

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МОРСКОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО РАЗДЕЛУ

**ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ
АЛГЕБРА,
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Санкт-Петербург
2012

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}, C = B - 2A^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0 \\ 7x_1 - 14x_2 + 18x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}.$$

8. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \{-3; 1; 3\}$ на направление вектора \vec{AB} , где $A(7; 3; -2)$; $B(8; 2; -2)$.

9. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол в 30° , $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 1$. Найти длину вектора \vec{p} , если $\vec{p} = (7\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + 3\vec{b})$.

10. Лежат ли точки $A(5; 7; -2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4; -4)$ и $D(1; 5; 0)$ в одной плоскости?

11. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3; -4)$ и уравнения двух высот: $7x - 2y - 1 = 0$ и $2x - 7y - 6 = 0$.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M(0; -2; 3)$.

13. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(1; -2; 3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{9; -3; -1\}$ и пересекает прямую $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.

14. Принадлежит ли прямая $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ плоскости $x + 2y - 4z + 1 = 0$?

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = (3A)^T - B.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 14x_4 = 0 \\ 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}.$$

8. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

9. Сила $\vec{F} = \{2; -4; 5\}$ приложена к точке $A(4; -2; 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $B(3; 2; -1)$.

10. Какую тройку (левую или правую) образуют векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$?

11. Найти расстояние от точки $B(2; -7)$ до прямой $3x + y + 11 = 0$.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 7; -5)$ и отсекающей от осей координат положительные и равные отрезки.

13. Составить каноническое уравнение прямой, лежащей в плоскости yOz , проходящей через начало координат и перпендикулярной к

прямой $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$.

14. Найти угол между прямой $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ и плоскостью,

проходящей через точки $A(2; 3; -1)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; -2; 1)$.

ВАРИАНТ 3

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -5 & 6 & 10 & 6 \\ -9 & 8 & 8 & 5 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, C = A + B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = 0 \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0 \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0 \end{cases}$$

8. При каком t векторы $\vec{a} = \{6; 0; 12\}$ и $\vec{b} = \{-8; 13; t\}$ будут взаимно перпендикулярны?

9. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $3\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} - \vec{a}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 150° .

10. Компланарны ли векторы $\vec{a} = \{12; 14; -21\}$, $\vec{b} = \{-9; 36; 8\}$ и $\vec{c} = \{9; -36; -8\}$?

11. Через точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $x - 3y + 4 = 0$ провести:

- 1) прямую, проходящую через начало координат;
- 2) прямую, параллельную оси абсцисс;
- 3) прямую, параллельную ординат;
- 4) прямую, проходящую через точку $(4; 3)$.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(0; 1; 2)$ и $N(2; 1; 1)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3; 0; 1\}$.

13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -2; 0)$

перпендикулярно к прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ и расположенной в плоскости xOy .

14. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения

плоскости $x - 3y + 2z + 1 = 0$ с прямыми $\frac{x-5}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ и

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-5}{2}.$$

ВАРИАНТ 4

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = 2A + 3B.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0 \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

8. Доказать, что точки $A(1; -1; 1)$, $B(1; 3; 1)$, $C(4; 3; 1)$, $D(4; -1; 1)$ являются вершинами прямоугольника. Вычислить длину его диагоналей.

9. Вычислить площадь треугольника ABC , вершины которого лежат в точках $A(2; 3; 4)$, $B(4; 3; 2)$, и $C(1; 1; 1)$.

10. При каком значении k точки $A(1; 0; 3)$, $B(-1; 3; 4)$, $C(1; 2; 1)$, и $D(k; 2; 5)$ лежат в одной плоскости?

11. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - y + 3 = 0$ и $3x + 5y + 11 = 0$ и через точку $A(2; 1)$.

12. Даны координаты вершин тетраэдра $A(2; 0; 0)$, $B(5; 3; 0)$, $C(0; 1; 1)$, $D(-2; -4; 1)$. Найти двугранный угол между гранями ABC и ABD .

13. При каком значении λ прямые $\frac{x+2}{\lambda} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ и

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases} \text{ параллельны?}$$

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(4; 0; -1)$

параллельно прямым $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$ и $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

ВАРИАНТ 5

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = A^T - B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 5y - 4z + 5 = 0 \\ 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ 4x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases}$$

8. В прямоугольном треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны 60° и 90° , а длина гипотенузы равна 2. Вычислить $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC}$.

