ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 2
ТЕМА: Аналитическая геометрия

Примеры решения задач.

Пример 1. В прямоугольной декартовой системе координат заданы вершины треугольника *ABC*: *A*(4; 3), *B*(16; –6); *C*(20; 16). Найти:

1. длину стороны *AB*;
2. уравнения сторон *AB* и *BC* и их угловые коэффициенты;
3. угол *B* треугольника (с точностью до одной минуты);
4. уравнение высоты *CD* и ее длину;
5. уравнение биссектрисы *BN*;
6. уравнение медианы *AE* и координаты точки *K* пересечения этой медианы с высотой *CD*;
7. уравнение прямой *KL*, проходящей через точку *K* параллельно прямой *AB*;
8. координаты точки *M*, расположенной симметрично точке *A* относительно прямой *CD*.

Построить треугольник *ABC*, высоту *CD*, медиану *AE*, биссектрису *BN* и точку *M*.

Решение.

1. Применяя формулу для вычисления расстояния между точками (или формулу для вычисления модуля вектора) находим:

$$d = r(A,B) = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(16-4)^2 + (-6-3)^2} = 15.$$

2. Подставляя в уравнение прямой, проходящей через две точки, координаты точек *A* и *B*, *B* и *C*, получим уравнения:

$$\frac{y-3}{-6-3} = \frac{x-4}{16-4}; \qquad \frac{y+6}{16+6} = \frac{x-16}{20-16}.$$

В результате преобразования этих уравнений получим соответственно:

$$AB: \quad 3x+4y-24=0, \qquad BC: \quad 11x-2y-188=0.$$

$$y = -\frac{3}{4}x+6, \quad \Rightarrow \quad k_{AB} = -\frac{3}{4};$$

$$y = 5{,}5x-94, \quad \Rightarrow \quad k_{BC} = 5{,}5.$$

3. Если прямые не являются взаимно перпендикулярными и ни одна из них не параллельна оси Оу, то острый угол между ними может быть определен по формуле

$$\varphi = arctg\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}\right|.$$

Поскольку угловые коэффициенты сторон угла *B* нам уже известны и угол *B* острый угол (см. чертеж), то подставляя в последнюю формулу k_{AB} и k_{BC}, получим

$$B = arctg\,2 \quad \Rightarrow \quad B \cong 63^\circ 26'.$$

Угол между прямыми может быть также найден как угол между их нормальными векторами (или между направляющими векторами).

4. Из условия перпендикулярности прямых *AB* и *CD* находим угловой коэффициент прямой *CD*: $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{4}{3}$. Если известна точка (x_0, y_0) искомой прямой и ее угловой коэффициент *k*, то уравнение прямой можно записать в виде $y - y_0 = k\cdot(x-x_0)$. Поскольку координаты точки *C* нам известны, то уравнение прямой *CD* имеет вид:

$$y-16 = \frac{4}{3}\cdot(x-20) \quad \Rightarrow \quad 4x-3y-32=0.$$

Для нахождения длины высоты *CD* определим вначале координаты точки *D* – точки пересечения прямых *AB* и *CD*. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+4y-24=0, \\ 4x-3y-32=0, \end{cases}$$

находим $D(8, 0)$. Поэтому $CD=\sqrt{(20-8)^2+(16-0)^2}=20$.
Длину высоты *CD* можно найти по формуле, дающей расстояние от точки до прямой:

$$CD=\frac{|3\cdot 20+4\cdot 16-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=20.$$

