Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического анализа

С.Г. Андреева, М.А. Корытова, С.А. Шунайлова

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Сборник задач

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2011

УДК 51(075.8)
А655

Одобрено
учебно-методической комиссией
механико-математического факультета

Рецензенты:
Макаров А.С., Фёдоров В.Е.

Андреева, С.Г.
А655 **Типовые расчеты по математике для студентов экономических специальностей:** сборник задач / С.Г. Андреева, М.А. Корытова, С.А. Шунайлова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 142 с.

Сборник содержит типовые задачи по основным разделам математики, изучаемым студентами экономических специальностей в вузе, и предназначено для организации контроля самостоятельной работы студентов на протяжении всего времени изучения ими математики.

УДК 51(075.8)

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Задача 1

Найдите матрицу C.

1. $C = A^T B - 2B^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $C = AB^T - A^T$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $C = AB + 4A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $C = A \cdot B^T - 3B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

5. $C = A^T B - BA^T$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

6. $C = A^T B - 4B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

7. $C = 2A^T B - BA^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$.

8. $C = (A + B)(2B - A)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. $C = (B + AB)^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $C = (A - BA)^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

11. $C = B - A \cdot A^T$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 20 & 19 \\ 18 & 17 \end{pmatrix}$.

12. $C = (AB + BA)^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $C = (B - 2A)A^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$.

14. $C = 2A(A - B)^T$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$.

15. $C = 3B - B^T A^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

16. $C = AB^T + A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

17. $C = A^T (B + A)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

18. $C = (A - B)B^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

19. $C = \left(B^T + A\right)^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

20. $C = (A + 3B)^T B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

21. $C = 3A - 2B^T A^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

22. $C = \left(A + 3B^T\right)B$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -22 \\ -21 & -23 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

23. $C = 2A\left(B - A^T\right)$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$.

24. $C = A^T \cdot B - 3B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

25. $C = (AB - BA)^T$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

26. $C = (A - 2B)B^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

27. $C = (A + 3B)(A + B)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

28. $C = AB - 4B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

29. $C = (A - 2B)(A + B)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -1 \\ -4 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

30. $C=\left(A+4B\right)B^T$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 2

Решите систему по формулам Крамера.

1. $\begin{cases} 2x+6y+5z=1, \\ 5x+3y-2z=0, \\ 7x+4y-3z=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+2y+3z=-2, \\ -4x-3y-5z=1, \\ 5x+y-z=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+3y+z=0, \\ 7x+9y+5z=-3, \\ 3x+4y+3z=5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 3x+z=9, \\ 2x+4y+5z=6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x+2y+3z=1, \\ x+2y=1, \\ 3x+4y+7z=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y+2z=10, \\ 2x+y-2z=1, \\ 2x-2y+z=7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+3z=2, \\ 4x+z=1, \\ 6x+2y+5z=2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ x+3y-2z=3, \\ x+5y+z=4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6x+5y+2z=5, \\ 3x-2y+5z=1, \\ 4x-3y+7z=2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2y-z=12, \\ 2x+y-2z=15, \\ -3x+2y+z=1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+y-z=5, \\ 3x+y-2z=10, \\ 5x+y+z=5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+3y+2z=-3, \\ 4x+y=5, \\ 6x+5y+2z=3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x+3y+2z=0, \\ -5x-4y-3z=7, \\ -x+5y+z=1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x+2y+z=-1, \\ x+4z=1, \\ 5x+2y+6z=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} -2x+y+8z=2, \\ 5x+3y+2z=3, \\ 6x+y+z=1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 6x+2y+5z=2, \\ 3x+5y-2z=1, \\ 4x+7y-3z=1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x+y+3z=6, \\ 7x+5y+9z=3, \\ 3x+3y+4z=10. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x+y+3z=-6, \\ 3y+z=12, \\ 4x+2y+5z=3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x+3y+3z=-2, \\ -3x-4y-5z=3, \\ x+5y-z=1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x+2y+5z=7, \\ 2y+z=-1, \\ 7x+4y+3z=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} -x+2y=6, \\ -2x+y+2z=7, \\ x+2y-3z=2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} -x+y+2z=3, \\ -2x+y+3z=3, \\ x+y+5z=8. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x+5y+6z=2, \\ 10x+y-3z=1, \\ x+2y=1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x+2y+z=27, \\ -2x+y+2z=9, \\ x-2y+2z=18. \end{cases}$

25. $\begin{cases} -x+2z=1, \\ -2x+2y+z=4, \\ x-3y+2z=-6. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x+4y-3z=2, \\ 3y-3z=1, \\ 4x+5y-2z=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x-2y+4z=7, \\ 3x+z=2, \\ 4x-2y+z=2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x+4y+3z=-4, \\ x+4y=3, \\ x-y+4z=2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 6x+2y+3z=-3, \\ 4x+3z=1, \\ 4x-3y+z=4. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x-3y-4z=1, \\ 5x+2z=3, \\ 3x-4y-2z=7. \end{cases}$

Задача 3

Решите матричное уравнение.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4. $X \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

5. $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

6. $X \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

8. $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$

14. $X \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

15. $X \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 20 & 18 \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 7 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 24 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$

18. $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

20. $X \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 16 & 49 \end{pmatrix}.$

21. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

22. $X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

23. $X \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

24. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

25. $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 8 \\ -1 & 4 & -3 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

26. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$

28. $X \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

29. $X \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

30. $X \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$

Задача 4

Решите систему методом Жордана-Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_4 = -6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 7, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_5 = 6. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 7x_4 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 + 6x_4 = -2, \\ 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 8, \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 13. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 10. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 14. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_3 = 9. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1, \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1, \\ x_1-x_2-x_3=-2, \\ 4x_1+5x_2-13x_3=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3=7, \\ x_1-8x_3=4, \\ 3x_1+5x_2+x_3=7, \\ x_1+x_2-2x_3=3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=2, \\ 4x_1+3x_2-5x_3+2x_4=4, \\ 7x_1+4x_2-7x_3+5x_4=7. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+6x_3=-5, \\ 4x_1+3x_2-x_3=5, \\ x_1+x_2+4x_3=-4, \\ 2x_1+x_2+10x_3=-9, \\ 3x_1+2x_2+14x_3=-13. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-4x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+x_3-x_4+3x_5=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=5, \\ x_1-x_2+3x_3=3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_4+8x_5=9, \\ x_1+4x_3-x_4+2x_5=3, \\ x_1+2x_2-4x_3+5x_4+3x_5=4. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_4+4x_5=2, \\ 3x_1-x_3-x_4+8x_5=-5, \\ x_1+2x_2-4x_3+6x_4+3x_5=4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1+3x_3=2, \\ -2x_1+4x_2+3x_3=1, \\ 3x_1-4x_2=1, \\ 8x_1+6x_2+x_3=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x_1+10x_2-3x_3=2, \\ x_2+x_3=4, \\ 3x_1+3x_2-4x_3=2, \\ x_1+7x_2+x_3=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=6, \\ 4x_1+2x_2+3x_3+x_4=-2, \\ 3x_1+4x_2-5x_3+x_4=2. \end{cases}$

Задача 5

Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 3 & 20 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 16 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 12 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 15 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -12 & -5 & 0 \\ 30 & 19 & 2 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 23 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ЧАСТЬ 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Задача 6

Даны вершины треугольника ABC. Найдите: а) уравнение высоты AH; б) уравнение медианы AM; в) уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC; г) косинус угла при вершине A. Постройте все прямые.

1. $A(1, -2)$, $B(0, -1)$, $C(3, 4)$.
2. $A(0, -3)$, $B(-12, -3)$, $C(-9, -6)$.
3. $A(3, 3)$, $B(5, -2)$, $C(4, 1)$.
4. $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(1, 1)$.
5. $A(-4, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(3, 6)$.
6. $A(5, 3)$, $B(6, -2)$, $C(-4, 6)$.
7. $A(-3, 7)$, $B(0, -1)$, $C(2, 3)$.
8. $A(2, -4)$, $B(0, -2)$, $C(6, 8)$.
9. $A(0, 1)$, $B(3, 2)$, $C(-8, 4)$.
10. $A(3, 3)$, $B(1, 5)$, $C(-4, 4)$.
11. $A(2, 1)$, $B(6, -1)$, $C(4, 2)$.
12. $A(-1, -2)$, $B(-4, -3)$, $C(-8, 2)$.
13. $A(6, 2)$, $B(8, 7)$, $C(-4, 6)$.
14. $A(0, 4)$, $B(-3, -6)$, $C(-5, 0)$.
15. $A(2, -8)$, $B(4, -6)$, $C(-2, 0)$.
16. $A(3, -6)$, $B(0, -3)$, $C(9, 12)$.
17. $A(0, 2)$, $B(8, 6)$, $C(-4, 8)$.
18. $A(3, 3)$, $B(5, 1)$, $C(-8, 4)$.
19. $A(-4, 3)$, $B(0, 1)$, $C(-2, -4)$.
20. $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$, $C(8, 2)$.

21. $A(7, 0)$, $B(-8, 1)$, $C(3, 4)$.
22. $A(2, 3)$, $B(-1, -3)$, $C(6, 8)$.
23. $A(2, 2)$, $B(0, 8)$, $C(-2, 4)$.
24. $A(-1, 2)$, $B(0, 1)$, $C(-3, -4)$.
25. $A(0, 3)$, $B(9, 4)$, $C(-2, 7)$.
26. $A(-1, 4)$, $B(3, 0)$, $C(-2, -5)$.
27. $A(2, 4)$, $B(-4, 1)$, $C(0, -5)$.
28. $A(2, -4)$, $B(3, 5)$, $C(-4, 0)$.
29. $A(-1, 4)$, $B(5, 6)$, $C(0, 1)$.
30. $A(-4, 3)$, $B(4, 6)$, $C(0, -3)$.

Задача 7

Даны уравнения двух прямых. Найдите: а) косинус угла между ними; б) точку их пересечения.

1. $x-3y+5=0, \quad 2x-y-16=0.$
2. $x-3y-1=0, \quad x+y-1=0.$
3. $4x-5y-1=0, \quad x-4y+9=0.$
4. $3x-y+15=0, \quad 5x+9y-1=0.$
5. $6x+2y+17=0, \quad 9x+3y-4=0.$
6. $x-2y-1=0, \quad x+y+3=0.$
7. $3x-y=0, \quad 2x+y-8=0.$
8. $6x+3y-2=0, \quad x+2y+6=0.$
9. $x+2y+3=0, \quad 6x+2y-1=0.$
10. $2x-y+16=0, \quad x+2y+8=0.$
11. $2x+y-1=0, \quad x+y-1=0.$
12. $3x+y-4=0, \quad x+2y+5=0.$
13. $3x-2y-16=0, \quad x+y-7=0.$
14. $2x+y+9=0, \quad x-y-1=0.$
15. $x+2y-3=0, \quad 2x-y+5=0.$
16. $3x+2y-1=0, \quad x+y-7=0.$
17. $x-3y-8=0, \quad x+y+3=0.$
18. $3x-2y+23=0, \quad x+y+5=0.$
19. $x+y+7=0, \quad x+2y-1=0.$
20. $x-2y+17=0, \quad x-2y-1=0.$
21. $x+2y-1=0, \quad x+y+6=0.$
22. $2x-y+5=0, \quad 2x+3y-7=0.$
23. $5x+3y-18=0, \quad 2x+y-9=0.$
24. $4x+3y-2=0, \quad x+2y+5=0.$
25. $x+4y+1=0, \quad 2x+y-3=0.$
26. $x+3y-1=0, \quad 4x+2y+5=0.$
27. $2x-3y+7=0, \quad x-8y+1=0.$
28. $4x-y-4=0, \quad 2x-2y+1=0.$
29. $3x-y+3=0, \quad 4x-5y+3=0.$
30. $2x-4y+7=0, \quad 3x-5y+4=0.$

Задача 8

Найдите точку, симметричную точке A относительно плоскости α.

1. $A(1, 2, -1), \quad \alpha:\ 2x+3y+z-1=0.$
2. $A(2, 1, 2), \quad \alpha:\ x-2y+z+1=0.$
3. $A(-1, 1, 1), \quad \alpha:\ 3x-y+2z+4=0.$
4. $A(-2, 4, 1), \quad \alpha:\ 3x+y+2z+2=0.$
5. $A(1, 3\ -2), \quad \alpha:\ x-3y+z+6=0.$
6. $A(2, 3, 1), \quad \alpha:\ 2x-3y+3z-2=0.$
7. $A(2, 0, -1), \quad \alpha:\ x-3y+5z-1=0.$
8. $A(1, -2, 1), \quad \alpha:\ 5x+y-z+6=0.$
9. $A(2, -5, 4), \quad \alpha:\ 5x+2y-z+3=0.$
10. $A(2, -3, 1), \quad \alpha:\ x+y-2z+2=0.$
11. $A(-2, 3, -3), \quad \alpha:\ 3x+2y-z-2=0.$
12. $A(4, 3, 1), \quad \alpha:\ 4x-3y+5z-10=0.$
13. $A(0, 1, -1), \quad \alpha:\ 6x-5y+3z-4=0.$
14. $A(2, 3, -2), \quad \alpha:\ 3x-2y+4z-6=0.$
15. $A(-2, -1, 1), \quad \alpha:\ x-2y+6z-10=0.$
16. $A(5, 0, -1), \quad \alpha:\ 2x-y+3z-1=0.$

17. $A(1,\ 1,\ 1)$, $\alpha:\ 7x-6y+z-5=0.$

18. $A(3,\ 1,\ 1)$, $\alpha:\ 3x-y+5z-6=0.$

19. $A(2,\ 5,\ 1)$, $\alpha:\ 5x-2y+z-3=0.$

20. $A(-1,\ 2,\ 3)$, $\alpha:\ x-3y+z+2=0.$

21. $A(4,\ 3,\ 1)$, $\alpha:\ 3x-4y+5z-6=0.$

22. $A(3,\ 5,\ 2)$, $\alpha:\ 5x-3y+z-4=0.$

23. $A(4,\ 0,\ -3)$, $\alpha:\ 7x-y+3z-1=0.$

24. $A(-1,\ 1,\ -2)$, $\alpha:\ 4x-y+3z-6=0.$

25. $A(2,\ -5,\ -1)$, $\alpha:\ 5x+2y-3z-9=0.$

26. $A(1,\ -5,\ 4)$, $\alpha:\ x-2y-3z+8=0.$

27. $A(-1,\ 4,\ 0)$, $\alpha:\ 2x-2y+3z+4=0.$

28. $A(3,\ 0,\ -1)$, $\alpha:\ 5x-2y-3z+4=0.$

29. $A(1,\ -4,\ -1)$, $\alpha:\ 2x-2y+3z+1=0.$

30. $A(-1,\ -4,\ 1)$, $\alpha:\ x+3y-3z-9=0.$

ЧАСТЬ 3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Задача 9

Вычислите пределы, не используя правило Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^2-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2 4x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{4}}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+10}\right)^{x^2+8}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-6x+7}{3x^2-6x-1}\right)^{-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\operatorname{tg}\left(2\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2-3x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^6}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-10}{x+1}\right)^{3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x+1}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{\ln(1-2x)}$.

10.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4x-1}{3x^2+4x+7}\right)^{2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\sin\left(2\pi\left(x+10\right)\right)}$.

11.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x-1}\right)^{-x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1-7x\right)}{\sin\left(\pi\left(x+7\right)\right)}$.

12.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+5x+7}{2x^2+5x+3}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\left(x+\frac{5}{2}\pi\right)\operatorname{tg}x}{\arcsin 2x^2}$.

13.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x-7}{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{9\ln\left(1-2x\right)}{4\operatorname{arctg}3x}$.

14.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+3x-1}{5x^2+3x+3}\right)^{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(x+1\right)\right)}$.

15.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

16.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+7x-1}{2x^2+7x-1}\right)^{-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg}x}$.

17.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^{x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin\left(\pi\left(x+1\right)\right)}{\ln\left(1+2x\right)}$.

18.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{2x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

19.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+18x-7}{2x^2+18x+9}\right)^{2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin\left(\pi\left(x+2\right)\right)}$.

20.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{10x-3}{10x-1}\right)^{\frac{5x+8}{4}}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\left(5\left(x+\pi\right)\right)}{e^{3x}-1}$.

21.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5x}{3x^2-5x+7}\right)^{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.

22.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin^2 2x}{\left(2^{-3x}-1\right)\operatorname{tg}x}\cdot\ln 2$.

23.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+5}{x^2-5x+6}\right)^{3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin\left(\pi\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\right)}$.

24.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{\frac{5x-1}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$.

25.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x^2+11x-3}{7x^2+11x-2}\right)^{x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{x^4}$.

26.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x-2}\right)^{3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^3+2x^2-x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 5x}{x\,\mathrm{tg}\left(\pi\left(x+1\right)\right)}$.

27.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+18}{x^2-2}\right)^{2x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^4+2x^2-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2\left(6x^2\right)}{\sqrt{x^4+1}-1}$.

28.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+3}{8x-2}\right)^{\frac{x+1}{4}}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3+x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}\left(x+1\right)\right)}$.

29.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-3x}{7-3x}\right)^{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{2x^2-3x-9}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\left(\pi\left(x+2\right)\right)}{1-\cos 2x}$.

30.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+8x-3}{x^2+8x+2}\right)^{5x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^3-x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2 3x-1}{\ln\left(1-3x^2\right)}$.

Задача 10

Исследуйте функции на непрерывность. Постройте схематически график.

1. а) $y=\dfrac{x^2+2x}{x+2}$; б) $y=\begin{cases}-x, & x\le1,\\ \dfrac{2}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

2. а) $y=\dfrac{2}{\left(x-1\right)^3}$; б) $y=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2-2x+1}, & x<1,\\ 1-2x, & x\ge1.\end{cases}$

3. а) $y=\dfrac{x^3-4x}{x}$; б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\left(2x^2+5\right), & x\le1,\\ x-3, & x>1.\end{cases}$

4. а) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{5-x}$; б) $y=\begin{cases}x^2+1, & x<2,\\ 2-x, & x\ge2.\end{cases}$

5. а) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{-x-8}$; б) $y = \begin{cases} x+2, & x < 2, \\ x^2 - 1, & x \ge 2. \end{cases}$

6. а) $y = \dfrac{5x^2+3}{x-4}$; б) $y = \begin{cases} x^3 - 1, & x \le 1, \\ x - 3, & x > 1. \end{cases}$

7. а) $y = \dfrac{x^2-4x}{x+3}$; б) $y = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ x^2 + 5, & x \ge 0. \end{cases}$

8. а) $y = \dfrac{x^3+1}{x+1}$; б) $y = \begin{cases} e^{x-2}, & x \le 1, \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$

9. а) $y = \dfrac{x^2-4x+7}{x-1}$; б) $y = \begin{cases} 1, & x \le 3, \\ x^2 - 8, & x > 3. \end{cases}$

10.а) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$; б) $y = \begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

11.а) $y = \dfrac{x-8}{x^2}$; б) $y = \begin{cases} 4 \cdot 3^x, & x < 0, \\ 2 + x, & x \ge 0. \end{cases}$

12.а) $y = \dfrac{x+2}{x(x-1)}$; б) $y = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ x^2 + 1, & x \ge 0. \end{cases}$

13.а) $y = \dfrac{x^2+3x}{x+3}$; б) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & x < -1, \\ x, & x \ge -1. \end{cases}$

14.а) $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$; б) $y = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \ge 0, \\ x - 1, & x < 0. \end{cases}$

15.а) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+4}$; б) $y = \begin{cases} \dfrac{4}{x^2-2x+1}, & x < 1, \\ 2x + 1, & x \ge 1. \end{cases}$

16.а) $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$; б) $y = \begin{cases} (x-1)^2, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

17.а) $y = \dfrac{|x-3|}{x-3}$; б) $y = \begin{cases} x, & x \le 1, \\ \dfrac{2}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$

18.а) $y = \dfrac{2}{(1-x)^3}$; б) $y = \begin{cases} 1 - x, & x < 1, \\ \ln x, & x \ge 1. \end{cases}$

19.а) $y=\dfrac{x^2+5x}{x-5}$; б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\left(2x^2+5\right), & x\le 1,\\ 3-x, & x>1.\end{cases}$

20.а) $y=\dfrac{x^2-1}{x+5}$; б) $y=\begin{cases}2x-5, & x<3,\\ x^2-7, & x\ge 3.\end{cases}$

21.а) $y=\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$; б) $y=\begin{cases}2-x, & x<2,\\ x^2-1, & x\ge 2.\end{cases}$

22.а) $y=\dfrac{x-4}{|x-4|}$; б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x<2,\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$

23.а) $y=\dfrac{7x+9}{x+2}$; б) $y=\begin{cases}4\left(\dfrac{1}{3}\right)^x, & x>0,\\ 2-x, & x\le 0.\end{cases}$

24.а) $y=\dfrac{x^2-x^3}{x-1}$; б) $y=\begin{cases}3x+1, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

25.а) $y=\dfrac{5x^2-3x}{x}$; б) $y=\begin{cases}e^x, & x\le 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1.\end{cases}$

26.а) $y=\dfrac{x^2+x}{x+1}$; б) $y=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ \dfrac{2}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

27.а) $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$; б) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 1,\\ 2-2x, & x>1.\end{cases}$

28.а) $y=\dfrac{x+2}{|x+2|}$; б) $y=\begin{cases}e^{x+1}, & x\le -1,\\ \dfrac{1}{x+2}, & x>-1.\end{cases}$

29.а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$; б) $y=\begin{cases}2^x, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

30.а) $y=\dfrac{x^2+7}{x+1}$; б) $y=\begin{cases}x^2-1, & x\le 1,\\ \dfrac{1-x}{3}, & x>1.\end{cases}$

Задача 11

Вычислите производные функций.

1\. а) $y = x^3 \ln 3x$; б) $y = \sqrt{x^3}\operatorname{ctg}\left(x^2\right)$; в) $y = e^{-2x}\operatorname{arctg} 3x$.

2\. а) $y = 2x^3 \operatorname{ctg} x$; б) $y = \dfrac{\ln\cos 2x}{3x^2+1}$; в) $y = e^{-x^2}\sin 5x^3$.

3\. а) $y = \left(1+x^2\right)\operatorname{tg} 3x$; б) $y = \dfrac{\arccos x^2}{1-x^4}$; в) $y = \operatorname{tg}^2\left(3x^3\right) - x$.

4\. а) $y = x^3 \sin 5x$; б) $y = 5x^2\sqrt{1-2x^3}$; в) $y = \operatorname{arctg}\left(\ln 5x^2\right)$.

5\. а) $y = e^x\left(x^3 - 2x + 1\right)$; б) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x^2\right)$; в) $y = x^3 \cdot 2^{-\cos 5x}$.

6\. а) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x \ln x}{5^x}$; б) $y = 3^{2x}\operatorname{ctg} 2x^3$; в) $y = e^{-2x}\ln\operatorname{tg} 3x$.

7\. а) $y = 6^x \arccos x$; б) $y = \sqrt[3]{2\operatorname{tg} 3x}$; в) $y = \sin^3 2x \cdot e^{-\cos 5x}$.

8\. а) $y = 2x^3 \log_4 x$; б) $y = e^{-x}\sqrt{3x^2 - 4x + 5}$; в) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

9\. а) $y = 6^x \cos 3x$; б) $y = \sqrt[3]{3\operatorname{tg}^2 5x}$; в) $y = \operatorname{arctg}\left(\ln 5x^2\right)$.

10\. а) $y = 2x^3 \operatorname{tg} x$; б) $y = e^{-\sin 3x}\ln 5x^2$; в) $y = 2\operatorname{tg}^3\left(3x^2 - x - 1\right)$.

11\. а) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{2+\sin x}$; б) $y = 3\cos\left(2x^2 - x - 1\right)$; в) $y = e^{-2x}\ln\left(\sin 3x\right)$.

12\. а) $y = \dfrac{3\cos x}{2x^3+1}$; б) $y = 2^{-x^3}\sin^3 x^2$; в) $y = \sqrt[3]{x^2 - 6\sqrt{x}}$.

13\. а) $y = 3x^2 \sin 2x$; б) $y = \cos^2 8x \ln x$; в) $y = \cos 2^x + 4^{-x^3}$.

14\. а) $y = \left(\sin x + \cos x\right)\sqrt[3]{x^{21}}$; б) $y = 2\sqrt[4]{\arcsin 2x}$; в) $y = 3^{2x^2}\operatorname{tg}\left(\ln 3x\right)$.

15\. а) $y = \left(2x+1\right)^{11}\cdot\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \cos\left(3x^2 - 2x + 1\right)$; в) $y = 2\operatorname{tg}^3\left(3x^2 - 1\right)$.

16\. а) $y = \dfrac{-5\sin x}{2-\sqrt{x}}$; б) $y = 3x^2\cos^2\left(x^3 - 1\right)$; в) $y = 3\sqrt{x^3}\ln\left(2x^3 - 1\right)$.

17\. а) $y = \dfrac{x^3 - \sin x}{\sqrt{x^3}}$; б) $y = \sqrt[4]{\arccos 3x^3}$; в) $y = \ln\left(e^{3x} + xe^{-x^3}\right)$.

18\. а) $y = \cos\left(1 - \pi x\right) + \sin 3x$; б) $y = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x^2}$; в) $y = 10^{5-3x^2}$.

19\. а) $y = 2x^3 \log_4 x$; б) $y = 2e^{-3x}\operatorname{tg} 5x^2$; в) $y = \dfrac{\arcsin 2x^3}{\sqrt[3]{x^2}}$.

20.а) $y=\dfrac{1+4\sin x}{2-3\cos x}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}2x^3}{2^{3-2x^2}}$; в) $y=3\ln\left(x^2+\sqrt{1+x}\right)$.

21.а) $y=-8\sqrt[4]{x^3}\arcsin x$; б) $y=x^3\operatorname{tg}^2 3x^4$; в) $y=e^{-\cos 2x}\sqrt{\sin 3x}$.

22.а) $y=\dfrac{\log_2 x+1}{\sqrt[5]{x^2}}$; б) $y=\left(3-2x^3\right)\sin^2 3x$; в) $y=\arccos\left(1-x^2\right)$.

23.а) $y=-3\sqrt[5]{3x}\operatorname{arctg}x$; б) $y=2\sin^6\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)$; в) $y=\sin 2x\cdot e^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

24.а) $y=4^x\arccos x-\dfrac{e^x}{x^2}$; б) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-6x}}{x^{12}}$; в) $y=\dfrac{1}{3}\sin^3 2xe^{-\cos 2x}$.

25.а) $y=-3\arcsin x+4\sqrt{2x}$; б) $y=\dfrac{1}{6}x^6\left(e^{6x}-e^{-6x}\right)$; в) $y=\dfrac{1}{2}x\ln\left(e^{-2x}+xe^{-2x}\right)$.

26.а) $y=\dfrac{\ln x-1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$; б) $y=\sqrt[5]{\arccos x^3}$; в) $y=\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)$.

27.а) $y=3^x\operatorname{arctg}x-\sqrt{1-x^2}$; б) $y=x^4\left(e^{4x}-e^{-4x}\right)$; в) $y=\log_2\left(e^x+xe^x\right)$.

28.а) $y=3\cos\sqrt{\pi x}+\sin^2 3x$; б) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+3x}}$; в) $y=x\cdot 7^{5-2x+3x^2}$.

29.а) $y=\arcsin x^2+\sqrt{x^2+3}$; б) $y=x^3\operatorname{tg}\dfrac{x^4}{3}$; в) $y=\sqrt{x}\operatorname{ctg}5x^3$;

30.а) $y=e^x\ln\left(x^3-2\right)$; б) $y=\ln\left(x+\cos^2 8x\right)$; в) $y=\dfrac{\log_2(x-1)}{\sqrt[4]{3x^2+4}}$.