9. Найти вектор \vec{d} , зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{0; -1; 2\}$ и $\vec{b} = \{1; 3; 3\}$ и удовлетворяет условию $\vec{d} \cdot (3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 8$.

10. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.

11. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $x + 2y = 4$ и $x + 2y = 10$, и уравнение одной из его диагоналей: $y = x + 2$.

12. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; 1; 1)$ и $N(-1; 1; -1)$ параллельно прямой, определяемой точками $A(5; -2; 3)$ и $B(6; 1; 0)$.

13. При каком значении D прямая $\begin{cases} 2x - y + 3z + D = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$ проходит

через начало координат?

14. Найти точку, симметричную точке $A(3; -1; 4)$ относительно прямой

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 6

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C = 2A - B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 11 & -19 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ 2x - 4y + 3z = 1 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

8. Даны точки $A(0; -3; 4)$, $B(2; 5; -1)$ и $C(-4; 2; -2)$. Вычислить скалярное произведение векторов $3\overline{AB} - 2\overline{BC}$ и $\overline{CB} + \overline{BA}$.

9. Найти длину высоты треугольника ABC , опущенной из вершины C на сторону AB , если $A(2; 3; 4)$, $B(4; 3; 2)$ и $C(1; 1; 1)$.

10. Какую тройку (правую или левую) образуют векторы $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$?

11. Найти проекцию точки $C(3; -1)$ на прямую $3x - y + 2 = 0$.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки $A(2; 0; 1)$ на плоскости $x - 3y + 2z = 0$ и $2x - y + 2z = 0$.

13. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 1; 3)$, параллельно прямой $x = 3 + t$, $y = 3t$, $z = 2 - t$.

14. Найти угол между прямой, проходящей через точки $A(-1; 0; -5)$ и $B(1; 2; 0)$, и плоскостью $x - 3y + z + 5 = 0$.

ВАРИАНТ 7

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, C = (2B)^T + A.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

8. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ и $C(3; -2; 1)$. Определить его внешний угол при вершине B .

9. Раскрыть скобки и упростить выражение:

$$\bar{i} \times (\bar{j} + \bar{k}) - \bar{j} \times (\bar{i} + \bar{k}) + \bar{k} \times (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}).$$

10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{p} - 3\bar{q} + \bar{r}$, $\bar{b} = 2\bar{p} + \bar{q} - 3\bar{r}$, $\bar{c} = \bar{p} + 2\bar{q} + \bar{r}$, где \bar{p}, \bar{q} и \bar{r} — взаимно перпендикулярные орты.

11. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; 4)$ и точку пересечения прямых $2x - y + 5 = 0$ и $x - 2y + 4 = 0$.

12. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -3; 1)$ параллельно векторам $\bar{a} = (-3; 2; -1)$ и $\bar{b} = (1; 2; 3)$.

13. Даны вершины треугольника $A(1; 0; -1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(0; -1; 1)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

14. Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки $A(-1; 3; 2)$ на плоскость $2x - y + z + 3 = 0$.

ВАРИАНТ 8

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, C = A - B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 6 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

8. Найти координаты вектора \vec{p} , коллинеарного вектору $\vec{q} = \{3; -4; 0\}$, если известно, что вектор \vec{p} образует с осью Ox тупой угол и $|\vec{p}| = 10$.

9. $\vec{a} = \{3; 1; -1\}$, $\vec{b} = \{-2; 1; 4\}$. Вычислить $\vec{b} \times (\vec{a} - 2\vec{i})$.

10. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$ и $D(3; 7; 2)$.

11. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x + y + 6 = 0$ и $3x + 5y - 15 = 0$ и через точку $N(1; -2)$.

12. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 5; 3)$ параллельно плоскости $x + 2y - 3z + 2 = 0$.

13. При каком значении λ прямые $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{\lambda} = \frac{z}{3}$ и

$$\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases} \text{ перпендикулярны?}$$

14. Проверить, что прямые $\frac{x}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ и $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ пересекаются. Найти уравнение плоскости, в которой они лежат.

ВАРИАНТ 9

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, C = 3B - 2A.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + 3z - 7 = 0 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}.$$

8. По координатам вершин треугольника ABC $A(1; 1; -1)$, $B(2; 4; -1)$ и $C(8; 3; -1)$ выяснить, является ли он прямоугольным, остроугольным или тупоугольным.