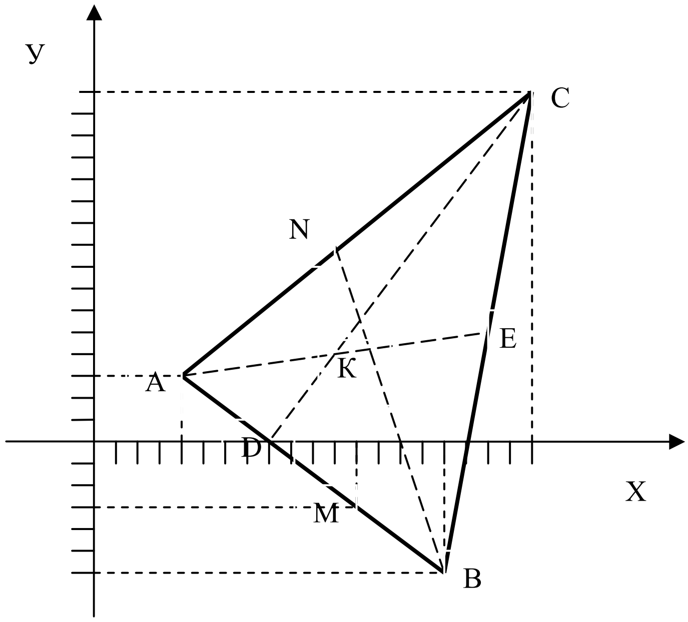
5. Вначале определим координаты точки *N*, принадлежащей стороне треугольника *AC*, и делящей эту сторону в отношении $\lambda=\frac{AN}{NC}$. По свойству биссектрисы угла треугольника можем записать $\frac{AN}{NC}=\frac{AB}{BC}$. Вычисляем длины сторон треугольника: $AB=15, BC=10\sqrt{5}$. Условимся проводить вычисления в этом пункте с точностью до 0,1, т.е. $\lambda=\frac{15}{10\sqrt{5}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}\cong 0{,}7$.
Находим координаты точки *N*:
$x_N=\frac{x_A+\lambda\cdot x_C}{1+\lambda}=\frac{4+0{,}7\cdot 20}{1+0{,}7}\cong 10{,}6;\quad y_N=\frac{y_A+\lambda\cdot y_C}{1+\lambda}=\frac{3+0{,}7\cdot 16}{1+0{,}7}\cong 8{,}4.$
Запишем уравнение биссектрисы угла *B* как уравнение прямой, проходящей через две точки *B*(16; –6) и *N*(10,6; 8,4):
$\frac{x-16}{10{,}6-16}=\frac{y+6}{8{,}4+6}\quad\Rightarrow\quad 8x+3y-110=0$ –уравнение биссектрисы угла *B*.

Можно рекомендовать другой путь решения этой задачи: найти орт вектора $\overline{BA}$, т.е. $\overline{BA}^{\circ}$, и орт вектора $\overline{BC}$, т.е. $\overline{BC}^{\circ}$, тогда вектор $\overline{BA}^{\circ}+\overline{BC}^{\circ}$ есть направляющий вектор искомой биссектрисы, проходящей через заданную точку *B*.

6. Определим координаты точки *E*, являющейся серединой стороны *BC*, по формулам деления отрезка в данном отношении при $\lambda=1$:
$x_E=\frac{16+20}{2}=18,\quad y_E=\frac{-6+16}{2}=5\quad\Rightarrow\quad E(18;5).$
Согласно уравнению прямой, проходящей через две точки, уравнение медианы *AE* имеет вид:
$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-4}{18-4}$ или $\frac{y-3}{2}=\frac{x-4}{14}\quad\Rightarrow\quad x-7y+17=0$ – общее уравнение прямой *AE*.
Точка пересечения медианы *AE* и высоты *CD* определяется в результате решения системы уравнений
$$\begin{cases} 4x-3y-32=0, \\ x-7y+17=0, \end{cases}\quad\Rightarrow\quad K(11;4).$$
7. Ввиду параллельности прямых *KL* и *AB*, $k_{KL}=k_{AB}$. Подставляя координаты точки *K* и $k=k_{AB}$ в уравнение прямой, проходящей через заданную точку, с известным угловым коэффициентом, получим
$y-4=-\frac{3}{4}\cdot(x-11),\quad\Rightarrow\quad 3x+4y-49=0$ – общее уравнение прямой *KL*.
8. Прямая *AB* перпендикулярна прямой *CD*; поэтому точка *M* лежит на прямой *AB*. Кроме того, точка *D* является серединой отрезка *AM*. Применяя формулы деления отрезка в данном отношении, находим координаты x_M, y_M точки *M*:

$$8=\frac{4+x_M}{2},\ 0=\frac{3+y_M}{2},\quad \Rightarrow\quad x_M=12,\ y_M=-3\quad\Rightarrow\quad M(12;-3).$$

Выполним чертеж:



Пример 2. Привести уравнение $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$ линии второго порядка к каноническому виду; построить данную линию (на чертеже указать «старую» и «новую» системы координат).

Решение. Перепишем уравнение в виде

$4(x^2-10x)+9(y^2+4y)+100=0$.

