейшего обучения в СФУ, но и в будущей профессиональной деятельности – при проектировании и эксплуатации различных машин и сооружений.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: В 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. СПб.: Изд-во «Лань», 1998. – 736 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С. М. Тарг. М.: Высш. шк, 1995. – 416 с.
3. Цывильский В. Л. Теоретическая механика. / Цывильский В. Л. М.: Высш. шк, 2001. – 319 с.
4. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. СПб.: Изд-во «Лань», 1998. – 448 с.
5. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников энергетических, горных, металлургических, электроприборостроения и автоматизации, технологических специальностей, а также геологических, электротехнических, электронной техники и автоматики, химико-технологических и инженерно-экономических специальностей вузов. Под ред. С. М. Тарга / Л. И. Котова, Р. И. Надеева, С. М. Тарг, В. Л. Цывильский, И. М. Шмарова. М.: Высш. шк, 1988. – 64 с.
6. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах, в 3-х т. Т. I. Динамика: учеб пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. М.: «Наука». Физматлит, 1991. – 640 с.
7. Яблонский, А. А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. / А. А. Яблонский. М.: Интеграл-Пресс, 1998. – 384 с.
8. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов. / О. Э. Кепе, Я. А. Виба, О. П. Грапис и др.; под ред. О. Э. Кепе. М.: Высш. шк, 1989. – 368 с.
9. Валькова Т. А. Теоретическая механика: Курс лекций. / Т. А. Валькова. Красноярск.: КГТУ, 2005. – 223 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

#### Программа дисциплины «Теоретическая механика»

**Введение.** Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики – изучение механического движения и механического взаимодействия материальных тел. Теоретическая механика как одна из фундаментальных физико-математических наук; ее мировоззренческое значение и место среди других естественных и технических наук. Объективный характер законов механики. Теоретическая механика как научная база большинства областей современной техники.

**Кинематика.** Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

**Кинематика точки.** Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Скорость точки как производная ее радиуса-вектора по времени. Ускорение точки как производная от ее вектора скорости по времени.

Координатный способ задания движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Определение траектории точки. Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси.

Естественный способ задания движения точки. Естественный трехгранник и его оси. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трехгранника; касательное и нормальное ускорения точки. Выражение касательного ускорения точки через проекции скорости и ускорения на координатные оси.

**Кинематика твердого тела.** Понятие об абсолютно твердом теле. Поступательное движение твердого тела; теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела при этом движении.

**Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.** Уравнение вращательного движения. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорости и ускорения точек вращающегося тела. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Выражение скорости точки вращающегося тела, ее касательного и нормального ускорений в виде векторных произведений.

**Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела** и движение плоской фигуры в ее плоскости. Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное; независимость угловой



скорости фигуры от выбора полюса. Определение скоростей точек плоской фигуры. Теорема о проекциях двух точек фигуры (твердого тела). Мгновенный центр скоростей и определение с его помощью скоростей точек плоской фигуры.

**Сложное (составное) движение точки.** Абсолютное и относительное движение точки; переносное движение. Теорема о сложении скоростей. Теорема о сложении ускорений при переносном поступательном и переносном вращательном движениях; кориолисово ускорение и его вычисление.

**Динамика и элементы статики.** Предмет динамики и статики. Основные понятия: масса, материальная точка, сила. Аксиома параллелограмма сил. Понятие о силе трения. Геометрический и аналитический способы сложения сил.

Законы механики Галилея – Ньютона. Инерциальная система отсчета. Связи и реакции связей.

**Динамика материальной точки.** Задачи динамики. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах. Решение первой задачи динамики для материальной точки. Решение второй задачи динамики; интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки в простейших случаях. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям.

**Свободные прямолинейные колебания материальной точки.** Свободные затухающие колебания точки при сопротивлении, пропорциональном скорости. Вынужденные колебания точки при гармонической возмущающей силе и сопротивлении, пропорциональном скорости.

**Относительное движение материальной точки.** Дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки. Переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

**Введение в динамику механической системы.** Механическая система. Момент силы относительно точки и оси. Понятие о паре сил; момент пары. Классификация сил, действующих на систему. Главный вектор и главный момент системы сил. Свойства внутренних сил.

