ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты индивидуальных заданий для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Могилев 2012

УДК 517
ББК 22.1я 73
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «31» августа 2012 г., протокол № 1

Составители: ст. преподаватель А. Н. Бондарев;
ст. преподаватель Д. В. Роголев

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. С. Н. Батан

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения. Даны решения типовых задач с необходимыми теоретическими сведениями и приведены варианты заданий для самостоятельного решения.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнёв

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная вёрстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать 16.11.2012. Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 2,33. Уч.-изд. л. 2,2. Тираж 56 экз. Заказ № 770.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/0548519 от 16.06.2009.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

1 Решение типового варианта

1.1 Продифференцировать функции:

а) $y = 9x^5 - \dfrac{4}{x^3} + \sqrt[3]{x^7} - 3x + 4$;

б) $y = \operatorname{tg}^5(x+2) \cdot \arccos 3x^2$;

в) $y = \dfrac{3\ln(x^2-5)}{(x+3)^7}$;

г) $y = \sqrt[7]{\dfrac{x+5}{x-5}}\operatorname{ctg}(3x-4)$;

д) $y = x^{\arcsin x}$;

е) $y = \dfrac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)}$.

Решение:

а) для нахождения производной заданной функции воспользуемся правилом дифференцирования суммы и таблицей основных производных:

$$y' = (9x^5)' - \left(\frac{4}{x^3}\right)' + \left(\sqrt[3]{x^7}\right)' - (3x)' + 4' = 9 \cdot 5x^4 - 4 \cdot (-3)x^{-4} + \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - 3 =$$

$$= 45x^4 + \frac{12}{x^4} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} - 3;$$

б) для нахождения производной заданной функции воспользуемся правилами дифференцирования произведения, сложной функции и таблицей основных производных:

$$y' = \left(\operatorname{tg}^5(x+2)\right)' \arccos 3x^2 + \operatorname{tg}^5(x+2)\left(\arccos 3x^2\right)' =$$

$$= 5\operatorname{tg}^4(x+2)\frac{1}{\cos^2(x+2)}\arccos 3x^2 + \operatorname{tg}^5(x+2)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\right)6x =$$

$$= \frac{5\operatorname{tg}^4(x+2)\arccos 3x^2}{\cos^2(x+2)} - \frac{\operatorname{tg}^5(x+2)6x}{\sqrt{1-9x^4}};$$

в) для нахождения производной заданной функции воспользуемся правилами дифференцирования частного, сложной функции и таблицей основных производных:

$$y' = \frac{\left(3\ln\left(x^2-5\right)\right)'(x+3)^7 - 3\ln\left(x^2-5\right)\left((x+3)^7\right)'}{\left((x+3)^7\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{3}{x^2-5}\cdot 2x(x+3)^7 - 3\ln\left(x^2-5\right)\cdot 7(x+3)^6}{(x+3)^{14}} =$$

$$= \frac{\frac{6x(x+3)^7}{x^2-5} - 21\ln\left(x^2-5\right)(x+3)^6}{(x+3)^{14}};$$

г) для нахождения производной заданной функции воспользуемся правилами дифференцирования произведения, частного, сложной функции и таблицей основных производных:

$$y' = \frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\frac{x-5-(x+5)}{(x-5)^2}\operatorname{ctg}(3x-4) + \sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}\left(-\frac{3}{\sin^2(3x-4)}\right) =$$

$$= -\frac{10\operatorname{ctg}(3x-4)}{7\sqrt[7]{(x+5)^6(x-5)^8}} - \frac{3}{\sin^2(3x-4)}\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}};$$

д) данная функция является степенно-показательной. Для нахождения её производной необходимо воспользоваться логарифмической производной. Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = \arcsin x \ln x.$$

Дифференцируем полученное равенство:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln x + \arcsin x\frac{1}{x};$$

$$y' = x^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right);$$

е) для нахождения производной заданной функции также воспользуемся методом логарифмического дифференцирования:

$$\ln y = \frac{6}{7}\ln(x+5) - 2\ln(x-1) - \ln(x+3);$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+3};$$

$$y' = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)}\left(\frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right).$$

1.2 Найти производные первого и второго порядков:

а) $y = x - \cos^2 x$; б) $y = x - \operatorname{arcctg} y$; в) $\begin{cases} x = t^2 + 2; \\ y = t^3 - 1. \end{cases}$

Решение:

а) производная первого порядка заданной функции будет иметь вид:

$$y' = 1 - 2\cos x(-\sin x) = 1 + \sin 2x.$$

Для отыскания производной второго порядка необходимо найти производную от производной первого порядка:

$$y'' = 2\cos 2x;$$

б) для нахождения производной неявно заданной функции продифференцируем обе части равенства, учитывая, что y есть функция от x, а затем выразим из полученного равенства y':

$$y' = 1 + \frac{1}{1+y^2}y'; \qquad y' = 1 + \frac{1}{y^2}.$$

Для нахождения производной второго порядка продифференцируем обе части последнего равенства:

$$y'' = -\frac{2}{y^3}y' = -\frac{2}{y^5};$$

в) для отыскания производной первого порядка функции, заданной параметрически, воспользуемся формулой

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned} x'_t &= 2t; \\ y'_t &= 3t^2; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y'_x = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t.$$

Для отыскания производных второго порядка функции, заданной параметрически, воспользуемся формулой

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.$$

Таким образом, получаем

$$\left(y'_x\right)'_t = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y''_{xx} = \frac{3}{4t}.$$

1.3 Для функции $y = xe^x$ найти дифференциалы первого, второго и n-го порядков.

Решение

Для отыскания дифференциалов указанного порядка воспользуемся следующими формулами:

$$dy = y'dx; \qquad d^2y = y''dx^2; \qquad d^n y = y^{(n)}dx^n.$$

Найдём требуемые производные:

$$y' = e^x + xe^x; \qquad y'' = 2e^x + xe^x; \qquad y^{(n)} = ne^x + xe^x.$$

Таким образом, получаем:

$$dy = \left(e^x + xe^x\right)dx; \qquad d^2y = \left(2e^x + xe^x\right)dx^2; \qquad d^n y = \left(ne^x + xe^x\right)dx^n.$$

1.4 Вычислить приближённо с помощью дифференциала значение $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 84$ и оценить допущенную относительную погрешность.

Решение

Для нахождения приближённого значения заданного выражения воспользуемся формулой

$$y\left(x_0 + \Delta x\right) \approx y\left(x_0\right) + y'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Для нашего случая имеем:

$$x_0 = 64; \quad \Delta x = 20; \quad y\left(x_0\right) = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Найдём производную функции и её значение в точке x_0:

$$y'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; \qquad y'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} \approx 0{,}021.$$

Таким образом, получаем

$$\sqrt[3]{84} \approx 4 + 0{,}021 \cdot 20 \approx 4{,}42.$$

Относительная погрешность будет равна

$$\delta = \left| \frac{4{,}42 - 4{,}38}{4{,}42} \right| \cdot 100\ \% = 0{,}9\ \%.$$

1.5 Решить задачи.

Задача 1. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 9x - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Решение

Уравнение касательной к кривой в точке x_0 имеет вид:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0).$$

Ординатой точки касания будет $y(-1) = 6$. Найдём значение производной в точке касания.

$$y' = 2x - 9 \quad \Rightarrow \quad y'(-1) = -11.$$

Таким образом, подставляя найденные значения в формулу, получаем искомое уравнение касательной:

$$y = -11x - 5.$$

Задача 2. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x_1 = \dfrac{t^3}{3} - 4$ и $x_2 = \dfrac{7t^2}{2} - 12t + 3$. В какой момент времени их скорости будут равными?