9. Раскрыть скобки и упростить выражение

$$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{c} + (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{b} + (\bar{b} - \bar{c}) \times \bar{a}.$$

10. При каком m векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + m\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{j} + \bar{i} + (m+1)\bar{k}$ и $\bar{c} = \bar{i} - \bar{j} + m\bar{k}$ компланарны?

11. В треугольнике ABC даны: уравнение стороны AB : $3x + 2y = 12$, уравнение высоты BM : $x + 2y = 4$, уравнение высоты AM : $4x + y = 6$, где M — точка пересечения высот. Написать уравнения сторон AC и BC .

12. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 3; -1)$ и $B(1; 5; 3)$ перпендикулярно плоскости $3x - y + 3z + 15 = 0$.

13. Через точку $M(2; -1; 3)$ провести прямую, параллельную прямой

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 3x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

14. Написать каноническое уравнение прямой, которая проходит через точку $M(3; -2; -4)$ параллельно плоскости $3x - 2y - 5z - 7 = 0$ и

пересекает прямую $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

ВАРИАНТ 10

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = A^T + B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}.$$

8. Проверить, будет ли треугольник ABC ($A(1;2;3)$, $B(7;10;3)$, $C(-1;3;1)$) прямоугольным.

9. Раскрыть скобки и упростить выражение:

$$(2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{c} - \bar{a}) + (\bar{b} + \bar{c}) \times (\bar{a} + \bar{b}).$$

10. Найти объем параллелепипеда с вершинами в точках $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ и $D(5;5;6)$.

11. Через точку пересечения прямых $3x + 4y - 12 = 0$ и $x + 12y - 12 = 0$ провести прямую, перпендикулярную прямой $3x + 4y - 12 = 0$.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -3; 5)$ перпендикулярно линии пересечения плоскостей $2x + y - 2z + 1 = 0$ и $x + y + z - 5 = 0$.

13. Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

14. При каком значении λ плоскость $5x - 3y + \lambda z + 1 = 0$ будет

параллельна прямой $\begin{cases} x - 4z - 1 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$?

ВАРИАНТ 11

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, C = 2B - A^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

8. Найти работу силы $\vec{f} = \{4; -1; 1\}$ на перемещении $\vec{s} = \{5; 3; -2\}$.

9. Вычислить координаты вектора \vec{c} , перпендикулярного векторам $\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ и образующего тупой угол с осью Oy , если $|\vec{c}| = \sqrt{7}$.

10. Доказать, что точки $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$ лежат в одной плоскости.

11. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; 1)$

1) параллельно прямой $3x + 4y - 12 = 0$;

2) перпендикулярно прямой: $5x - 12y - 6 = 0$;

3) параллельно оси Ox .

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1; 2; 0)$, $M_2(2; 1; 1)$, $M_3(3; 0; 1)$.

13. Через точку $A(0; -2; 1)$ провести прямую так, чтобы она пересекала

две данные прямые $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$ и $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1}$.

14. Найти расстояние от точки $A(2; 3; -1)$ до прямой

$$\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 12

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = (2A)^T - B.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 6 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 6z = 2 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}.$$

8. Найти скалярное произведение векторов $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{q} = 2\vec{b} + \vec{a}$, если $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

9. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $(\vec{a} + 3\vec{b})$ и $(3\vec{a} + \vec{b})$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b}

равен 30° .

10. Какую тройку (левую или правую) образуют векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$?

11. Даны вершины треугольника $A(2;1)$, $B(-1;-1)$, $C(3;2)$. Составить уравнение высоты, опущенной на сторону BC , и медианы, проведенной к стороне AC .

12. Плоскость проходит через ось Oz и составляет с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ угол $\frac{\pi}{3}$. Найти её уравнение.

13. Пересекаются или нет прямые $\begin{cases} 4x + z - 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}?$$

14. Найти проекцию точки $M(0;1;2)$ на прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$.

ВАРИАНТ 13

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = 3A + B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

8. Найти угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{2; -1; 5\}$ и $\vec{b} = \{2; 3; 6\}$ как на сторонах.

10. Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

11. Найти проекцию точки $M(1; 1)$ на прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2}$.

12. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки $A(-1; 2; 1)$ и $B(3; 0; 2)$.