Проведем в скобках «дополнение до полного квадрата» и выполним очевидные преобразования:

$4(x^2-2\cdot5\cdot x+5^2-5^2)+9(y^2+2\cdot2\cdot y+2^2-2^2)+100=0$,

$4(x-5)^2-100+9(y+2)^2-36+100=0$,

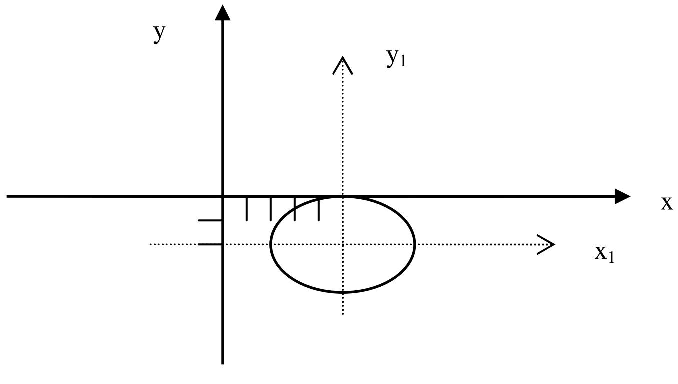
$4(x-5)^2+9(y+2)^2=36$,

$$\frac{(x-5)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{2^2}=1.$$

Введем «новые» координаты $x_1=x-5,\ y_1=y+2$. Последнее уравнение в «новых» координатах примет вид:

$$\frac{x_1^2}{3^2}+\frac{y_1^2}{2^2}=1.$$

Это есть каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=3,\ b=2$



Пример 3. В прямоугольной декартовой системе координат заданы четыре точки $A(0;-2;-1)$, $B(2;4;-2)$, $C(3;2;0)$, $M(-11;8;10)$. Требуется:

1. составить общее уравнение плоскости *Q*, проходящей через точки *A*, *B*, *C*;
2. составить канонические уравнения прямой линии, проходящей через точку *M* перпендикулярно плоскости *Q* и найти координаты точки *N* пересечения этой прямой с плоскостью *Q*;
3. найти расстояние от точки *M* до плоскости *Q*;
4. составить канонические уравнения прямых *AB* и *AM* и найти угол между этими прямыми;
5. найти угол между прямой *AM* и плоскостью *Q*;
6. найти площадь треугольника *ABC*;
7. найти объем пирамиды *ABCM*.

Решение.

1. Подставляя в уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, координаты точек *A*, *B*, *C* получим

$$\begin{vmatrix} x & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

В результате вычисления определителя имеем

$$10x - 5(y+2) - 10(z+1) = 0.$$

Искомое уравнение плоскости *Q*:

$$2x - y - 2z - 4 = 0.$$

Уравнение плоскости *Q* можно найти используя другие формулы, например: уравнение плоскости, проходящей через точку, ортогонально вектору (здесь в качестве заданной точки взять любую из трех заданных точек, скажем точку *A*, и нормальный вектор плоскости *Q* определить как векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$).

2. В качестве направляющего вектора искомой прямой возьмем нормальный вектор плоскости Q. Подставив в канонические уравнения прямой координаты точки *M* и координаты направляющего вектора (2, –1, –2), получим уравнения прямой *MN*:

$$\frac{x+11}{2} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-10}{-2}.$$

Найдем точку *N*. Используем параметрические уравнения прямой *MN*

$$\begin{cases} x = -11 + 2t, \\ y = 8 - t, \\ z = 10 - 2t. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение плоскости *Q*, получим значение параметра *t*:

$$2(-11+2t) - (8-t) - 2(10-2t) - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 6.$$

Подставив в параметрические уравнения прямой *MN* $t = 6$, находим координаты точки *N* пересечения этой прямой с плоскостью *Q*: $x = 1,\ y = 2,\ z = -2, \qquad N(1,\ 2,\ -2)$.

3. Используя формулу для нахождения расстояния от точки до плоскости, находим:

$$d = \frac{|2\cdot(-11) + (-1)\cdot 8 + (-2)\cdot 10 + (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 18.$$

Это расстояние можно найти и как расстояние между двумя точками: *M* и *N*.

4. Запишем уравнение прямой *AB* как уравнение прямой, проходящей через две точки

$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y+2}{4+2}=\frac{z+1}{-2+1} \Rightarrow$ канонические уравнения прямой AB: $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{6}=\frac{z+1}{-1}$.