Решение

Найдём скорости движения двух материальных точек исходя из механического смысла производной:

$$v_1 = x_1' = t^2; \qquad v_2 = x_2' = 7t - 12.$$

Так как скорости движения будут равны, то получаем следующее уравнение:

$$t^2 - 7t + 12 = 0;$$

$$t_1 = 3 \text{ с}; \qquad t_2 = 4 \text{ с}.$$

1.6 Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x} - e^{\sin x}}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{1+\ln x}}$.

Решение:

а) в этом примере имеем неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x} - e^{\sin x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{-3x} - e^{\sin x}\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{-3e^{-3x} - \cos x e^{\sin x}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-3e^{-3x} - \cos x e^{\sin x}\right) = -4;$$

б) в этом примере имеем неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin^2 x\right)'}{x'} = -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1} = -\lim_{x\to 0}\sin 2x = 0;$$

в) в этом примере имеем неопределённость вида $\infty-\infty$. Для её раскрытия вначале преобразуем выражение:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0;$$

г) в этом примере имеем неопределённость вида 0^0. Для её раскрытия вначале преобразуем выражение:

$$\lim_{x\to 0}x^{\frac{3}{1+\ln x}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln x^{\frac{3}{1+\ln x}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{3}{1+\ln x}\cdot\ln x}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{3\ln x}{1+\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln x}{1+\ln x}}.$$

Теперь в степени выражения получили неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\ln x}{1+\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(3\ln x)'}{(1+\ln x)'}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}:\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to 0}3=3.$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{x\to 0}x^{\frac{3}{1+\ln x}}=e^3.$$

1.7 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3-6x+5$ на отрезке $[-3;1{,}5]$.

Решение

Определим критические точки первого рода (точки, в которых первая производная обращается в ноль или не существует), входящие в заданный отрезок:

$$y'=6x^2-6 \quad\Rightarrow\quad 6x^2-6=0;$$

$$x_1=-1\in[-3;1{,}5]; \qquad x_2=1\in[-3;1{,}5].$$

Точек, в которых производная не существует, нет.

Теперь найдём значения функции в критических точках и на концах заданного отрезка:

$$y(-1)=9; \qquad y(1)=1; \qquad y(-3)=-31; \qquad y(1{,}5)=2{,}75.$$

Выбираем из полученных значений наибольшее и наименьшее. Эти значения и будут решениями данной задачи:

$$\max_{[-3;\,1{,}5]} y = \max\{9;1;-31;2{,}75\} = 9 = y(-1);$$

$$\min_{[-3;\,1{,}5]} y = \min\{9;1;-31;2{,}75\} = -31 = y(-3).$$

1.8 Провести полное исследование функций и построить их графики:

а) $y=\dfrac{1-x^2}{x^2}$; б) $y=(x-1)e^{3x-1}$.

Исследование будем проводить, придерживаясь следующей схемы:

– найдём область определения функции;

– исследуем функцию на чётность и нечётность, периодичность;

– найдём точки пересечения графика функции с осями координат;

– исследуем функцию на непрерывность и найдём точки разрыва (если они существуют); найдём асимптоты графика функции;

– найдём интервалы возрастания и убывания функции и её экстремумы;

– найдём интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба;

– по полученным данным построим график функции.

Решение:

а) по предложенной схеме получаем:

– областью определения является вся числовая прямая, за исключением точки $x=0$, т. е. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

– функция непериодическая; исследуем её на чётность и нечётность:

$$y(-x)=\frac{1-(-x)^2}{(-x)^2}=\frac{1-x^2}{x^2}=y(x).$$

Следовательно, функция чётная и её график симметричен относительно оси Oy;

– найдём точки пересечения с осью Ox:

$$y=0 \;\Rightarrow\; \frac{1-x^2}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 1.$$

Точек пересечения с осью Oy нет, так как функция не определена при $x=0$. Таким образом, получили две точки пересечения с осями координат: $(-1;0)$ и $(1;0)$;

– точкой разрыва функции является точка $x=0$, так как функция не определена в этой точке. Определим характер разрыва, для чего найдём односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to\pm 0} y(x)=\lim_{x\to\pm 0}\frac{1-x^2}{x^2}=+\infty.$$

Значит, в данной точке функция терпит разрыв второго рода с бесконечным скачком, а прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой при $x\to\pm 0$.

Других точек разрыва нет.

Исследуем функцию на наличие наклонных асимптот. Наклонные асимптоты будем искать в виде $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x};\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\big(y(x)-kx\big).$$

Получаем:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{1-x^2}{x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^2}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}\right)=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1-x^2}{x^2}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^2}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=-1.$$

Таким образом, получили прямую $y=-1$, которая является горизонтальной асимптотой.

Других наклонных асимптот нет;

– найдём первую производную заданной функции:

$$y'=\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)'=\frac{\left(1-x^2\right)'x^2-\left(1-x^2\right)\left(x^2\right)'}{x^4}=\frac{-2x^3-2x+2x^3}{x^4}=-\frac{2}{x^3}.$$

Определяем критические точки первого рода.

Производная не существует при $x=0$. Точек, в которых она обращается в ноль, нет.

Нанесём полученные точки на числовую прямую (рисунок 1) и определим знаки производной на всех полученных интервалах:

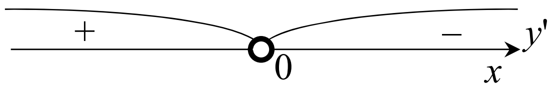

Рисунок 1

На интервале $(-\infty; 0)$ функция возрастает, т. к. производная $y' > 0$. На интервале $(0; +\infty)$ функция убывает, т. к. производная $y' < 0$. При переходе через точку $x = 0$ производная меняет свой знак, но функция не определена в этой точке, а значит экстремума в этой точке нет;

– найдём вторую производную заданной функции:

$$y'' = \left(-\frac{2}{x^3}\right)' = \frac{6}{x^4}.$$

Определяем критические точки второго рода, т. е. точки, в которых вторая производная обращается в ноль или не существует.

Производная не существует при $x = 0$. Точек, в которых она обращается в ноль, нет.

Нанесём полученные точки на числовую прямую (рисунок 2) и определим знаки производной на всех полученных интервалах:

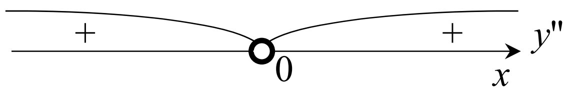

Рисунок 2

На интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция выпукла вниз, т. к. производная $y'' > 0$, а значит, точек перегиба нет;

– на основании полученных данных строим график (рисунок 3);

б) по предложенной схеме получаем:

– областью определения является вся числовая прямая;

– функция непериодическая; исследуем её на чётность и нечётность:

$$y(-x) = ((-x) - 1)e^{3(-x)-1} = -(x+1)e^{-(3x+1)} \;\Rightarrow\; y(-x) \neq y(x), y(-x) \neq -y(x).$$

Значит, функция ни чётная, ни нечётная;

– найдём точки пересечения с осью Ox:

$$y = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)e^{3x-1} = 0 \;\Rightarrow\; x = 1.$$