Задача 12

Вычислите предел, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\ln\sin x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\operatorname{tg}x}$.
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{0{,}5-\sin^2 x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$.
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin 4x}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x}-2}$.
9. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\cos x}{\sin x}$.
10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{\operatorname{tg}2x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{\log_2(x-2)}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}7x}{\ln\operatorname{tg}2x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.;

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2^x}{1-3^x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-2^x}{\ln x}$.

21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-\cos 3x}{e^{2x}-\cos x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x-\sin x}$.

25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\sin 4x}$.

26. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^{4x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin 6x}{\cos 3x}$.

28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{x-\frac{\pi}{3}-\sin 3x}{\cos\frac{3x}{2}}$.

29. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{x-\frac{\pi}{6}-\cos 3x}{\sin 6x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x-3}{\ln x}$.

Задача 13

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.
2. $f(x)=\dfrac{6x-x^2}{4x+1}$, $[0;2]$.
3. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x-7$, $[1;5]$.
4. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3$, $[-1;2]$.
5. $f(x)=x^4-8x^2+3$, $[-2;2]$.
6. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{7}{2}x^2+12x-1$, $[1;5]$.
7. $f(x)=x^3-9x^2+15x-3$, $[0;6]$.
8. $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+5$, $[-3;4]$.
9. $f(x)=-2x^3-3x^2+3$, $[-3;5]$.
10. $f(x)=x^3-3x+2$, $[-2;3]$.
11. $f(x)=2x^3+3x^2+6$, $[-3;2]$.
12. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $[-3;3]$.

13. $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+9}$, $[-4;4]$.
14. $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+4}$, $[-3;4]$.
15. $f(x)=2\sqrt{x}-x$, $[0;4]$.
16. $f(x)=x^4-2x^2+4$, $[-2;2]$.
17. $f(x)=\dfrac{x}{5}+\dfrac{5}{x}$, $[1;6]$.
18. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$, $[0;4]$.
19. $f(x)=\sqrt[3]{x}-\dfrac{4}{3}x$, $[1;8]$.
20. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2$, $[-3;1]$.
21. $f(x)=x^3+6x^2+9x$, $[-4;1]$.
22. $f(x)=x\ln x$, $[1;e]$.
23. $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^2$, $[-3;3]$.
24. $f(x)=2x^3-3x^2$, $[-2;2]$.
25. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3}$, $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.
26. $f(x)=(x+1)(x-2)^2$, $[2;3]$.
27. $f(x)=\dfrac{6x-x^2}{4x+8}$, $[0;1]$.
28. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, $[2;3]$.
29. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$, $[0;1]$.
30. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$, $[3;4]$.

Задача 14

Выполните полное исследование и постройте график функции.

1. $y=2x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$.
2. $y=x^4-2x^2+4$.
3. $y=2x^3+3x^2+6$.
4. $y=-2x^3-3x^2+3$.
5. $y=x^3-3x^2+3$.
6. $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+5$.
7. $y=x^3-3x+1$.
8. $y=x^3+6x^2+9x$.
9. $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2$.
10. $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2$.
11. $y=3x^4-8x^3+6x^2$.
12. $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x$.
13. $y=1-2x^2-\dfrac{x^4}{4}$.
14. $y=\dfrac{x^4}{4}-x^3$.
15. $y=x^3+\dfrac{x^4}{4}$.
16. $y=3x^5-5x^3$.
17. $y=x^3-x^2$.
18. $y=x^3-3x^2+4$.
19. $y=\dfrac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7$.
20. $y=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2-12$.
21. $y=(x+1)(x-2)^2$.

22. $y = 7 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$.

23. $y = x^2(1-x)$.

24. $y = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2}$.

25. $y = -x^4 + 2x^2 + 8$.

26. $y = x(x-1)^2$.

27. $y = x(x^2 - 1)$.

28. $y = x^4 - 6x^2$.

29. $y = x^3 + 3x^2$.

30. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$.

Задача 15

Найдите асимптоты графика функции.

1. $y = \frac{x^3+4}{x^2-1}$.

2. $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$.

3. $y = \frac{2}{x^2+2x}$.

4. $y = \frac{4x^2}{4-x^2}$.

5. $y = \frac{12x}{9-x^2}$.

6. $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$.

7. $y = \frac{4-x^3}{x^2}$.

8. $y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$

9. $y = \frac{2x^3+1}{x^2}$.

10. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$.

11. $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$.

12. $y = \frac{x+1}{x^2-4}$.

13. $y = \frac{12-3x^2}{x^2-4}$.

14. $y = \frac{9+6x-3x^2}{x^2+2x-3}$.

15. $y = -\frac{8x}{x^2-4}$.

16. $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

17. $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$.

18. $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$.

19. $y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$.

20. $y = \frac{1-2x^3}{x^2}$

21. $y = \frac{4}{x^2+2x-3}$.

22. $y = \frac{4}{3+2x-x^2}$.

23. $y = \frac{x^2+2x-7}{x^2+3x-4}$.

24. $y = \frac{1}{x^4-1}$.

25. $y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$.

26. $y = \frac{x+1}{x^3+4x}$.

27. $y = \frac{x^2+2}{x^3+3x}$.

28. $y = \frac{x^3-3}{x^3+5x}$.

29. $y = \frac{x-2}{x^2+8}$.

30. $y = \frac{5-x}{x^3+7x}$.

ЧАСТЬ 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задача 16

Вычислите неопределенные интегралы.

1. а) $\int \frac{\sin x\,dx}{9+\cos^2 x}$; б) $\int \frac{1-3x}{3+2x}dx$; в) $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$;
г) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$; д) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$; е) $\int \frac{1-\cos 2x}{3\sin^2 x}dx$;
ж) $\int (2-x)e^{2x}\,dx$; з) $\int \frac{3x-2}{x(x+1)}dx$.

2. а) $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}dx$; б) $\int \frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x}$; в) $\int 3xe^{-x^2}\,dx$;
г) $\int \sin 7x \sin 3x\,dx$; д) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; е) $\int \frac{2+\cos 2x}{\cos^2 x}dx$;
ж) $\int (x+4)\ln x\,dx$; з) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$.

3. а) $\int x^2\sqrt{1+2x^3}\,dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$; в) $\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2(x+1)}$;
г) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos 2x}}dx$; д) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2-3x+2}$; е) $\int \frac{4^x\,dx}{\sqrt[5]{3+4^x}}$;
ж) $\int \lg x\,dx$; з) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.

4. а) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$; б) $\int \frac{2x\,dx}{4-9x^2}$; в) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$;
г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; д) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{x(x^2+1)}$; е) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$;
ж) $\int (2x+3)\cos 4x\,dx$; з) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

5. а) $\int 3x^2(1-x^3)^8\,dx$; б) $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx$; в) $\int \sin^3 2x\cos 2x\,dx$;
г) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$; д) $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$; е) $\int \frac{(x+4)\,dx}{x^2(x-1)}$;

ж) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; з) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

6. а) $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$; б) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; в) $\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}dx$;

г) $\int \frac{\ln^2 x+\sqrt[4]{x}}{x}dx$; д) $\int \frac{(1+2x)dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$; е) $\int \frac{\cos^3 x+5}{\cos^2 x}dx$;

ж) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; з) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$.

7. а) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\cos 2x}dx$; б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; в) $\int \cos^3 x\,dx$;

г) $\int \frac{x^2dx}{e^{2x^3}}$; д) $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$; е) $\int \frac{x+4}{x(x^2+1)}dx$;

ж) $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$; з) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.

8. а) $\int \frac{2x+5}{3x^2-2}dx$; б) $\int \sin^5 x\,dx$; в) $\int \frac{(2x+1)dx}{x(x^2+4)}$;

г) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}dx$; д) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$; е) $\int \frac{1+3\operatorname{tg}^2 x}{2\sin^2 x}dx$;

ж) $\int (3x+1)e^{-x}dx$; з) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-4}dx$.

9. а) $\int \frac{x^2\,dx}{3+x^2}$; б) $\int xe^{-2x^2}dx$; в) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+6x+1}}$;

г) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$; д) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$; е) $\int \frac{1+2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$;

ж) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$; з) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

10. а) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x}$; б) $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^2+1)}$; в) $\int \frac{x-1}{x+2}dx$;

г) $\int \sin^4 3x\,dx$; д) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2+8x+7}}$; е) $\int \frac{3^x\,dx}{\sqrt[5]{9+3^x}}$;

ж) $\int x\ln(x-1)dx$; з) $\int x^3\sqrt{4-x^4}\,dx$.

11. а) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx$; б) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; в) $\int \cos^3 x \sin 2x\, dx$;

г) $\int \frac{x-3}{x^3+3x^2+2x}dx$; д) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{8x-4x^2-3}}$; е) $\int \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$;

ж) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$; з) $\int 2^x \sqrt[4]{3+2^x}\, dx$.

12. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{\sqrt{x}+1}$; б) $\int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx$; в) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$;

г) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\ln x}{x}dx$; д) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$; е) $\int \frac{(x-1)dx}{x(x^2+4)}$;

ж) $\int \ln(3x^2-1)dx$; з) $\int \cos 2x \sin\frac{x}{2}dx$.

13. а) $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{x^5}dx$; б) $\int \frac{(2x-3)dx}{3x^2-7x+11}$; в) $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\cos x - \sin x}$;

г) $\int \frac{x+3}{x^2(x+2)}dx$; д) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+4x+4}}$; е) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$;

ж) $\int \operatorname{arctg} 5x\, dx$; з) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$.

14. а) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}dx$; б) $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+2}dx$; в) $\int \frac{2\, dx}{x\ln x}$;

г) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x-1}}dx$; д) $\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$; е) $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^2+9)}$;

ж) $\int (7x-2)e^{-3x}\, dx$; з) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$.

15. а) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}\, dx$; б) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{4-4x-x^2}}$; в) $\int \frac{x^3\, dx}{e^{1-x^4}}$;

г) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; д) $\int \frac{(3x+5)dx}{x^2+4x+2}$; е) $\int \cos^5 x\, dx$;

ж) $\int \arcsin x\, dx$; з) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$.

16. а) $\int \frac{dx}{3x^2+5}$; б) $\int \frac{\cos 2x}{3+\sin^2 2x}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x+4}}$;

г) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; е) $\int e^{2x}\left(e^{2x}+5\right)^{11} dx$;

ж) $\int (4x+3)\sin 2x\,dx$; з) $\int \frac{(x-1)\,dx}{x\left(x^2+1\right)}$.

17. а) $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$; б) $\int \frac{x^2-x+1}{x(x+1)^2}dx$; в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

г) $\int \frac{(4x+1)\,dx}{x^2+5x+8}$; д) $\int \left(1-2e^{2x}\right)^4 e^{2x}dx$; е) $\int \frac{\cos^3 x-1}{\cos^2 x}dx$;

ж) $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$; з) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$.

18. а) $\int x^3\sqrt{2+x^4}\,dx$; б) $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$; в) $\int \frac{dx}{16+25x^2}$;

г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; д) $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$; е) $\int \frac{e^{\operatorname{tg}3x}}{\cos^2 3x}dx$;

ж) $\int \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx$; з) $\int \frac{x\,dx}{x^2+5x+6}$.

19. а) $\int \frac{x^2+x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \frac{3x^2\,dx}{x^2+2}$; в) $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin x}dx$;

г) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos^2 x}}$; д) $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2-5x+7}$; е) $\int \cos 2x\cos 5x\,dx$;

ж) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; з) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+3)(x+5)}$.

20. а) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; б) $\int \frac{x^2+3}{x^2+5}dx$; в) $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x\left(x^2-5x+6\right)}$;

г) $\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{x^2+8x+7}}$; д) $\int \frac{3\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$; е) $\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$;

ж) $\int (1-x)e^{-5x}\,dx$; з) $\int \sin^2 3x\cos^2 3x\,dx$.

21. а) $\int \frac{\sqrt[6]{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx$; б) $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^2-4x+5}$; в) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$;

г) $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$; е) $\int \frac{x^2-x+3}{x^3+1}dx$;

ж) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$; з) $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$.

22. а) $\int e^{3x}\sqrt{e^{3x}-9}\,dx$; б) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; в) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-4}$;

г) $\int\frac{(x+1)dx}{x^2+7x+13}$; д) $\int\frac{(x-3)dx}{x^3+3x^2}$; е) $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$;

ж) $\int(5x+1)e^x\,dx$; з) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

23. а) $\int x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$; в) $\int\sin 4x\sin 5x\,dx$;

г) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; д) $\int\frac{(x+2)dx}{x^2+2x+5}$; е) $\int\frac{\sin 2x\,dx}{3\sin x}$;

ж) $\int\arccos x\,dx$; з) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-8x^2}}$.

24. а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$; б) $\int\frac{3x-2}{x^3-x}dx$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$;

г) $\int\sin^3 x\sin 2x\,dx$; д) $\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-2x-2}$; е) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

ж) $\int x^3\ln x\,dx$; з) $\int\sin 3x\cos 2x\,dx$.

25. а) $\int\frac{3x\,dx}{2x^2-5}$; б) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^4}}$; в) $\int\frac{(x+2)dx}{x^2+x-12}$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+3}}$; д) $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x}}$; е) $\int\frac{(x-3)dx}{x^2(x-1)}$;

ж) $\int(3x+1)\cos 2x dx$; з) $\int\frac{\sin^3 x\,dx}{1-\cos 2x}$.

26. а) $\int 3x^3\left(1-x^4\right)^5dx$; б) $\int\frac{3xdx}{5x^2+7}$; в) $\int\sin^2 x\cos^2 x\,dx$;

г) $\int\frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$; д) $\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$; е) $\int\frac{(x+3)dx}{x^2(x+1)}$;

ж) $\int(2x-1)\cos xdx$; з) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

27. а) $\int\frac{3x^2dx}{\left(1-x^3\right)^8}$; б) $\int\frac{3dx}{5x^2+7}$; в) $\int\sin^5 x\cos^2 x\,dx$;

г) $\int\frac{(x-1)dx}{x^2-2x+2}$; д) $\int\frac{(5x-2)dx}{\sqrt{x^2+4x+2}}$; е) $\int\frac{(x+4)dx}{x\left(x^2-1\right)}$;

ж) $\int(3x+1)e^{2x}dx$; з) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x}+1}$.

28. а) $\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int \frac{2x-3}{x^2+4} dx$; в) $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$;

г) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$; д) $\int \frac{(3x+2)dx}{x^2+6x+2}$; е) $\int \frac{x\, dx}{(x-1)^2(x+2)}$;

ж) $\int x^4 \ln 2x\, dx$; з) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$.

29. а) $\int \frac{(\arcsin x - x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int \frac{2x-3}{x+4} dx$; в) $\int \sin^5 x\, dx$;

г) $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2 x}}{x} dx$; д) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+6x+10}$; е) $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)^2}$;

ж) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$; з) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.

30. а) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int \frac{2x-1}{3x+1} dx$; в) $\int \sin 4x \cos 3x\, dx$;

г) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; д) $\int \frac{(x-2)dx}{6+2x-x^2}$; е) $\int \frac{(x-2)dx}{x(x-3)^2}$;

ж) $\int e^{3x^5} x^4 dx$; з) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+x}$.

Задача 17

Вычислите определённые интегралы.

1. а) $\int\limits_1^{e^2} \frac{1+2x\ln x}{x^2} dx$; б) $\int\limits_1^{e} \sqrt[3]{x} \ln x\, dx$; в) $\int\limits_0^{2} \sqrt[3]{1+x^2}\, x dx$.

2. а) $\int\limits_0^{1} \frac{x\, dx}{x^2+3x+2}$; б) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; в) $\int\limits_0^{1} x \operatorname{arctg} x\, dx$.

3. а) $\int\limits_4^{7} \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$; в) $\int\limits_0^{1} \arcsin x\, dx$.

4. а) $\int\limits_0^{1} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^6+4}}$; б) $\int\limits_{-1}^{6} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$; в) $\int\limits_0^{\pi} x \sin 2x\, dx$.

5. а) $\int\limits_0^{2} (3-2x)e^{-3x}\, dx$; б) $\int\limits_1^{4} \frac{dx}{4+\sqrt{x}}$; в) $\int\limits_0^{1} 3x\sqrt{1-x^2}\, dx$.

6. а) $\int\limits_{0}^{1}(x-4)\cos\frac{x}{3}dx$;   б) $\int\limits_{1}^{4}\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$;   в) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$.

7. а) $\int\limits_{-2}^{2}(1-x)\sin\pi x\,dx$;   б) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$;   в) $\int\limits_{3}^{8}x\sqrt{x+1}\,dx$.

8. а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+5}$;   б) $\int\limits_{3}^{10}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x-2}}$;   в) $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

9. а) $\int\limits_{2}^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;   б) $\int\limits_{1}^{3}2^x(1+x)dx$;   в) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^2\,dx}{1-4x^3}$.

10. а) $\int\limits_{0}^{4}\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$;   б) $\int\limits_{-1}^{0}(2x+3)e^{-x}\,dx$;   в) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2}x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

11. а) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x+1}-2}$;   б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{16+\sin^2 x}$;   в) $\int\limits_{2}^{3}(3-x)e^x\,dx$.

12. а) $\int\limits_{3}^{4}\frac{dx}{x^2-3x+2}$;   б) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+16}}$;   в) $\int\limits_{1}^{2}x^3\ln x\,dx$.

13. а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$;   б) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$;   в) $\int\limits_{1}^{e}x\ln x\,dx$.

14. а) $\int\limits_{0}^{1}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$;   б) $\int\limits_{5}^{10}\frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-1}}$;   в) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

15. а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 x\,dx$;   б) $\int\limits_{3}^{8}\frac{\sqrt{x+1}\,dx}{x}$;   в) $\int\limits_{0}^{1}xe^{-x}\,dx$.

16. а) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+5}$;   б) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;   в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

17. а) $\int\limits_{-0,5}^{0,5}\frac{3^x}{1+9^x}dx$;   б) $\int\limits_{0}^{1}e^{2x}(3x-1)dx$;   в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$.

18. а) $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$;   б) $\int\limits_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$;   в) $\int\limits_{0}^{1}x\operatorname{arctg}x\,dx$.

19. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+18}}$; б) $\int\limits_0^1 e^{\frac{x}{2}}(3x+1)\,dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

20. а) $\int\limits_0^4 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x}+3}$; б) $\int\limits_0^1 \ln\left(x^2+2\right)dx$; в) $\int\limits_2^3 \frac{x^2dx}{\left(4+x^3\right)^2}$.

21. а) $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{(1-2x)^3}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}(x+1)\,dx$.

22. а) $\int\limits_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+5}$; б) $\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx$; в) $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$.

23. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$; б) $\int\limits_1^2 x\ln x\,dx$; в) $\int\limits_1^{\sqrt[3]{3}} \sqrt{1+x^3}\;x^2dx$.

24. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2x\,dx$; б) $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+7}dx$; в) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+4x^2}}$.

25. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_0^1 \ln\left(x^2+1\right)dx$; в) $\int\limits_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx$.

26. а) $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{3}(2x+3)\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$; в) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$.

27. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x(x+5)\,dx$; б) $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\;xdx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{x^2+3}{x-2}dx$.

28. а) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$; б) $\int\limits_0^1 (2x-1)e^{3x}\,dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

29. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; б) $\int\limits_{100}^{1000} 3^{\lg x}\,\frac{dx}{x}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (x+3)\cos 2x\,dx$.

30. а) $\int\limits_1^2 \log_2 x\,dx$; б) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+5)}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^4}$.

Задача 18

Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболами. Постройте чертеж.

1. $y=\frac{1}{2}x^2-x+1;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$.
2. $y=x^2-3x-1;\ \ y=-x^2-2x+5$.
3. $y=\frac{1}{3}x^2-2x-4;\ \ y=-\frac{2}{3}x^2-x-2$.
4. $y=2x^2-6x+3;\ \ y=-2x^2+x+5$.
5. $y=\frac{1}{2}x^2+x;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$.
6. $y=2x^2-6x+1;\ \ y=-x^2+x-1$.
7. $y=x^2-5x-3;\ \ y=-3x^2+2x-1$.
8. $y=x^2-3x-4;\ \ y=-x^2-x+8$.
9. $y=\frac{1}{3}x^2-x+2;\ \ y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$.
10. $y=x^2-2x-4;\ \ y=-x^2-x+2$.
11. $y=x^2-2x-5;\ \ y=-x^2-x+1$.
12. $y=3x^2+3x;\ \ y=-x^2-2x+9$.
13. $y=2x^2+6x-3;\ \ y=-x^2+x+5$.
14. $y=\frac{1}{2}x^2-3x-2;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2-7x+3$
15. $y=\frac{1}{4}x^2-2x-5;\ \ y=-\frac{3}{4}x^2-x+1$.
16. $y=2x^2+4x-7;\ \ y=-x^2-x+1$.
17. $y=2x^2-6x-2;\ \ y=-x^2+x-4$.
18. $y=\frac{1}{2}x^2+3x-2;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$.
19. $y=x^2-6x-2;\ \ y=-2x^2+x-4$.
20. $y=3x^2-5x-1;\ \ y=-x^2+2x+1$.
21. $y=2x^2+x-7;\ \ y=-x^2-4x+1$.
22. $y=\frac{1}{2}x^2-3x-1;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2-x+2$.
23. $y=x^2-2x-1;\ \ y=-x^2-x+5$.
24. $y=2x^2+2x+1;\ \ y=-x^2-3x+9$.
25. $y=\frac{1}{2}x^2-x-2;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2-5x+3$.
26. $y=x^2+x+2;\ \ y=-x^2+2x+3$.
27. $y=2x^2+4x+6;\ \ y=x^2+9x+2$.
28. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+3;\ \ y=-\frac{1}{2}x^2+4x-2$
29. $y=2x^2-4x+1;\ \ y=-x^2+2x+1$.
30. $y=2x^2+4x-3;\ \ y=x^2-2x+4$.

Задача 19

Вычислите несобственный интеграл.

1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}(x+1)\,dx$.
2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$.
3. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\log_2 x}{x^3}\,dx$.
4. $\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+6}$.
5. $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}(3x-1)\,dx$.
6. $\int\limits_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-8x+17}$.

7. $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{x^2+3}$.

8. $\int_{6}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x-10}$.

9. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

10. $\int_{4}^{+\infty} \frac{\log_2 x}{x} dx$.

11. $\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+3}}$.

12. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$.

13. $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

14. $\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+5}$.

15. $\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

16. $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

17. $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$.

18. $\int_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+5\right)^3}}$.

19. $\int_{0,5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$.

20. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

21. $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$.

22. $\int_{1}^{+\infty} e^{-x}\left(x+3\right) dx$.

23. $\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

24. $\int_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$.

25. $\int_{3}^{+\infty} \frac{\log_3 x}{x^2} dx$.

26. $\int_{-\infty}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+5}}$.

27. $\int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$.

28. $\int_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x^4} dx$.

29. $\int_{1}^{+\infty} \frac{x+2}{x^2+4x+10} dx$.

30. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\log_3 x}{x^3} dx$.

ЧАСТЬ 5. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача 20

а) Вычислите частные производные второго порядка функции.

б) Найдите градиент функции в точке $M_0(x_0;\, y_0)$.

в) Найдите производную функции в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ по направлению вектора $\vec{a}$.

1. $z = \sin^2(2x+y)$, $M_0\left(0;\, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\vec{a} = \{1;\, -3\}$.
2. $z = \cos^2(3x+5y)$, $M_0(\pi;\, 0)$, $\vec{a} = \{4;\, 3\}$.
3. $z = \operatorname{tg}(x+7y)$, $M_0(\pi;\, 0)$, $\vec{a} = \{-4;\, 1\}$.
4. $z = e^{xy}$, $M_0(0;\, 2)$, $\vec{a} = \{2;\, 3\}$.
5. $z = x\sin^2 y$, $M_0\left(3;\, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\vec{a} = \{-1;\, -3\}$.
6. $z = y\cos^2 x$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{3};\, 1\right)$, $\vec{a} = \{3;\, -2\}$.
7. $z = \sin^2(x-y)$, $M_0\left(\pi;\, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\vec{a} = \{2;\, -1\}$.
8. $z = \ln\left(x^2-y^2\right)$, $M_0(e;\, 0)$, $\vec{a} = \{-4;\, 3\}$.
9. $z = \ln(xy)$, $M_0(e;\, 1)$, $\vec{a} = \{-4;\, 1\}$.
10. $z = \operatorname{arctg}(xy)$, $M_0(2;\, 0)$, $\vec{a} = \{3;\, 4\}$.
11. $z = (x-y)e^{xy}$, $M_0(2;\, 0)$, $\vec{a} = \{-1;\, 2\}$.
12. $z = y\ln\dfrac{x}{y}$, $M_0(1;\, 1)$, $\vec{a} = \{3;\, -4\}$.
13. $z = \operatorname{arctg}(x+2y)$, $M_0(1;\, 2)$, $\vec{a} = \{3;\, 1\}$.
14. $z = \arcsin(xy)$, $M_0\left(\dfrac{1}{2};\, 1\right)$, $\vec{a} = \{-1;\, 3\}$.
15. $z = \sin(xy)$, $M_0(\pi;\, 1)$, $\vec{a} = \{1;\, 2\}$.
16. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0(2;\, 0)$, $\vec{a} = \{-4;\, 2\}$.
17. $z = \dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$, $M_0(1;\, -1)$, $\vec{a} = \{2;\, -3\}$.
18. $z = \sqrt{x^2+2y}$, $M_0(0;\, 2)$, $\vec{a} = \{4;\, -3\}$.
19. $z = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_0(1;\, 2)$, $\vec{a} = \{3;\, -4\}$.
20. $z = x\ln\dfrac{y}{x}$, $M_0(4;\, 1)$, $\vec{a} = \{-1;\, 2\}$.

21. $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$, $M_0(2;-1)$, $\vec{a}=\{3;5\}$.

22. $z=(x+y)e^{xy}$, $M_0(-3;0)$, $\vec{a}=\{2;1\}$.

23. $z=\operatorname{arctg}(3x-y)$, $M_0(1;2)$, $\vec{a}=\{-5;1\}$.

24. $z=e^{y}\sin x$, $M_0\left(\frac{\pi}{2};1\right)$, $\vec{a}=\{1;-2\}$.

25. $z=e^{x}\sin y$, $M_0\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\vec{a}=\{3;5\}$.

26. $z=3^{xy}\sin y$, $M_0(0;0)$, $\vec{a}=\{3;-4\}$.

27. $z=x\sin(2x+y)$, $M_0(\pi;0)$, $\vec{a}=\{1;-5\}$.

28. $z=\frac{e^{x}}{\sqrt{xy}}$, $M_0(1;1)$, $\vec{a}=\{-1;-2\}$.

29. $z=\sqrt{e^{x}+\sin y}$, $M_0\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$, $\vec{a}=\{3;4\}$.

30. $z=\operatorname{arctg}\frac{y^2}{x}$, $M_0(1;1)$, $\vec{a}=\{2;-1\}$.

Задача 21

Исследуйте на экстремум функцию.