13. Проверить, пересекаются ли прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4}$ и

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{-1}$, перпендикулярно плоскости $3x + y - 2z + 5 = 0$.

ВАРИАНТ 14

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = 2A - 3B.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

8. Даны векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. При каком m векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны?

9. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(2; 2; 2)$, $B(4; 0; 3)$ и $C(0; 1; 0)$.

10. Проверить будут ли компланарны векторы $\vec{a} = \{1; 6; 5\}$, $\vec{b} = \{3; -2; 4\}$ и $\vec{c} = \{7; -18; 2\}$.

11. Найти точку N , симметричную точке $M(0; -3)$ относительно прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1}$.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(2; -1; 3)$.

13. Даны вершины треугольника $A(1; 0; 2)$, $B(-2; 3; -1)$, $C(3; -2; 4)$. Составить уравнение медианы из вершины B на сторону AC .

14. Через прямую $x = 2t + 1$, $y = -t + 2$, $z = 3t - 2$ провести плоскость, параллельную прямой $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$.

ВАРИАНТ 15

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, C = 2A^T - B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - y + z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}.$$

8. Найти скалярное произведение векторов $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 2\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

9. Найти вектор \vec{c} , зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = (2; 3; -1)$ и $\vec{b} = (1; -2; 3)$ и удовлетворяет условию $\vec{c} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

10. Заданы точки $A(1; 2; -2)$, $B(3; 2; -1)$, $C(0; 1; -2)$ и $D(3; 2; 3)$. Найти объем тетраэдра $ABCD$.

11. Вершины треугольника $A(-3; 1)$, $B(0; 4)$, $C(3; -2)$. Составить уравнения:

1) стороны BC ;

2) медианы, проведенной из вершины C ;

3) высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

12. Из точки $P(2; -1; 3)$ опущен на плоскость перпендикуляр, его основание $M(1; 2; 4)$. Найти уравнение плоскости.

13. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $A(1; -5; 3)$ и образует с осями координат углы, соответственно равные 60° , 45° , 120° .

14. Найдите точку B , симметричную точке $A(2; 0; 1)$ относительно

прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

ВАРИАНТ 16

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 9 & 7 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}, C = A \cdot E + B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0 \\ x + 3y + 6z - 1 = 0 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

8. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\frac{\pi}{3}$. Найти длину вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$,

если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$.

9. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $(\vec{a} + 3\vec{b})$ и $(3\vec{a} + \vec{b})$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 30° .

10. Компланарны ли векторы $\vec{a} = \{3; 7; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{2; 2; 1\}$?

11. В треугольнике ABC даны: уравнение стороны AB : $3x - 4y + 5 = 0$, уравнение высоты AM : $x + 2y - 10 = 0$ и высоты BN : $2x - 3y + 4 = 0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

12. Через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 5y - z + 2 = 0$ провести плоскость, проходящую через точку $M(1; 1; 1)$.

13. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(-1; 0; 3)$ на прямую $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ и перпендикулярной к плоскости $2x + 3y - z = 4$.

ВАРИАНТ 17

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = A - 2B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ 2y + z - 3 = 0 \\ x - z = 6 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

8. Найти, при каком t векторы $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - t\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$.

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{2; -1; 5\}$ и $\vec{b} = \{2; 3; 6\}$ как на сторонах.

10. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(1; 3; 6)$, $B(2; 2; 1)$, $C(-1; 0; 1)$, $D(-4; 6; -3)$.

11. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $M(-1; 2)$ под углом 45° к прямой $x - 2y + 3 = 0$.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям: $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.

13. Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями $(x_1, y_1, 0)$ и $(x_2, 0, z_2)$. Вычислить координаты точки пересечения этой же прямой с третьей координатной плоскостью.

14. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1; 0; -1)$ на прямую $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}$.

ВАРИАНТ 18

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = 3A - B.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -28 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y - 2z = -3 \\ 3x + 2y - z = 3 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

8. Заданы точки $A(-2; 4; 0)$, $B(1; 3; -5)$, $C(0; -1; 1)$ и вектор $\vec{a} = 3\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}$. Вычислить скалярное произведение векторов $2\vec{AB} - 3\vec{AC}$ и $\vec{a} + 2\vec{AC}$.