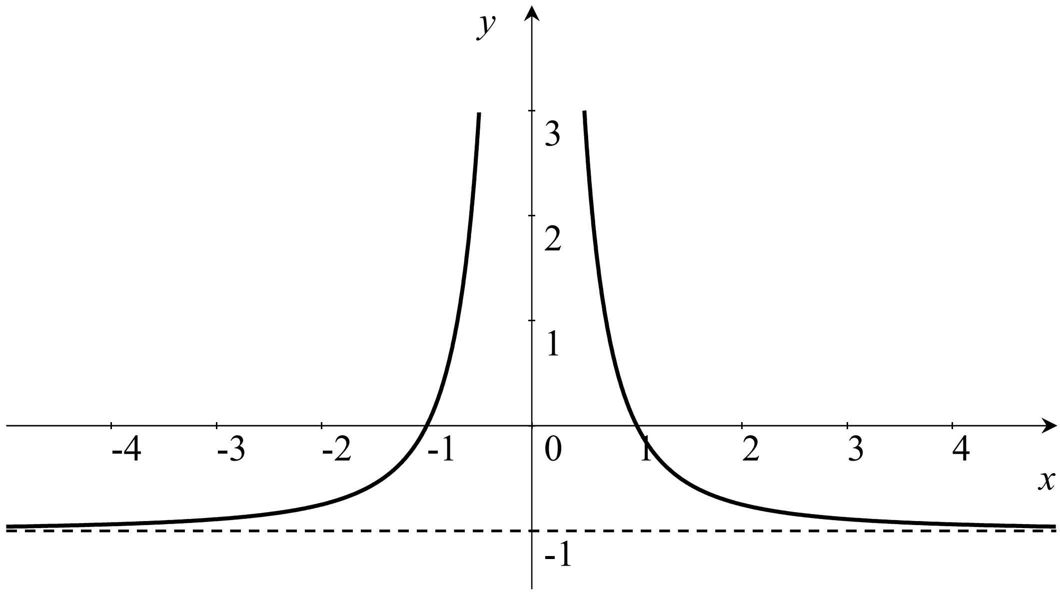

Рисунок 3

Найдём точки пересечения с осью Oy:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{e}.$$

Таким образом, получили две точки пересечения с осями координат: $(1;0)$ и $\left(0;-\frac{1}{e}\right)$;

– точек разрыва нет, т. к. функция непрерывна на всей числовой прямой. Следовательно, вертикальных асимптот также нет.

Исследуем функцию на наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^{3x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{3x-1} = +\infty.$$

Значит, при $x \to +\infty$ ни наклонных, ни горизонтальных асимптот нет.

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)e^{3x-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{3x-1} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^{3x-1} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{1-3x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)'}{\left(e^{1-3x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-3e^{1-3x}} = 0.$$

Таким образом, получили прямую $y=0$, которая является горизонтальной асимптотой при $x \to -\infty$.

Других наклонных асимптот нет;

– найдём первую производную заданной функции:

$$y' = \left((x-1)e^{3x-1}\right)' = e^{3x-1} + 3(x-1)e^{3x-1} = (3x-2)e^{3x-1}.$$

Определяем критические точки первого рода.

Точек, в которых первая производная не существует, нет. Приравняем теперь первую производную к нулю:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad (3x-2)e^{3x-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}.$$

Нанесём полученные точки на числовую прямую (рисунок 4) и определим знаки первой производной на всех полученных интервалах:

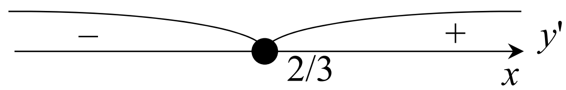

Рисунок 4

На интервале $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ функция убывает, т. к. $y' < 0$. На интервале $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ функция возрастает, т. к. $y' > 0$. При переходе через точку $x = \frac{2}{3}$ первая производная меняет свой знак с минуса «–» на плюс «+», а значит, эта точка является точкой минимума;

– найдём вторую производную заданной функции:

$$y'' = \left((3x-2)e^{3x-1}\right)' = 3e^{3x-1} + 3(3x-2)e^{3x-1} = 3(3x-1)e^{3x-1}.$$

Определяем критические точки второго рода.

Точек, в которых вторая производная не существует, нет. Приравняем теперь вторую производную к нулю:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(3x-1)e^{3x-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$$

Нанесём полученные точки на числовую прямую (рисунок 5) и определим знаки второй производной на всех полученных интервалах:

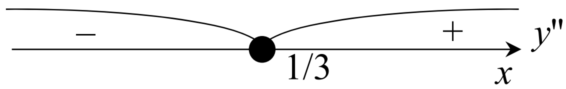

Рисунок 5

На интервале $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ функция выпукла вниз, т. к. $y'' > 0$. На интервале $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ функция выпукла вверх, т. к. $y'' < 0$. При переходе через точку $x = \frac{1}{3}$ вторая производная меняет свой знак, а значит, эта точка является точкой перегиба;

– на основании полученных данных строим график (рисунок 6).

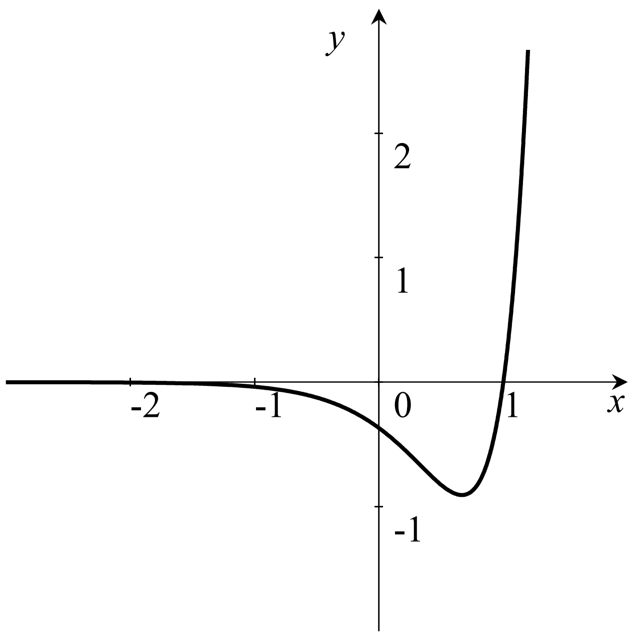

Рисунок 6

2 Варианты индивидуальных заданий

2.1 Продифференцировать функции.

2.1.1 а) $y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$; г) $y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \log_2\left(x - 3x^2\right)$;

б) $y = \operatorname{arcctg}^2 5x \cdot \ln(x-4)$; д) $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{\arcsin x}$;

в) $y = \frac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$; е) $y = \frac{\sqrt{x+7}\,(x-3)^4}{(x+2)^5}$;

2.1.2 а) $y = \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}$; г) $y = \sqrt[3]{\frac{2x-5}{2x+3}} \lg(4x+7)$;

б) $y = \operatorname{arctg}^3 x \cdot \ln(x+5)$; д) $y = (\cos(x+2))^{\ln x}$;

в) $y = \frac{e^{-x^3}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$; е) $y = \frac{(x-3)^5 (x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$;

2.1.3 а) $y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}$; г) $y = \sqrt[4]{\frac{x+3}{x-3}} \ln\left(5x^2 - 2x + 1\right)$;

б) $y = \arccos^4 x \cdot \ln\left(x^2 + x\right)$; д) $y = (\sin 3x)^{\arccos x}$;

в) $y = \frac{\sqrt{7x^3 - 5x + 2}}{e^{\cos x}}$; е) $y = \frac{(x-2)^3 \sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^2}$;

2.1.4 а) $y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} - 3x^3 + \frac{4}{x}$; г) $y = \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} \log_3\left(x^2 + x + 4\right)$;