1. $z=xy-2x^2+6y-y^2+3$.
2. $z=2x^2+3y-xy+4$.
3. $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$.
4. $z=x^2-2y^2+4xy+4y$.
5. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.
6. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.
7. $z=3x^2+y^2+3x-4y+1$.
8. $z=8x-6x^2+12y-y^2+3$.
9. $z=6-3x^2-4y^2+x-y$.
10. $z=x-x^2+3y-4y^2$.
11. $z=xy-3x^2-y^2+x-12$.
12. $z=2xy-6x^2-y^2+4y$.
13. $z=7x^2-6xy+3y^2-4x+7y-12$.
14. $z=3xy-12x^2-3y^2+x$.
15. $z=3x^2+18xy+18y-8x+8$.
16. $z=2x^2+4y^2+y-xy$.
17. $z=x^2+18xy+y-x$.
18. $z=(x-1)^2-2y^2$.
19. $z=(x-2)^2+2y^2$.
20. $z=(y-1)^2+2x^2$.
21. $z=x^4+4xy-2y^2$.
22. $z=x^2+6xy+6y-4x+8$.
23. $z=2x^2+4xy-2y^2$.
24. $z=2x^3-xy$.
25. $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$.
26. $z=x^2+2y^2-4x-6y-xy$.
27. $z=x^2-4xy+y^2+4x+6$.
28. $z=3x^2+6y^2-5x-xy$.
29. $z=x^2+2y^2-6x+5y-xy$.
30. $z=4y-x^2-8xy+y^2$.

Задача 22

В результате эксперимента получены пять значений искомой функции y при пяти значениях аргумента x (см. таблицу).

а) Найдите зависимость между x и y в виде линейной функции $y = ax + b$.

б) Изобразите на листочке в клетку в одной системе координат прямую $y = ax + b$ и точки с координатами (x_i, y_i). Единица масштаба должна соответствовать двум клеткам.

1	x	1	3	6	13	20
	y	–2,1	–1,1	–1,2	0,2	2,1
2	x	3	10	15	16	19
	y	–1,1	0	1,2	1	1,6
3	x	1	12	16	18	20
	y	–2,1	0,7	1	1,6	2,2
4	x	2	8	9	15	18
	y	–1,6	–0,2	0,1	1,2	1,6
5	x	8	9	11	16	20
	y	–0,2	0,1	0,6	1	2,2
6	x	4	8	9	16	19
	y	4,4	7,9	8,9	14,7	16,7
7	x	1	3	6	13	20
	y	1,3	3,3	5,8	10,3	16,7
8	x	3	10	15	18	19
	y	2,7	7,9	11,9	14,7	15,2
9	x	1	5	9	12	18
	y	1,3	5,2	7,9	10,3	15,2
10	x	5	6	16	17	20
	y	5,2	5,8	13,3	14,7	16,7
11	x	1	8	9	16	18
	y	1,3	–6,8	–8,3	–17	–19,2
12	x	4	8	9	16	19
	y	–2,7	–6,8	–8,3	–17	–20,1
13	x	1	3	6	12	19
	y	1,3	–0,7	–4,3	–11,8	–20,1
14	x	3	10	15	16	19
	y	–0,7	–9,4	–15,2	–17	–20,1
15	x	1	4	9	16	18
	y	1,3	–2,7	–8,3	–17	–19,2
16	x	5	9	11	13	18
	y	4,5	1,5	–0,6	–2,2	–7,3
17	x	2	6	9	11	16
	y	7,6	3,9	1,5	–0,6	–4,9

18	x	4	8	9	16	19
	y	6	1,9	1,5	–4,9	–8
19	x	1	3	6	13	20
	y	8,5	6,6	3,9	–2,2	–8
20	x	3	10	13	14	19
	y	6,6	0,2	–2,2	–3,3	–8
21	x	1	5	8	11	16
	y	1,1	3,3	3,8	5	7,5
22	x	5	9	10	16	19
	y	3,3	4,4	5,1	7,5	8,6
23	x	8	9	11	16	20
	y	3,8	4,4	5	7,5	8,8
24	x	4	9	10	15	18
	y	2,9	4,4	5,1	7,1	8,2
25	x	2	8	9	15	20
	y	1,7	3,8	4,4	7,1	8,8
26	x	1	3	5	8	10
	y	1,1	5,2	9,3	15,2	19,2
27	x	4	6	8	12	15
	y	6,7	10,7	15,2	23,1	28,9
28	x	3	7	8	10	11
	y	5,2	13,4	15,3	19,1	20,9
29	x	1	5	6	7	11
	y	–3,2	–10,7	–13,2	–14,7	–22,8
30	x	3	6	7	11	14
	y	–7,2	–13,2	–14,7	–22,8	–29,3

Задача 23

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на множестве D, ограниченном данными линиями.

1. $z = (x-2)^2 + 2y^2$, D: $x = 0$, $y = 2 - x$, $y = 0$, $y = 1$.

2. $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$, D: $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$.

3. $z = 2x^2 + 4xy - 2y^2$, D: $x = 2$, $y = 2$, $x + y = 2$.

4. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$, D: $x = 2$, $y = 1$, $x + y = 2$.

5. $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$, D: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 3$.

6. $z = 2x^3 - xy$, D: $y = 2x$, $y = x$, $x = 1$.

7. $z = 3\ln x + xy^2 - y^3$, D: $y = 0$, $y = 2$, $x = 1$, $x = 3$.

8. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$, D: $y = x$, $y = 3x$, $x = 2$.

9. $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$, D: $x = 3$, $y = 0$, $y = x$.

10. $z = 3x^2 + 18xy + 18y - 8x + 8$, D: $y = 2$, $y = x$, $x = 0$.

11. $z = (x-1)^2 + 2y^2$, D: $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

12. $z = (x-1)^2 - 2y^2$, D: $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

13. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$, D: $x = 3$, $y = 3$, $x + y = 3$.

14. $z = x^2 + y^2 - 3y^3$, D: $x^2 + y^2 = 4$.

15. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy + 4y = 0$, D: $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$.

16. $z = x^2 + y^2 + 4y^3 + 1$, D: $x^2 + y^2 = 6$.

17. $z = 2x^2 + 3y - xy + 4$, D: $x = 0$, $y = 0$, $y = x + 1$.

18. $z = x^2 + y^2 + 2y^3 - 6y$, D: $x^2 + y^2 = 9$.

19. $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$, D: $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$.

20. $z = 2 - x^2 - y^2 - 4y - \dfrac{4}{3}y^3$, D: $x^2 + y^2 = 3$.

21. $z = xy - 3x^2 + x + 1$, D: $x = 1$, $y = 2$, $xy = 1$.

22. $z = 6 - 3x^2 + x - 3xy$, D: $x = 2$, $y = 2$, $xy = 2$.

23. $z = 18 - x^2 - 6y^3 - y^2$, D: $x^2 + y^2 = 1$.

24. $z = 4x - 2x^2 + 6yx + 1$, D: $y = \dfrac{2}{x}$, $y = 2x$, $y = \dfrac{x}{2}$.

25. $z = 4x - x^2 + 12y - y^2 + 3x^3$, D: $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 1$.

26. $z = x^2 + xy + 4y^2 - 3x - 2y$, D: $x = 2$, $y = 2$, $x + y = 2$.

27. $z = 4x - x^2 + 12y - y^2$, D: $x = 4$, $y = 2$, $x + 2y = 4$.

28. $z = 6x - 4x^2 + 2y - y^2$, D: $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$.

29. $z = x^2 + y^2 - 3y^3 + 8$, $D:\ x^2 + y^2 = 1$.

30. $z = x^2 - 4x + 6y - y^2$, $D:\ x = 8$, $y = 4$, $x + 2y = 8$.

ЧАСТЬ 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задача 24

Найдите общее решение дифференциального уравнения.

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.
2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.
3. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.
4. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.
5. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 3xy^2dx$.
6. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$.
7. $\left(e^{2x} + 5\right)dy + ye^{2x}dx = 0$.
8. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.
9. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.
10. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$.
11. $y\left(4 + e^x\right)dy - e^xdx = 0$.
12. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$.
13. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0$.
14. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$.
15. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$.
16. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$.
17. $\left(e^x + 8\right)dy - ye^xdx = 0$.
18. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$.
19. $\left(1 + e^x\right)yy' = e^x$.
20. $y\ln y + xy' = 0$.
21. $\left(1 + e^x\right)y' = ye^x$.
22. $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$.
23. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$.
24. $y\left(1 + \ln y\right) + xy' = 0$.
25. $\left(3 + e^x\right)yy' = e^x$.

Задача 25

Найдите частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

1. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$, $\quad y(1) = 0$.
2. $y' - y\operatorname{ctg}x = 2x\sin x$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
3. $y' + y\cos x = \cos x$, $\quad y(0) = 0$.
4. $y' + y\operatorname{tg}x = \cos^2 x$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.
5. $y' + \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $\quad y(-1) = \dfrac{3}{2}$.
6. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
7. $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$, $\quad y(0) = 1$.
8. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$, $\quad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.
9. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2$, $\quad y(1) = 1$.
10. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}\cdot y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $\quad y(0) = \dfrac{2}{3}$.

11. $y' - \frac{2y}{x} = 5, \quad y(2) = 4.$

12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}, \quad y(1) = e.$

13. $y' - \frac{y}{x} = 2\ln x, \quad y(1) = 1.$

14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{8}{x^2}, \quad y(1) = 4.$

15. $y' + \frac{2}{x}y = x^3, \quad y(1) = -\frac{5}{6}.$

16. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$

17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

18. $y' + \frac{y}{x} = x^2 + 1, \quad y(1) = 1.$

19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x}, \quad y(1) = 1.$

20. $y' + 2xy = -2x, \quad y(0) = 1.$

21. $y' + \frac{xy}{2\left(1-x^2\right)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$

22. $y' + 2xy = e^{-x^2}\sin x, \quad y(0) = 1.$

23. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

24. $y' + xy = -x, \quad y(0) = 3.$

25. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, \ y(0) = 1$.

Задача 26

Найдите решение задачи Коши.

1. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1.$
2. $y'' - y' - 2y = 2x + 2, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$
3. $y'' - y' - 2y = -2x - 1, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 2.$
4. $y'' + 2y' + y = xe^x, \ y(0) = 2, \ y'(0) = 0.$
5. $2y'' + 8y = 5x^2 - 2x - 1, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0.$
6. $y'' + y' - 2y = \sin x - 2\cos x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0.$
7. $y'' + 2y' + y = 6xe^x, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$
8. $y'' - y = (2x+1)e^{2x}, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$
9. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$
10. $y'' + 2y' + y = (3x+2)e^x, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1.$
11. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1.$
12. $y'' - 3y' + 2y = \cos x - \sin x, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1.$
13. $y'' - 9y = (4x+2)e^x, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$
14. $y'' - y = 5x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$
15. $y'' + 2y' + y = (9x+6)e^{2x}, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1.$
16. $y'' - y = e^{2x}, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 2.$
17. $y'' - 3y' + 2y = \sin x - 3\cos x, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1.$
18. $y'' - 2y' - 3y = \cos x + 2\sin x, \ y(0) = 2, \ y'(0) = 0.$

19. $y'' - 4y = 2e^{x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

20. $y'' - y = 3e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

21. $y'' - 4y = 4e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

22. $y'' - y' = 1 + 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

23. $y'' - 2y' - 3y = 2\sin x - 4\cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

24. $y'' - 3y' + 2y = \cos x - \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

25. $y'' - y = -2e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

ЧАСТЬ 7. РЯДЫ

Задача 27

Исследуйте ряды на сходимость.

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2}}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \sin\frac{\pi}{2^{n}}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+3)^{3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \left(\frac{2n+1}{n^{2}+2}\right)^{2}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{2}}{n \cdot 3^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^{2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{3n+2}{4n^{2}+1}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{3n^{2}+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^{n} \cdot n}{3^{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{2n+3}{(3n+2)^{2}}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{6n+2}\right)^{5n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n+1}{\sqrt{4n^{3}+1}}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{2} n}{3^{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n^{2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{2n-1}{3n+2}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{n^{3}+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{2n-1}{\sqrt{9n^{3}+1}}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{n}{n^{6}+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n} \cdot \sqrt[3]{n^{2}}}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{2n}}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2} n^{2}}{\sqrt{n}(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \left(\frac{2n+3}{3n^{2}-2}\right)^{2}$.

11.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3\left(2+(-1)^n\right)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot\sqrt[4]{16n+3}}$.

12.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n+1}{4n^3+5n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n^3+4}}$.

13.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt[3]{n^7+3n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{n^2+n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{3n^2+5}$.

14.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n(2n+7)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$.

15.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n^3-1}$.

16.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+7}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)}{n^2+n+5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

17.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{\left(\sqrt{n}+1\right)^5}$.

18.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4^{n-1}}{n^4+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n^3+5}$.

19.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3n}{3n+1}$.

20.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

21.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^4+n^2+1}$.

22.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+8}{n^2\cdot 2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

23.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+3}{3n^4-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\left(n^2-1\right)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$.

24.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)2^n}{(n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+4}{n(5n+1)}$.

25.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)(n+1)!}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n-2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^3+n-1}$.

Задача 28

Найдите область сходимости функционального ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{2n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+5)^n\cdot\operatorname{tg}\dfrac{1}{3^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{(n+4)\cdot 4^n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-7)^n}{n^2\cdot 2^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x+5)^n}{\sqrt{n+1}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-1)^n}{n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n\cdot n}{(n+1)!}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n(x+1)^n}{n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{(3n+1)\cdot 2^n}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)(x+3)^n}{(n+1)!}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5(x+5)^n}{(n+1)!}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^3(x+3)^n}{2n+3}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^n}{4^n(2n-1)}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^{n-1}}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^n}{n\cdot 4^n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{3n+8}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-7)^n}{(2n^2+5)\cdot 4^n}$.

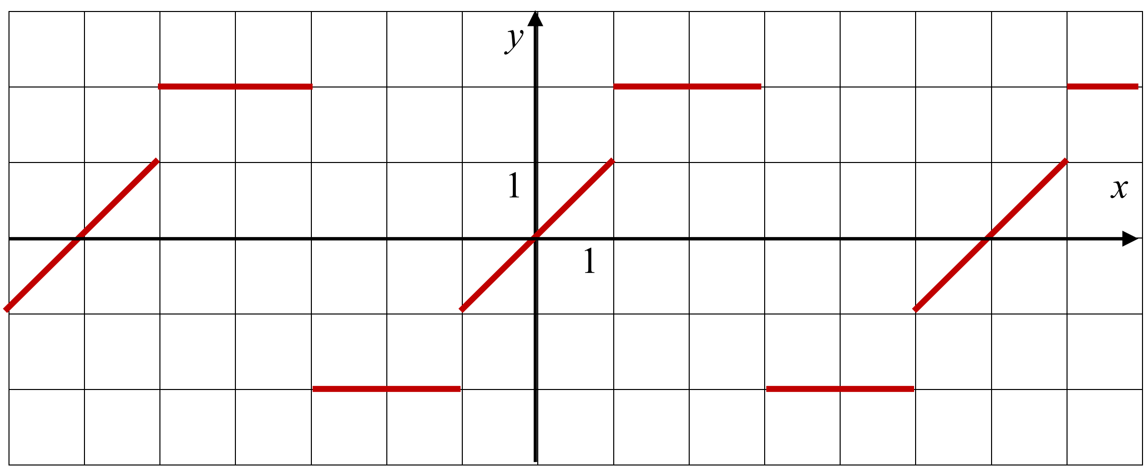
24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-2)^n\cdot\sin\dfrac{1}{2^n}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n\cdot n}{n^2+2n+3}$.

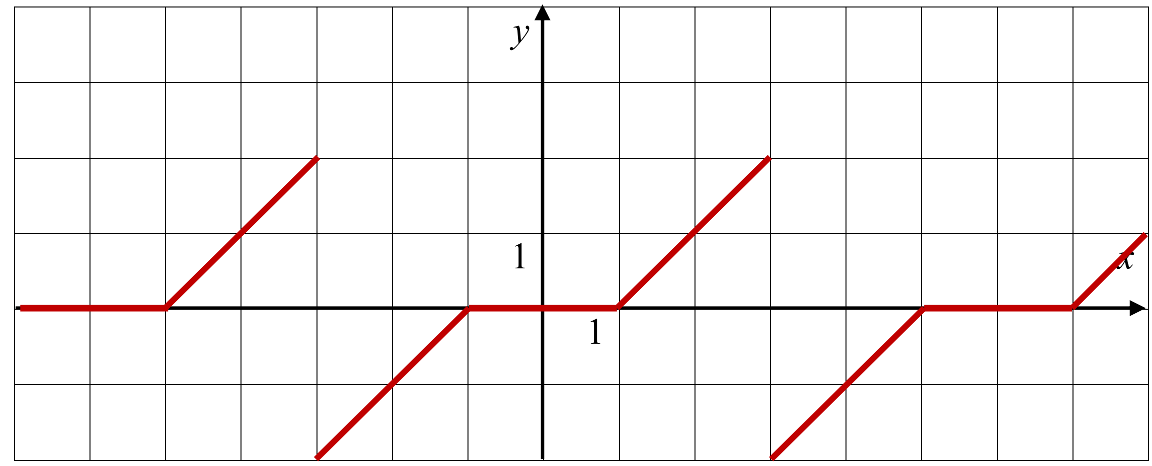
Задача 29

Разложить функцию, график которой изображен на чертеже, в ряд Фурье.

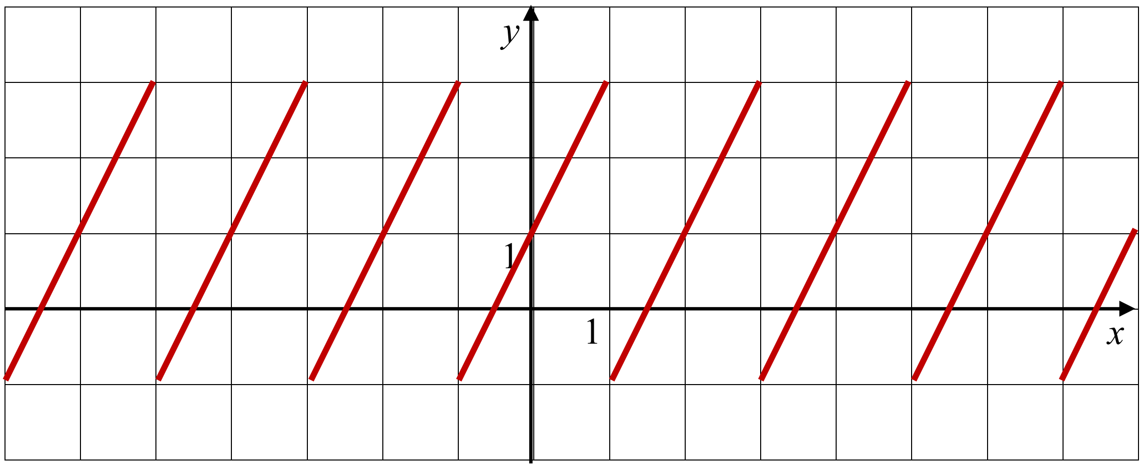
1.



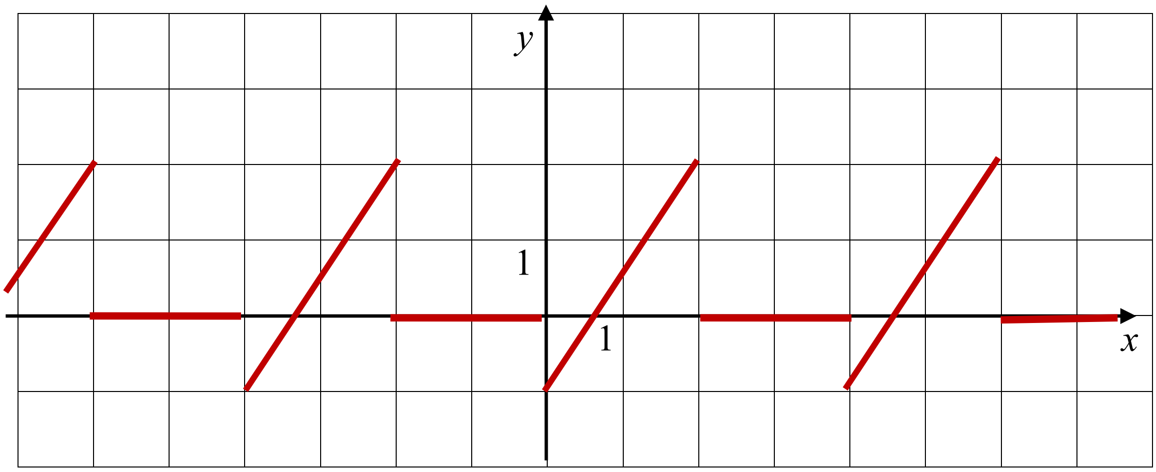
2.



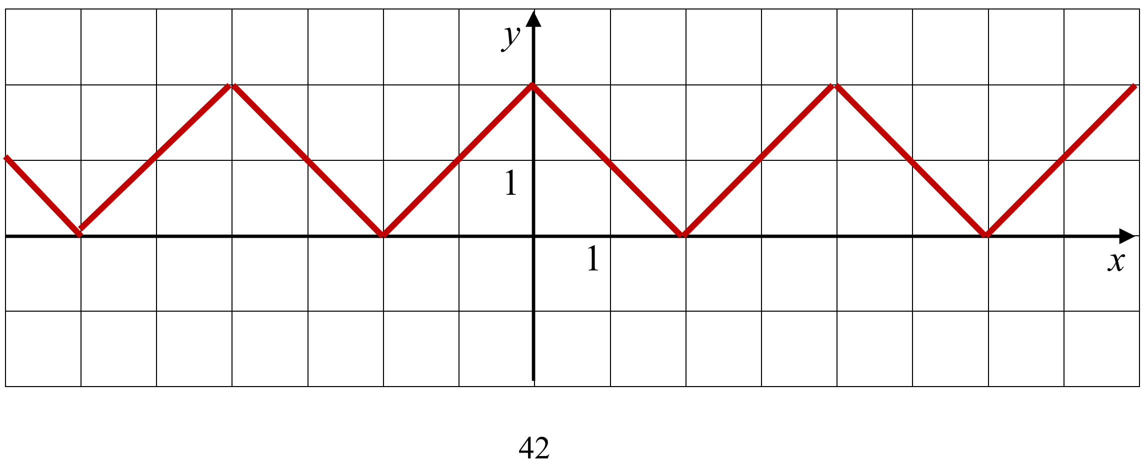
3.



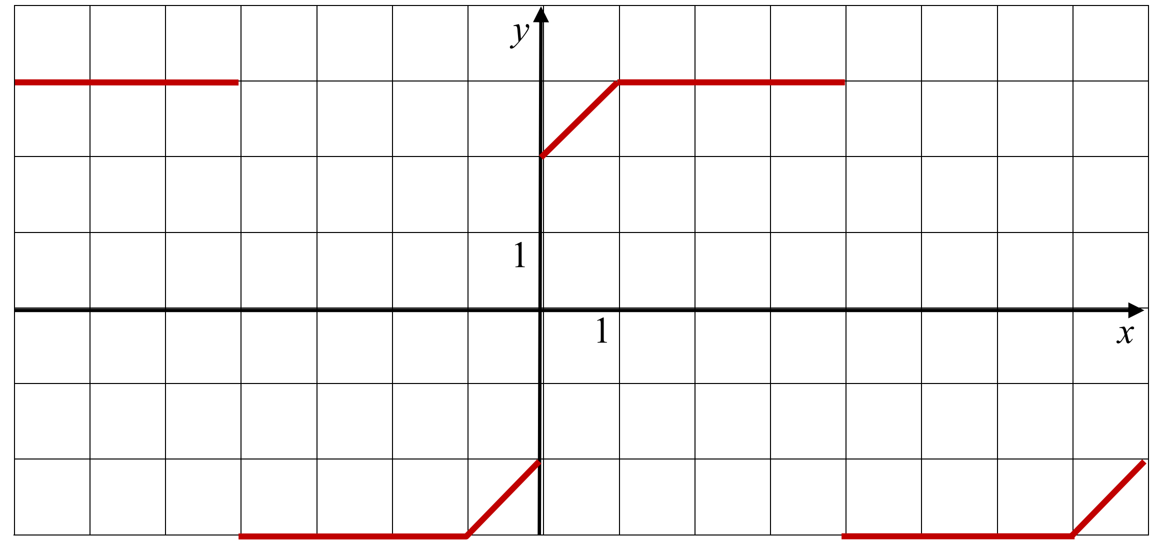
4.



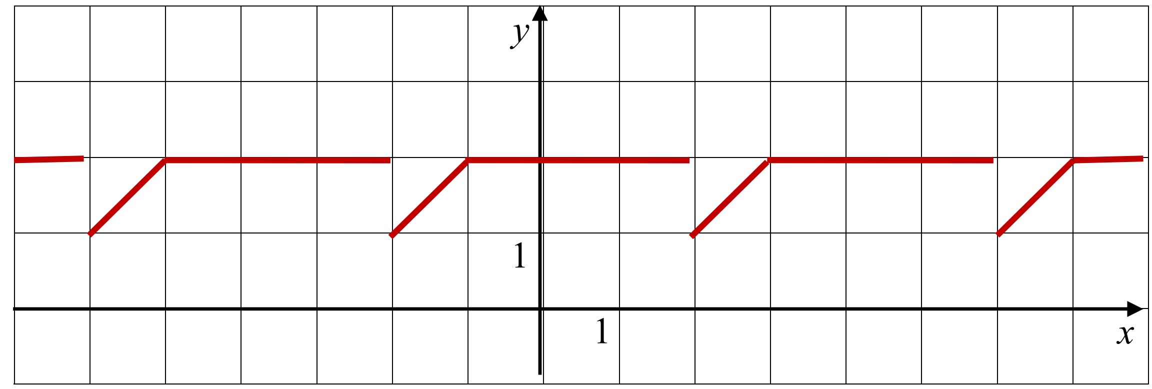
5.



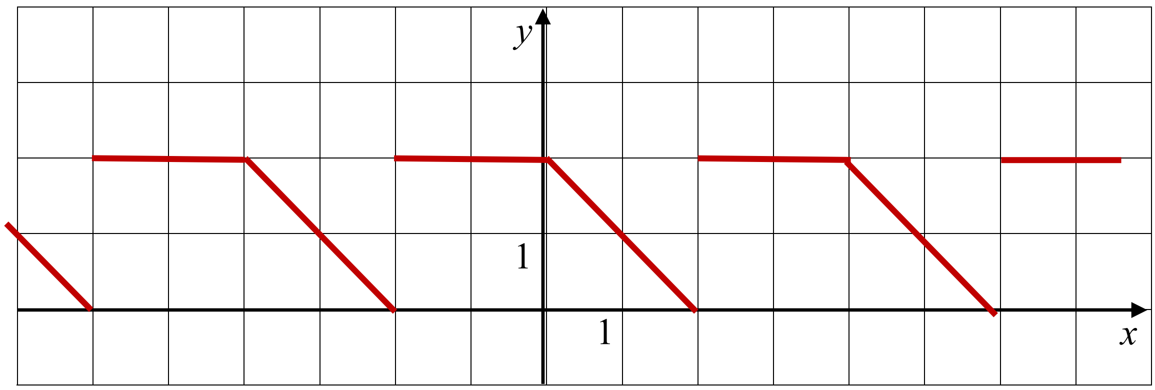
6.