Аналогично получаем канонические уравнения прямой AM: $\frac{x}{-11}=\frac{y+2}{10}=\frac{z+1}{11}$.

Угол между прямыми AB и AM найдем как угол между их направляющими векторами:

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot(-11)+6\cdot 10+(-1)\cdot 11}{\sqrt{2^2+6^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-11)^2+10^2+11^2}}\cong 0{,}228,$$

поскольку $\cos\varphi>0$, то мы находим острый угол между этими прямыми: $\varphi=\arccos 0{,}228\cong 76^\circ 49'$ (с точностью до минуты).

5. В формулу для вычисления синуса угла между прямой и плоскостью подставляем координаты нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой, получим:

$$\sin\alpha=\frac{|2\cdot(-11)+(-1)\cdot 10+(-2)\cdot 11|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-11)^2+10^2+11^2}}=\frac{|-54|}{3\cdot\sqrt{342}}\cong 0{,}973,$$

$\alpha=\arcsin 0{,}973\cong 76^\circ 40'$ (с точностью до одной минуты).

6. Поскольку площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, численно равна модулю векторного произведения этих векторов, то площадь треугольника ABC найдем как

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{2}.$$

$$\overline{AB}=(2,6,-1),\quad \overline{AC}=(3,4,1)\Rightarrow \overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 6 & -1\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix}=10\bar{i}-5\bar{j}-10\bar{k}\Rightarrow \left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=15.$$

Следовательно, $S_{\Delta ABC}=7{,}5$ кв.ед.

7.) $V_{пирABCM}=\frac{\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AM}\right|}{6}$, здесь $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AM}$ смешанное произведение трех векторов.

$$\overline{AB}=(2,6,-1),\ \overline{AC}=(3,4,1),\ \overline{AM}=(-11,10,11)\Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AM}=\begin{vmatrix}2 & 6 & -1\\ 3 & 4 & 1\\ -11 & 10 & 11\end{vmatrix}=-270.$$

Следовательно, $V_{пирABCM}=\frac{270}{6}=45$ куб.ед.

Конечно, в данном случае можно найти объем пирамиды и так: $V_{пир}=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot H$, т.е. $V_{пирABCM}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot d=\frac{1}{3}\cdot 7{,}5\cdot 18=45.$

Задачи для индивидуальных заданий

В задачах 1-30 даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

1) уравнение биссектрисы, проведенной из вершины B;
2) центр тяжести треугольника (точка пересечения медиан);
3) центр и уравнение описанной окружности;
4) площадь треугольника ABC;
5) записать систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	-3,-1	-4,2	1,-1	-2,-3	1,-4	-4,1	-1,2	-3,-2	3,2	-1,-3	-1,-3	2,-1	-1,-3	3,2	-1,2
B	-1,3	2,3	3,-1	-1,-3	-4,2	-4,-1	-3,-1	-4,2	-1,-1	-1,-2	2,3	2,1	1,-1	2,-4	-4,2
C	-4,3	-4,-2	-1,3	2,-1	-4,-3	1,-1	2,-2	-1,-1	-3,-2	1,-1	-4,-1	-2,3	-3,-4	-1,-4	-1,-3

№	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	-4,-1	2,-1	-1,2	-4,-1	-4,-4	-4,-2	-4,1	-2,-4	-2,1	-2,-4	-4,1	3,2	2,-1	1,-1	-3,-2
B	-1,-2	3,-2	-1,-4	1,-1	-1,-3	-4,1	3,-4	-1,1	-1,-2	-1,1	-4,-1	2,-4	3,-2	3,-1	-4,2
C	-4,-3	1,2	1,-4	-4,1	-4,-1	-2,-1	2,-3	2,2	-1,-4	2,2	1,-1	-1,-4	1,2	-1,3	-1,-1

В задачах 31-60 привести уравнения линий 2 – го порядка к каноническому виду; построить данные линии (на чертеже указать «старую» и «новую» системы координат).