б) $y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 3^{-x}$; д) $y = (\operatorname{tg} 5x)^{\arcsin(x+1)}$;

в) $y = \frac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$; е) $y = \frac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$;

2.1.5 а) $y=7x+\frac{5}{x^2}-\sqrt[7]{x^4}+\frac{6}{x}$; г) $y=\sqrt[6]{\frac{7x-4}{7x+4}}\log_5\left(3x^2+2x\right)$;

б) $y=\operatorname{tg}^4 3x\cdot\operatorname{arctg}7x^2$; д) $y=\left(\sin(x+2)\right)^{\arcsin 2x}$;

в) $y=\frac{\sqrt{x^3+4x-5}}{e^{x^2}}$; е) $y=\frac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$;

2.1.6 а) $y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x}$; г) $y=\sqrt[7]{\frac{2x-3}{2x+3}}\lg(7x-10)$;

б) $y=5^{-x^2}\cdot\arcsin x^3$; д) $y=(\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;

в) $y=\frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$; е) $y=\frac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$;

2.1.7 а) $y=3x^5-\frac{3}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{10}{x^5}$; г) $y=\sqrt[8]{\frac{5x+1}{5x-1}}\ln\left(3x-x^2\right)$;

б) $y=\operatorname{arctg}^5 x\cdot\log_2(x-3)$; д) $y=\left(\sqrt{3x+2}\right)^{\operatorname{arcctg}3x}$;

в) $y=\frac{e^{\sin x}}{(x+5)^4}$; е) $y=\frac{(x-3)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^7}$;

2.1.8 а) $y=\sqrt[3]{x^7}+\frac{3}{x}-4x^6+\frac{4}{x^5}$; г) $y=\sqrt[9]{\frac{x+3}{x-3}}\log_5(2x-3)$;

б) $y=\log_3(x+5)\cdot\arccos 3x$; д) $y=\left(\ln(x+3)\right)^{\sin\sqrt{x}}$;

в) $y=\frac{(2x+5)^3}{e^{\operatorname{tg}x}}$; е) $y=\frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$;

2.1.9 а) $y=8x^2+\sqrt[3]{x^4}-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^3}$; г) $y=\sqrt{\frac{6x+5}{6x-5}}\lg(4x+7)$;

б) $y=e^{-x}\cdot\arcsin^2 5x$; д) $y=\left(\log_2(x+4)\right)^{\operatorname{ctg}7x}$;

в) $y=\frac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$; е) $y=\frac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}$;

2.1.10 а) $y=4x^6+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}-\frac{7}{x^4}$; г) $y=\sqrt[3]{\frac{4x-1}{4x+1}}\ln\left(2x^3-3\right)$;

б) $y=\log_4(x-1)\cdot\arcsin^4 x$; д) $y=(\sin 3x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$;

в) $y=\frac{e^{-x}}{\left(2x^2-x+4\right)^2}$; е) $y=\frac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$;

2.1.11 а) $y=2\sqrt{x^3}-\frac{7}{x}+3x^2-\frac{2}{x^5}$; г) $y=\sqrt[4]{\frac{x+6}{x-6}}\sin\left(3x^2+1\right)$;

б) $y=(x-4)^5\cdot\operatorname{arcctg}3x^2$; д) $y=(\cos 3x)^{\operatorname{ctg}x^2}$;

в) $y=\frac{e^{\operatorname{ctg}5x}}{(3x-5)^4}$; е) $y=\frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-2)^2(x+3)^5}$;

2.1.12 а) $y=4x^3-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\frac{6}{x^2}$; г) $y=\sqrt[5]{\frac{x-7}{x+7}}\cos\left(2x^3+x\right)$;

б) $y=\operatorname{ctg}^3 4x\cdot\operatorname{arctg}2x^3$; д) $y=(\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$;

в) $y=\frac{(3x+1)^4}{e^{4x}}$; е) $y=\frac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+3)^5(x-5)^3}$;

2.1.13 а) $y=5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\frac{1}{x}$; г) $y=\sqrt[6]{\frac{x-9}{x+9}}\operatorname{tg}\left(3x^2-4x\right)$;

б) $y=e^{-\cos x}\cdot\operatorname{arctg}7x^5$; д) $y=(\arccos 5x)^{\ln x}$;

в) $y=\frac{\sqrt{5x^2-x+1}}{e^{3x}}$; е) $y=\frac{\sqrt{(x+2)^3(x-1)^4}}{(x+3)^6}$;

2.1.14 а) $y=\frac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}-\frac{2}{x}+5x^4$; г) $y=\sqrt[7]{\frac{x-4}{x+4}}\operatorname{ctg}(2x+5)$;

б) $y=(x+1)^2\cdot\arccos 3x^4$; д) $y=\left(\operatorname{arctg}2x\right)^{\sin x}$;

в) $y=\frac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$; е) $y=\frac{\sqrt[3]{(x-2)^5(x+3)^2}}{(x-7)^3}$;

2.1.15 а) $y=\frac{4}{x^5}-\frac{9}{x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$; г) $y=\sqrt[8]{\frac{x-2}{x+2}}\sin\left(4x^2-7x\right)$;

б) $y=2^{\sin x}\cdot\operatorname{arcctg}x^4$; д) $y=\left(\ln(x+7)\right)^{\operatorname{ctg}2x}$;

в) $y=\frac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arcctg}x}}$; е) $y=\frac{\sqrt[4]{x-8}\,(x+4)^5}{(x-1)^5}$;

2.1.16 а) $y=\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7$; г) $y=\sqrt[9]{\frac{x-3}{x+3}}\cos\left(x^2-3x\right)$;

б) $y=\operatorname{arctg}2x^5\cdot 3^{-x^3}$; д) $y=\left(\operatorname{ctg}(7x+4)\right)^{\sqrt{x+3}}$;

в) $y=\frac{e^{-\operatorname{ctg}5x}}{3x^2-4x+2}$; е) $y=\frac{\sqrt[5]{x+1}\,(x-3)^7}{(x+8)^3}$;

2.1.17 а) $y=5x^2+\frac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6$; г) $y=\sqrt{\frac{3x-2}{3x+2}}\operatorname{tg}\left(2x^2-9\right)$;

б) $y=5^{\cos x}\cdot\arcsin^2 3x$; д) $y=\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+1}\right)^{\operatorname{arctg}2x}$;

в) $y=\frac{e^{\operatorname{tg}3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$; е) $y=\frac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2(x-6)^5}$;

2.1.18 а) $y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^4}$; г) $y=\sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}}\operatorname{ctg}\left(3x^2+5\right)$;

б) $y=\ln(x-10)\cdot\arccos^2 4x$; д) $y=\left(\operatorname{tg}x^2\right)^{\arcsin 7x}$;

в) $y=\frac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$; е) $y=\frac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4(x-4)^3}$;

2.1.19 а) $y=\sqrt{x^5}-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}-3x^3$; г) $y=\sqrt[4]{\frac{x+5}{x-5}}\sin\left(3x^2+4\right)$;

б) $y=\arcsin^5 x\cdot\lg(x-2)$; д) $y=\left(\cos(x+5)\right)^{\arcsin 3x}$;

в) $y=\frac{e^{\operatorname{ctg}5x}}{(x+4)^3}$; е) $y=\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+3)^7(x-4)^2}$;

2.1.20 а) $y=9x^3+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}$; г) $y=\sqrt[5]{\frac{x-6}{x+6}}\cos(7x+2)$;

б) $y=\log_3(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^5 7x$; д) $y=\left(\sqrt{x-5}\right)^{\arccos 2x}$;