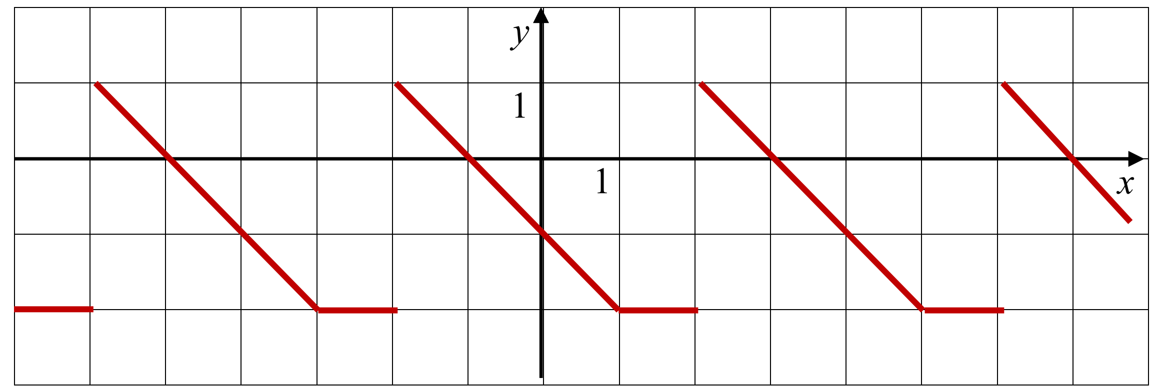
7.



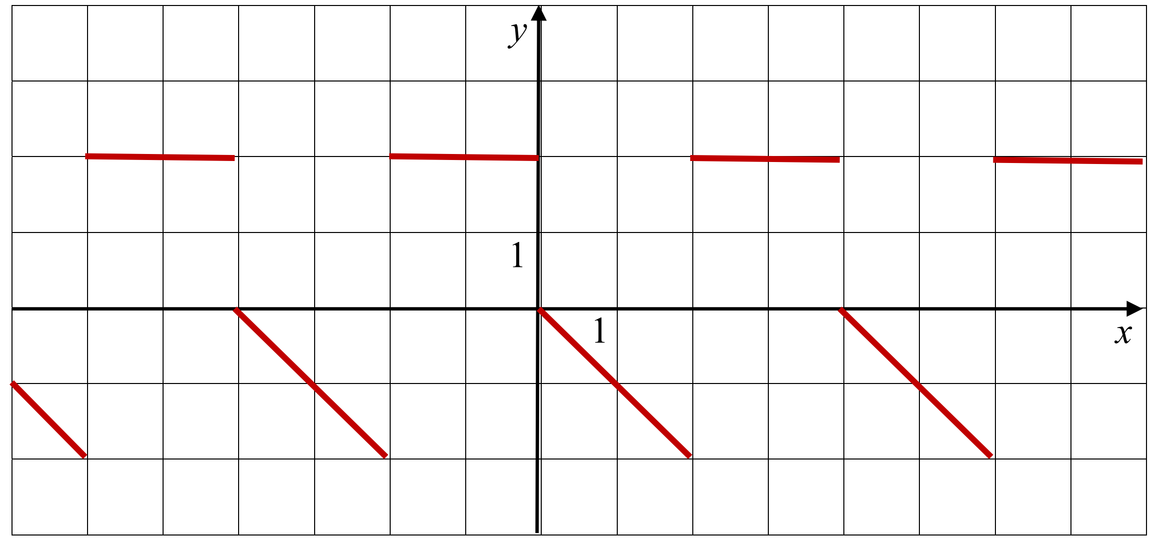
8.



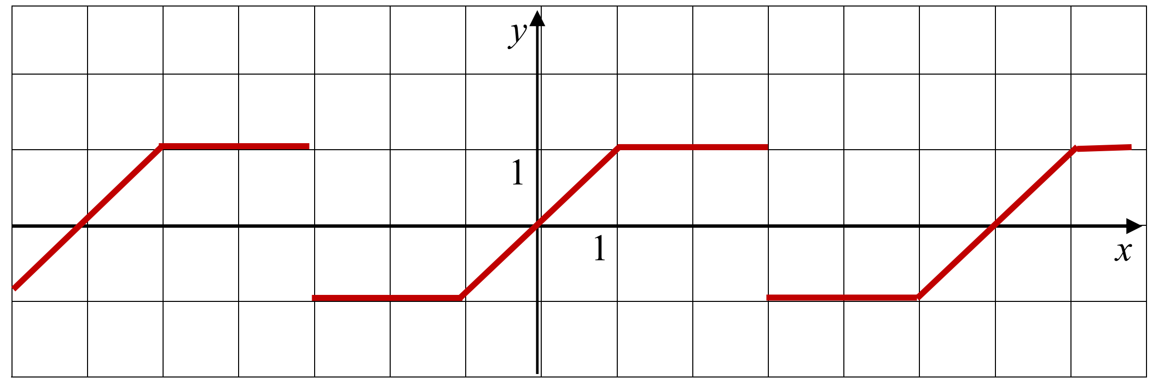
9.



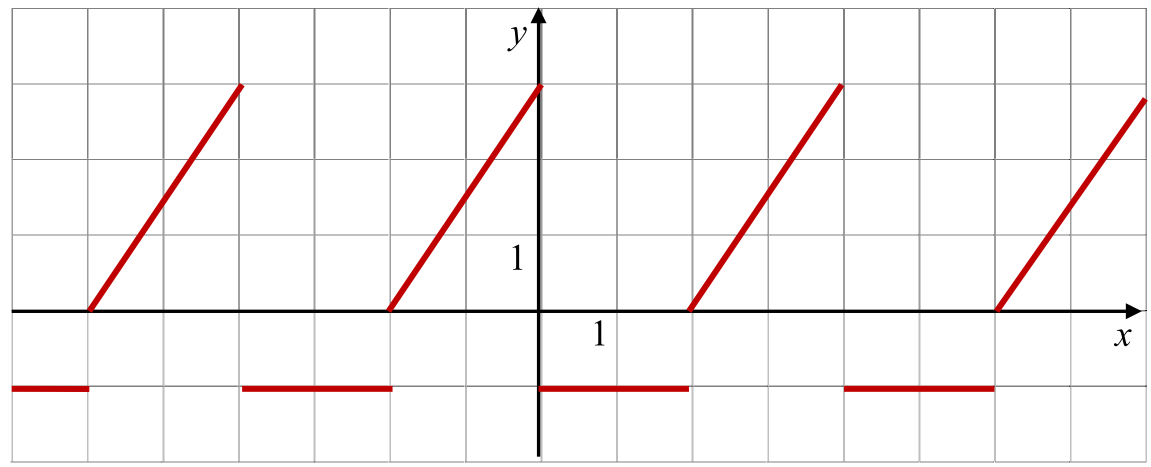
10.



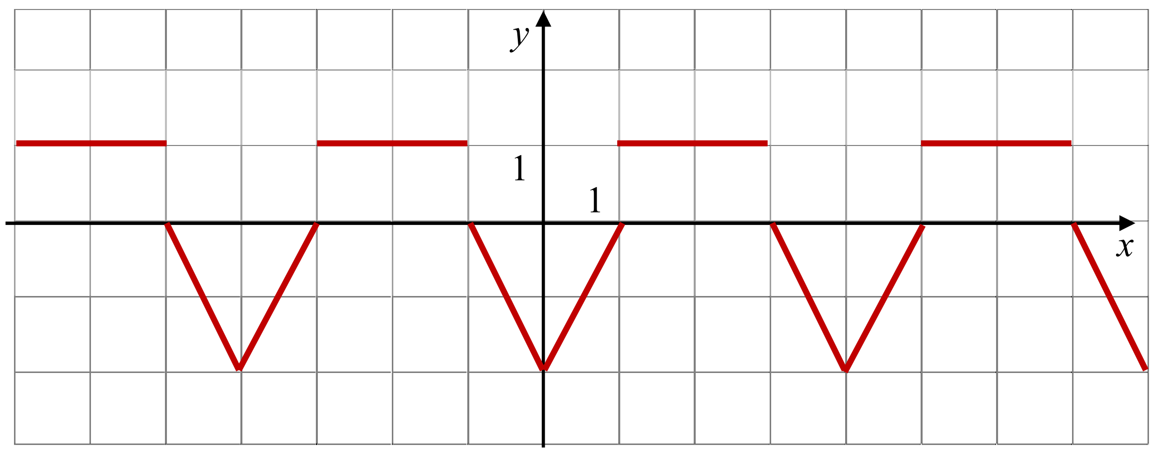
11.



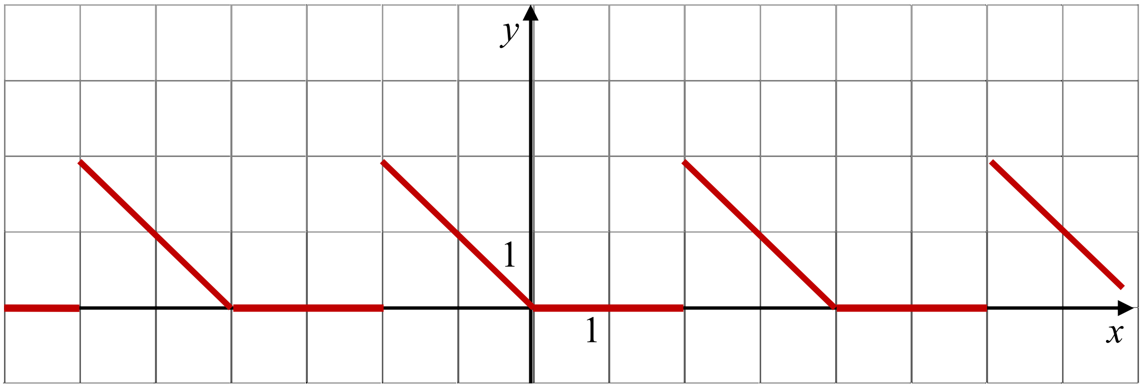
12.



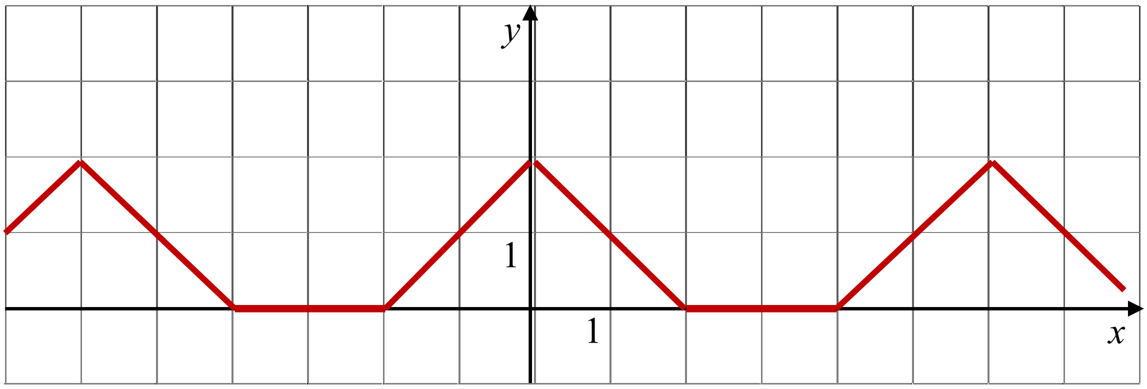
13.



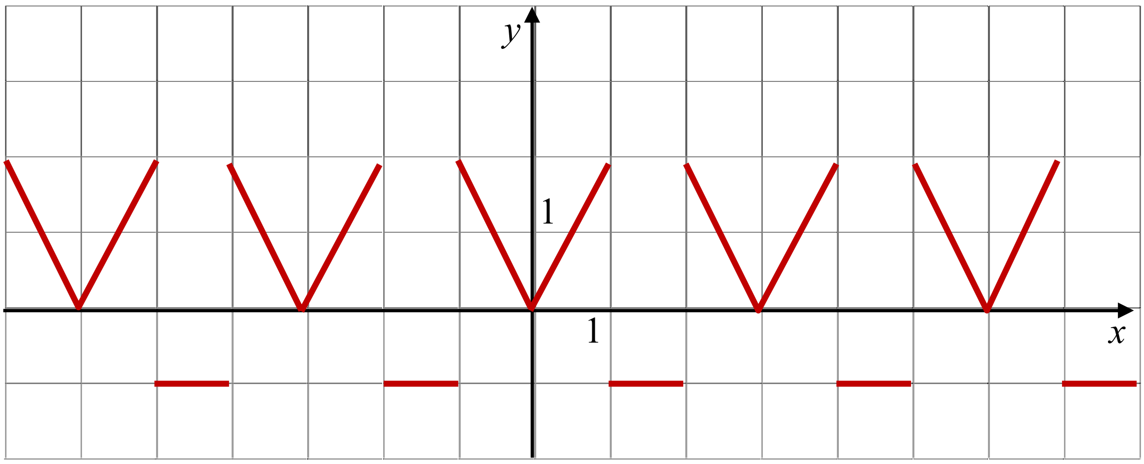
14.



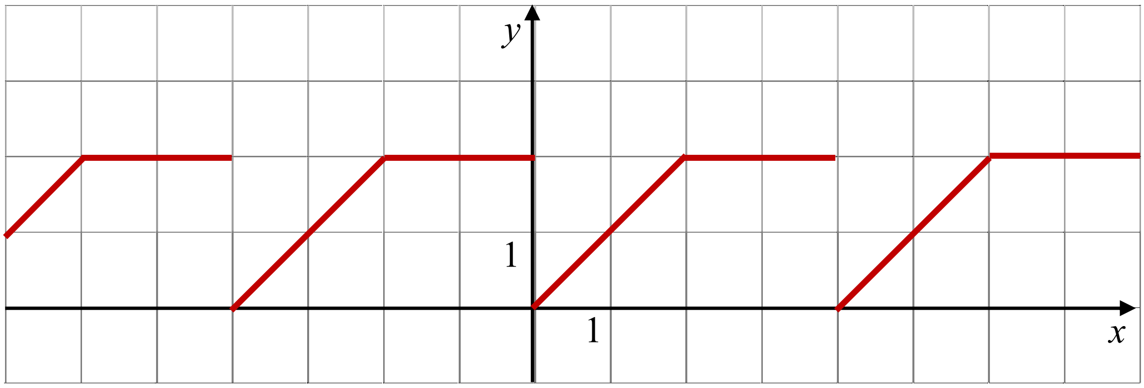
15.



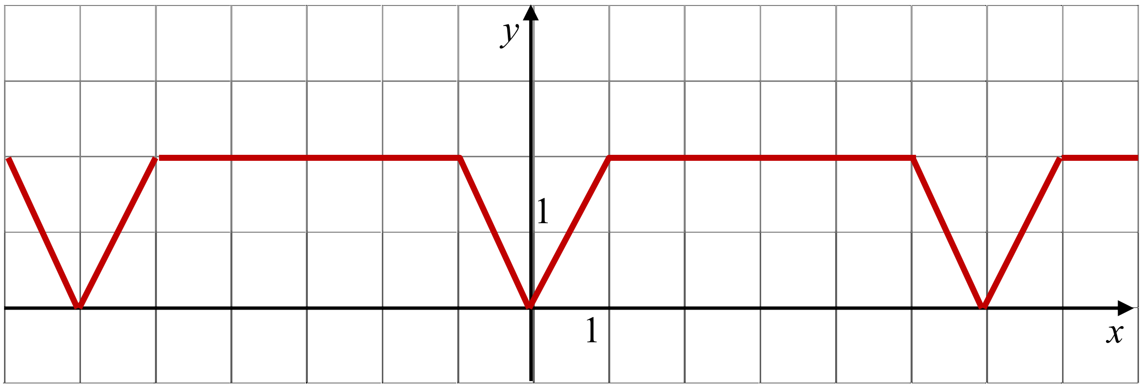
16.



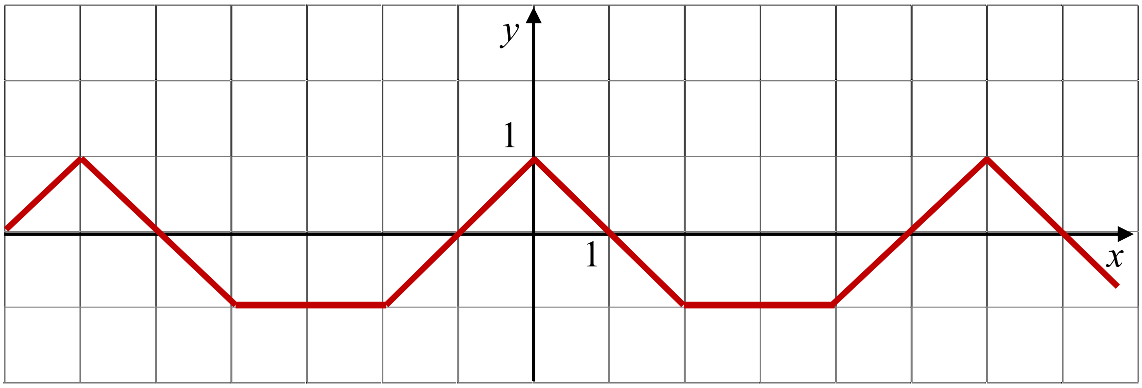
17.



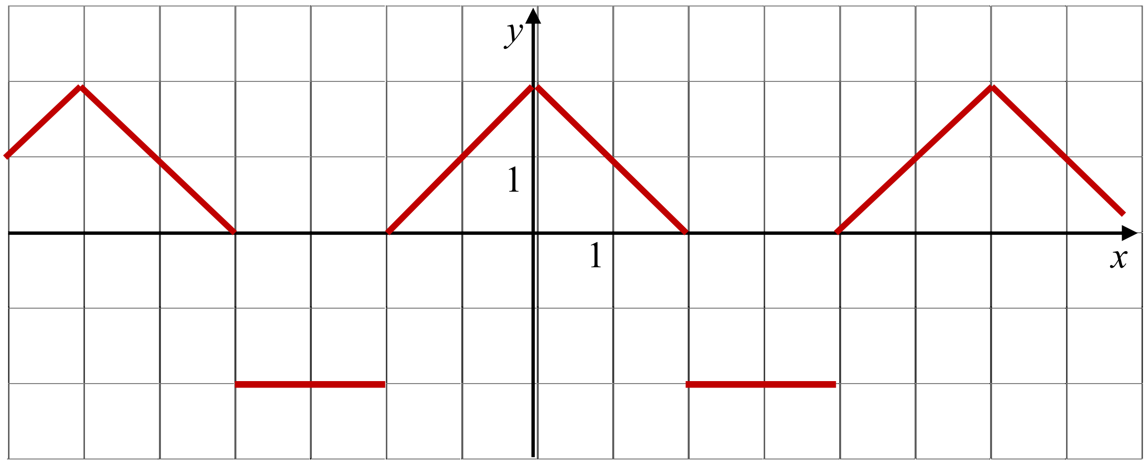
8.



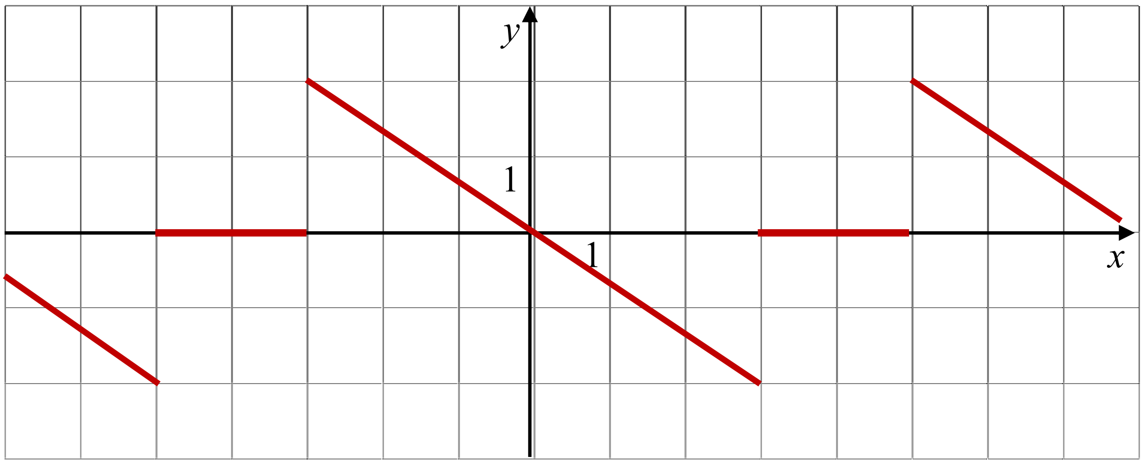
19.



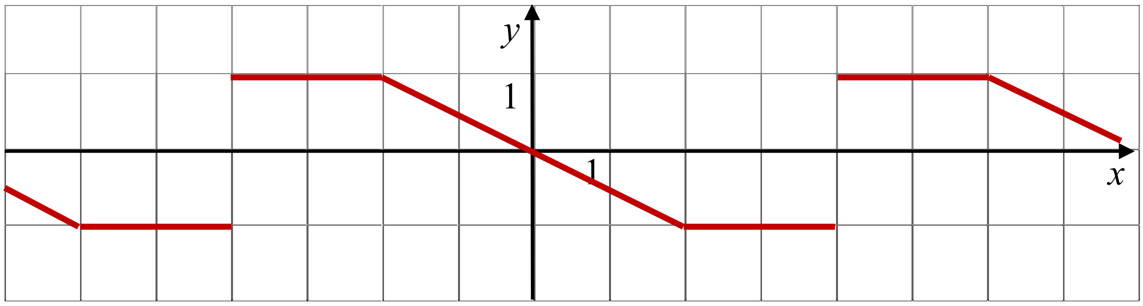
20.



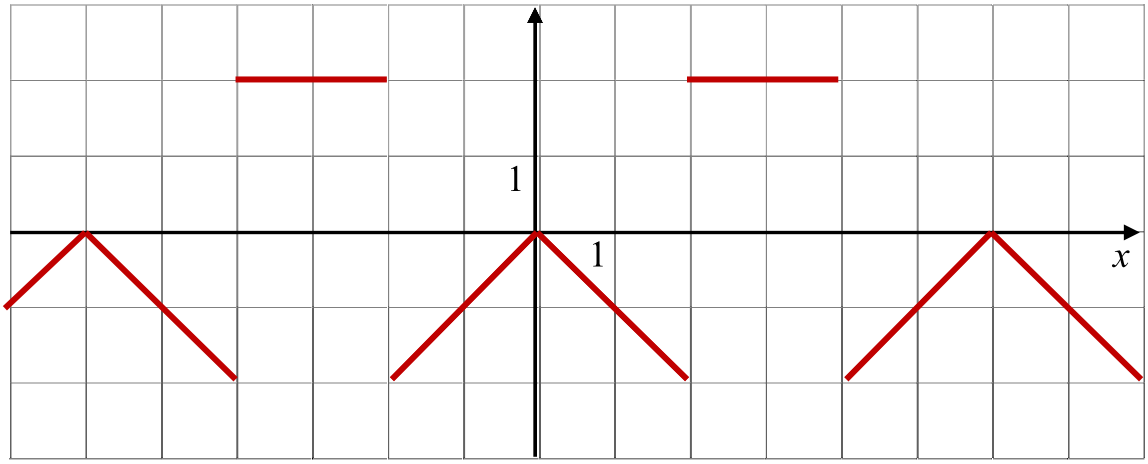
21.



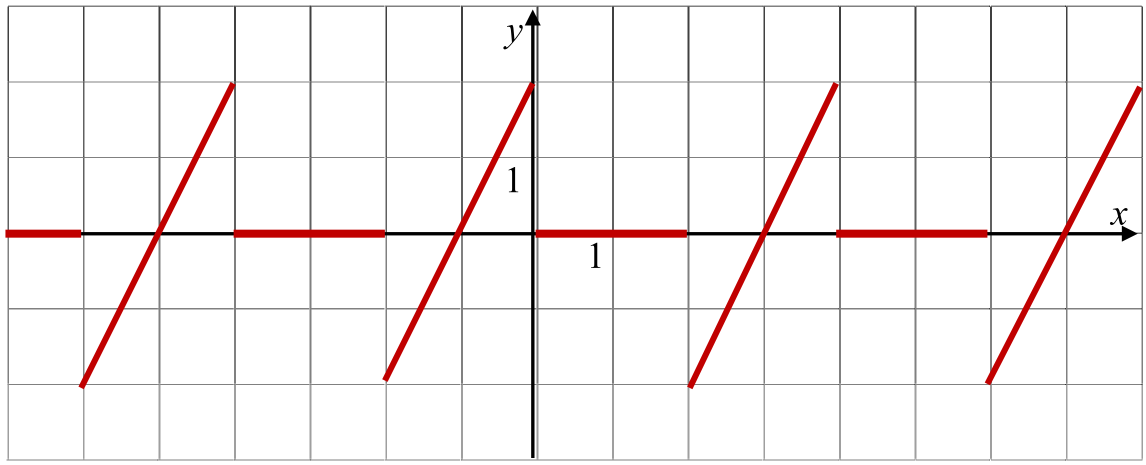
22.



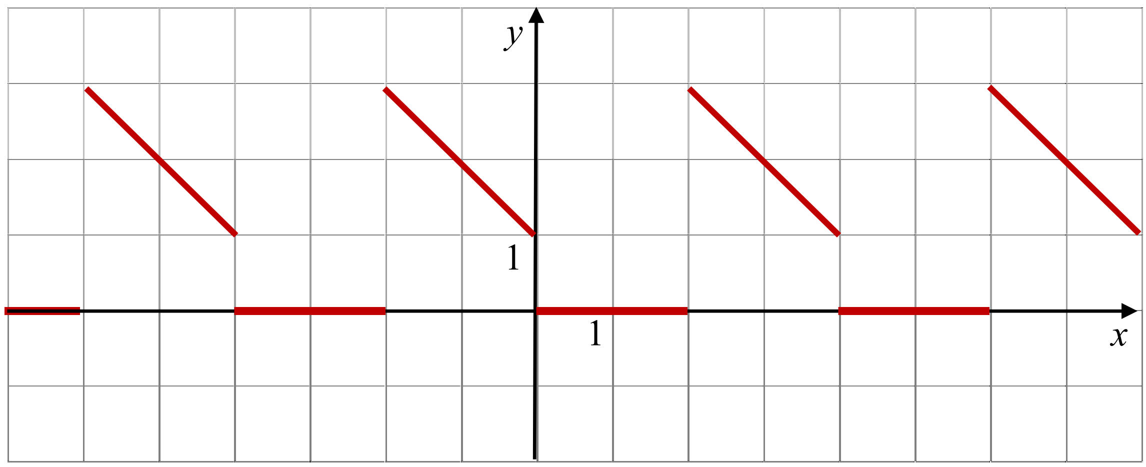
23.



24.



25.



Задача 30

Найдите n первых отличных от нуля членов разложения решения задачи Коши в степенной ряд.

