Задачи для подготовки к экзамену и контрольной работе по теме № 4 «Преобразование Лапласа».

4.1. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = \dfrac{3}{2}t^2e^{3t} + t\cos^2 t + 1$

4.2. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = (e^{-2t} + 2t - 1)\sin 3t$

4.3. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = 4 + e^{-2t} + \dfrac{\sin t}{t}$

4.4. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = 5 + 2t + t\,\mathrm{sh}\,2t\cos 3t$

4.5. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = \cos^3 t + 3e^{-2t} + 4t^5$

4.6. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = \sin^4 t + 3e^{-2t}\cos 5t$

4.7. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^2\cos 2\tau\, d\tau$

4.8. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = \theta(t-1)e^{t-1}$

4.9. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p) = \dfrac{4p-22}{p^3-2p^2-5p+6}$

4.10. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p) = \dfrac{2}{(p-3)^4} + \dfrac{p}{p^2+2p+2}$

4.11. Решить задачу Коши $y'' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$ операционным методом.

4.12. Решить задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений операционным методом $\dot{x} = x - 5y + 5e^t$, $\dot{y} = -x - 3y$, $x(0) = -3$, $y(0) = 2$

Дополнительные задачи для подготовки к экзамену по теме № 4 «Преобразование Лапласа».

При решении некоторых примеров можно дополнительно использовать следующее свойство преобразования Лапласа: (*дифференцирование и интегрирование по параметру*) если $f(t,\alpha) \risingdotseq F(t,\alpha)$ и функции $\dfrac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha}$ и $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)\, d\alpha$, рассматриваемые как функции переменной t, являются оригиналами, то

$$\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha} \risingdotseq \frac{\partial F(t,\alpha)}{\partial\alpha} \quad \text{и} \quad \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)\, d\alpha \risingdotseq \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(t,\alpha)\, d\alpha$$

4.1*. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = \int\limits_0^t \tau\exp\left(-\dfrac{t-\tau}{2}\right) d\tau$

4.2*. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\mathrm{ch}\,\tau - 1}{\tau}\, d\tau$

4.3*. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\cos\beta\tau - \cos\alpha\tau}{\tau}\, d\tau$

Баранов В.П.

4.4*. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = \theta(t-1)te^t$

4.5*. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t) = \theta\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin t$

4.6*. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p) = \dfrac{1}{p-2} + \dfrac{e^{-p}}{p} + \dfrac{3e^{-4p}}{p^2+9}$

4.7*. Решить задачу Коши с помощью формулы Дюамеля $y''+4y = 2\operatorname{tg} x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

4.8*. Решить задачу Коши с помощью формулы Дюамеля $y''+4y = 2\operatorname{tg} x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

4.9*. Решить задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений операционным методом $2x'' + x - y' = -3\sin t$, $x + y' = -\sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 0$

4.10*. Решить уравнение $\displaystyle\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = \operatorname{ch} t - \cos t$ (относительно функции $x(t)$)

4.11*. Решить уравнение $\displaystyle\int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = x'' + x + 2\cos t - 4$ при заданных начальных условиях $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ (относительно функции $x(t)$)

Барашев В.П.