в) $y=\frac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$; е) $y=\frac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)(x+1)^7}$;

2.1.21 а) $y=3\sqrt{x}+\frac{4}{x^5}+\sqrt[3]{x^2}-\frac{7}{x}$; г) $y=\sqrt[6]{\frac{x-7}{x+7}}\arcsin(2x+3)$;

б) $y=\operatorname{arcctg}^3 2x\cdot\ln(x+9)$; д) $y=(\sin 4x)^{\operatorname{arctg} x^2}$;

в) $y=\frac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$; е) $y=\frac{(x-1)^6(x+2)^3}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}$;

2.1.22 а) $y=\sqrt{x^3}+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^5}-5x^3$; г) $y=\sqrt[7]{\frac{x-8}{x+8}}\arccos(3x-5)$;

б) $y=\lg(x+2)\cdot\arcsin^2 3x$; д) $y=\left(\operatorname{tg} 3x^4\right)^{\sqrt{x+3}}$;

в) $y=\frac{e^{-\operatorname{tg} 3x}}{4x^2-3x+5}$; е) $y=\frac{(x+4)^3(x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$;

2.1.23 а) $y=7x^2+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{8}{x^3}$; г) $y=\sqrt[8]{\frac{x-4}{x+4}}\operatorname{arctg}(5x+1)$;

б) $y=4^{-\sin x}\cdot\operatorname{arctg} 3x$; д) $y=\left(\operatorname{ctg} 2x^3\right)^{\sin\sqrt{x}}$;

в) $y=\frac{3x^2-5x+10}{e^{-x^2}}$; е) $y=\frac{(x-1)^4(x-7)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}$;

2.1.24 а) $y=8x^3-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}$; г) $y=\sqrt[9]{\frac{x-1}{x+1}}\operatorname{arcctg}(7x+2)$;

б) $y=\operatorname{arcctg}^3 x\cdot 2^{\cos x}$; д) $y=\left(\operatorname{tg} 7x^2\right)^{\sqrt{x+2}}$;

в) $y=\frac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$; е) $y=\frac{(x+7)^2(x-3)^5}{\sqrt{x^2+3x-1}}$;

2.1.25 а) $y=8x-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}-\sqrt[5]{x^4}$; г) $y=\sqrt{\frac{7x-4}{7x+4}}\arcsin\left(x^2+1\right)$;

б) $y=\arcsin^2 5x\cdot\lg(x-3)$; д) $y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$;

в) $y=\frac{(2x-3)^7}{e^{-2x}}$; е) $y=\frac{\sqrt[3]{x-3}\,(x+7)^5}{(x-4)^2}$;

2.1.26 а) $y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^5}+3x$; г) $y=\sqrt[3]{\frac{8x-3}{8x+3}}\arccos\left(x^2-5\right)$;

б) $y=\log_2(x+3)\cdot\arccos^2 x$; д) $y=(\mathrm{ctg}\,5x)^{\sin(x+3)}$;

в) $y=\frac{5x^2+4x-2}{e^{-x}}$; е) $y=\frac{\sqrt{x+10}\,(x-8)^3}{(x-1)^5}$;

2.1.27 а) $y=4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x^4}$; г) $y=\sqrt[4]{\frac{2x-5}{2x+5}}\,\mathrm{arctg}(3x+2)$;

б) $y=2^{-x}\cdot\mathrm{arctg}^3 4x$; д) $y=(\sin 3x)^{\mathrm{arctg}(x+2)}$;

в) $y=\frac{e^{-x^2}}{(2x-5)^7}$; е) $y=\frac{\sqrt[5]{(x-2)^3}\,(x-1)}{(x+3)^4}$;

2.1.28 а) $y=4x^5-\frac{5}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{2}{x^3}$; г) $y=\sqrt[5]{\frac{3x-4}{3x+4}}\,\mathrm{arcctg}(2x+5)$;

б) $y=\ln(x-4)\cdot\mathrm{arcctg}^4 3x$; д) $y=(\mathrm{arcctg}\,x)^{\mathrm{tg}(3x-1)}$;

в) $y=\frac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$; е) $y=\frac{\sqrt[4]{(x+1)^3}\,(x-2)^5}{(x-3)^2}$;

2.1.29 а) $y=\frac{7}{x}+\frac{4}{x^3}-\sqrt[5]{x^3}-2x^6$; г) $y=\sqrt[6]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\arcsin 2x$;

б) $y=\mathrm{arcctg}^2 5x\cdot\lg(x+3)$; д) $y=\left(\mathrm{ctg}\sqrt{\mathrm{x}}\right)^{\sin(x+3)}$;

в) $y=\frac{\sqrt{x^2-3x-7}}{e^{-x^3}}$; е) $y=\frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}$;

2.1.30 а) $y=\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}$; г) $y=\sqrt[7]{\frac{x^2+3}{x^2-3}}\arccos 4x$;

б) $y=\log_5(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^2 x^3$; д) $y=(\sin 3x)^{\operatorname{arctg} 2x}$;

в) $y=\frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{4x^2+7x-5}$; е) $y=\frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$.

2.2 Найти производные первого и второго порядков.

2.2.1 а) $y=x\sin^2 x$; б) $y^2=8x-1$; в) $\begin{cases}x=(2t+3)\cos t;\\ y=3t^3;\end{cases}$

2.2.2 а) $y=\operatorname{arctg} x$; б) $x^2+y^2=1$; в) $\begin{cases}x=2\cos^2 t;\\ y=3\sin^2 t;\end{cases}$

2.2.3 а) $y=\ln(1+x^2)$; б) $y=x+\operatorname{arctg} y$; в) $\begin{cases}x=6\cos^3 t;\\ y=2\sin^3 t;\end{cases}$

2.2.4 а) $y=e^x\cos x$; б) $x^2-y^2=4$; в) $\begin{cases}x=t^2-2;\\ y=(t-1)^3;\end{cases}$

2.2.5 а) $y=e^x\sin 2x$; б) $y^2=25x-4$; в) $\begin{cases}x=e^{-2t};\\ y=e^{4t};\end{cases}$

2.2.6 а) $y=e^{-x}\cos 3x$; б) $\operatorname{arcctg} y=4x+5y$; в) $\begin{cases}x=\sqrt{t};\\ y=\sqrt[5]{t};\end{cases}$

2.2.7 а) $y=x^2\sin 2x$; б) $y^2-x=\cos y$; в) $\begin{cases}x=t+t^3;\\ y=t^2-1;\end{cases}$

2.2.8 а) $y=x(2x+1)^5$; б) $3x+\sin y=5y$; в) $\begin{cases}x=\sqrt{t^2-1};\\ y=t+1;\end{cases}$

2.2.9 а) $y=\ln^2(1+x)$; б) $\operatorname{tg} y=3x+5y$; в) $\begin{cases}x=\ln t;\\ y=t\ln t;\end{cases}$

2.2.10 а) $y=x^2e^{-x}$; б) $xy=\operatorname{ctg} y$; в) $\begin{cases}x=4t+2t^2;\\ y=5t^3-3t^2;\end{cases}$

2.2.11 а) $y=\arcsin 2x$; б) $y=e^{y}+4x$; в) $\begin{cases} x=e^{t}\cos t; \\ y=e^{t}\sin t; \end{cases}$

2.2.12 а) $y=x(5x-4)^{3}$; б) $\ln y-yx=7$; в) $\begin{cases} x=t^{4}; \\ y=\ln t; \end{cases}$