1. $y' = x^3 + y^3,\ y(0) = 1,\ n = 3.$
2. $y'' - x^2 y' - y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ n = 3.$
3. $y'' = e^x + y^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ n = 4.$
4. $y'' = xy - 5y',\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ n = 5.$
5. $y' = \cos 4x - x^2 - y^2,\ y(0) = 0,\ n = 2.$
6. $y' = 2x^2 - y^3 - 2xy,\ y(0) = 1,\ n = 4.$
7. $y'' - xy + \sin x = 0,\ y(0) = y'(0) = 1,\ n = 3.$
8. $y' = y^2 + \cos x,\ y(0) = 1,\ n = 4.$
9. $y'' = (3x - 2)y' - 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ n = 4.$
10. $y'' = x^2 y + e^x,\ y(0) = y'(0) = 1,\ n = 4.$
11. $y' = \cos x - y^2 + x,\ y(0) = 1,\ n = 3.$
12. $y'' + y\sin x - y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ n = 3.$
13. $y' = y^2 + \sin^2 x,\ y(0) = 2,\ n = 4.$
14. $y' = \sin 4x + \cos 2y,\ y(0) = 0,\ n = 3.$
15. $y' = \cos y + xe^y,\ y(0) = 0,\ n = 2.$
16. $y' = xy + e^y - 5x,\ y(0) = 0,\ n = 3.$
17. $y'' = xy' - \sin y + e^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ n = 3.$
18. $y' = \cos x + x^2 + y^2,\ y(0) = 1,\ n = 4.$
19. $y'' = xy' - y + \sin x,\ y(0) = y'(0) = 0,\ n = 2.$
20. $y' = y^3 - \sin x,\ y(0) = 1,\ n = 4.$
21. $y' = xy^2 - \cos x,\ y(0) = 1,\ n = 3.$
22. $y' = ye^{-x} + \ln y,\ y(0) = 1,\ n = 3.$
23. $y'' = \left(1 + x^2\right)y + e^x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 2,\ n = 4.$
24. $y' = \cos x + e^y + xy,\ y(0) = 0,\ n = 3.$
25. $y' = \ln(x + 1) + xe^y,\ y(0) = 0,\ n = 2.$

Задача 31

Вычислить интеграл с точностью до 0,001, взяв необходимое число слагаемых.

1. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$.

2. $\int\limits_0^{1} \cos x^2 dx$.

3. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}dx$.

4. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$.

5. $\int\limits_0^{1} \frac{x-\sin x}{x^3}dx$.

6. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$.

7. $\int\limits_0^{0,2} \sin\left(25x^2\right)dx$.

8. $\int\limits_0^{0,5} \cos\left(4x^2\right)dx$.

9. $\int\limits_0^{1} x^2 e^{-x^2}dx$.

10. $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}dx$.

11. $\int\limits_0^{1} \frac{1-\cos x}{x}dx$.

12. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2}dx$.

13. $\int\limits_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$.

14. $\int\limits_0^{0,2} \cos\left(25x^2\right)dx$.

15. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}dx$.

16. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$.

17. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x}dx$.

18. $\int\limits_0^{0,4} e^{-\frac{3x^2}{4}}dx$.

19. $\int\limits_0^{0,5} \sin\left(4x^2\right)dx$.

20. $\int\limits_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$.

21. $\int\limits_0^{0,25} \frac{\sqrt{x}dx}{e^x}$.

22. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\mathrm{arctg}x}{x}dx$.

23. $\int\limits_0^{0,5} e^{-\frac{3x^2}{25}}dx$.

24. $\int\limits_0^{1} \sin\left(x^2\right)dx$.

25. $\int\limits_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right)dx$.

ЧАСТЬ 8. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вариант 1

1. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы четыре студента, из второй – шесть, из третьей – пять студентов. Вероятность того, что отобранный студент из первой, второй, третьей группы попадет в сборную института, равна соответственно 0,5, 0,4 и 0,3. Какова вероятность того, что наудачу взятый студент попадет в сборную? Если студент попал в сборную, то к какой из трех групп он вероятнее всего принадлежит?
2. Фарфоровый завод отправил на базу 10 000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0001. Найдите вероятность того, что на базу придут ровно три негодных изделия.
3. Вероятность изготовления стандартной детали равна 0,9. Какова вероятность того, что среди 10 деталей окажется не более 1 нестандартной?
4. Батарея дала 140 выстрелов по военному объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найдите наивероятнейшее число попаданий и его вероятность.
5. Вероятность выхода конденсатора из строя в течение времени t равна 0,25. Вычислите вероятность того, что за этот промежуток времени из имеющихся 150 конденсаторов выйдет из строя от 40 до 80 конденсаторов.
6. Из урны, содержащей 4 белых и 4 черных шара, наугад извлекают три шара. X – число вынутых черных шаров. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.
7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -\dfrac{\pi}{4},\\ a\cos 2x \text{ при } -\dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0 \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{12}\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.
8. Пусть установлено, что выход красителя стандартного цвета со специальным оттенком распределен нормально с математическим ожиданием 1 550 г и средним квадратическим отклонением 50 г. В скольких из 100 проверок вы ожидаете, что выход в среднем будет: а) ниже 1 550 г; б) выше 1 650 г; в) между 1 500 и 1 600 г?

Вариант 2

1. На сборку попадают детали, изготовленные тремя автоматами. Известно, что первый автомат дает 0,4%, второй – 0,2% и третий – 0,6% брака. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 500, со второго – 1 000 и с третьего – 1 250 деталей. Если деталь оказалась бракованной, то какой из трех автоматов ее вероятнее всего изготовил?

2. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,001. Найдите вероятность того, что из 5 000 изделий более чем одно не выдержит испытания.

3. Оптовая база обслуживает 12 магазинов, от каждого из них заявка на товары на следующий день может поступить с вероятностью 0,3. Найдите наивероятнейшее число заявок на следующий день и вероятность получения базой такого числа заявок.

4. На факультете 730 студентов. Вероятность того, что студент не придет на занятия, равна 0,1. Найдите наивероятнейшее число студентов, не явившихся на занятия, и вероятность этого события.

5. При штамповке металлических клемм получается в среднем 90% годных. Найдите вероятность того, что среди 900 клемм окажется от 700 до 820 годных.

6. Из ящика, содержащего 2 бракованных и 4 годных детали, наугад извлекают 4 детали. X – число вынутых годных деталей. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le -\dfrac{3\pi}{2}, \\ a\cos\dfrac{x}{3} \text{ при } -\dfrac{3\pi}{2} < x \le \dfrac{3\pi}{2}, \\ 0 \text{ при } x > \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Станок-автомат изготавливает детали, длина которых по стандарту должна отклоняться от 125 мм не более, чем на 0,5 мм. Среди продукции станка 7% нестандартной. Считая, что длины деталей имеют нормальное распределение, найдите их среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность того, что в партии из 200 деталей будет от 10 до 20 нестандартных деталей?

Вариант 3

1. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложен один вынутый наудачу шар в урну, содержащую 4 белых и 5 черных шара. Найдите вероятность того, что шар, наудачу вынутый из второй урны, окажется белым. Если вынутый из второй урны шар окажется белым, то какова вероятность того, что из первой урны был переложен: а) белый шар; б) черный шар?

2. Устройство состоит из 1 000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0,002. Найдите вероятность того, что за время t откажут ровно 3 элемента.

3. В семье 5 детей. Найдите вероятность того, что среди этих детей 2 мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51. Чему равна вероятность того, что в семье хотя бы один мальчик?

4. Пусть вероятность того, что автомат сработает неправильно, равна 0,3. Найдите наивероятнейшее число случаев неправильной работы автомата при 150 испытаниях. Какова вероятность того, что автомат не сработает такое количество раз?

5. Было посажено 400 деревьев. Вероятность того, что отдельное дерево приживется, равна 0,8. Найдите вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 300.

6. Из каждой партии телевизоров для контроля извлекают 4 телевизора и последовательно их проверяют. При появлении плохо работающего телевизора бракуется вся партия. Пусть X – количество проверенных телевизоров до появления бракованного, а вероятность брака равна 0,2. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ a\ \ln x \text{ при } 1<x\le e,\\ 0 \text{ при } x>e.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(e^{-1};\sqrt[3]{e}\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Длина болтов, изготавливаемых на автоматическом станке, является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием, равным 30 мм и дисперсией $D(X)=4$ мм. Найдите такое Q, чтобы с вероятностью 0,8 выполнялось неравенство: $|X-30|<Q$. Каково наиболее вероятное число болтов в партии из 500 деталей, для которых это неравенство имеет место?

Вариант 4

1. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности попадания в каждую кассу зависят от их местонахождения и равны соответственно 0,2; 0,5; 0,3. Вероятности того, что в кассах все билеты проданы, равны соответственно 0,6; 0,9; 0,7. Какова вероятность того, что пассажир приобретет билет? Если пассажир приобрел билет, то в какой из трех касс он вероятнее всего купил билет?

2. Вероятность нарушения герметичности банки в некоторой партии консервных банок равна 0,0004. Вычислите вероятность того, что среди 2 000 банок окажутся с нарушением герметичности не более 3.

3. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/7. Какова вероятность того, что лицо, имеющее 6 билетов, выиграет: по двум билетам; выиграет по трем билетам; не выиграет по двум билетам?

4. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,2. Произведена сборка 500 приборов. Найдите наивероятнейшее количество неточно собранных приборов и вероятность появления такого события.

5. Средний процент нарушений работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 22. Вычислите вероятность того, что из 46 наблюдаемых телевизоров более 36 выдержат гарантийный срок.

6. В колоде осталось 7 карт, из них 3 козырных. Наугад выбирают 4 карты. X – число взятых козырных карт. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ \dfrac{a\ln x}{x} \text{ при } 1<x\le e^2,\\ 0 \text{ при } x>e^2.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(\dfrac{1}{2};e\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Размер диаметра детали, выпускаемой цехом, распределяется по нормальному закону с параметрами $a=5$ см, $\sigma=0{,}81$ см. Последовательно проверяется размер диаметра каждой детали. Какова вероятность того, что: а) размер четвертой детали отклонится от математического ожидания на величину, большую, чем 2 см, а у предыдущих трех нет; б) диаметры трех из четырех проверенных деталей окажутся в промежутке от 4 до 7 см?

Вариант 5

1. С первого станка на сборку поступает 40%, со второго – 30% и с третьего – 30% всех деталей. Вероятность изготовления бракованной детали для каждого станка соответственно равна 0,01; 0,03; 0,05. Найдите вероятность того, что наудачу поступившая на сборку деталь бракована. С какого станка вероятнее всего поступит на сборку бракованная деталь?
2. Вероятность появления брака при автоматической обработке деталей равна 0,003. Найдите вероятность того, что среди 1 000 деталей только 4 детали будут бракованными.
3. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение гарантийного срока из 5 телевизоров: не более 1 потребует ремонта; хотя бы 1 потребует ремонта.
4. Вероятность случайным образом отобранному изделию оказаться стандартным равна 0,8. Найдите вероятность того, что среди 225 взятых наугад изделий 180 окажутся стандартными.
5. При автоматической прессовке карболитовых болванок 2/3 общего числа из них не имеют зазубрин. Найдите вероятность того, что из 450 взятых наудачу болванок, количество болванок без зазубрин заключено между 280 и 320.
6. В цехе имеется 5 однотипных станков. Вероятность выхода из строя одного станка равна 0,8. X – число станков, потребовавших ремонта. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.
7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}3 \text{ при } 1<x\le a,\\ 0 \text{ при } x>a.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(1;2)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.
8. Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами: $a=16$ км, $\sigma=100$ м. Найдите вероятность того, что расстояние между двумя пунктами: а) не менее 15,8 км; б) от 15,75 до 16,3 км. Измерения проведены 3 раза. Какова вероятность того, что в двух случаях из трех измеренное расстояние попадет в интервал от 15,75 до 16,3 км?

Вариант 6

1. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых, проезжающих по тому же шоссе, как 3:5. Известно, что в среднем одна из 30 грузовых и 2 из 50 легковых машин подъезжают к бензоколонке для заправки. Чему равна вероятность того, что: 1) подъехавшая к бензоколонке машина будет заправляться; б) на заправке стоит легковая автомашина; 3) на заправке стоит грузовая автомашина?

2. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найдите вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами при залпе в 5 000 выстрелов

3. В хлопке имеется 10% коротких волокон. Какова вероятность того, что в наудачу взятом пучке из 4 волокон окажется не более 2 коротких?

4. Оптовая база обслуживает 40 магазинов. От каждого из них заявка на товары на следующий день может поступить с вероятностью 0,4. Найдите наивероятнейшее число заявок на следующий день и вероятность получения базой 6 заявок.

5. В каждой из 1 000 урн находится 5 000 черных и 5 000 белых шаров. Из каждой урны извлекаются без возвращения 3 шара. Чему равна вероятность того, что число урн, из которых извлекли одноцветные шары, заключено между 220 и 300?

6. Имеется 9 радиоламп, среди которых 3 неисправных. Наугад берутся 4 радиолампы и проверяются на годность. X – число неисправных радиоламп. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 3, \\ \dfrac{3}{4}-a(x-4)^2 \text{ при } 3 < x \le 5, \\ 0 \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(3{,}5;\,5)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Рост взрослой женщины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами: $a = 164$ см и $\sigma = 5{,}5$ см. Вычислите вероятность того, что хотя бы одна из наудачу выбранных трех женщин будет иметь рост от 175 до 180 см.

Вариант 7

1. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, вынуты наудачу 2 шара и переложены в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Из второй урны наудачу выбирают шар. Чему равна вероятность того, что он белый? Если из второй урны извлечен белый шар, то наиболее вероятно какого цвета шары извлечены из первой урны и переложены во вторую?

2. На базе получено 10 000 электроламп. Вероятность того, что в пути лампа разобьется, равна 0,0003. Найдите вероятность того, что среди полученных ламп будет пять ламп разбито.

3. Вероятность изготовления стандартной детали равна 0,9. Какова вероятность того, что среди 10 деталей окажется не более 1 нестандартной?

4. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найдите вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

5. В цехе имеется 80 станков, работающих независимо друг от друга. Для каждого станка вероятность быть включенным равна 0,9. Вычислите вероятность того, что в некоторый момент времени включенными окажутся от 60 до 75 станков.

6. Производятся последовательные испытания 5 приборов, причем испытания прекращаются сразу после того, как проверяемый прибор оказался надежным. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,8. X – число испытаний, после которых закончится проверка. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{a}{(x+2)^2} \text{ при } 0<x\le 2,\\ 0 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-1;\,1{,}5)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Диаметр детали, изготовленной цехом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Дисперсия ее равна 0,0001 см, а математическое ожидание – 2,5 см. Найдите границы, симметричные относительно математического ожидания, в которых с вероятностью 0,9973 заключен диаметр наудачу взятой детали. Какова вероятность того, что в серии из 1 000 испытаний размер диаметра двух деталей выйдет за найденные границы?

Вариант 8

1. В группе спортсменов 18 лыжников, 8 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалифицированную норму такова: для лыжника – 0,9; для велосипедиста – 0,8; для бегуна – 0,75. Найдите вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму. Если спортсмен выполнил квалифицированную норму, то какова вероятность того, что этим спортсменом будет: а) лыжник; б) велосипедист; в) бегун?

2. Найдите вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1%.

3. Вероятность выигрыша по одному билету равна 1/3. Какова вероятность того, что лицо, имеющее шесть билетов: выиграет по двум билетам; выиграет по трем билетам; не выиграет по двум билетам?

4. По данным длительной проверки качества выпускаемых запчастей определенного вида брак составляет 13%. Определите вероятность того, что в непроверенной партии из 150 запчастей пригодных будет 128 штук.

5. Вероятность изготовления детали с номинальными размерами равна 0,7. Вычислите вероятность того, что среди 300 деталей номинальными будут от 200 до 250.

6. Производится тестирование 5 больших интегральных схем (БИС). Вероятность того, что БИС неисправна, равна 0,6. X – число неисправных БИС. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ e^{3ax} \text{ при } x\geq 0. \end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(1; \ln 5)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром 5 см, но проходит через отверстие диаметром 6 см, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика X – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием, равным 5,5 см и дисперсией 1,21 см. Определите вероятность того, что шарик будет забракован. Вычислите вероятность того, что из десяти шариков три будут забракованы.

Вариант 9

1. На фабрике станки 1, 2 и 3 производят соответственно 20%, 35% и 45% всех деталей. В их продукции брак составляет соответственно 6%, 4%, 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие оказалось дефектным? Какова вероятность того, что оно было произведено: а) станком 1; б) станком 2; в) станком 3?

2. Устройство состоит из 1 600 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0,001. Найдите вероятность того, что за время t откажут не более 4 элементов.

3. Всхожесть семян некоторого растения составляет 70%. Какова вероятность того, что из 10 посеянных семян взойдут: 8; по крайней мере 8; не менее 8?

4. Производство электронно-лучевых трубок для телевизоров дает в среднем 12% брака. Найдите вероятность наличия 215 годных трубок в партии из 250 штук.

5. Из большой партии продукции, содержащей 70% изделий первого сорта, наугад отбирают 100 изделий. Вычислите вероятность того, что среди отобранных будет не менее 50 и не более 90 изделий первого сорта.

6. Пусть X – сумма числа очков, выпавших при бросании двух игральных костей. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 3,\\ 0{,}1 \text{ при } 3<x\le a,\\ 0 \text{ при } x>a.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(2;5)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Валики, изготавливаемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от заданного размера не превысит 2 мм. Случайные отклонения диаметров валика подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma=1{,}6$ мм и математическим ожиданием $a=0$. Найдите вероятность того, что из 200 валиков число нестандартных будет не более 10%.

Вариант 10

1. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10%, третьего – 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с 1-го завода, 20% – со 2-го и 50% – с 3-го? Если телевизор исправен, то какой завод вероятнее всего его изготовил?
2. Какова вероятность того, что среди 200 человек будет 6 левшей, если левши в среднем составляют 1%?
3. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,9. Определите вероятность того, что из 3 наудачу взятых деталей: 2 окажутся стандартными; стандартными окажутся все 3.
4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найдите вероятность того, что цель будет поражена 100 раз из 320 выстрелов.
5. Вероятность выхода конденсатора из строя в течение времени t равна 0,25. Вычислите вероятность того, что за этот промежуток времени из имеющихся 150 конденсаторов выйдет из строя от 40 до 80 конденсаторов.
6. Пусть X – число гербов, полученных при бросании трех монет. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.
7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 1, \\ \dfrac{a}{x} \text{ при } 1<x\le e, \\ 0 \text{ при } x>e. \end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(0{,}9;\sqrt{e}\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.
8. Имеется случайная величина X, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием $M(X)=15$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=3$. Найдите значения a, b и q, при которых: а) $P(X>b)=0{,}9$; б) $P(X<a)=0{,}95$; в) $P\left(\left|X-M(X)\right|<q\right)=0{,}9$. Найдите вероятность того, что в 100 испытаниях случайная величина X примет значение, большее b, ровно 85 раз.

Вариант 11

1. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый дает в среднем 0,2% брака, второй – 0,1%. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 2 000 деталей, а со второго – 3 000. Если деталь бракованная, то какой автомат вероятнее всего ее изготовил?

2. Устройство состоит из 1 500 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа каждого из них в течение времени t равна 0,0017. Найдите вероятность того, что за время t откажут от 2 до 4 элементов.

3. В цехе 5 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найдите вероятность того, что в данный момент включено не менее 2 моторов.

4. Устройство состоит из 400 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента, проработавшего время t, равна 0,15. Найдите наивероятнейшее количество приборов, которые могут отказать через время t и вероятность отказа такого количества.

5. При штамповке металлических клемм получается в среднем 90% годных. Найдите вероятность того, что среди 900 клемм окажется от 700 до 820 годных.

6. В ящике 100 шаров, из них 20 синих, 30 черных и 50 красных. Шар вынимают наугад, фиксируют его цвет и возвращают его в ящик. Проводится 6 таких испытаний. X – число вынутых черных шаров в этих испытаниях. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2, \\ \dfrac{a}{\sqrt[3]{x-1}} \text{ при } 2 < x \le 9, \\ 0 \text{ при } x > 9. \end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-0,5;6)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Длина болтов, изготавливаемых на автоматическом станке, является нормально распределенной случайной величиной. Средняя длина болтов 6,8 см, а среднее квадратическое отклонение этой случайной величины равно 0,03 см. Найдите: а) долю болтов, длина которых отклоняется от средней длины менее, чем на 0,03 см; б) долю болтов с длиной, большей средней; в) вероятность того, что 2 наугад взятых болта имеют длину, большую средней.

Вариант 12

1. В трех урнах имеются белые и черные шары. В первой урне – 3 белых и 1 черный шар, во второй урне – 6 белых и 4 черных шара, в третьей урне – 9 белых и 1 черный шар. Из наугад выбранной урны случайным образом вынимается шар. Найдите вероятность того, что он белый. Если извлечен белый шар, то из какой урны вероятнее всего он извлечен?

2. Прядильщица обслуживает 1 000 веретен. Вероятность обрыва нити на 1 веретене в течение 1 мин равна 0,003. Вычислите вероятность того, что в течение 1 мин произойдет не более двух обрывов.

3. Вероятность изготовления стандартной детали на автоматическом станке равна 0,9. Найдите вероятность того, что из 8 взятых наудачу деталей не менее 7 окажутся стандартными.

4. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,2. Найдите вероятность того, что в 150 испытаниях событие наступит 5 раз.

5. Было посажено 400 деревьев. Вероятность того, что отдельное дерево приживется, равна 0,8. Найдите вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 300.

6. В ящике содержится 7 стандартных и 3 бракованных детали. Вынимают детали последовательно до появления стандартной, не возвращая их обратно. X – число извлеченных бракованных деталей. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ a\sin x \text{ при } 0<x\le\pi,\\ 0 \text{ при } x>\pi.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Случайная величина, выражающая ошибку измерительного прибора, распределена по нормальному закону с дисперсией 16 мк. Систематическая ошибка прибора отсутствует. Определите вероятность того, что в пяти независимых измерениях ошибка превзойдет по модулю 6 мк не более трех раз.

Вариант 13

1. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1 и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна равна 0,9, а завода № 2 – 0,8. Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найдите вероятность того, что извлечена стандартная деталь. Если извлечена стандартная деталь, то какова вероятность того, что она изготовлена: а) заводом № 1; б) заводом № 2?
2. В зрительном зале находится 400 человек. Какова вероятность того, что среди них имеется 3 левши, если левши в среднем составляют 1%?
3. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены станок потребует его внимания, равна 0,7. Найдите вероятность того, что в течение смены внимания рабочего потребуют два станка.
4. Фабрика выпускает 75% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что из 300 изделий число первосортных изделий равно 220?
5. Средний процент нарушений работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 22. Вычислите вероятность того, что из 46 наблюдаемых телевизоров более 36 выдержат гарантийный срок.
6. При бросании двух игральных костей игрок выигрывает 25 руб., если на обеих костях выпадает по 6 очков; 3 руб. – если на одной кости выпало 6 очков; 1 руб. – если сумма выпавших очков равна 6. X – размер выигрыша, возможный при одном бросании. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.
7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{a}{x+1} \text{ при } 0<x\le e-1,\\ 0 \text{ при } x>e-1.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;1)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.
8. В нормально распределенной совокупности 15% значений X меньше 12 и 40% значений X больше 16,2. Найдите параметры a и σ нормального распределения. Какова вероятность того, что в трех испытаниях случайная величина X хотя бы один раз примет значение, большее 16,2?

Вариант 14

1. В каждой из урн содержится 2 черных и 8 белых шаров. Из первой урны наудачу извлечен 1 шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны извлечен шар. Найдите вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны, окажется белым. Если извлеченный шар оказался белым, то какова вероятность того, что из первой урны извлечен и переложен во вторую урну: а) белый шар; б) черный шар?

2. Завод отправил партию консервов в 2 000 штук. Вероятность того, что консервная банка будет разгерметизирована, равна 0,0035. Какова вероятность того, что разгерметизировано будет не более 5 банок консервов?

3. Вероятность попадания в цель составляет при отдельном выстреле 0,8. Найдите вероятность от 2 до 4 попаданий при 6 выстрелах.

4. Вероятность изготовления детали с номинальными размерами равна 0,7. Вычислите вероятность того, что среди 300 деталей номинальными будут 200 деталей.

5. При автоматической прессовке карболитовых болванок 2/3 общего числа из них не имеют зазубрин. Найдите вероятность того, что из 450 взятых наудачу болванок, количество болванок без зазубрин заключено между 280 и 320.

6. В первой урне содержится 3 белых и 5 черных шаров, во второй урне – 6 белых и 4 черных шара, в третьей урне – 1 белый и 3 черных шара. Из каждой урны вынимают по 1 шару. X – число извлеченных черных шаров. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ a\sin\dfrac{x}{2} \text{ при } 0 < x \le 2\pi, \\ 0 \text{ при } x > 2\pi. \end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{3}\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала при изготовлении ее на данном станке имеет нулевое математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение 5 мк. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,9 среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение размера от номинала не более, чем на 2 мк?

Вариант 15

1. На трех станках в одинаковых и независимых условиях изготовляют детали одного наименования. На 1м станке изготовляют 10%, на 2м – 30%, на 3м – 60% всех деталей. Вероятность каждой детали быть качественной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке, 0,8 – если она изготовлена на втором станке, 0,9 – если она изготовлена на 3 станке. Найдите вероятность того, что наугад взятая деталь окажется качественной. Если случайно взятая деталь оказалась качественной, то какова вероятность того, что она изготовлена на третьем станке?

2. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найдите вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами при залпе из 3 000 орудий.

3. Рабочий обслуживает 4 станка. Каждый станок в течение 8 часов работы простаивает из-за поломки 0,8 часа, причем остановки в любой момент времени равновероятны. Определите вероятность того, что в данный момент времени простаивают менее 2 станков.

4. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,45. Найдите вероятность того, что среди взятых наудачу 280 деталей половина окажется высшего сорта.

5. В каждой из 1 000 урн находится 5 000 черных и 5 000 белых шаров. Из каждой урны извлекаются без возвращения 3 шара. Чему равна вероятность того, что число урн, из которых извлекли одноцветные шары, заключено между 220 и 300?

6. При бросании трех игральных костей игрок выигрывает 18 руб., если на всех костях выпадет 6 очков; 2 руб. если на двух костях выпадет 6 очков; 1 руб. если только на одной кости выпадет 6 очков. X – величина выигрыша в рублях. Составьте закон распределения случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le -\dfrac{\pi}{4}, \\ a\cos 2x \text{ при } -\dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 0 \text{ при } x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{12}\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Случайное отклонение X контролируемого размера детали от номинала распределено по нормальному закону с параметрами $a=0$ и $\sigma=5$ мк. Вычислите, каким должен быть допуск, чтобы с вероятностью не более 0,0027 получалась деталь с контролируемым размером вне поля допуска? Какова вероятность того, что из 1 000 деталей менее трех будут иметь размеры вне поля допуска?

Вариант 16

1. Имеется 5 винтовок, из которых 2 с оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель при выстреле из винтовки с оптическим прицелом составляет для данного стрелка 0,95, без оптического прицела – 0,8. Найдите вероятность попадания в цель, если стрелок сделает один выстрел из наудачу взятой винтовки. Пусть при выстреле произошло попадание в цель. Найдите вероятность того, что стреляли из винтовки с оптическим прицелом.

2. При изготовлении радиоламп в среднем бывает 2% брака. Найдите вероятность того, что в партии из 200 ламп не более двух бракованных.

3. Монету бросают 6 раз. Найдите наиболее вероятное число выпадения герба и вероятность появления такого числа гербов.

4. Определите вероятность того, что среди 400 проб руды окажется 275 проб с промышленным содержанием металла, если вероятность промышленного содержания металла одинакова для каждой пробы и равна 0,7.

5. В цехе имеется 80 станков, работающих независимо друг от друга. Для каждого станка вероятность быть включенным равна 0,9. Вычислите вероятность того, что в некоторый момент времени включенными окажутся от 60 до 75 станков.

6. В группе из 5 изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и проверяют. X – число извлеченных деталей до обнаружения бракованной. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -\pi,\\ a\cos\dfrac{x}{2} \text{ при } -\pi<x\le\pi,\\ 0 \text{ при } x>\pi.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Детали, выпускаемые цехом, считаются высшего качества, если отклонение их размеров от номинала не превосходит по абсолютной величине 2,6 мм. Случайные отклонения размера детали от номинала подчиняются нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma=2$ мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число деталей высшего качества среди наудачу отобранных 50 штук.