Масса системы. Центр масс. Осевые моменты инерции. Радиус инерции. Моменты инерции относительно параллельных осей. Моменты инерции простейших тел.

**Общие теоремы динамики.** Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс.

Количество движения материальной точки и механической системы. Элементарный импульс силы и импульс силы за конечный промежуток

времени. Теорема об изменении количества движения системы. Закон сохранения количества движения.

Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Главный момент количества движения или кинетический момент системы относительно центра и оси. Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоском движении. Элементарная работа силы и работа силы на конечном пути. Работа силы тяжести, силы упругости и силы трения. Мощность. Работа и мощность силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

**Понятие о силовом поле.** Потенциальное силовое поле и силовая функция. Работа силы на конечном перемещении точки в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия. Примеры потенциальных силовых полей. Закон сохранения механической энергии.

**Элементы статики твердого тела.** Система сил, действующих на абсолютно твердое тело. Эквивалентные системы сил. Равнодействующая. Уравновешенная система сил. Необходимые и достаточные условия равновесия системы сил, приложенной к твердому телу.

Аналитические условия равновесия произвольной системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Плоская система сил. Алгебраическая величина момента силы. Условия равновесия плоской системы сил. Равновесие системы тел\*.

Центр тяжести твердого тела и его координаты. Способы определения положения центров тяжести тел.

**Принцип Д'Аламбера.** Принцип Д'Аламбера для материальной точки и механической системы. Сила инерции. Приложение принципа Д'Аламбера к определению реакций связей.

**Элементы аналитической механики.** Понятие о стационарных геометрических связях. Возможные (виртуальные) перемещения системы. Возможная работа. Идеальные связи. Число степеней свободы системы. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Обобщенные координаты системы; обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа второго рода.

## Приложение 2

## Производные элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^a$	$a x^{a-1}$	$e^x$	$e^x$
$a^x$	$a^x \ln a$	$x^x$	$x^x(1 - \ln x)$
$\ln x$	$-\frac{1}{x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

## Приложение 3

## Основные интегралы

Номер	Интегралы	Примечание
1.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$
2.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x $	—
3.	$\int e^x dx = e^x$	—
4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
5.	$\int \sin x dx = -\cos x$	—
6.	$\int \cos x dx = \sin x$	—
7.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x $	—
8.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x $	—
9.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	—
10.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$	—
11.	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right $	—
12.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right $	—
13.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x $	
14.	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$	—
15.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right $	$a \neq 0$
16.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}$	$a \neq 0$
17.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)$	$a \neq 0$
18.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{Arch} \frac{x}{a} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - a^2} \right)$	$a \neq 0$
19.		

## Приложение 4

### Принятые обозначения

$\alpha, \beta, \gamma, \theta, \varphi, \psi$  – углы

$\gamma$  – объемная плотность вещества

$\delta\varphi_v$  – бесконечно малый угол поворота  $v$ -го тела в фиксированный

момент времени

$\delta A$  – полная возможная работа

$\delta A_v$  – возможная работа активной силы  $\vec{F}_v$

$\delta A_m$  – возможная работа сил при  $\delta q_m > 0$

$\delta f$  – изохронная вариация функции  $f$

$\delta q_m$  – изохронная вариация обобщенной координаты  $q_m$

$\delta\vec{r}_v$  – вектор возможного перемещения  $v$ -й точки

$(\delta\vec{r}_v)_m$  – вектор возможного перемещения  $v$ -й точки при  $\delta q_m > 0$

$\delta\vec{s}_A$  – вектор возможного перемещения точки  $A$  тела

$\delta\vec{s}_v$  – вектор возможного перемещения  $v$ -го тела

$\delta x$  – изохронная вариация обобщенной координаты  $x$

$\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$  – проекции вектора возможного перемещения  $\delta\vec{r}_v$   $v$ -й