2.2.13 а) $y=x\sin x$; б) $y^{2}+x^{2}=\sin y$; в) $\begin{cases} x=3\cos t; \\ y=2\sin t; \end{cases}$

2.2.14 а) $y=x^{2}\ln x$; б) $e^{y}=4x-7y$; в) $\begin{cases} x=5\cos^{2} t; \\ y=3\sin^{2} t; \end{cases}$

2.2.15 а) $y=x\cos x$; б) $\sin^{2}(x+y)=x$; в) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t; \\ y=\ln(1+\mathrm{t}^{2}); \end{cases}$

2.2.16 а) $y=x+\operatorname{arctg} x$; б) $\sin y=7x+3y$; в) $\begin{cases} x=\arcsin t; \\ y=\sqrt{1-t^{2}}; \end{cases}$

2.2.17 а) $y=x\sin 2x$; б) $\operatorname{tg} y=4y-5x$; в) $\begin{cases} x=t-\sin t; \\ y=1-\cos t; \end{cases}$

2.2.18 а) $y=x^{4}\ln x$; б) $y=x-\operatorname{ctg} y$; в) $\begin{cases} x=\sin t-t\cos t; \\ y=\cos t+t\sin t; \end{cases}$

2.2.19 а) $y=x\cos^{2}3x$; б) $xy-6=\cos y$; в) $\begin{cases} x=\sin 2t; \\ y=\cos^{2} t; \end{cases}$

2.2.20 а) $y=\ln(x^{2}-4)$; б) $3y=7+xy^{3}$; в) $\begin{cases} x=e^{3t}; \\ y=e^{-3t}; \end{cases}$

2.2.21 а) $y=x^{2}\cos x$; б) $y^{2}=x+\ln xy$; в) $\begin{cases} x=\ln t^{2}; \\ y=t^{2}\ln t; \end{cases}$

2.2.22 а) $y=x\arccos x$; б) $xy^{2}-y^{3}=4x-5$; в) $\begin{cases} x=\arccos t; \\ y=\sqrt{1-t^{2}}; \end{cases}$

2.2.23 а) $y=x\ln(x+1)$; б) $x^{2}y^{2}+x=5y$; в) $\begin{cases} x=t^{2}+1; \\ y=t\ln t; \end{cases}$

2.2.24 а) $y=\ln^3 x$; б) $x^4+x^2y^2+y=4$; в) $\begin{cases} x=\sin^3 t; \\ y=\cos^3 t; \end{cases}$

2.2.25 а) $y=2^{x^2}$; б) $\sin y = xy^2+5$; в) $\begin{cases} x=e^{-3t}; \\ y=e^{8t}; \end{cases}$

2.2.26 а) $y=x-\operatorname{arcctg} x$; б) $x^3+y^3=5x$; в) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{(t-1)^2}; \\ y=\sqrt{t-1}; \end{cases}$

2.2.27 а) $y=x\sin 2x$; б) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=y$; в) $\begin{cases} x=\ln^2 t; \\ y=t+\ln t; \end{cases}$

2.2.28 а) $y=\sin\left(x^3-x\right)$; б) $y^2=x-xy$; в) $\begin{cases} x=te^t; \\ y=t^2e^{-t}; \end{cases}$

2.2.29 а) $y=x\operatorname{arcctg} x$; б) $\sin^2\left(3x+y^2\right)=5$; в) $\begin{cases} x=\arcsin t; \\ y=\ln t; \end{cases}$

2.2.30 а) $y=e^{-x}\sin x$; б) $\operatorname{ctg}^2\left(x+y\right)=5x$; в) $\begin{cases} x=6t^2-4; \\ y=3t^5. \end{cases}$

2.3 Найти дифференциалы первого, второго и n-го порядков.

2.3.1 $y=\ln x$;

2.3.2 $y=\dfrac{1}{x}$;

2.3.3 $y=e^{-2x}$;

2.3.4 $y=xe^{3x}$;

2.3.5 $y=\dfrac{1}{x-7}$;

2.3.6 $y=e^{-5x}$;

2.3.7 $y=10^x$;

2.3.8 $y=\dfrac{1}{x-6}$;

2.3.9 $y=\ln(4+x)$;

2.3.10 $y=\ln\dfrac{1}{4-x}$;

2.3.11 $y=\cos 3x$;

2.3.12 $y=xe^{6x}$;

2.3.13 $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$;

2.3.14 $y=5^x$;

2.3.15 $y=\sqrt{x}$;

2.3.16 $y=\dfrac{1}{x+5}$;

2.3.17 $y=\sqrt{x+7}$;

2.3.18 $y=\frac{4}{x+3}$;

2.3.19 $y=\cos 2x$;

2.3.20 $y=\sin 3x$;

2.3.21 $y=\frac{1}{1+x}$;

2.3.22 $y=4^x$;

2.3.23 $y=e^{4x}$;

2.3.24 $y=\ln\left(5+x^2\right)$;

2.3.25 $y=\frac{1}{x-3}$;

2.3.26 $y=7^x$;

2.3.27 $y=\ln(3x-5)$;

2.3.28 $y=\frac{x}{x+5}$;

2.3.29 $y=\ln(5x-1)$;

2.3.30 $y=\ln(3+x)$.

2.4 Вычислить приближённо с помощью дифференциала и оценить допущенную относительную погрешность.

2.4.1 $y=x^{11}, \quad x=1,021$;

2.4.2 $y=\arcsin x, \quad x=0,08$;

2.4.3 $y=\sqrt{5-x^2}, \quad x=0,98$;

2.4.4 $y=x^{21}, \quad x=0,998$;

2.4.5 $y=\cos x, \quad x=61°$;

2.4.6 $y=\sqrt{4x-1}, \quad x=2,56$;

2.4.7 $y=x^4, \quad x=3,998$;

2.4.8 $y=\lg x, \quad x=0,9$;

2.4.9 $y=\sqrt{x^3}, \quad x=0,98$;

2.4.10 $y=x^5, \quad x=2,997$;

2.4.11 $y=\arcsin x, \quad x=0,54$;

2.4.12 $y=\sqrt{4x-3}, \quad x=1,78$;

2.4.13 $y=2^x, \quad x=2,1$;

2.4.14 $y=\operatorname{ctg} x, \quad x=29°$;

2.4.15 $y=\sqrt[3]{x}, \quad x=8,24$;

2.4.16 $y=\sqrt[3]{x}, \quad x=7,76$;

2.4.17 $y=x^6, \quad x=2,01$;

2.4.18 $y=\operatorname{arctg} x, \quad x=1,05$;

2.4.19 $y=\sqrt[3]{x}, \quad x=26,46$;

2.4.20 $y=x^7, \quad x=1,996$;

2.4.21 $y=\operatorname{tg} x, \quad x=44°$;

2.4.22 $y=\sqrt[3]{x}, \quad x=8,36$;

2.4.23 $y=x^7, \quad x=2,002$;

2.4.24 $y=\sin x, \quad x=29°$;

2.4.25 $y=\sqrt[5]{x^2}, \quad x=1,03$;

2.4.26 $y=e^x, \quad x=2,01$;

2.4.27 $y=\sin x, \quad x=93°$;

2.4.28 $y=\sqrt[3]{x}, \quad x=7,64$;

2.4.29 $y=x^3, \quad x=5,07$;

2.4.30 $y=\log_2 x, \quad x=1,9$.

2.5 Решить задачи.

2.5.1 а) записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 7x + 3$ в точке с абсциссой $x = 1$;

б) траектория движения тела – кубическая парабола $12y = x^3$. В каких её точках скорости возрастания абсциссы и ординаты одинаковы?