Вариант 17

1. Две перфораторщицы набили по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05, для второй перфораторщицы эта вероятность равна 0,1. Какова вероятность того, что в наудачу взятом комплекте перфокарт будет найдена ошибка? Какова вероятность того, что эту ошибку допустит: а) первая перфораторщица; б) вторая перфораторщица?

2. Аппаратура содержит 2 000 одинаковых надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

3. В урне 10 черных и 5 белых шаров. Испытание заключается в следующем: извлекается шар, фиксируется его цвет, возвращается в урну и тщательно перемешивается. Какова вероятность того, что в 3 испытаниях белый шар появится 1 раз?

4. Вероятность того, что деталь выйдет из строя после того как она проработала время t, равна 0,25. Чему равно наиболее вероятное число деталей, вышедших из строя через время t в партии из 50 деталей? Чему равна вероятность появления такого события?

5. Вероятность изготовления детали с номинальными размерами равна 0,7. Вычислите вероятность того, что среди 300 деталей номинальными будут от 200 до 250.

6. На карточках записаны двузначные числа от 31 до 60. Карточку извлекают из урны, фиксируют, возвращают в урну и тщательно перемешивают. X – число карточек с цифрой 5 в серии из 4 таких испытаний. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 1, \\ \dfrac{a}{x^4} \text{ при } x>1. \end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;5)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Случайная величина X распределена нормально с параметрами $a=5$ м и $\sigma=6$ м. Какова вероятность того, что измеренные значения будут отклоняться от истинного не более, чем на 15 м? Какова вероятность того, что в 80 измерениях случайная величина X не более, чем 20 раз, попадет в интервал $(4;10)$?

Вариант 18

1. С первого станка на сборку поступает 40%, со второго – 30%, с третьего – 20%, с четвертого – 10% всех деталей. Среди деталей первого станка 0,1% бракованных, второго – 0,2%, третьего – 0,25%, четвертого – 0,5%. Найдите вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная. Если поступившая на сборку деталь оказалась бракованной, то каким станком вероятнее всего она была изготовлена?
2. По данным ОТК в среднем 3% изделий требуют дополнительной регулировки. Вычислите вероятность того, что из 200 изделий 4 потребуют дополнительной регулировки
3. Вероятность изготовления детали первого сорта равна 0,9. Найдите вероятность того, что из 6 взятых наудачу деталей первого сорта окажется более 4 деталей.
4. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41 размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из 750 покупателей только 120 потребуют обувь этого размера
5. Из большой партии продукции, содержащей 70% изделий первого сорта, наугад отбирают 100 изделий. Вычислите вероятность того, что среди отобранных будет не менее 50 и не более 90 изделий первого сорта.
6. Имеется 5 патронов. По мишени ведутся выстрелы до первого попадания или пока не будут израсходованы все патроны. X – число израсходованных патронов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.
7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 10,\\ a(x-10) \text{ при } 10<x\le 11,\\ 0 \text{ при } x>11.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(9{,}15;10{,}4)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.
8. Размер детали задан полем допуска 10–12 мм. Оказалось, что средний размер деталей равен 11,4 мм, а среднее квадратическое отклонение 0,7 мм. Полагая, что размер детали подчиняется нормальному закону распределения, определите вероятность брака по заниженному и завышенному размеру. Какова вероятность того, что из 1000 деталей бракованных будет менее 180?

Вариант 19

1. Часы изготавливаются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 40% продукции, второй – 45%, третий – 15%. В продукции первого завода спешат 80% часов, второго – 70%, третьего – 90%. Какова вероятность того, что купленные часы спешат? Если купленные часы спешат, то вероятнее всего на каком заводе они изготовлены?
2. Среди семян ржи 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 500 семян обнаружить 5 семян сорняков?
3. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Какова вероятность того, что из 10 посеянных семян взойдут: 9; по крайней мере 8; не менее 9?
4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найдите вероятность 100 попаданий из 320 выстрелов.
5. Вероятность выхода конденсатора из строя в течение времени t равна 0,25. Вычислите вероятность того, что за этот промежуток времени из имеющихся 150 конденсаторов выйдет из строя от 40 до 80 конденсаторов.
6. В партии, состоящей из 10 деталей, имеется 4 бракованных. Наугад извлекают 3 детали. X – число бракованных деталей среди 3 выбранных. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.
7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ a\sin\dfrac{x}{2} \text{ при } 0<x\le 2\pi,\\ 0 \text{ при } x>2\pi.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(\dfrac{\pi}{3};\pi\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.
8. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a=100$ и $\sigma=100$. Вычислите: а) $P(X<95)$; б) $P(X>90)$; в) $P(|X-100|<20)$. Какова вероятность того, что в трех случаях из пяти случайная величина X будет удовлетворять условию $|X-100|<20$?

Вариант 20

1. Имеется 10 одинаковых урн, из которых в 9 находится 2 черных и 2 белых шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из наугад взятой урны извлечен шар. Чему равна вероятность того, что этот шар оказался белым? Если шар оказался белым, то какова вероятность того, что он извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров?

2. Книга в 1000 страниц имеет 10 опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице: а) нет опечаток; б) не более трех опечаток?

3. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,1. Найдите вероятность того, что в течение гарантийного срока из 5 телевизоров: не более двух потребуют ремонта; хотя бы 2 потребуют ремонта.

4. На склад магазина поступают изделия, из которых 90% оказываются высшего сорта. Найдите вероятность того, что из 400 взятых наудачу изделий 368 окажутся высшего сорта.

5. При штамповке металлических клемм получается в среднем 90% годных. Найдите вероятность того, что среди 900 клемм окажется от 700 до 820 годных.

6. Вероятность того, что трамвай подойдет к остановке строго по расписанию, равна 0,7. X – число трамваев, прибывших по расписанию, из 4 исследуемых. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -2\pi,\\ a\cos\dfrac{x}{4} \text{ при } -2\pi<x\le 2\pi,\\ 0 \text{ при } x>2\pi.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\pi;\dfrac{4\pi}{3}\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Процент содержания свинца в пробе руды является случайной величиной, имеющей нормальное распределение со средним квадратическим отклонением 10% и средним значением 15%. Найдите: а) долю проб руды, процентное содержание свинца в которых отличается от среднего больше, чем на 3%; б) долю проб руды с процентным содержанием свинца от 10 до 30%; в) вероятность того, что в 100 пробах руды с таким содержанием свинца придется от 10 до 40 проб.

Вариант 21

1. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно, 1 – плохо. В билетах 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все вопросы, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5 вопросов. Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент ответит на 3 произвольно заданных вопроса? Найдите вероятность того, что ответивший на вопросы студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

2. Устройство состоит из 1 000 элементов, работавших независимо один от другого. Вероятность отказа каждого из них в течение времени t равна 0,0025. Найдите вероятность того, что за время t откажут ровно 3 элемента.

3. В цехе 4 мотора. Для каждого мотора вероятность того, что он включен, равна 0,6. Найдите вероятность того, что в данный момент: включено 2 мотора; включены все моторы

4. Батарея дала 140 выстрелов по военному объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найдите наивероятнейшее число попаданий и его вероятность.

5. Было посажено 400 деревьев. Вероятность того, что отдельное дерево приживется, равна 0,8. Найдите вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 300.

6. В лотерее разыгрывается мяч стоимостью 3 руб., шахматы стоимостью 10 руб. и кеды стоимостью 5 руб. Всего билетов 10. X – величина выигрыша в рублях для лица, имеющего 3 билета. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ \dfrac{a}{x^3} \text{ при } 1<x\le 3,\\ 0 \text{ при } x>3.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;2)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с параметрами $M(X)=2$ и $D(X)=1$. Вычислите вероятность того, что при шести испытаниях случайная величина 2 раза попадет в интервал $(0;\ 3)$.

Вариант 22

1. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы четыре студента, из второй – шесть, из третьей – пять студентов. Вероятность того, что отобранный студент из первой, второй, третьей группы попадет в сборную института, равна соответственно 0,5, 0,4 и 0,3. Какова вероятность того, что наудачу взятый студент попадет в сборную? Если студент попал в сборную, то к какой из трех групп он вероятнее всего принадлежит?
2. Пусть вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Найдите наиболее вероятное число опоздавших из 855 пассажиров. Какова вероятность того, что опоздает меньше 5 пассажиров?
3. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41 размера, равна 0,3. Найдите вероятность того, что из 5 первых покупателей обувь этого размера будет необходима: одному; по крайней мере одному.
4. Пусть вероятность того, что автомат сработает неправильно, равна 0,3. Найдите наивероятнейшее число случаев неправильной работы автомата при 150 испытаниях. Какова вероятность того, что автомат не сработает такое количество раз?
5. Средний процент нарушений работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 22. Вычислите вероятность того, что из 46 наблюдаемых телевизоров более 36 выдержат гарантийный срок.
6. Из урны, содержащей 4 белых и 4 черных шара, последовательно извлекают шары до появления первого белого шара, не возвращая их обратно в урну. X – число извлеченных черных шаров. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.
7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\cos^2 x \text{ при } -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.
8. Длина болтов, изготовляемых на автоматическом станке, является нормально распределенной случайной величиной. Средняя длина болтов равна 8,4 см, среднее квадратическое отклонение этой случайной величины 0,04 см. Найдите: а) долю болтов, длина которых от 8,32 до 8,46 см; б) долю болтов с длиной, меньшей средней; в) вероятность того, что среди 2000 болтов только у 3 болтов длина превысит 8,52 см.

Вариант 23

1. На сборку попадают детали, изготовленные тремя автоматами. Известно, что первый автомат дает 0,4%, второй – 0,2% и третий – 0,6% брака. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 500, со второго – 1 000 и с третьего – 1 250 деталей. Если деталь оказалась бракованной, то какой из трех автоматов ее вероятнее всего изготовил?
2. Найдите вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1%.
3. На автобазе имеется 10 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них 0,8. Найдите вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее 8 автомашин.
4. На факультете 730 студентов. Вероятность того, что студент не придет на занятия, равна 0,1. Найдите наивероятнейшее число студентов, не явившихся на занятия, и вероятность этого события.
5. При автоматической прессовке карболитовых болванок 2/3 общего числа из них не имеют зазубрин. Найдите вероятность того, что из 450 взятых наудачу болванок, количество болванок без зазубрин заключено между 280 и 320.
6. На пути движения автомашины 4 светофора, каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. X – число пройденных светофоров до первой остановки. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.
7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -3,\\ \dfrac{ax}{x+4} \text{ при } -3<x\le e-4,\\ 0 \text{ при } x>e-4.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-4;1)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.
8. Средний рост 1 000 солдат равен 1,81 м со стандартным отклонением 50 мм. Полагая, что рост подчиняется нормальному закону распределения, оцените число солдат, рост которых: а) больше 1,87 м; б) лежит между 1,72 и 1,8 м. Какова вероятность того, что обмундирование третьего роста понадобится 300 солдатам. (Третий рост: 172–178 см).

Вариант 24

1. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложен один вынутый наудачу шар в урну, содержащую 4 белых и 5 черных шара. Найдите вероятность того, что шар, наудачу вынутый из второй урны, окажется белым. Если вынутый из второй урны шар окажется белым, то какова вероятность того, что из первой урны был переложен: а) белый шар; б) черный шар?

2. Прядильщица обслуживает 1 000 веретен. Вероятность обрыва нити на 1 веретене в течение 1 мин равна 0,003. Вычислите вероятность того, что в течение 1 мин произойдет не более двух обрывов.

3. Монету бросают 5 раз. Найдите вероятность того, что герб выпадет не менее четырех раз.

4. Вероятность случайным образом отобранному изделию оказаться стандартным равна 0,8. Найдите вероятность того, что среди 225 взятых наугад изделий 180 окажутся стандартными.

5. В каждой из 1 000 урн находится 5 000 черных и 5 000 белых шаров. Из каждой урны извлекаются без возвращения 3 шара. Чему равна вероятность того, что число урн, из которых извлекли одноцветные шары, заключено между 220 и 300?

6. Три стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5, вторым – 0,4, третьим – 0,7. X – число попаданий в мишень. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 2a(x-1) \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0,3;1,4)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

8. Рост взрослых мужчин в рассматриваемой совокупности является нормально распределенной случайной величиной X. Средний рост мужчин этой совокупности 172 см, а 90% мужчин имеет рост от 169 до 175 см. Найдите: а) среднее квадратическое отклонение случайной величины X; б) долю мужчин, рост которых находится в пределах от 169 до 174 см. Какова вероятность того, что из 10 случайно отобранных мужчин у семи рост будет в пределах от 169 до 174 см?

Вариант 25

1. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности попадания в каждую кассу зависят от их местонахождения и равны соответственно 0,2; 0,5; 0,3. Вероятности того, что в кассах все билеты проданы, равны соответственно 0,6; 0,9; 0,7. Какова вероятность того, что пассажир приобретет билет? Если пассажир приобрел билет, то в какой из трех касс он вероятнее всего купил билет?
2. В зрительном зале находится 400 человек. Какова вероятность того, что среди них имеется 3 левши, если левши в среднем составляют 1%?
3. Вероятность того, что в партии встретится бракованная деталь, равна 0,2. Какова вероятность того, что из 5 деталей бракованных будет менее двух?
4. Оптовая база обслуживает 40 магазинов. От каждого из них заявка на товары на следующий день может поступить с вероятностью 0,4. Найдите наивероятнейшее число заявок на следующий день и вероятность получения базой 6 заявок.
5. В цехе имеется 80 станков, работающих независимо друг от друга. Для каждого станка вероятность быть включенным равна 0,9. Вычислите вероятность того, что в некоторый момент времени включенными окажутся от 60 до 75 станков.
6. Имеется 9 радиоламп, среди которых 3 неисправных. Наугад берутся 4 радиолампы и проверяются на годность. X – число неисправных радиоламп. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X, вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также начертите ее многоугольник распределения и график функции распределения.
7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \dfrac{a}{x+1} \text{ при } 0 < x \le e-1, \\ 0 \text{ при } x > e-1. \end{cases}$$

Найдите: 1) функцию распределения $F(x)$ и необходимые константы; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; 3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;1)$. Постройте графики функций распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.
8. Автомат изготавливает подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по абсолютной величине не превосходит 0,77 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100, если X распределено нормально, и среднее квадратическое отклонение равно 0,4 мм?

ЧАСТЬ 9. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Задача 1

Дана выборка из значений индекса *EV/Net Income* (показатель, который сравнивает стоимость предприятия с его чистой прибылью) для 100 предприятий данной отрасли.

1. Составьте интервальный вариационный ряд.
2. Вычислите несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.
3. Постройте гистограмму относительных частот.
4. Проверьте гипотезу о нормальном распределении индекса при уровне значимости 5%.
5. Найдите доверительные интервалы для оценки математического ожидания и дисперсии с надежностью: а) 0,8; б) 0,95; в) 0,99.

Вариант 1

5,30	4,46	2,18	2,91	1,47	4,06	2,85	3,86	3,42	4,16
3,16	5,69	1,83	4,34	5,26	3,52	4,14	4,56	3,40	7,03
3,81	4,46	4,12	4,17	1,95	4,09	7,79	6,91	3,30	4,92
2,42	3,91	4,33	1,75	4,42	3,69	3,86	6,28	3,88	4,38
0,94	6,14	4,05	5,32	3,90	4,89	3,28	5,55	3,61	5,55
6,35	5,79	4,41	2,11	3,22	4,58	2,88	4,13	3,61	5,24
6,22	7,15	0,27	3,01	5,09	5,40	5,06	5,16	5,14	3,87
3,55	2,63	1,00	5,55	4,72	5,09	6,15	3,03	4,28	1,91
3,30	2,92	4,83	3,87	3,64	4,60	3,32	2,69	3,33	5,74
5,67	2,87	2,60	2,84	2,88	5,30	3,77	3,25	4,95	5,01

Вариант 2

2,26	2,90	6,63	6,06	3,36	5,81	5,79	2,50	3,93	4,00
5,79	5,37	5,48	2,88	2,85	1,67	1,65	2,74	4,37	3,75
2,97	6,28	4,82	0,31	3,31	6,16	3,07	3,95	7,67	1,75
4,32	8,49	3,35	1,91	4,87	2,51	5,14	5,62	5,08	1,19
5,65	3,55	7,81	5,28	0,91	2,19	3,42	6,21	2,97	2,53
3,78	4,71	1,42	5,33	3,47	3,89	6,13	6,44	2,52	4,21
3,33	2,57	1,81	6,18	3,70	1,48	3,08	4,23	2,51	5,68
4,91	8,79	7,83	4,32	4,76	4,92	5,05	6,11	5,77	2,44
3,05	4,52	6,08	2,77	6,42	2,90	4,46	4,74	3,84	3,24
5,23	6,76	3,63	4,02	3,56	4,57	6,69	3,71	3,88	3,08

Вариант 3

6,42	6,60	4,60	6,76	7,26	4,70	6,43	1,54	3,83	5,82
3,68	3,42	4,68	0,98	5,48	4,55	8,65	6,25	3,94	4,01
3,27	4,81	7,53	4,54	6,90	6,46	2,63	6,00	5,68	3,47
7,06	2,02	7,93	5,07	4,47	1,61	1,36	3,38	3,24	4,96
1,97	2,13	7,56	3,89	3,16	4,50	8,33	5,66	5,40	5,00
4,90	6,13	8,86	2,36	5,39	1,19	5,92	4,60	1,42	3,51
4,82	6,68	3,69	0,45	6,70	1,68	1,47	9,89	7,26	4,25
6,37	4,42	6,60	6,48	2,53	0,79	0,01	4,20	3,83	5,71
4,72	7,93	5,40	6,21	4,71	4,86	4,66	3,37	7,35	6,07
6,07	8,02	8,43	1,78	3,20	7,34	3,75	3,79	3,87	7,62

Вариант 4

5,41	2,68	3,68	7,70	6,90	7,65	3,06	6,82	0,74	3,69
3,85	6,30	4,77	1,48	5,62	4,74	4,79	4,67	1,68	5,46
5,10	6,48	5,73	2,70	4,24	4,71	3,11	7,87	6,42	3,42
3,39	2,39	7,06	2,77	5,57	7,48	2,40	10,09	9,29	3,52
4,68	4,37	2,18	7,48	4,72	4,06	4,97	5,10	6,47	6,21
7,46	5,45	1,95	0,09	8,43	7,32	6,47	6,05	3,03	4,93
0,69	6,84	2,20	5,74	3,14	7,29	6,57	1,65	5,09	3,26
2,33	7,69	1,73	9,17	2,57	6,16	2,25	6,34	1,52	5,40
1,43	2,40	4,44	4,54	8,04	2,95	3,47	5,68	5,96	5,65
3,76	10,28	2,21	5,51	3,82	6,83	3,01	4,97	8,08	5,24

Вариант 5

0,74	4,28	7,10	1,77	9,49	5,48	6,72	5,38	3,47	6,17
7,54	6,06	4,53	3,79	6,31	2,44	7,57	4,12	5,24	8,22
0,81	5,06	5,41	4,36	2,34	4,75	8,39	5,12	6,52	6,20
5,84	5,27	8,18	3,13	6,56	2,86	4,84	7,30	3,17	5,55
4,33	3,24	7,33	5,65	8,96	4,16	1,79	5,98	4,58	4,43
4,38	7,64	7,90	7,04	4,76	4,88	6,57	6,36	2,60	4,76
6,05	5,15	5,86	6,68	13,18	6,46	5,72	2,59	5,71	1,66
4,33	4,64	6,20	3,02	9,42	2,37	6,70	7,13	6,89	6,47
11,10	2,26	3,77	0,02	4,25	7,47	6,02	2,70	2,04	3,97
6,10	4,84	5,46	4,82	4,87	8,79	7,81	2,81	8,01	4,75

Вариант 6

3,62	7,72	4,91	6,72	7,84	5,24	4,55	6,77	5,26	3,89
5,50	0,03	5,39	0,73	6,06	3,56	1,63	3,72	2,00	5,04
6,39	9,68	2,24	7,09	4,54	3,93	2,73	6,04	7,42	5,38
4,92	3,85	8,46	4,66	3,19	1,11	7,60	4,53	6,94	0,26
8,07	1,87	5,94	6,04	4,48	4,77	4,62	3,19	8,79	6,61
7,92	5,99	5,19	6,17	9,70	11,55	5,35	6,92	3,78	7,92
3,62	4,85	1,53	6,68	7,49	3,96	1,66	5,92	4,62	8,21
5,33	3,97	1,92	4,48	4,47	8,37	8,39	2,55	9,04	6,68
5,46	2,55	6,50	7,92	7,25	3,19	8,48	5,53	4,50	6,53
5,54	0,55	4,58	6,33	4,86	2,20	9,39	7,37	4,06	5,03

Вариант 7

6,86	7,32	5,12	2,45	7,30	0,06	4,10	8,11	5,28	6,07
4,95	9,32	5,80	2,37	2,89	6,09	6,46	9,10	3,90	8,39
4,74	2,37	2,46	6,02	8,48	4,34	8,28	5,72	4,68	9,62
4,79	8,59	5,59	5,67	6,07	8,53	5,84	0,40	0,48	2,71
3,88	9,13	2,49	7,44	3,99	8,59	2,06	5,87	3,99	5,83
8,14	4,74	4,73	0,04	3,16	5,05	1,54	3,95	3,34	1,46
1,81	5,81	2,92	1,98	7,42	4,68	8,23	1,29	4,02	3,83
2,49	3,74	5,20	6,84	1,45	6,03	3,98	4,13	3,63	0,01
6,92	2,47	4,30	2,19	3,93	9,23	4,31	5,00	6,85	6,25
4,20	5,58	1,13	5,66	1,10	6,23	8,28	5,26	3,79	1,56

Вариант 8

6,48	9,45	5,35	6,06	2,69	10,99	0,95	3,57	4,48	6,83
0,02	6,26	3,82	3,06	7,06	8,98	10,20	2,22	5,01	12,09
5,01	7,19	2,97	6,81	5,66	2,19	8,52	0,03	3,25	5,70
6,29	6,92	4,77	5,50	3,67	2,60	8,96	6,52	6,06	6,89
5,59	6,43	6,92	5,08	5,32	6,97	5,29	5,60	3,79	2,68
4,69	2,93	5,90	5,66	4,34	2,36	7,03	4,09	3,88	9,38
2,95	5,29	7,57	6,66	4,49	7,28	5,05	9,14	6,50	2,88
7,93	9,60	7,40	9,97	6,38	5,16	4,02	10,27	5,02	3,74
11,30	3,04	5,76	3,47	7,50	5,81	1,93	2,84	6,86	9,15
0,06	10,95	7,87	7,17	5,46	7,01	3,78	4,66	4,54	8,94

Вариант 9

6,62	9,36	7,65	4,54	6,52	4,21	7,34	8,86	2,11	4,34
2,72	5,54	4,64	10,36	8,94	3,25	2,23	5,59	6,36	0,67
7,09	4,40	6,53	8,29	4,78	7,63	4,12	8,40	4,43	1,97
5,14	2,48	4,89	2,05	4,40	7,91	2,26	4,10	7,11	8,64
8,88	4,91	4,72	6,58	4,14	4,47	10,51	4,36	7,99	6,62
3,47	6,14	4,86	13,01	5,67	7,63	6,48	5,36	5,65	3,34
6,60	4,08	11,76	7,70	1,69	6,46	2,31	8,64	4,98	5,04
7,42	10,90	8,38	5,73	7,10	7,85	8,04	1,95	3,64	4,53
8,10	1,02	5,67	1,62	4,42	8,12	3,24	6,47	7,15	3,09
5,91	2,98	7,66	4,22	4,89	9,60	3,45	1,94	7,53	4,61

Вариант 10

3,12	2,38	2,83	2,95	6,39	7,08	6,34	6,85	2,01	9,06
8,85	7,09	7,57	4,96	5,93	7,35	7,90	6,43	4,30	8,36
3,79	7,17	4,51	4,44	7,88	9,18	10,70	3,91	7,42	7,07
8,66	5,31	4,82	6,71	7,94	4,28	4,22	8,64	4,23	5,38
5,62	10,73	3,15	5,79	5,63	7,60	6,49	4,42	6,91	6,13
0,49	3,06	2,18	5,71	3,26	3,16	4,67	7,36	10,56	6,27
5,09	6,75	5,23	3,45	2,15	5,35	7,34	2,23	5,59	7,48
4,62	2,48	7,20	5,03	4,93	7,40	8,44	6,15	3,28	8,89
3,52	1,13	9,07	3,18	6,41	5,46	5,58	9,09	7,97	2,63
6,63	5,42	9,00	6,29	7,74	2,44	5,61	4,01	8,95	6,41

Вариант 11

5,80	6,54	6,72	3,99	4,19	6,44	7,77	6,66	9,82	4,57
4,48	6,08	4,01	7,72	3,15	2,96	5,05	10,73	9,77	4,43
7,54	4,81	6,60	11,98	10,08	7,73	2,17	6,73	7,31	2,72
2,24	8,75	1,96	11,48	9,11	6,34	3,85	5,24	4,83	2,18
4,60	4,07	5,03	3,86	7,56	6,10	2,61	9,08	5,53	6,37
3,60	5,28	8,70	5,28	5,77	2,50	5,37	6,48	4,18	7,23
5,66	5,60	8,72	9,72	3,75	8,79	7,14	9,10	5,78	6,12
10,47	7,70	4,39	6,39	9,36	6,42	4,56	4,19	8,37	7,23
5,68	2,97	7,12	5,99	5,64	3,26	6,85	6,52	5,93	5,78
3,35	5,78	8,66	4,74	3,96	3,63	4,21	4,50	7,21	5,37

Вариант 12

10,53	5,93	7,21	7,48	1,52	0,32	6,42	6,95	3,26	9,83
5,75	8,62	6,77	3,79	8,01	9,34	7,64	4,40	6,74	8,86
6,80	4,00	5,28	5,66	2,77	5,88	7,77	6,20	7,50	3,76
6,87	7,78	8,36	5,10	5,09	3,72	4,64	4,96	3,79	7,83
6,54	5,11	6,41	5,07	3,59	10,14	6,98	8,15	8,33	3,19
8,26	3,44	7,71	6,74	9,84	7,00	6,12	8,65	9,53	4,02
3,53	5,42	5,40	9,20	5,71	7,34	1,10	6,05	8,44	4,58
9,55	7,69	8,13	7,36	7,22	7,85	4,10	8,89	4,72	6,17
9,12	6,83	6,87	4,25	7,08	3,18	7,40	5,42	6,97	6,53
4,42	3,19	7,06	9,34	6,49	7,31	6,77	8,53	8,78	4,41

Вариант 13

9,67	9,41	9,01	4,95	6,24	8,57	7,39	9,66	4,39	5,17
5,54	7,72	6,96	9,14	5,79	10,88	7,59	6,20	4,17	8,62
6,10	2,98	8,44	9,78	5,68	7,77	4,74	7,03	6,92	6,81
10,68	5,26	4,10	5,85	8,31	6,48	10,94	4,63	3,01	4,86
6,90	5,70	7,29	5,95	10,96	7,28	6,04	5,49	7,05	7,31
4,91	8,12	11,00	9,81	7,84	5,81	8,75	7,21	6,06	8,27
6,68	4,83	6,95	6,51	3,10	10,84	4,89	10,30	8,84	4,83
6,62	7,31	4,61	4,77	6,38	4,22	4,86	3,94	7,55	7,57
5,46	2,29	6,38	6,27	9,08	5,06	6,88	5,64	6,09	7,44
2,06	7,21	7,10	6,87	7,89	8,71	4,76	12,40	6,38	4,14