точки на декартовы оси

$\vec{\nabla}f$  – вектор-градиент функции  $f$

$\varepsilon$  – угловое ускорение тела

$\varepsilon_k$  – угловое ускорение  $k$ -го тела

$\vec{\varepsilon}$  – вектор углового ускорения тела

$\varphi$  – угол поворота тела

$\lambda$  – деформация пружины

$\lambda_0, \lambda_1$  – деформация пружины в начальном и конечном положениях

соответственно

$\mu$  – постоянный коэффициент, характеризующий силу  $\vec{R}$  вязкого сопротивления среды

$v$  – индекс суммирования точек (тел) системы

$\rho$  – радиус кривизны траектории

$\rho_z$  – радиус инерции тела относительно оси  $z$

$\omega$  – значение угловой скорости тела

$\omega_k$  – угловая скорость  $k$ -го твердого тела

$\omega_0$  – начальная угловая скорость тела

$\vec{\omega}$  – вектор угловой скорости тела

$A, B, C, D, L, M$  – точки твердого тела

$A$  – работа силы

$A_{B_{k0}B_{k1}}$  – работа силы  $\vec{F}_k$  при перемещении материальной точки  $B_k$  из начального положения  $B_{k0}$  в конечное положение  $B_{k1}$

$A_k^e, A_k^i$  – работа равнодействующей внешних  $\vec{F}_k^e$  и внутренних  $\vec{F}_k^i$  сил соответственно, действующих на  $k$ -ю точку системы

$Axyz$  – подвижная декартова система координат

$a$  – модуль ускорения точки

$a_x, a_y, a_z$  – проекции вектора ускорения  $\vec{a}$  точки на декартовы оси

$a, b, d, l$  – линейные размеры

$\vec{a}$  – вектор ускорения точки

$\vec{a}_C$  – ускорение центра масс  $C$  системы (тела)

$\vec{a}_k$  – ускорение, сообщаемое  $k$ -й материальной точке силой  $\vec{F}_k$

$\vec{a}_n$  – нормальное ускорение точки

$\vec{a}_\tau$  – касательное ускорение точки

$B$  – материальная точка

$B_{\text{тнб}}$  – система естественных осей, движущаяся вместе с материальной точкой  $B$  по ее траектории

$B_k$  –  $k$ -я материальная точка механической системы

$B_0(x_0, y_0, z_0), B_1(x_1, y_1, z_1)$  – начальное и конечное положения материальной точки  $B$  на траектории ее движения

$\vec{b}$  – орт бинормали

$c$  – коэффициент жесткости пружины

$C$  – центр тяжести твердого тела

$C$  – центр масс системы (тела)

$C_n$  – центр масс  $n$ -ого тела

$C_1, C_2, \dots, C_n$  – постоянные интегрирования

$Cx, Cy, Cz$  – декартовы оси, проходящие через центр масс  $C$  тела

$dA$  – элементарная работа силы

$dA_k^e, dA_k^i$  – элементарная работа равнодействующей внешних  $\vec{F}_k^e$  и внутренних  $\vec{F}_k^i$  сил соответственно, действующих на  $k$ -ю точку системы

$d\vec{r}$  – вектор элементарного перемещения точки

$d\vec{r}_k$  – вектор элементарного перемещения  $k$ -й точки

$ds$  – модуль элементарного перемещения  $d\vec{r}$  точки

$dt$  – бесконечно малый промежуток времени

$dT$  – дифференциал кинетической энергии  $T$  механической системы

$dV$  – величина элементарного объема тела

$D$  – подвижное тело (груз)

$F$  – модуль силы

$F_{кт}, F_{кн}, F_{кб}$  – проекции силы  $\vec{F}_к$  на касательную, главную нормаль и бинормаль соответственно

$F_{кx}, F_{кy}, F_{кz}$  – проекции силы  $\vec{F}_к$  на оси  $x, y, z$  соответственно

$\vec{F}$  – вектор активной силы

$\vec{F}_к^a$  – равнодействующая активных сил, действующих на  $к$ -ю точку

$\vec{F}^e$  – главный вектор внешних сил

$\vec{F}_к^e$  – равнодействующая внешних сил, действующая на  $к$ -ю точку

$\vec{F}_к^i$  – равнодействующая внутренних сил, действующая на  $к$ -ю точку

$F_{кx}^e, F_{кy}^e, F_{кz}^e$  – проекции равнодействующей внешних сил  $\vec{F}_к^e$  на оси  $x, y, z$  соответственно