9. Найти орт \vec{e} , перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{1; -1; 0\}$ и $\vec{b} = \{2; 1; -1\}$.

10. Заданы векторы $\vec{a} = \{-3; 3; 3\}$, $\vec{b} = \{2; 1; 1\}$ и $\vec{c} = \{19; 11; 17\}$. Какую тройку (левую или правую) образуют векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} ?

11. Даны вершины треугольника: $A(5; -2)$, $B(-4; 1)$ и $C(3; 2)$. Написать уравнения стороны BC , медианы AM и высоты CH этого треугольника.

12. Через точку $M(-5; 16; 12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось Ox , другая - ось Oy . Вычислить угол между этими двумя плоскостями.

13. Указать особенность в расположении прямой $\begin{cases} 3y + 2 = 0 \\ x - 3y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$.

14. Найти точку B , симметричную точке $A(1; 2; 0)$ относительно плоскости $2x - 3y + 5z = 5$.

ВАРИАНТ 19

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, C = 2A + B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -2 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = -3 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}.$$

8. Определить угол между векторами $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

9. Вычислить векторное произведение векторов $(4\vec{b} - \vec{a})$ и $(2\vec{b} + 3\vec{a})$, если $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$.

10. Проверить, лежат ли точки $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$ и $D(-1; 1; 1)$ в одной плоскости.

11. Найти точку B , симметричную точке $A(4; -3)$ относительно прямой, проходящей через точки $M(1; -2)$ и $N(-3; 2)$.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 6 = 0$ и $x + 5y - z + 10 = 0$ и перпендикулярной к плоскости $2x - y + 5z - 5 = 0$.

13. При каких значениях коэффициентов B и D прямая
$$\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$$
 лежит в плоскости xOy ?

14. Найти точку пересечения прямой $x = 2t - 1$, $y = t + 2$, $z = 1 - t$ с плоскостью $3x - 2y + z - 3 = 0$.

ВАРИАНТ 20

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -5 & -7 & 10 & 14 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 7 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, C = A - 3B.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ x + 5y + z = -5 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

8. Найти угол между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} , если $A(-4; -2; 0)$, $B(-1; -2; 4)$ и $C(3; -2; 1)$.

9. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{3; -1; -1\}$ и $\vec{b} = \{0; 2; 1\}$.

10. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(5; 0; -6)$ и $D(-10; 9; -7)$.

11. Найти проекцию точки $P(4; 5)$ на прямую, проходящую через точки $A(3; -2)$ и $B(6; -1)$.

12. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки $O(0; 0; 0)$, $A(a; -a; 0)$ и $B(a; a; a)$, и плоскостью xOy .

13. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях

прямой $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$, чтобы прямая пересекала ось

Oy ?

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямые

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \text{ и } \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}.$$

ВАРИАНТ 21

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 7 \\ -6 & 5 & -4 \end{pmatrix}, C = A^T + 2B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, B = (4 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \quad 1).$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 24 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -3 \\ x - 5y - 2z = 6 \\ -2x - y + 3z = -9 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}.$$

8. Найти угол между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} , если $A(2; 1; -1)$, $B(6; -1; -4)$, $C(4; 2; 1)$.

9. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{3; -1; -1\}$ и $\vec{b} = 2\vec{j} + \vec{k}$.

10. Проверить, лежат ли точки $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$ и $D(-1; 1; 1)$ в одной плоскости?

11. Найти расстояние от точки $Q(0; 2)$ до прямой, проходящей через точки $A(5; -2)$ и $B(3; 1)$.

12. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $A(2; 2; 0)$ и $B(4; 0; 0)$.

13. Указать особенность в расположении прямой $\begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ 4y + 5 = 0 \end{cases}$.

14. Найти проекцию точки $M(3; 1; -1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

ВАРИАНТ 22

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 10 & -5 \\ 5 & 8 & 8 & -9 \\ 5 & 5 & 9 & -8 \\ 4 & 7 & 7 & -11 \end{vmatrix}$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, C = A - B \cdot E.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -20 & 13 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ x + 4y - z = -2 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}.$$

8. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \{-3; 1; 3\}$ на направление вектора \overrightarrow{AB} , где $A(7; 3; -2)$, $B(8; 2; -2)$.

9. Раскрыть скобки и упростить выражение

$$2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j}).$$

10. Проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a} = \{5; 3; -1\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$, $\vec{c} = \{2; 0; -4\}$.