Вариант 14

6,46	4,60	5,34	6,21	6,43	9,25	7,34	5,47	8,60	8,41
8,44	6,46	7,90	9,24	8,43	9,51	5,45	6,41	7,42	7,81
3,26	6,11	5,85	6,13	6,71	8,53	6,31	7,81	7,28	5,05
10,15	9,41	9,68	7,30	10,21	8,80	7,19	7,13	8,66	6,15
5,70	6,84	4,08	8,33	10,99	7,96	8,43	5,92	6,94	8,82
8,25	10,09	7,35	4,27	9,50	9,14	9,22	7,89	6,28	5,10
5,03	6,50	7,02	4,48	5,92	6,36	6,93	7,46	7,53	6,10
8,81	9,92	3,78	8,65	8,77	6,39	6,53	3,87	3,82	5,38
8,22	5,62	6,38	6,50	5,76	5,39	5,69	5,82	6,99	9,79
5,06	5,44	4,51	5,45	7,16	2,21	6,93	9,13	8,80	8,60

Вариант 15

6,46	7,66	6,98	8,19	6,55	3,50	4,75	7,23	3,86	5,48
4,77	5,49	6,67	4,38	5,99	5,32	7,04	7,86	7,61	8,03
9,96	6,02	7,17	3,71	7,88	7,47	7,89	6,76	5,76	9,76
8,77	5,59	3,51	5,83	7,24	9,30	9,32	8,20	8,78	5,35
4,75	8,18	6,58	8,89	5,76	6,17	7,12	9,58	8,00	7,99
4,60	6,70	7,83	7,40	9,02	7,73	7,44	3,63	7,27	5,64
8,50	6,27	7,83	3,95	5,61	5,34	7,48	8,65	4,39	7,28
9,18	4,96	6,37	7,23	7,98	8,44	9,98	6,08	7,21	5,60
10,03	8,85	8,16	8,14	5,22	6,27	5,04	3,24	7,92	8,50
9,91	7,01	8,48	7,56	6,04	8,99	4,35	6,70	6,81	7,96

Вариант 16

8,21	9,10	7,39	4,43	7,11	8,77	7,22	7,93	7,93	6,96
6,24	6,94	6,70	8,44	5,44	7,02	4,89	6,51	7,11	9,83
4,62	7,15	7,27	7,58	7,79	7,22	9,35	6,48	7,90	7,75
6,81	7,02	6,77	7,74	10,51	6,67	6,21	8,88	6,78	6,55
10,34	7,50	8,08	8,47	4,85	8,25	8,12	4,25	8,46	5,63
3,83	5,04	6,08	5,26	6,63	7,45	7,12	5,38	10,23	8,19
9,05	7,24	7,25	6,40	7,10	9,12	8,30	5,95	7,88	7,12
8,25	7,60	7,05	7,82	7,45	8,90	8,54	4,59	7,40	9,04
7,37	7,65	6,11	7,26	7,73	7,43	8,46	9,55	6,63	9,31
5,97	6,13	5,50	6,85	7,64	6,12	8,60	6,64	6,25	10,05

Вариант 17

8,14	7,40	5,92	6,05	8,16	3,96	7,00	5,73	7,35	7,56
5,69	5,86	8,71	6,83	7,54	6,67	6,48	6,01	6,27	7,14
7,57	7,06	7,93	6,18	7,25	7,46	6,88	7,27	5,94	6,85
6,80	6,70	8,05	7,24	6,71	8,56	8,35	8,28	7,26	7,76
7,36	8,12	8,57	6,44	5,72	6,52	4,28	8,38	9,27	7,01
7,30	6,88	8,95	5,36	5,82	9,78	7,24	7,58	7,96	6,39
6,88	7,13	4,80	5,17	5,36	8,14	5,45	6,48	4,95	9,46
7,09	7,01	6,57	7,25	8,70	5,35	7,80	6,10	4,09	6,68
7,69	8,25	7,04	5,33	7,04	7,78	9,29	7,61	7,36	6,20
7,10	8,21	9,44	8,09	6,71	8,55	5,08	8,54	7,40	3,48

Вариант 18

11,12	8,32	6,07	8,68	8,34	8,02	7,22	9,12	8,17	5,99
7,68	9,33	7,89	7,52	9,11	7,18	6,54	7,86	8,60	5,46
7,47	8,79	8,00	7,46	9,32	8,30	9,10	7,83	8,28	7,93
7,74	9,53	6,38	8,45	8,51	7,22	8,04	8,90	8,28	8,17
9,05	7,23	7,66	5,90	8,32	6,81	5,68	7,19	7,36	9,62
7,34	8,11	8,90	6,96	9,93	6,50	8,29	7,10	6,56	7,30
9,24	7,40	8,78	7,56	7,34	7,32	9,87	7,49	8,23	9,34
9,77	8,31	7,73	7,31	8,78	8,96	8,09	8,55	8,22	10,21
6,95	7,39	7,00	10,06	6,23	8,11	5,35	7,65	8,06	7,21
9,60	9,12	8,04	8,86	8,31	6,60	8,29	9,67	8,30	9,22

Вариант 19

7,59	7,51	7,39	7,07	9,70	8,92	8,74	7,32	7,23	6,81
6,60	7,41	6,76	7,75	7,99	7,52	7,18	7,06	7,57	7,46
8,56	7,42	6,50	7,18	8,84	6,55	7,32	7,70	7,57	7,97
8,74	9,34	7,07	7,25	6,94	6,68	8,31	6,99	8,34	7,69
9,05	9,47	9,02	6,94	8,03	7,30	7,50	8,37	7,21	8,57
8,38	7,82	8,92	8,25	8,59	8,42	6,57	7,32	8,53	7,21
7,23	8,00	8,11	6,10	9,45	8,34	8,40	7,90	7,78	9,41
8,81	9,71	7,48	8,57	7,61	6,74	7,13	8,55	8,27	8,43
7,99	8,04	9,10	7,57	9,17	7,34	8,53	7,48	7,98	8,00
8,60	8,80	8,48	8,61	6,97	8,88	9,41	8,35	8,11	8,82

Вариант 20

7,56	9,04	9,51	8,30	8,19	7,58	7,70	6,73	8,99	8,52
7,65	8,10	7,89	8,21	7,88	9,33	7,68	7,66	9,28	7,64
7,62	8,23	8,00	8,03	6,38	8,60	9,37	7,81	7,35	8,20
7,76	8,60	8,61	9,11	7,91	7,96	8,53	8,95	7,63	8,41
8,07	8,00	8,25	8,48	7,33	8,01	8,75	8,53	10,98	7,10
7,60	8,15	6,87	8,14	7,89	6,73	7,61	7,79	7,57	6,36
9,35	8,54	8,28	7,90	8,12	7,00	7,29	7,65	7,73	6,89
8,51	7,49	7,86	9,04	8,62	7,79	7,44	7,52	7,65	8,18
8,75	7,30	8,71	6,69	7,69	8,47	8,69	8,39	8,26	7,51
7,84	8,14	7,73	9,46	6,18	7,99	8,49	8,06	6,88	8,79

Вариант 21

7,48	7,91	7,85	8,31	7,64	6,90	8,17	7,08	7,64	8,70
8,03	8,47	6,82	7,65	8,08	6,97	9,06	7,46	8,52	8,43
8,36	7,24	8,68	7,82	7,38	6,06	8,07	7,28	9,13	7,12
7,80	8,68	7,96	8,43	8,02	8,95	7,06	8,58	7,28	7,12
8,10	7,62	8,19	7,68	8,14	8,50	7,58	7,61	7,74	7,57
8,10	7,99	7,98	7,90	7,06	9,80	8,19	7,76	8,29	7,60
8,40	8,57	8,53	7,19	7,56	7,46	8,01	8,21	7,51	8,91
8,08	8,41	7,86	9,24	8,37	8,19	7,62	7,97	8,69	6,70
8,82	7,47	7,43	8,14	7,60	8,17	7,71	8,46	7,82	6,39
7,89	8,43	7,90	8,09	8,75	8,69	9,08	7,56	9,04	8,77

Вариант 22

7,13	8,08	8,17	8,57	7,30	8,78	8,96	6,76	7,99	8,25
7,90	7,55	7,79	7,65	8,63	8,25	8,37	7,54	7,11	8,12
8,83	8,52	8,93	7,90	8,76	7,91	7,86	8,06	8,46	8,16
8,72	8,74	7,39	9,07	7,64	7,60	7,65	7,98	6,95	7,65
8,37	8,20	8,03	8,13	6,71	8,59	7,36	8,88	8,17	7,45
7,73	6,79	8,22	8,34	7,45	7,91	9,36	8,24	7,56	8,11
8,78	6,90	8,07	8,38	7,87	8,16	7,91	7,29	7,39	8,22
7,81	7,30	8,25	8,43	7,85	7,70	7,16	8,55	7,20	8,24
8,42	8,02	7,89	8,20	6,86	8,72	7,27	8,30	7,92	8,01
8,11	8,38	7,16	8,58	7,79	7,88	7,41	8,65	7,35	7,66

Вариант 23

8,82	9,79	8,13	9,12	10,07	9,19	8,76	9,47	9,10	9,15
9,75	8,68	9,33	9,09	8,31	8,50	8,41	8,10	8,64	8,56
9,32	9,23	10,25	9,05	8,82	8,88	9,39	9,65	9,25	8,80
9,05	7,93	8,75	9,58	9,02	10,17	8,96	8,53	8,67	9,03
9,64	9,32	8,78	8,65	10,01	8,44	8,94	9,18	8,46	8,41
8,53	8,56	9,62	9,04	9,19	8,46	8,95	8,89	8,72	9,17
8,76	8,11	8,32	9,02	8,87	8,78	9,27	9,24	8,26	9,48
8,34	9,02	8,54	8,84	9,27	8,81	9,62	9,21	8,90	8,34
8,70	9,00	9,38	9,44	8,93	9,22	9,06	8,95	8,94	9,61
8,88	9,15	9,00	9,41	9,25	9,35	9,51	8,41	8,89	8,95

Вариант 24

8,47	9,09	8,25	9,61	8,95	8,75	8,79	8,80	9,17	9,60
7,92	9,58	9,39	9,22	8,84	8,82	8,64	9,70	8,10	9,18
8,15	9,43	9,25	9,00	10,08	8,96	9,22	9,32	9,03	8,73
9,15	8,66	7,81	8,35	8,93	10,18	9,25	8,78	9,36	8,64
8,56	9,51	8,62	8,87	9,40	8,72	9,15	9,36	8,80	8,39
10,66	8,60	9,35	9,85	8,41	9,60	9,20	8,72	8,69	8,14
8,93	8,34	9,00	9,91	8,92	8,50	8,72	9,47	9,67	8,93
8,75	9,90	8,74	9,19	9,53	7,95	9,46	9,48	8,67	9,13
9,59	9,49	8,61	8,93	8,80	8,63	9,60	9,23	9,04	8,76
8,93	8,57	8,86	9,32	8,07	9,29	9,19	8,46	9,71	8,92

Вариант 25

9,51	8,43	9,44	9,41	9,52	8,78	9,76	9,17	8,25	9,69
8,57	8,88	8,71	8,99	8,60	8,68	8,63	9,01	9,54	8,19
9,07	7,78	8,18	8,64	8,05	8,58	9,72	9,47	8,82	10,10
9,51	9,29	10,04	8,29	9,46	9,13	8,88	8,31	8,99	9,57
9,96	9,70	9,23	8,59	9,48	8,87	8,50	8,44	8,76	9,45
9,64	9,78	9,19	8,56	8,44	8,91	8,94	8,99	9,23	7,72
9,48	9,46	9,31	8,98	8,77	9,22	8,54	9,22	10,14	8,91
9,77	9,00	8,98	9,83	10,33	9,08	8,00	9,04	9,53	8,78
9,21	8,96	7,98	8,29	9,23	9,24	7,98	9,00	9,29	9,30
10,15	8,46	8,92	8,91	8,99	9,72	7,28	9,48	9,19	8,88

Задача 2

Дана корреляционная таблица (X – основные производственные фонды (млн. руб.), Y – выпускаемая продукция (млн. руб.)).

Найдите выборочные уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y.

Изобразите на координатной плоскости точки выборки $(x_i,\ y_i)$, укажите частоты, с которыми эти точки встречаются в выборке. Постройте в этой же системе координат графики выборочных уравнений регрессии. Проверить гипотезу существования связи между X и Y.

Вариант 1

Y \ X	1	3	5	7	9	11
10	3	3				
20		5	4			
30			40	2	8	
40			5	10	6	
50				4	7	3

Вариант 2

Y \ X	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0
12	1	5				
17		5	3			
22			3	40	12	
27			2	10	5	
32				3	4	7

Вариант 3

Y \ X	1	3	4	7	9	11
1,0	2	4				
2,5		4	5			
4,0			23	16	9	
5,5			6	10	7	
7,0				4	7	3

Вариант 4

Y \ X	2	4	6	8	10	12
2	4	2				
7		5	3			
12			5	45	5	
17			2	8	7	
22				4	7	3

Вариант 5

Y \ X	12	15	18	21	24	27
4	2	4				
6		6	3			
8			6	45	4	
10			2	8	6	
12				4	7	3

Вариант 6

Y \ X	5	15	25	35	45	55
1	2	4				
16		6	2			
31			3	50	2	
46			1	10	6	
51				4	7	3

Вариант 7

Y \ X	5	10	15	20	25	30
10	2	4				
20		3	7			
30			5	30	10	
40			7	10	8	
50				5	6	3

Вариант 8

Y \ X	10	20	30	40	50	60
5	5	1				
15		6	2			
25			5	40	5	
35			2	8	7	
45				4	7	8

Вариант 9

Y \ X	5	10	15	20	25	30
2	1	5				
12		5	3			
22			9	40	2	
32			4	11	6	
42				4	7	3

Вариант 10

Y \ X	1	6	11	16	21	26
10	4	2				
20		6	4			
30			6	45	2	
40			2	8	6	
50				4	7	4

Вариант 11

Y \ X	2	6	10	14	18	22
1	3	5				
16		4	4			
31			7	35	8	
46			2	10	8	
61				5	6	3

Вариант 12

Y \ X	1	6	11	16	21	26
5	1	4				
15		7	3			
25			2	50	2	
35			1	10	6	
45				4	7	3

Вариант 13

Y \ X	3	7	11	15	19	23
5	2	6				
16		5	3			
27			7	40	2	
38			4	9	6	
49				4	7	5

Вариант 14

Y \ X	2	7	12	17	22	27
1	2	3				
16		4	5			
31			5	35	5	
46			2	8	17	
61				4	7	3

Вариант 15

Y \ X	5	10	15	20	25	30
5	3	4				
25		6	3			
45			6	35	2	
65			12	8	6	
85				4	7	4

Вариант 16

Y \ X	6	16	26	36	46	56
10	4	1				
14		6	4			
18			2	50	2	
22			1	9	7	
26				4	3	7

Вариант 17

Y \ X	1	3	5	7	9	11
2					3	3
12				4	5	
22		8	2	40		
32		6	10	5		
42	3	7	4			

Вариант 18

Y \ X	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0
4					5	1
15				3	5	
26		12	40	3		
37		5	10	2		
48	7	4	3			

Вариант 19

Y \ X	2	4	6	8	10	12
2					2	4
7				3	5	
12		5	45	5		
17		7	8	2		
22	3	7	4			

Вариант 20

Y \ X	12	15	18	21	24	27
4					4	2
6				3	6	
8		4	45	6		
10		6	8	2		
12	3	7	4			

Вариант 21

Y \ X	5	15	25	35	45	55
1					4	2
16				2	6	
31		2	50	3		
46		6	10	1		
51	3	7	4			

Вариант 22

Y \ X	5	10	15	20	25	30
10					4	2
20				7	3	
30		10	30	5		
40		8	10	7		
50	3	6	5			

Вариант 23

Y \ X	10	20	30	40	50	60
5					1	5
15				2	6	
25		5	40	5		
35		7	8	2		
45	8	7	4			

Вариант 24

Y \ X	5	10	15	20	25	30
2					5	1
12				3	5	
22		2	40	9		
32		6	11	4		
42	3	7	4			

Вариант 25

Y \ X	3	9	11	15	19	23
2					5	3
17				4	4	
32		8	35	7		
47		8	10	2		
62	3	6	5			

Задача 3

Три эксперта оценили инвестиционную привлекательность десяти компаний, в результате чего были получены три последовательности рангов (в первой строке приведены ранги эксперта А, во второй – ранги эксперта В, в третьей – ранги эксперта С). Определить, как согласуются оценки экспертов, используя выборочные коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла. Значимость коэффициентов корреляции проверить на уровне $\alpha = 0,05$.

Вариант 1

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	3	10	7	2	8	5	6	9	1	4
z_i:	6	2	1	3	9	4	5	7	10	8

Вариант 2

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	3	2	7	10	8	5	6	4	1	9
z_i:	1	3	6	4	7	2	5	8	10	9

Вариант 3

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	3	10	7	2	5	8	6	9	1	4
z_i:	1	2	6	3	9	4	5	7	10	8

Вариант 4

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	6	2	1	3	9	4	5	7	10	8
z_i:	3	7	4	2	8	5	6	9	1	10

Вариант 5

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	3	2	7	8	10	5	6	9	1	4
z_i:	1	2	3	6	9	4	5	7	10	8

Вариант 6

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	2	6	1	3	9	5	7	4	10	8
z_i:	3	2	7	8	10	5	9	1	6	4

Вариант 7

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	1	2	3	8	7	5	6	9	10	4
z_i:	3	9	7	4	10	5	2	1	6	8

Вариант 8

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	3	8	7	1	10	5	6	9	2	4
z_i:	6	2	3	4	9	1	5	7	10	8

Вариант 9

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	2	10	7	3	1	5	6	9	8	4
z_i:	4	2	1	3	9	6	5	7	10	8

Вариант 10

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	5	10	7	2	8	1	6	9	3	4
z_i:	5	2	1	3	8	4	6	7	10	9

Вариант 11

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	9	10	7	2	8	5	6	3	1	4
z_i:	4	2	6	3	9	1	5	7	10	8

Вариант 12

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	4	2	1	10	8	5	6	3	7	9
z_i:	1	8	2	4	7	6	5	3	10	9

Вариант 13

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	3	10	7	5	2	8	6	9	1	4
z_i:	4	2	6	3	9	1	5	7	10	8

Вариант 14

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	6	2	1	7	9	4	5	3	10	8
z_i:	3	7	2	4	8	5	6	10	1	9

Вариант 15

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	2	3	8	10	7	5	6	9	1	4
z_i:	1	2	3	6	4	9	5	7	10	8

Вариант 16

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	2	3	6	1	9	5	7	4	10	8
z_i:	3	2	10	8	7	5	9	1	6	4

Вариант 17

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	1	2	3	7	8	5	6	9	4	10
z_i:	3	9	7	4	10	2	5	1	6	8

Вариант 18

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	2	3	7	1	10	5	6	9	8	4
z_i:	6	2	1	4	9	3	7	5	10	8

Вариант 19

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	10	3	7	2	1	5	6	9	8	4
z_i:	3	2	1	4	9	6	5	7	10	8

Вариант 20

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	5	3	7	2	8	1	6	9	10	4
z_i:	7	1	5	3	8	4	6	2	10	9

Вариант 21

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	3	1	7	2	8	5	6	9	10	4
z_i:	6	2	1	3	5	4	8	7	10	9

Вариант 22

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	3	2	7	10	8	5	6	9	4	1
z_i:	1	3	5	4	7	2	6	8	10	9

Вариант 23

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	3	10	2	7	5	8	6	1	9	4
z_i:	1	2	6	4	9	3	5	7	10	8

Вариант 24

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	5	2	1	3	9	4	6	7	10	8
z_i:	1	7	4	2	8	5	6	9	3	10

Вариант 25

x_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i:	3	2	1	8	10	7	6	9	5	4
z_i:	7	6	3	2	9	4	5	1	10	8

ЧАСТЬ 10. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Вариант 1

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 2x + y$, если дано уравнение связи $x + y = 1$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Малое предприятие производит кондитерские изделия трех видов: торты, пирожное и кексы. Для их производства используется сахар, мука и дополнительные ингредиенты. Нормы расхода сырья (в г) на 100 г каждого вида продукции, запасы сырья, имеющиеся на складе, даны в таблице. От реализации 1 кг тортов предприятие получает прибыль в размере 100 руб., пирожных – 90 руб. и кексов – 50 руб. Известно, что спрос на торты в течение месяца не превосходит 40 кг, а на пирожное спрос не превышает 60 кг. На кексы спрос не бывает менее 50 кг. Составить план производства продукции на месяц, дающий при реализации наибольшую прибыль.

Вид изделия	Расход сырья, г/100 г		
	сахар	мука	дополнительные ингредиенты
Торт	40	30	30
Пирожное	30	50	20
Кекс	50	20	30
Запасы сырья, кг	5000	3000	1000

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = x_1 + 2x_2,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 56, \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 4. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 6x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 ,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = -2x_1 + x_2,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 20, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ \text{целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j

$$a_1 = 30, a_2 = 35, a_3 = 15, b_1 = 20, b_2 = 20, b_3 = 20, b_4 = 20, C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Фирма должна выполнить 5 заказов. В настоящее время имеется всего 4 свободных работника, каждый из которых может выполнять только один заказ. Дана матрица эффективностей выполнения каждым работником каждого из заказов. Каким образом следует распределить работников по выполняемым заказам для получения наибольшей эффективности?

1	4	3	7	1
7	3	7	1	6
1	6	7	9	2
1	4	6	7	1

Вариант 2

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 2x + y$, если дано уравнение связи $2x + y = 1$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Для откорма животных на ферме в их еженедельный рацион необходимо включить не менее 33 единиц питательного вещества А, 23 единицы питательного вещества В и 12 единиц питательного вещества С. Для откорма используются три вида кормов. Данные о содержании питательных веществ в одной весовой единице каждого корма и стоимость одной весовой единицы каждого из кормов даны в таблице.

Вид корма	Питательные вещества			Стоимость единицы корма (руб.)
	A	B	C	
I	4	3	1	20
II	3	2	1	20
III	2	1	2	10

Составьте наиболее дешевый рацион при необходимом количестве питательных веществ А, В и С.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

$$z = 2x_1 - x_2,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 0, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 7x_1 + x_3 - x_4 + x_5,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_k \ge 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.

б) Решите данную задачу графически.

в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = 2x_1 - x_2 - 2x_3,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \le 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \ge -4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ \text{целые}.$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 30, a_2 = 40, a_3 = 30, b_1 = 25, b_2 = 25, b_3 = 25, b_4 = 25, C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

8. Фирма должна выполнить 4 заказа. В настоящее время имеется 5 свободных работников, каждый из которых может выполнять только один заказ. Дана матрица эффективностей выполнения каждым работником каждого из заказов. Каким образом следует распределить работников по выполняемым заказам для получения наибольшей эффективности?

1	3	4	2
5	6	1	3
6	1	2	6
3	5	1	1
4	5	2	3

Вариант 3

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 4x + y$, если дано уравнение связи $2x - 3y = 2$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Из листового проката определенной формы необходимо вырезать некоторое количество заготовок двух типов (А и В) для производства 90 штук изделий. Для одного изделия требуется две заготовки типа А и 10 – типа В. Возможны четыре варианта раскроя одного листа проката. Количество заготовок А и В, вырезаемых из одного листа при каждом варианте раскроя, и отходы от раскроя даны в таблице.

№ варианта раскроя	Заготовки (шт.)		Отходы от раскроя (ед.)
	А	В	
1	4	0	12
2	3	3	5
3	1	9	3
4	0	12	0

Как нужно раскроить листы, чтобы отходы были минимальны?

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = 2x_1 + x_2,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq -1, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 3x_1 + x_3 - 2x_4 + x_5,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \end{cases}$$
$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = -2x_1 + x_3,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \le 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 20, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 45, a_2 = 25, a_3 = 50, b_1 = 30, b_2 = 30, b_3 = 30, b_4 = 30, C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. В распоряжении некоторой компании имеется 5 торговых точек и 4 продавца. Из прошлого опыта известно, что эффективность работы продавцов в различных торговых точках неодинакова. Объемы продаж каждого продавца в каждой торговой точке даны в таблице. Как следует назначить продавцов по торговым точкам, чтобы достичь максимального объема продаж?

4	3	5	6	1
3	6	3	2	1
1	3	1	2	7
5	6	5	5	3

Вариант 4

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x + y$, если дано уравнение связи $3x + 2y = 4$.

2. Составьте математическую модель задачи.

В обработку поступили две партии досок для изготовления деталей табуретов, причем первая партия содержит 100 досок длиной по 1,5 м каждая, вторая содержит 300 досок длиной по 1,2 м каждая. Комплект для изготовления одного табурета состоит из двух деталей по 0,5 м длиной и четырех деталей длиной по 0,6 м. Как распилить все доски, чтобы получить наибольшее число табуретов? Остальные детали для изготовления табуретов имеются в неограниченном количестве.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = 2x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 11, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 3x_2 \leq 0. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 5x_2 + x_3 - x_4 + x_5,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0, \; k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.

б) Решите данную задачу графически.

в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\max\ z = x_1 - 2x_2 + 2x_3,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 \le 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 8, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{целые}.$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 30, a_2 = 40, a_3 = 30, b_1 = 27, b_2 = 23, b_3 = 16, b_4 = 32, C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Фирме необходимо заполнить 4 вакантных должности, на которые имеются 5 претендентов. Каждый из них может занять любую, но одну из предлагаемых должностей. В силу многих обстоятельств (способности, образование, опыт, коммуникабельность и т.п.) полезность каждого кандидата для фирмы зависит от должности, на которую он будет назначен. Пусть возможный доход фирмы за конкретный промежуток времени при принятии претендента на должность известен (см. таблицу). Определить такое назначение работников на должности, при котором фирма будет иметь наибольший доход.

6	2	4	10
4	7	5	8
1	2	7	3
3	5	8	9
1	5	3	2

Вариант 5

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 4x^2 + 2y^2 + 3xy - 4x + 2y$, если дано уравнение связи $3x + 2y = 4$.

2. Составьте математическую модель задачи.

В мастерской освоили производство столов и тумбочек. На их изготовление расходуется два вида древесины: I типа – 72 м^3, и II типа – 56 м^3. На каждое изделие требуется того и другого вида древесины в м^3:

	I	II
Стол	0,18	0,08
Тумбочка	0,09	0,28

Известно, что спрос на тумбочки не превышает 30 штук в месяц. От производства одного стола получается чистого дохода 11 000 руб., а одной тумбочки – 7 000 руб. Сколько столов и тумбочек нужно произвести из имеющегося материала в течение месяца, чтобы получить наибольшую прибыль?

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = 4x_1 + 2x_2,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 10. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 7x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5,$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 12, \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 18, \end{cases}$$
$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = 2x_1 - x_2 - 2x_3,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \le 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \le 4, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 \le 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{целые}.$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 32, a_2 = 26, a_3 = 42, b_1 = 25, b_2 = 20, b_3 = 35, b_4 = 20, C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

8. В цехе предприятия имеются 5 универсальных станков, которые могут выполнять 4 вида работ. Каждую работу единовременно может выполнять только один станок, и каждый станок можно загружать только одной работой. В таблице даны затраты времени при выполнении станком определённой работы. Определите наиболее рациональное распределение работ между станками, минимизирующее суммарные затраты времени.