31	*а)* $9x^2+y^2+72x-4y+139=0$ *б)* $16x^2-y^2-64x+2y+47=0$ *в)* $y^2-6x+2y-23=0$ *г)* $x^2+y^2-2x+2y+1=0$	41	*а)* $x^2+y^2+8x+8y+16=0$ *б)* $16x^2+y^2-96x+2y+129=0$ *в)* $9x^2-y^2+72x-8y+119=0$ *г)* $y^2-2x-6y+13=0$	51	*а)* $x^2-y^2-4x+4y-1=0$ *б)* $y^2+8x+6y+1=0$ *в)* $x^2+y^2+8x+8y+28=0$ *г)* $x^2+9y^2+8x+72y+151=0$
32	*а)* $y^2+4x+8y+120=0$ *б)* $x^2+y^2+8x+2y+16=0$ *в)* $16x^2-4y^2+128x+24y+156=0$ *г)* $9x^2+16y^2+54x+128y+193=0$	42	*а)* $y^2+6x+8y+40=0$ *б)* $x^2+y^2+6x+2y-6=0$ *в)* $16x^2-1y^2+128x-2y+239=0$ *г)* $4x^2+y^2-24x+8y+48=0$	52	*а)* $y^2+8x+8y+8=0$ *б)* $x^2+y^2-6x+8y+16=0$ *в)* $x^2-16y^2+4x-128y-268=0$ *г)* $16x^2+9y^2+64x+72y+64=0$
33	*а)* $4x^2-4y^2+32x-32y-16=0$ *б)* $16x^2+4y^2+96x+24y+116=0$ *в)* $x^2+y^2-4x+4y-8=0$ *г)* $y^2+2x+6y+11=0$	43	*а)* $x^2-4y^2+2x+16y-19=0$ *б)* $16x^2+4y^2+64x+24y+36=0$ *в)* $x^2+y^2-6x-2y-6=0$ *г)* $y^2+8x-2y+33=0$	53	*а)* $16x^2-y^2+128x+6y+231=0$ *б)* $9x^2+16y^2+54x-96y+81=0$ *в)* $x^2+y^2+8x+8y+23=0$ *г)* $y^2+4x+8y+28=0$
34	*а)* $x^2+y^2+2x+2y-14=0$ *б)* $y^2+2x+8y+12=0$ *в)* $9x^2-4y^2+18x-32y-91=0$ *г)* $16x^2+y^2-32x+8y+16=0$	44	*а)* $x^2+y^2+2x+8y+16=0$ *б)* $y^2+6x+8y+22=0$ *в)* $9x^2-16y^2+18x-96y-279=0$ *г)* $9x^2+16y^2+72x+128y+256=0$	54	*а)* $x^2+y^2+8x+8y+28=0$ *б)* $y^2+4x-6y+5=0$ *в)* $16x^2-9y^2+32x-54y-209=0$ *г)* $x^2+9y^2+8x+72y+151=0$
35	*а)* $y^2+8x-6y+17=0$ *б)* $x^2+9y^2-2x-54y+73=0$ *в)* $4x^2-y^2-24x+6y+23=0$ *г)* $x^2+y^2+8x+8y+28=0$	45	*а)* $y^2+8x-6y-15=0$ *б)* $9x^2+y^2+54x+8y+88=0$ *в)* $x^2-9y^2+8x-72y-173=0$ *г)* $x^2+y^2+2x+6y-6=0$	55	*а)* $y^2+4x+8y+120=0$ *б)* $x^2+y^2+8x+2y+16=0$ *в)* $16x^2-4y^2+128x+24y+156=0$ *г)* $9x^2+16y^2+54x+128y+193=0$
36	*а)* $y^2+2x-4y+12=0$ *б)* $x^2+y^2+2x-6y+6=0$ *в)* $x^2+4y^2-4x-24y+36=0$ *г)* $4x^2-y^2+32x-8y+44=0$	46	*а)* $y^2-2x-4y+6=0$ *б)* $x^2+y^2-2x-6y+9=0$ *в)* $4x^2+9y^2-16x+72y+124=0$ *г)* $x^2-4y^2+6x-8y+1=0$	56	*а)* $x^2+y^2+8x+8y+16=0$ *б)* $16x^2+y^2-96x+2y+129=0$ *в)* $9x^2-y^2+72x-8y+119=0$ *г)* $y^2-2x-6y+13=0$
37	*а)* $x^2+y^2+6x+8y+24=0$ *б)* $16x^2+y^2+64x+6y+57=0$ *в)* $x^2-y^2=4x-2y+2=0$ *г)* $y^2-6x-4y-14=0$	47	*а)* $9x^2+4y^2+36x+16y+16=0$ *б)* $4x^2-16y^2+8x-64y-124=0$ *в)* $y^2+8x-4y-20=0$ *г)* $x^2+y^2-2x+2y+1=0$	57	*а)* $16x^2-y^2+128x+6y+231=0$ *б)* $9x^2+16y^2+54x-96y+81=0$ *в)* $x^2+y^2+8x+8y+23=0$ *г)* $y^2+4x+8y+28=0$
38	*а)* $x^2-y^2+8x-2y+14=0$ *б)* $y^2+2x+2y-1=0$ *в)* $x^2+y^2+8x+8y+31=0$ *г)* $4x^2+y^2+8x+8y+16=0$	48	*а)* $x^2-16y^2+8x-2y+14=0$ *б)* $y^2+2x-2y+9=0$ *в)* $x^2+y^2+8x+4y+4=0$ *г)* $9x^2+y^2-36x-2y+28=0$	58	*а)* $9x^2+4y^2+36x+16y+16=0$ *б)* $4x^2-16y^2+8x-64y-124=0$ *в)* $y^2+8x-4y-20=0$ *г)* $x^2+y^2-2x+2y+1=0$
39	*а)* $x^2-9y^2+8x-18y-2=0$ *б)* $16x^2+4y^2-64x+32y+64=0$ *в)* $x^2+y^2-2x+8y+8=0$ *г)* $y^2+8x-2y+9=0$	49	*а)* $9x^2-y^2+72x-8y+119=0$ *б)* $9x^2+4y^2+54x-8y+49=0$ *в)* $x^2+y^2-2x+8y+8=0$ *г)* $y^2+8x+4y+12=0$	59	*а)* $x^2-4y^2+2x+16y-19=0$ *б)* $16x^2+4y^2+64x+24y+36=0$ *в)* $x^2+y^2-6x-2y-6=0$ *г)* $y^2+8x-2y+33=0$