11. Вершины треугольника $A(-3; 3)$, $B(5; 1)$, $C(6; -2)$. Составить уравнения:

а) медианы, проведенной из вершины C ;

б) высоты, опущенной из вершины A на сторону BC .

12. Найти угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$.

13. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(-1; 2; 3)$ на ось Oz .

14. Через точку $M(1; -1; 2)$ провести плоскость так, чтобы она была параллельна прямым $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{1}$ и $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$.

ВАРИАНТ 23

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 22 & 12 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, C = 3B - A^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x - y - z + 3 = 0 \\ x + 3y + 3z = -4 \\ -x + 2y - z = 5 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 0 \\ -6x_1 + 7x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 3x_5 = 0 \\ 8x_1 - 9x_2 + 13x_3 + 15x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

8. Заданы точки $A(-2; 4; 0)$, $B(1; 3; -5)$ и $C(0; -1; 1)$ и вектор $\vec{a} = 3\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}$. Вычислить скалярное произведение векторов $(2\vec{AB} - 3\vec{CA})$ и $(\vec{a} + 2\vec{AC})$.

9. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах

$$\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \text{ и } \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

10. Какую тройку (левую или правую) образуют векторы \vec{AB} , \vec{AC} и \vec{AD} , если $A(1; 1; -1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$ и $D(5; 9; 8)$.

11. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -4)$

1) параллельно прямой $2x - 3y = 1$;

2) перпендикулярно прямой $5x - 7y + 3 = 0$.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной к плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

13. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 3; 2)$ параллельно оси Oz .

14. Найти проекцию точки $A(2; 3; 4)$ на прямую $x = y = z$.

ВАРИАНТ 24

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = A + (2B)^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -8 & 7 & 5 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y - 6z = -5 \\ -x - 2y + 3z = 7 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

8. Найти работу силы \vec{F} на перемещении \vec{S} , если $|\vec{F}| = 2$, $|\vec{S}| = 5$,

$$\varphi = (\vec{F}, \vec{S}) = \frac{\pi}{6}.$$

9. Заданы точки $A(0; 2; 0)$, $B(3; 0; -4)$, $C(2; 1; 1)$ и $D(-1; -1; -1)$.

Вычислить векторное произведение векторов $(\vec{AB} - 3\vec{BC})$ и $(\vec{CD} + \vec{AC})$.

10. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \{6; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; -1\}$, $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.

11. Найти точку, симметричную точке $C(1; 2)$ относительно прямой $x - 2y + 1 = 0$.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(2; -4; 3)$.

13. Найти угол между прямыми:

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}.$$

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3} \text{ и точку } M(3; 4; 0).$$

ВАРИАНТ 25

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & -9 & 2 & 7 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = 4A + B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 32 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y - z = 12 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ 6x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 0 \\ 9x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}.$$

8. Определить угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

9. Найти вектор \vec{d} , зная, что он удовлетворяет условию $\vec{d} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}) = 10$ и перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{2; -3; 1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$.

10. Найти объём тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a} = \{-1; -2; -1\}$, $\vec{b} = \{4; 3; 6\}$ и $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.

11. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 6)$ и составляющей с осью Ox угол, вдвое меньший угла, который составляет с осью Ox прямая $\sqrt{3}y - 3x + 5 = 0$.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0; 1; 3)$ и $B(2; 4; 5)$ параллельно оси Ox .

13. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; 2; -3)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{1}$.

14. При каких значениях a и b прямая $\frac{x+a}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{-1}$ лежит в плоскости $bx + 2y - z + 1 = 0$.

ВАРИАНТ 26

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 9 & 7 & -9 & -7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = 3A + 2B.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -4 \\ x - y + 4z = 4 \\ 3x + 2y - z = -9 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 - 18x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 9x_4 - 27x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$$

8. Найти скалярное произведение векторов $(3\bar{a} - 2\bar{b})$ и $(5\bar{a} - 6\bar{b})$,

если $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 6$ и угол между векторами \bar{a} и \bar{b} равен $\frac{\pi}{3}$.

9. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$ и $C(4; 3; 2)$.

10. Найти объём тетраэдра, построенного на векторах $\bar{a} = \{1; 2; 2\}$, $\bar{b} = \{2; 1; 2\}$, $\bar{c} = \{4; 8; 9\}$.