2.5.2 а) записать уравнение нормали к кривой $y = x^2 - 16x + 7$ в точке с абсциссой $x = 1$;

б) закон движения материальной точки $s = \frac{3t^2}{4} - 3t + 7$. В какой момент времени скорость её движения будет равна 2 м/с?

2.5.3 а) записать уравнение касательной к линии $y = \sqrt{x - 4}$ в точке с абсциссой $x = 8$;

б) по оси Ох движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 4t^2 - 7$ и $x = 3t^2 - 4t + 38$. С какой скоростью эти точки удаляются друг от друга в момент встречи?

2.5.4 а) записать уравнение нормали к линии $y = \sqrt{x + 4}$ в точке с абсциссой $x = -3$;

б) материальная точка движется по гиперболе $xy = 12$ так, что её абсцисса х равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ордината точки, когда она проходит положение $(6; 2)$?

2.5.5 а) записать уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ в точке $(2; 1)$;

б) в какой точке параболы $y^2 = 4x$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса?

2.5.6 а) записать уравнение нормали к кривой $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ в точке $(1; 1)$;

б) закон движения материальной точки $s = t^4 - 3t^2 + 2t - 4$. Найти скорость движения точки в момент времени $t = 2$ с;

2.5.7 а) определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ в точке $(3; 2)$;

б) закон движения материальной точки $s = 3t^4 - t^3 + 4t^2 + 6$. Найти скорость её движения в момент времени $t = 2$ с;

2.5.8 а) в какой точке кривой $y^2 = 4x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $x + 3y - 1 = 0$?

б) закон движения материальной точки $s = 4\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + 6$. Найти её скорость в момент времени $t = \pi$ с;

2.5.9 а) записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 6x + 2$ в точке с абсциссой $x = 2$;

б) закон движения материальной точки $s = 4\sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - 8$. Найти её скорость в момент времени $t = \frac{\pi}{2}$ с;

2.5.10 а) записать уравнение касательной к кривой $y = \frac{x^2}{4} - x + 5$ в точке с абсциссой $x = 4$;

б) закон движения материальной точки $s = -3\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + 10$. Найти её скорость в момент времени $t = \frac{\pi}{3}$ с;

2.5.11 а) записать уравнение нормали к кривой $y = \frac{x^2}{4} - 27x + 60$ в точке с абсциссой $x = 2$;

б) закон движения материальной точки $s = 4\mathrm{t}^3 - 2t + 11$. В какой момент времени её скорость будет равна 190 м/с?

2.5.12 а) записать уравнение касательной к кривой $y = -\frac{x^2}{2} + 7x - \frac{15}{2}$ в точке с абсциссой $x = 3$;

б) закон движения материальной точки $s = \frac{5\mathrm{t}^3}{3} - 2t + 7$. Найти скорость её движения в момент времени $t = 4$ с;

2.5.13 а) записать уравнение нормали к кривой $y = 3\,\mathrm{tg}\,2x + 1$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{2}$;

б) закон движения материальной точки $s = 2t^5 - 6\mathrm{t}^3 - 58$. Найти скорость её движения в момент времени $t = 2$ с;

2.5.14 а) записать уравнение касательной к кривой $y = 4\operatorname{tg}3x$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{\pi}{9}$;

б) по оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 3t^2 - 8$ и $x = 2t^2 + 5t + 6$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

2.5.15 а) записать уравнение нормали к кривой $y = 6\operatorname{tg}5x$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{\pi}{20}$;

б) по оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 5t^2 - t + 6$ и $x = 4t^2 + 18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

2.5.16 а) записать уравнение касательной к кривой $y = 4\sin 6x$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{\pi}{18}$;

б) по оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = \dfrac{4t^3}{3} - 7t + 16$ и $x = t^3 + 2t^2 + 5t - 8$. В какой момент времени их скорости окажутся равными?

2.5.17 а) выяснить, в каких точках кривой $y = \sin 2x$ касательная составляет с осью Ox угол $\dfrac{\pi}{4}$;

б) закон движения материальной точки $s = \dfrac{\mathrm{t}^3}{3} - 2t^2 - 11t + 275$. В какой момент времени скорость её движения будет равна 10 м/с?

2.5.18 а) выяснить, в какой точке кривой $y = 2x^3 - 1$ касательная составляет с осью Ox угол $\dfrac{\pi}{3}$;

б) материальная точка движется по гиперболе $xy = 20$ так, что её абсцисса равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется её ордината, когда точка проходит положение $(4;5)$?

2.5.19 а) выяснить, в какой точке кривой $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-7x+9$ касательная составляет с осью Ox угол $-\frac{\pi}{4}$;

б) в какой точке параболы $y^2=8x$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса?

2.5.20 а) выяснить, в каких точках кривой $y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x+4$ касательная составляет с осью Ox угол $\frac{\pi}{4}$;

б) по оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x=5t^2+2t+6$ и $x=4t^2+3t+18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

2.5.21 а) найти точки на кривой $y=\frac{x^3}{3}-\frac{9x^2}{2}+20x-7$, в которых касательные параллельны оси Ox;

б) в какой точке кривой $y^2=16x$ ордината возрастает в 4 раза быстрее, чем абсцисса?

2.5.22 а) найти точку на кривой $y=\frac{x^4}{4}-7$, касательная в которой параллельна прямой $y=8x-4$;

б) в какой точке параболы $x^2=9y$ абсцисса возрастает вдвое быстрее, чем ордината?

2.5.23 а) найти точку на кривой $y=-3x^2+4x+7$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x-20y+5=0$;

б) в какой точке параболы $x^2=10y$ абсцисса возрастает в пять раз быстрее, чем ордината?

2.5.24 а) найти точку на кривой $y=3x^2-4x+6$, касательная в которой параллельна прямой $8x-y-5=0$;

б) по оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x=2t^3-2t^2+6t-7$ и $x=\frac{5t^3}{3}-t^2+14t+4$. В какой момент времени их скорости будут равными?

2.5.25 а) найти точку на кривой $y=5x^2-4x+1$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x+6y+15=0$;

б) закон движения материальной точки по прямой задан формулой $s=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-30t+18$. В какой момент времени скорость точки будет равна нулю?

2.5.26 а) найти точку на кривой $y=3x^2-5x-11$, касательная в которой параллельна прямой $x-y+10=0$;

б) тело движется по прямой Ox по закону $s=\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+10t-16$. Определить скорость и ускорение движения тела. В какие моменты времени оно меняет направление движения?

2.5.27 а) найти точку на кривой $y=-x^2+7x+16$, касательная в которой параллельна прямой $y=3x+4$;

б) зависимость между массой x кг вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x=7\left(1-e^{-4t}\right)$. Определить скорость реакции в случае, когда $t=0$ с;

2.5.28 а) выяснить, в какой точке кривой $y=4x^2-10x+13$ касательная параллельна прямой $y=6x-7$;

б) материальная точка движется прямолинейно так, что $v^2=6x$, где v – скорость, а x – пройденный путь. Определить ускорение движения точки в момент, когда скорость равна 6 м/с;

2.5.29 а) выяснить, в какой точке кривой $y=7x^2-5x+4$ касательная перпендикулярна к прямой $23y+x-1=0$;

б) закон движения материальной точки $s=3t+t^3$. Найти скорость её движения в момент времени $t=2$ с;

2.5.30 а) выяснить, в какой точке кривой $y=\frac{x^2}{4}-7x+5$ касательная параллельна прямой $y=2x+5$;

б) закон движения материальной точки $s=\frac{5t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+7$. В какой момент времени её скорость будет равна 42 м/с?