7	4	9	1	6
1	5	1	8	11
1	6	3	4	5
1	4	7	8	9

Вариант 6

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 3x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 2y$, если дано уравнение связи $x + 3y = 1$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Для изготовления двух видов мебели используется 3 типа сырья, запасы которого и нормы расхода на единицу продукции заданы в таблице.

Вид мебели	Тип сырья			Прибыль (тыс. руб.)
	I	II	III	
I	4	1	2	20
II	1	2	3	35
Запасы сырья, ед.	50	25	40	

Зная прибыль от реализации каждого вида продукции, составить план производства мебели, при котором прибыль максимальна.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

$$z = x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \ge -6. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \end{cases}$$

$$x_k \ge 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\max\ z = x_1 - 2x_2 + 2x_3,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ \text{целые}.$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 25, a_2 = 30, a_3 = 27, b_1 = 10, b_2 = 25, b_3 = 20, b_4 = 10, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Имеется 5 работ и 4 исполнителя. Назначение каждого работника на каждую работу связано с затратами, которые приведены в таблице. Требуется найти назначение кандидатов на все работы, дающее минимальные суммарные затраты. При этом каждого кандидата можно назначать только на одну работу и каждая работа может быть занята только одним кандидатом.

7	9	4	7	4
5	8	7	4	3
9	5	9	9	7
3	3	1	7	8

Вариант 7

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 2x^2 - y^2 + 3xy + x - 7y$, если дано уравнение связи $x - 2y = 1$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. Имеется 10 000 клеток. В одной клетке могут жить либо две лисицы, либо один песец. По плану на ферме должно быть не менее 3 000 лис и не менее 6 000 песцов. В одни сутки каждой лисе необходимо давать 4 единицы корма, а каждому песцу – 5 единиц. Ферма ежедневно может иметь не более 200 000 единиц корма. От реализации одной шкурки лисицы ферма получает прибыль в 100 000 руб., а песца – 50 000 руб. Какое количество лисиц и песцов нужно держать на ферме для получения наибольшей прибыли?

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = 2x_1 + 3x_2,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 4. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5,$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 26, \end{cases}$$
$$x_k \geq 0, \ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = 2x_1 - x_2 - 3x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \ge -5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 10, a_2 = 15, a_3 = 20, b_1 = 5, b_2 = 15, b_3 = 10, b_4 = 20, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Отдел кадров рассматривает четырех претендентов на выполнение пяти видов работ. Ежемесячная зарплата при выполнении различных видов работ показана в таблице. Определите оптимальное для работодателя распределение претендентов.

1	4	3	7	1
7	3	7	1	6
1	6	7	9	2
1	4	6	7	1

Вариант 8

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 3x^2 + 2y^2 - 5xy + 4x + y$, если дано уравнение связи $x - 2y = 1$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Одной из ученических бригад выделили два участка земли в 8 га и в 9 га под посевы пшеницы и кукурузы. Средняя урожайность по участкам и культурам отражена в таблице (в ц на 1 га):

	I	II
Пшеница	16	14
Кукуруза	35	30

За 1 ц пшеницы получают 25 т.руб., за 1 ц кукурузы – 14 т.руб. Сколько гектаров и на каких участках необходимо отвести под каждую культуру, чтобы получить наибольшую сумму от реализации продукции, если по плану надо собрать не менее 150 ц пшеницы и 220 ц кукурузы?

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = x_1 + x_2,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 11, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$
$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = 2x_1 - 3x_2 + x_3,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 \ge -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{целые}.$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 20, a_2 = 15, a_3 = 10, b_1 = 10, b_2 = 15, b_3 = 15, b_4 = 10, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Служба занятости имеет в наличии 5 вакантных мест по родственным специальностям, на которые претендуют 4 человека. Проведено тестирование претендентов, результаты которого в виде баллов представлены в матрице. Как распределить претендентов на вакантные места таким образом, чтобы суммарное количество баллов было наибольшим?

8	10	4	9	1
5	8	1	8	3
7	1	9	10	7
3	2	1	7	8

Вариант 9

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 3x^2 + 3y^2 - 5xy + 4x + 5y$, если дано уравнение связи $2x - 2y = 1$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Для изготовления определенного изделия требуется три планки – одна размером 1,2 м и две по 1,5 м каждая. Для этой цели можно использовать имеющийся запас реек – 400 штук, длиной по 5 м каждая, и 100 штук, длиной по 6,5 м каждая. Определите, как разрезать все эти рейки, чтобы получить наибольшее количество изделий.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

$$z = x_1 - 3x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 5x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_k \ge 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = -2x_1 + x_3,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 20, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 10, a_2 = 15, a_3 = 35, b_1 = 20, b_2 = 15, b_3 = 10, b_4 = 5, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

8. Пусть имеется 5 сотрудников фирмы, которых необходимо закрепить за выполнением четырех работ. Известны стоимости назначения каждого из сотрудников на каждую работу. На какую работу следует назначить сотрудников для достижения наименьшей суммарной стоимости?

8	10	4	9	1
5	8	1	8	3
7	1	9	10	7
3	2	1	7	8

Вариант 10

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 3x^2 + 3y^2 + 4xy + 4x + 5y$, если дано уравнение связи $x - y = 3$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Необходимо составить наиболее дешевую смесь из трех веществ. В состав смеси должно входить не менее 6 единиц химического вещества A, не менее 8 единиц вещества B и не менее 12 единиц вещества C. Имеется три вида продуктов (I, II, III), содержащих эти химические вещества в следующих пропорциях:

	A	B	C
I	2	1	3
II	1	2	4
III	3	1,5	2

Стоимость одной весовой единицы продукта I – 200 руб., продукта II – 300 руб., продукта III – 250 руб.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = 2x_1 - x_2,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \geq -1. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = x_1 + x_3 + x_4 + x_5,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 17, \end{cases}$$
$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.

б) Решите данную задачу графически.

в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = x_1 - 4x_2 + x_3,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 \le 9, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 32, a_2 = 26, a_3 = 15, b_1 = 25, b_2 = 20, b_3 = 20, b_4 = 10, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Для реализации проекта были отобраны 5 разработчиков, разбирающихся в различных областях. Есть сведения об эффективности владения каждой из четырех применяемых в проекте технологий для каждого разработчика. Как оптимально назначить ответственных за технологии, если один разработчик может отвечать только за одну технологию?

1	6	7	1	10
7	2	1	5	7
3	7	3	6	7
8	3	1	2	11

Вариант 11

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 3x^2 + 2y^2 - 4xy - 3x + 5y$, если дано уравнение связи $2x + 3y = 6$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Для нарезки заготовок длиной 20, 25 и 30 см используются прутки длиной 75 см. Требуется за смену нарезать заготовок длиной 20 – 300 шт., длиной 25 – 270 шт., длиной 30 – 350 шт. Количество заготовок, которое можно нарезать из одного прутка по различным вариантам разрезки, приведено в таблице. При каждом варианте разрезки будут оставаться концевые остатки.

№ заготовки	Длина заготовки	№ варианта раскроя					
		1	2	3	4	5	6
1	20 см	3	1	1	0	2	0
2	25 см	0	2	1	0	0	3
3	30 см	0	0	1	2	1	0

Требуется определить, какое число прутков необходимо нарезать различными вариантами, чтобы число заготовок соответствовало заданной программе, и при этом общая длина всех концевых остатков была бы минимальной.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = x_1 + x_2,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \geq -1. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4,$$

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\quad + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 7, \\ -x_1 \qquad\quad + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\max\ z = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{целые}.$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 25, a_2 = 32, a_3 = 10, b_1 = 17, b_2 = 20, b_3 = 13, b_4 = 20, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

8. Пусть имеется 5 сотрудников фирмы, которых необходимо закрепить за выполнением четырех работ. Известны производительности каждого из сотрудников по каждой работе. На какую работу следует назначить сотрудников для получения наибольшей суммарной производительности?

8	3	2	4	2
5	1	4	3	7
7	9	6	7	4
9	10	2	9	7

Вариант 12

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 2x^2 - y^2 + 3xy + 4x + y$, если дано уравнение связи $2x + 3y = 6$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Бригада должна засеять два участка земли в 7 га и в 10 га пшеницей и кукурузой. Средняя урожайность по участкам и культурам отражена в таблице (в ц на 1 га):

	I	II
Пшеница	10	8
Кукуруза	25	30

За 1 ц пшеницы получают 100 т.руб., за 1 ц кукурузы – 40 т.руб. Сколько гектаров и на каких участках необходимо отвести под каждую культуру, чтобы получить наибольшую сумму от реализации продукции, если по плану надо собрать не менее 250 ц пшеницы и 200 ц кукурузы?

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = -7x_1 - 4x_2,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = x_2 - 6x_3 + x_4 - 3x_5,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 3, \end{cases}$$
$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\max\ z = 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 13, \\ 2x_1 \quad - x_2 + x_3 \le 2, \\ 3x_1 \quad - x_2 - x_3 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 30, a_2 = 30, a_3 = 40, b_1 = 32, b_2 = 26, b_3 = 15, b_4 = 17, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Пусть для монтажа пяти объектов требуется 5 кранов. Нужно так распределить краны по объектам, чтобы суммарное время для монтажа было минимальным. В таблице приведены затраты времени каждого крана на монтаж каждого объекта.

7	3	8	1	7
5	7	3	3	1
6	4	6	9	3
8	11	7	1	5
9	10	3	2	1

Вариант 13

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 2x^2 - 3y^2 + 4xy + x - 5y$, если дано уравнение связи $x - 3y = 6$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь – 100 единиц, труд – 120 единиц, тяга – 80 единиц. Хозяйство производит четыре вида продукции: $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. Затраты на производство единицы каждого вида продукции и доход от их производства указаны в таблице:

Продукция	Затраты на ед. продукции			Доход
	площадь	труд	тяга	
$П_1$	2	2	2	1
$П_2$	3	1	3	4
$П_3$	4	2	1	3
$П_4$	5	4	1	5

Организовать производство так, чтобы получить максимальный доход.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = x_1 - 2x_2,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 \leq 4. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 15, \end{cases}$$
$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = x_1 - x_2 - 2x_3,$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 23, a_2 = 40, a_3 = 15, b_1 = 30, b_2 = 30, b_3 = 40, b_4 = 20, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Пусть имеется 5 сотрудников фирмы, которых необходимо закрепить за выполнением четырех работ. Известны производительности каждого из сотрудников по каждой работе. На какую работу следует назначить сотрудников для получения наибольшей суммарной производительности?

7	9	4	7	4
5	8	7	4	3
9	5	9	9	7
3	3	1	7	8

Вариант 14

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = x^2 - 3y^2 - 2xy + 5x + y$, если дано уравнение связи $3x - 5y = 6$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Производятся изделия А и В, при изготовлении которых используются два типа технологического оборудования α и β. На производство единицы изделия А оборудование α используют 2 ч, а β – 1 ч. На производство единицы изделия В оборудование α используют 1 ч, а β – 2 ч. Администрация на изготовление изделий может выделить оборудование α на 10 ч, а оборудование β – на 8 ч.
Спланировать производство изделий А и В так, чтобы общая прибыль была наибольшая, если от реализации единицы изделия А прибыль равна 500руб., В – 200 руб.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = -2x_1 + 3x_2,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ -5x_1 + x_2 \leq -1, \\ x_1 - 3x_2 \leq 1. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 2x_2 + x_4 - 3x_5,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 6, \end{cases}$$
$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = x_1 - 2x_2 - 5x_3,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{целые}.$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 17, a_2 = 20, a_3 = 13, b_1 = 10, b_2 = 5, b_3 = 10, b_4 = 15, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

8. В распоряжении некоторой компании имеется 5 торговых точек и 4 продавца. Из прошлого опыта известно, что эффективность работы продавцов в различных торговых точках неодинакова. Объемы продаж каждого продавца в каждой торговой точке даны в таблице. Как следует назначить продавцов по торговым точкам, чтобы достичь максимального объема продаж?

7	4	9	1	6
1	5	1	8	11
1	6	3	4	5
1	4	7	8	9

Вариант 15

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 2x^2 + 3y^2 - 6xy + x + 6y$, если дано уравнение связи $3x - y = 2$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Для производства двух видов сплавов используют в качестве добавок редкие металлы. Их запасы, нормы расхода на 1 т каждого сплава и прибыль от реализации 1 т каждого сплава приведены в таблице.

Вид сплава	Содержание добавок в 1 т сплава (кг)			Прибыль от реализации 1 т сплава (тыс. руб.)
	титан	молибден	хром	
I	2	3	4	20
II	8	1	3	30
Запасы металлов (кг)	500	800	600	

Составить план выпуска сплавов, который дает максимальную прибыль.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

$$z = x_1 - 3x_2,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 1. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 6x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \end{cases}$$
$$x_k \ge 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = x_1 - 2x_2 - 3x_3,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 15, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 10, a_2 = 15, a_3 = 10, b_1 = 17, b_2 = 20, b_3 = 13, b_4 = 10, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

8. Необходимо распределить 5 исполнителей на 4 работы; каждый исполнитель может выполнять любую работу, но с различной степенью мастерства. Если на некоторую работу назначается исполнитель именно той квалификации, которая необходима для ее выполнения, тогда стоимость ее выполнения будет ниже. Найти оптимальное распределение исполнителей по всем заявленным работам. В таблице приведены стоимости назначения каждого исполнителя на каждую из работ.

1	6	7	1	10
7	2	1	5	7
3	7	3	6	7
8	3	1	2	11

Вариант 16

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 2x^2 + 4y^2 + 2xy - x + 2y$, если дано уравнение связи $x + 3y = -2$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Цех выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор 1-го вида расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор 2-го вида – 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора 1-го вида цех получает прибыль 12 000 руб., а 2-го вида – 10 000 руб. Сколько трансформаторов, и какого вида должен выпустить цех, чтобы получить наибольшую прибыль, если цех располагает 480 кг железа и 300 кг проволоки?

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = 2x_1 + x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16, \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = x_1 - 2x_2 - 3x_3,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 9, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 9, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{целые}.$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 25, a_2 = 30, a_3 = 25, b_1 = 20, b_2 = 20, b_3 = 20, b_4 = 20, C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Служба занятости имеет в наличии 5 вакантных мест по родственным специальностям, на которые претендуют 4 человека. Проведено тестирование претендентов, результаты которого в виде баллов представлены в матрице. Как распределить претендентов на вакантные места таким образом, чтобы суммарное количество баллов было наибольшим?

7	8	10	5	1
3	6	7	2	6
1	6	7	2	3
6	2	11	3	7

Вариант 17

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = x^2 - y^2 + 4xy + 3x + 2y$, если дано уравнение связи $x + 3y = -2$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Совхоз отвел три земельных массива размерами в 5 000, 8 000, 9 000 га под посевы ржи, пшеницы и кукурузы. Средняя урожайность (в ц на 1 га) по массивам указана в таблице:

	Массивы		
	I	II	III
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	15	22
Кукуруза	30	35	25

За 1 ц ржи совхоз получает 20 т.руб., за 1 ц пшеницы – 25 т.руб., за 1 ц кукурузы – 14 т.руб. Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести под каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану он обязан сдать не менее 1 900 т ржи, 15 800 т пшеницы и 30 000 т кукурузы?

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = 4x_1 - x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 - x_2 \geq -1. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 6x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0, \; k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.

б) Решите данную задачу графически.

в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = x_1 - 2x_2 - 3x_3,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 30, a_2 = 30, a_3 = 30, b_1 = 20, b_2 = 20, b_3 = 25, b_4 = 25, C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. В распоряжении некоторой компании имеется 5 торговых точек и 4 продавца. Из прошлого опыта известно, что эффективность работы продавцов в различных торговых точках неодинакова. Объемы продаж каждого продавца в каждой торговой точке даны в таблице. Как следует назначить продавцов по торговым точкам, чтобы достичь максимального объема продаж?

11	9	10	1	10
8	7	11	5	7
3	5	5	6	7
3	3	7	6	11

Вариант 18

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 2x^2 - y^2 + 4xy - 3x - 4y$, если дано уравнение связи $x + 3y = -2$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Для нарезки заготовок длиной 20, 25 и 30 см используются прутки длиной 75 см. Требуется за смену нарезать следующее количество заготовок: длиной 20 см – 300 шт., 25 см – 270 шт., 30 см – 350 шт. Из одного прутка можно нарезать заготовки различной длины. Требуется определить, какое количество прутков необходимо разрезать каждым из возможных вариантов, чтобы число заготовок соответствовало заданной программе, и чтобы при этом общая длина всех концевых остатков была минимальной?

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

$$z = x_1 - x_2,$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5,$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$$
$$x_k \ge 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = x_1 - 2x_2,$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 \ge -20, \\ 2x_1 \ - x_2 \ - x_3 \ge -9, \\ x_1 + 2x_2 \ - x_3 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 30, a_2 = 30, a_3 = 30, b_1 = 25, b_2 = 20, b_3 = 25, b_4 = 20, C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Стоимости производства каждой из пяти деталей на каждом из четырех станков приведены в таблице. Как распределить производства деталей по станкам, чтобы общая стоимость производства была наименьшей?

8	2	8	1	2
8	2	1	3	9
2	3	6	1	2
4	5	6	1	9

Вариант 19

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 2x^2 - y^2 + 4xy - 3x - 4y$, если дано уравнение связи $6x - y = 4$.

2. Составьте математическую модель задачи.

В обработку поступили две партии досок для изготовления комплектов из трех деталей, причем первая партия содержит 50 досок длиной по 6,5 м каждая, вторая содержит 200 досок длиной по 4 м каждая. Комплект состоит из двух деталей по 2 м каждая и одной детали длиной 1,5 м. Как распилить все доски, чтобы получить наибольшее число комплектов?

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

$$z = 5x_1 + 9x_2,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 4x_2 \ge -1, \\ x_1 - x_2 \le 4. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 6x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 18, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \end{cases}$$

$$x_k \ge 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\max\ z = 3x_1 - x_2 + x_3,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 11, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 7, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 35, a_2 = 35, a_3 = 30, b_1 = 25, b_2 = 25, b_3 = 25, b_4 = 25, C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Пусть имеется 5 сотрудников фирмы, которых необходимо распределить для выполнения четырех работ. Известны стоимости назначения каждого из сотрудников на каждую работу. На какую работу следует назначить сотрудников для достижения наименьшей суммарной стоимости?

4	5	7	10
9	1	5	7
6	8	1	4
6	1	8	6
7	3	6	7

Вариант 20

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = 2x^2 - 4y^2 + 3xy + x - y$, если дано уравнение связи $4x + 2y = 1$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Фирма производит одежду для охотников, туристов и охранных структур. Дополнительно фирма решила изготавливать шапки и подстежки из натурального меха. Затраты на производство этих изделий и запасы сырья представлены в таблице. Спрос на шапки составляет не более 600 шт. в месяц, а подстежек – не более 400 шт. в месяц.

Сырье	Расход сырья на производство, дм		Средний запас в месяц, дм
	шапки	подстежки	
Мех	22	140	61 600
Ткань	1,5	30	15 000
Оптовая цена, руб./шт.	410	840	

Определить объемы производства этих изделий, обеспечивающих максимальный доход от продажи.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = -x_1 - 2x_2,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ x_1 + 5x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 1. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = 2x_1 - 3x_2 + x_3,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \quad - x_3 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 2, \\ \ x_1 + x_2 \quad + x_3 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 40, a_2 = 30, a_3 = 30, b_1 = 23, b_2 = 28, b_3 = 25, b_4 = 24, C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. В распоряжении некоторой компании имеется 5 торговых точек и 5 продавцов. Из прошлого опыта известно, что эффективность работы продавцов в различных торговых точках неодинакова. Объемы продаж каждого продавца в каждой торговой точке даны в таблице. Как следует назначить продавцов по торговым точкам, чтобы достичь максимального объема продаж?

4	6	10	5	7
8	9	2	1	3
5	8	9	2	1
4	5	6	1	6
8	9	10	11	9

Вариант 21

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = x^2 + 3y^2 + 5xy + 7x + 2y$, если дано уравнение связи $4x + 2y = 1$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Имеется два станка, на которых могут обрабатываться детали трёх видов. Количество деталей каждого вида, обрабатываемых на каждом станке в течение рабочего дня, приведено в таблице.

Станки	Детали вида		
	1	2	3
1	30	30	40
2	20	50	150

Полный комплект состоит из двух деталей первого вида, одной детали второго вида и четырёх деталей третьего вида. Какую часть рабочего дня каждый станок должен обрабатывать детали каждого вида с тем, чтобы число комплектов деталей было наибольшим?

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = 2x_1 - x_2,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = -x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 7, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = x_1 - x_2 - 2x_3,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5, \\ \ \ x_1 + x_2 \ \ + x_3 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \ \ + x_3 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 10, a_2 = 10, a_3 = 25, a_4 = 14, b_2 = 15, b_3 = 15, b_4 = 45, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Диспетчер транспортного предприятия распределяет 5 водителей по 5 автомобилям различного назначения на ближайшую смену. Известны эффективности назначения водителей на автомобили (см. таблицу). Как распределить водителей для получения наибольшей эффективности?

7	3	8	1	7
5	7	3	3	1
6	4	6	9	3
8	11	7	1	5
9	10	3	2	1

Вариант 22

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = x^2 - 4y^2 + 2xy - 4x + y$, если дано уравнение связи $2x - y = 2$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Имеются три экскаватора разных марок. С их помощью нужно выполнить три вида земляных работ объёмом в 20 000 м^3 каждый. Время работы экскаваторов одинаково, производительность в м^3/ч по каждому виду работ приведено в таблице.

Экскаватор	Вид работ		
	A	B	C
1	105	56	56
2	107	66	83
3	64	38	53

Распределить время работы каждого экскаватора так, чтобы задание было выполнено в кратчайший срок.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

$$z = 2x_1 + x_2,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge -1, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = x_1 - 7x_2 + x_3 - x_5,$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 6, \\ 2x_2 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 + x_5 = 26, \end{cases}$$
$$x_k \ge 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = x_1 - 2x_2 - x_3,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 50, a_2 = 12, a_3 = 28, b_1 = 10, b_2 = 10, b_3 = 20, b_4 = 20, C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Транспортное предприятие нанимает 4 водителя на четыре из пяти имеющихся у него автомобиля. Известны расходы предприятия при назначении каждого из водителей на каждый автомобиль (см. таблицу). Как распределить водителей для минимизации расходов предприятия?

8	3	2	4	2
5	1	4	3	7
7	9	6	7	4
9	10	2	9	7

Вариант 23

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = x^2 - 4y^2 + 3xy + x - 4y$, если дано уравнение связи $2x - y = 2$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Планируется установление договорных связей между тремя совхозами и тремя торговыми предприятиями по поставке овощей. Заказы торговых предприятий на плановый период и возможности поставщиков, а также расстояния (в км) приведены в таблице.

Предложение, т	Спрос, т		
	B_1=200	B_2=140	B_3=60
A_1=160	30	40	50
A_2=150	40	30	30
A_3=90	30	40	60

Определить схему связей, соответствующую минимальному грузообороту (произведение массы перевозимого груза на расстояние перевозки).

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = 2x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 11, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 3x_2 \leq 0. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 14, \\ x_2 + x_3 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_5 = 2, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0, \ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = x_1 - x_2 - 2x_3,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ \text{целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 41, a_2 = 39, b_1 = 22, b_2 = 23, b_3 = 24, b_4 = 10, C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Диспетчер транспортного предприятия распределяет 5 водителей по 5 автомобилям различного назначения на ближайшую смену. Известны эффективности назначения водителей на автомобили (см. таблицу). Как распределить водителей для получения наибольшей эффективности?

4	3	2	1	5
10	2	6	3	3
1	1	7	9	4
7	6	9	8	8
6	5	10	2	6

Вариант 24

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = x^2 - 4y^2 + 3xy + x - 4y$, если дано уравнение связи $3x - 2y = -4$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Предприятие по переработке лесоматериалов выпускает пиломатериалы и фанеру. Для изготовления 8 м^3 пиломатериалов расходуется 6 м^3 еловых и 13 м^3 пихтовых лесоматериалов. Для производства 100 м^3 фанеры расходуется 6 м^3 еловых и 10 м^3 пихтовых лесоматериалов. Общие запасы сырья – 80 м^3 еловых и 200 м^3 пихтовых лесоматериалов. В соответствии с плановым заданием предприятие должно изготовить не менее 10 м^3 пиломатериалов и 1 100 м^3 фанеры. Прибыль, получаемая от реализации 1 м^3 пиломатериалов – 12 руб., а при реализации 100 м^3 фанеры – 50 руб. Составить план производства, максимизирующий прибыль.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = 4x_1 + 2x_2,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 10. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = x_1 + 3x_3 - x_4 - x_5,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ -3x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 3, \end{cases}$$
$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\min\ z = x_1 + x_2 - 2x_3,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 11, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 7, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \text{ целые.}$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 12,\ a_2 = 12,\ a_3 = 42,\ a_4 = 44,\ b_1 = 25,\ b_2 = 25,\ b_3 = 10,\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

8. Продавец хочет продать 5 подержанных автомобилей. Пять человек предложили цены на каждый из автомобилей (см. таблицу). При каком варианте распределения автомобилей выручка продавца будет наименьшей?

3	1	4	2	5
8	9	10	3	1
5	5	8	9	3
5	6	9	1	5
6	8	9	10	12

Вариант 25

1. Методом множителей Лагранжа найдите условный экстремум функции $z = x^2 + 6y^2 - 4xy + 2x + 3y$, если дано уравнение связи $x - 2y = -4$.

2. Составьте математическую модель задачи.

Малое предприятие выпускает два вида прохладительных напитков («Радуга» и «Сияние»), предназначенных для детей и взрослых соответственно. В производстве напитков используется 4 вида сырья: газированная вода, фруктовый сироп, лед и тонизирующая добавка. Нормы расхода сырья на производство одной партии напитков и прибыль от ее реализации даны в таблице

Сырье	Норма расхода сырья		Суточный запас сырья
	«Радуга»	«Сияние»	
Газ. вода	6л	5л	1 200 л.
Фруктовый сироп	1 л	0,5 л	150 л
Лед	0,6 кг	1,2 кг	150 кг
Тонизирующая добавка	0,1 кг	0,5 кг	30 кг
Прибыль от партии напитка	30 руб.	40 руб.	

Составить план производства напитков, максимизирующий прибыль.

3. Решите графически задачу: найдите экстремумы функции z, если $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

$$z = x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -6. \end{cases}$$

4. Дана задача линейного программирования

$$\min z = 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 5x_4,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = -7, \\ x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 14, \\ 4x_1 - x_4 - x_5 = 7, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

а) Найдите все базисные решения системы ограничений. Выберите из них допустимые.
б) Решите данную задачу графически.
в) Решите данную задачу методом искусственного базиса.

5. Решите задачу линейного программирования

$$\max\ z = 2x_1 + x_2 - x_3,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 12, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ \text{целые}.$$

6. Решите методом потенциалов транспортную задачу, где c_{ij} – цена перевозки единицы груза из пункта a_i в пункт b_j.

$$a_1 = 12,\ a_2 = 14,\ a_3 = 25,\ b_1 = 25,\ b_2 = 12,\ b_3 = 14,\ C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите решение матричной игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Предприятие размещает 5 заказов на оборудование по 4 фирмам. Каждая фирма может выполнять только один заказ. Известны стоимости выполнения каждой фирмой каждого из заказов (см. таблицу). Как распределить заказы по фирмам для минимизации их общей стоимости?

2	1	6	10	3
7	9	5	9	1
6	7	1	9	9
2	1	8	3	1

ОГЛАВЛЕНИЕ