11. Вершины треугольника $A(1; 4)$, $B(2; 5)$, $C(5; -2)$. Найдите точку пересечения стороны AB с перпендикуляром, восстановленным из середины стороны AC .

12. Даны точки $A(1; 3; -2)$ и $B(7; -4; 4)$. Через точку B провести плоскость, перпендикулярную к отрезку AB .

13. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4; 3; 0)$ и

параллельной прямой $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$.

14. При каких значениях коэффициентов a и b плоскость $ax + by - 2z + 1 = 0$ перпендикулярна прямой $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$?

ВАРИАНТ 27

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C = A^T - 2B^T.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ 2y + z = 13 \\ 3x + y + 2z = 8 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

8. Найти угол между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} , если $A(3; 3; -1)$, $B(5; 1; -2)$ и $C(4; 1; 1)$.

9. Даны точки $A(1; 0; -3)$, $B(-2; 1; -1)$, $C(2; -1; 0)$ и $D(3; -3; 3)$. Найти векторное произведение векторов $(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC})$ и $(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC})$.

10. Проверить, лежат ли в одной плоскости точки с координатами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$ и $D(5; 9; 8)$.

11. В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны координаты вершины острого угла $(1; -2)$ и уравнение противолежащего катета: $3x - 4y + 2 = 0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1; -2; 0)$ и $B(1; 1; 2)$ и перпендикулярной к плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

13. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; 3; -1)$ параллельно вектору $\vec{a} = (5; -3; 2)$.

14. При каком значении коэффициента a плоскость $ax + 2y - z + 3 = 0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$?

ВАРИАНТ 28

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = A^T + BE.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ x + y - 2z = 5 \\ 3x - 2y + z = 7 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

8. Вычислить площадь треугольника ABC , если $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$ и $C(-4; 1; 1)$.

9. Найти угол между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} , если $A(2; 3; 2)$, $B(-1; -3; -1)$, $C(-3; -7; -3)$.

10. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} , если $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$ и $D(-1; 1; 1)$.

11. Вершины треугольника расположены в точках $A(2; 0)$, $B(5; 3)$, $C(3; 7)$. Найти уравнение прямой, проходящей через вершину B параллельно медиане AM треугольника.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ и $M_3(1; 1; 4)$.

13. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -1; 0)$ перпендикулярно плоскости $2x - 4y + z = 3$.

14. При каком значении λ прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{\lambda} = \frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$?

ВАРИАНТ 29

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = A^T - 3B.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ -x + 2y + 3z = 12 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0 \end{cases}$$

8. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \{5; 2; 5\}$ на ось вектора $\vec{b} = \{2; -1; 2\}$.

9. Найти орт \vec{e} , перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{2; 0; -3\}$ и $\vec{b} = \{3; -1; -1\}$.

10. Проверить, лежат ли точки $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$ и $D(7; 5; -3)$ в одной плоскости.

11. Вершины треугольника $A(0; 4)$, $B(2; -3)$, $C(-4; 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на медиану, проведенную из вершины A .

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 1; 1)$: а) перпендикулярно и б) параллельно плоскости $2x + 4y + z - 5 = 0$.

13. Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ и

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

14. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 3; -1)$ перпендикулярно плоскости $2x + 4y - 3z = 2$.

ВАРИАНТ 30

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 7 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти матрицу C .

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, C = 2A + B.$$

3. Найти произведение матриц $A \cdot B$. Существует ли произведение $B \cdot A$? Почему?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы A . Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -5 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) с помощью обратной матрицы;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y + z = -17 \\ x - 3y + 2z = -11 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}.$$

7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

8. Определить внешний угол при вершине A треугольника ABC , если $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$.

9. Вычислить площадь треугольника ABC , если $A(1; -2; 2)$, $B(-5; -5; 3)$, $C(-4; 1; 1)$.

10. Будут ли компланарны векторы $\vec{a} = \{-1; 2; 8\}$, $\vec{b} = \{3; 7; -1\}$ и $\vec{c} = \{2; 1; 1\}$?

11. Вершины треугольника $A(2; -1)$, $B(4; 5)$, $C(-3; 2)$. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения медиан треугольника ABC .

12. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; -1; 1)$ перпендикулярно плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.

13. Составить каноническое уравнение прямой $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$.

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$

перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$.