2.6 Найти пределы, используя правило Лопиталя.

2.6.1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

2.6.2 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{(x+3)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{x-1}$.

2.6.3 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)x$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{\operatorname{ctg} x}$.

2.6.4 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{2\sin x + x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

2.6.5 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

2.6.6 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

2.6.7 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{3}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$.

2.6.8 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} x^4\sin\dfrac{a}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$.

2.6.9 а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-2\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 5x}{\ln\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(x+e)\right)^{\frac{1}{x}}$.

2.6.10 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

2.6.11 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

2.6.12 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{4x-\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2+3x+1}{x^3-x^2-x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

2.6.13 а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{1}{\sin^2 x}-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

2.6.14 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

2.6.15 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

2.6.16 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})\operatorname{ctg}x$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2}}{4x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{3x}$.

2.6.17 а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)\operatorname{ctg}4x$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

2.6.18 а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\dfrac{a}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

2.6.19 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos x\ln(x-1)}{\ln(e^x-e)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

2.6.20 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{b^x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{6x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-5x+1}{5x^4+2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$.

2.6.21 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$.

2.6.22 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-0{,}01x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{3-4x^2+8x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

2.6.23 а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\ln 2x\cdot\ln(2x-1)$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

2.6.24 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{5}{x^2-x-20}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-8}{x+x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{2}{x}\right)^x$.

2.6.25 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}\,\pi x$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\mathrm{ctg}\,\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

2.6.26 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^3}{\sin^2 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-2x^2}{3x^2+x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\mathrm{ctg}\,\pi x}$.

2.6.27 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}\,x\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^x$.

2.6.28 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$; в) $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$.

2.6.29 а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x^m-a^m}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

2.6.30 а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}-1}{2\sin^2 x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+6x-5}{5x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

2.7 Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

2.7.1 $y=(x+2)e^{1-x}, \quad [-2; 2]$;

2.7.2 $y=\sqrt{x-x^3}, \quad [-2; 2]$;

2.7.3 $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}, \quad [-1; 1]$;

2.7.4 $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^3, \quad [1; 2]$;

2.7.5 $y=\dfrac{3x}{x^2+1}, \quad [0; 5]$;

2.7.6 $y=xe^x, \quad [-2; 0]$;

2.7.7 $y=(x-1)e^{-x}, \quad [0; 3]$;

2.7.8 $y=\dfrac{x}{9-x^2}, \quad [-2; 2]$;

2.7.9 $y=\dfrac{x^5-8}{x^4}, \quad [-3; -1]$;

2.7.10 $y=x\ln x, \quad \left[\dfrac{1}{e^2}; 1\right]$;

2.7.11 $y=x^3e^{x+1}, \quad [-4; 0]$;

2.7.12 $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}, \quad \left[-\dfrac{4}{5}; 3\right]$;

2.7.13 $y=(3-x)e^{-x}, \quad [0; 5]$;

2.7.14 $y=108x-x^4, \quad [-1; 4]$;

2.7.15 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos x, \quad \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

2.7.16 $y=\ln\left(x^2-2x+2\right), \quad [0; 3]$;

2.7.17 $y=4-e^{-x^2}, \quad [0; 1]$;

2.7.18 $y=\ln\left(x^2-2x\right), \quad \left[-1; \dfrac{3}{2}\right]$;

2.7.19 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}, \quad [1; 2]$;

2.7.20 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}, \quad \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right]$;

2.7.21 $y=(x-2)e^x, \quad [-2; 1]$;

2.7.22 $y=e^{4x-x^2}, \quad [1; 3]$;

2.7.23 $y=\dfrac{1+\ln x}{x}, \quad \left[\dfrac{1}{e}; e\right]$;

2.7.24 $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}, \quad [-1; 2]$;

2.7.25 $y=x^2-2x+\dfrac{2}{x-1}, \quad [-1; 3]$;

2.7.26 $y=e^{6x-x^2}, \quad [-3; 3]$;

2.7.27 $y=\dfrac{\ln x}{x}, \quad [1; 4]$;

2.7.28 $y=3x^4-16x^3+2, \quad [-3; 1]$;

2.7.29 $y=x^5-5x^4+1, \quad [-1; 2]$;

2.7.30 $y=\dfrac{x^4}{4}-6x^3+7, \quad [16; 20]$.

2.8 Провести полное исследование функций и построить их графики.

2.8.1 а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $y=xe^{-x^2}$;

2.8.2 а) $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$; б) $y=\ln\left(x^2+1\right)$;

2.8.3 а) $y=\dfrac{x}{9-x}$; б) $y=e^{2x-x^2}$;

2.8.4 а) $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

2.8.5 а) $y=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$; б) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$;

2.8.6 а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$; б) $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$;

2.8.7 а) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; б) $y=(x-1)e^{3x+1}$;

2.8.8 а) $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$; б) $y=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}\,(x-5)$;

2.8.9 а) $y=\dfrac{x^2+6}{x^2-1}$; б) $y=x\ln x$;

2.8.10 а) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$; б) $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$;

2.8.11 а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y=x+\ln\left(x^2-4\right)$;

2.8.12 а) $y=\dfrac{x^5}{x^4-1}$; б) $y=x\ln^2 x$;

2.8.13 а) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$; б) $y=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$;

2.8.14 а) $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$; б) $y=\dfrac{4e^{x^2}-1}{e^{x^2}}$;

2.8.15 а) $y=\dfrac{x^4+1}{x^2}$; б) $y=xe^{\frac{1}{x}}$;

2.8.16 а) $y=\dfrac{5x^4+3}{x}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

2.8.17 а) $y=\dfrac{4-2x}{1-x^2}$; б) $y=xe^x$;

2.8.18 а) $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$; б) $y=(x+1)e^{2x}$;

2.8.19 а) $y=\dfrac{2(x+1)^2}{x-2}$; б) $y=\ln(x^2-2x+6)$;

2.8.20 а) $y=\dfrac{2+x}{(x+1)^2}$; б) $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

2.8.21 а) $y=\dfrac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$; б) $y=x^3e^{x+1}$;

2.8.22 а) $y=\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$; б) $y=x-\ln(1+x^2)$;

2.8.23 а) $y=\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$; б) $y=1-\ln^3 x$;

2.8.24 а) $y=\dfrac{x^3}{9-x^3}$; б) $y=(x-1)e^{4x+2}$;

2.8.25 а) $y=\dfrac{4x}{4-x^2}$; б) $y=-x\ln^2 x$;

2.8.26 а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $y=x^2-2\ln x$;

2.8.27 а) $y=\dfrac{2x^2+2+4x}{2-x}$; б) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$;

2.8.28 а) $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$; б) $y=\ln(4-x^2)$;

2.8.29 а) $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$; б) $y=(x-2)e^{3-x}$;

2.8.30 а) $y=\dfrac{x^3-32}{x}$; б) $y=\ln\dfrac{x}{x+2}+1$.

Список литературы

1 **Гусак, А. А.** Высшая математика : учебник для студентов вузов в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Т. 1. – 544 с.

2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – Ч. 1. – 383 с.

3 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 432 с.

4 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

5 Руководство к решению задач по высшей математике / Под ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 1. – 349 с.

6 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1988. – 576 с.

7 Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие для втузов / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – Ч. 1. – 464 с.

8 **Шипачёв, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачёв. – 7-е изд. – М. : Высш. шк., 2005. – 479 с.