$F_{кx}^i, F_{кy}^i, F_{кz}^i$  – проекции равнодействующей внутренних сил  $\vec{F}_к^i$  на оси  $x, y, z$  соответственно

$\vec{F}_{тр}$  – сила трения

$\vec{F}_{тр}^к$  – сила трения, действующая на  $к$ -е тело

$\vec{F}_{упр}$  – сила упругости

$f$  – коэффициент трения скольжения

$f_j$  –  $j$ -я функция

$g$  – ускорение свободного падения

$h$  – плечо силы

$h$  – вертикальное перемещение

$h_C$  – вертикальное перемещение центра масс  $C$  твёрдого тела

$h_{кx}, h_{кy}, h_{кz}$  – перпендикуляры, опущенные из  $к$ -й точки на оси  $x, y, z$  соответственно

$I_{Cx}, I_{Cy}, I_{Cz}$  – моменты инерции тела (системы) соответственно относительно осей  $Cx, Cy, Cz$ , проходящих через центр масс  $C$

$I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции тела (системы) относительно осей  $Ox, Oy, Oz$  соответственно

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты декартовой системы координат

$K$  – мгновенный центр скоростей

$\vec{K}_O$  – кинетический момент (главный момент количеств движения) механической системы относительно центра  $O$

$K_x, K_y, K_z$  – проекции кинетического момента (главного момента количества движения)  $\vec{K}_O$  механической системы на декартовы оси

$M$  – материальная точка

$M$  – масса механической системы

$m_k$  – масса  $к$ -й материальной точки (тела)

$\vec{m}_O(\vec{F}_k^e)$  – момент внешней силы  $\vec{F}_k^e$  относительно центра  $O$

$\vec{m}_O(\vec{F}_k^i)$  – момент внутренней силы  $\vec{F}_k^i$  относительно центра  $O$

$m_x(\vec{F}_k), m_y(\vec{F}_k), m_z(\vec{F}_k)$  – моменты силы  $\vec{F}_k$  относительно декартовых осей

$N$  – величина нормальной реакции поверхности

$\vec{N}$  – равнодействующая реакций связей, действующих на точку

$\vec{N}$  – нормальная реакция поверхности

$\vec{N}_k$  – равнодействующая реакций связей, действующих на  $k$ -ю точку

системы

$\vec{N}_k$  – нормальная реакция поверхности, действующая на  $k$ -е тело

$N_\tau, N_n, N_b$  – проекции реакции  $\vec{N}$  на касательную, главную нормаль и бинормаль соответственно.

$n$  – число точек материальной системы

$n$  – индекс главной нормали

$\vec{n}$  – орт главной нормали

$O$  – произвольный неподвижный центр в пространстве

$O$  – начало декартовой системы координат

$OXYZ$  – неподвижная декартова система координат

$Oxuz$  – неподвижная декартова система координат

$P$  – мгновенный центр скоростей

$P$  – вес твердого тела

$P_k$  – мгновенный центр скоростей  $k$ -го тела

$p_k$  – вес  $k$ -й точки твердого тела

$\vec{P}$  – сила тяжести

$\vec{P}_k$  – сила тяжести  $k$ -го тела

$q$  – интенсивность равномерно распределенной нагрузки

$q_{\max}$  – максимальное значение интенсивности распределенной нагрузки

$q_m$  – обобщенная координата

$\dot{q}_m$  – обобщенная скорость, соответствующая обобщенной координате  $q_m$

$q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0S}$  – значения обобщенных координат в начальный момент времени  $t = 0$

$\dot{q}_{01}, \dot{q}_{02}, \dots, \dot{q}_{0S}$  – значения обобщенных скоростей в начальный момент времени  $t = 0$

$Q$  – модуль равнодействующей распределенной нагрузки

$Q_m$  – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $q_m$

$\vec{Q}$  – равнодействующая распределенной нагрузки

$\vec{Q}$  – сила давления

$r$  – радиус



- $r_k$  – радиус ступени  $k$ -го ступенчатого шкива  
 $\vec{r}$  – радиус-вектор точки  
 $\vec{r}_C$  – радиус-вектор центра масс  $C$  системы (центра тяжести тела)  
 $\vec{r}_k$  – радиус-вектор  $k$ -ой точки  
 $R$  – радиус  
 $R_k$  – радиус  $k$ -го тела  
 $R_k$  – радиус ступени  $k$ -го ступенчатого шкива  
 $\vec{R}$  – сила вязкого сопротивления среды  
 $\vec{R}$  – главный вектор системы сил  
 $\vec{R}$  – равнодействующая  
 $\vec{R}_k$  – равнодействующая реакции, действующей на  $k$ -е тело  
 $R_x, R_y, R_z$  – проекции на декартовы оси равнодействующей  $\vec{R}$  сил, действующих на материальную точку  
 $s$  – криволинейная координата точки  
 $s$  – перемещение тела  
 $s_k$  – перемещение  $k$ -го тела  
 $S$  – плоская фигура (сечение тела)  
 $S$  – число степеней свободы механической системы  
 $t$  – время  
 $t_0, t_1$  – начальный и конечный моменты времени соответственно  
 $T$  – кинетическая энергия механической системы (твёрдого тела)  
 $T_v$  – кинетическая энергия  $v$ -го тела системы  
 $T_0, T_1$  – кинетическая энергия системы в начальный и конечный моменты времени соответственно  
 $T_{\text{пост}}, T_{\text{вр}}, T_{\text{пл}}$  – кинетическая энергия тела соответственно при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях  
 $V$  – значение скорости точки (тела)  
 $V$  – объём тела  
 $V_0, V_1$  – величины скорости точки в ее начальном и конечном положениях соответственно  
 $V_B$  – величина скорости материальной точки в положении  $B$   
 $V_{Cx}, V_{Cy}, V_{Cz}$  – проекции на декартовы оси вектора скорости центра масс  $C$   
 $V_k$  – величина скорости  $k$ -ого тела при поступательном движении  
 $V_{kr}$  – величина относительной скорости  $k$ -й точки системы  
 $\vec{V}$  – вектор скорости точки  
 $\vec{V}_a$  – абсолютная скорость точки  
 $\vec{V}_C$  – вектор скорости центра масс  $C$  системы (твёрдого тела)  
 $\vec{V}_e$  – переносная скорость точки

- $\vec{V}_r$  – относительная скорость точки  
 $\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{Z}_O$  – составляющие реакции  $\vec{R}_O$  связи в точке  $O$ , направленные по осям  $x, y, z$  соответственно  
 $x, y, z$  – декартовы координаты точки  
 $x_k, y_k, z_k$  – декартовы координаты  $k$ -й точки  
 $x, y, z$  – оси декартовой системы координат  $Oxyz$   
 $x_C, y_C, z_C$  – декартовы координаты центра масс  $C$  механической системы (твердого тела)  
 $x_{C_k}$  – координата центра масс  $k$ -го тела  
 $W$  – мощность  
 $k$  – индекс суммирования  
 $M$  – момент пары сил  
 $M$  – вращающий момент  
 $\vec{M}_O^e$  – главный момент внешних сил относительно центра  $O$   
 $\vec{M}_O^i$  – главный момент внутренних сил относительно центра  $O$   
 $M_x^e, M_y^e, M_z^e$  – проекции главного момента  $\vec{M}_O^e$  на декартовы оси  
 $M_z^i$  – проекция главного момента  $\vec{M}_O^i$  внутренних сил на ось  $Oz$   
 $M_z$  – вращающий момент силы вокруг оси  $z$   
 $M_{вр}$  – вращающий момент  
 $M_k$  – момент сил сопротивления, приложенный к  $k$ -му шкиву  
 Вт – ватт  
 Дж – джоуль  
 кг – килограмм  
 м – метр  
 Н – ньютон  
 с – секунда