40	$а)\ 9x^2+y^2+18x+2y+1=0$	50	$а)\ 4x^2+y^2-16x+2y+13=0$	60	$а)\ x^2+y^2+6x+8y+24=0$
	$б)\ x^2+y^2+8x+8y+28=0$		$б)\ x^2+y^2+2x-4y-4=0$		$б)\ 16x^2+y^2+64x+6y+57=0$
	$в)\ y^2-4x-6y-7=0$		$в)\ y^2+8x+2y+9=0$		$в)\ x^2-y^2=4x-2y+2=0$
	$г)\ 16x^2-16y^2+128x-32y-16=0$		$г)\ x^2-16y^2+4x-32y-28=0$		$г)\ y^2-6x-4y-14=0$

В задачах 61-90 даны координаты вершин пирамиды A, B, C, D. Найти:

1) канонические уравнения прямой AB;
2) косинус угла между ребрами AB и AD;
3) общее уравнение плоскости ABC;
4) синус угла между ребром AD и гранью ABC;
5) площадь грани ABC;
6) объем пирамиды;

№	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
A	-1,1,1	-4,-4,1	-4,3,-1	1,-3,-1	-2,-4,-1	3,-4,-4	-4,-1,-4	1,-2,-4	-1,-4,-4	-4,-4,-1
B	-2,-4,-4	-1,-3,-1	-4,-2,-2	3,-3,-1	-1,1,-3	-1,3,-2	-4,1,-4	-1,-3,-4	-3,-1,1	3,-2,-4
C	-3,-4,-2	-3,-4,-4	-4,1,-4	2,-1,-3	1,-3,-4	1,3,-4	-3,-4,-1	-4,1,3	2,-3,-4	-4,-4,1
D	2,-1,1	-3,-1,-1	3,-1,2	1,-4,-2	-2,3,-1	-4,-4,1	-4,-3,-3	1,-3,-4	-1,-3,3	-3,3,-2

№	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	-1,-1,-4	2,-1,3	1,-1,-4	-4,-4,1	-4,-3,-1	3,3,3	1,-4,1	1,-2,-1	-4,1,-4	-2,-4,-1
B	-2,3,1	-2,-1,-4	3,-1,-1	3,-2,-1	-3,-1,3	-3,2,-3	-1,-1,2	-4,-4,2	-4,-1,-4	3,2,-1
C	1,-4,3	-4,3,-1	-4,-4,-2	-2,-1,-1	2,2,2	-3,-2,2	-1,1,-4	3,-4,-4	-2,-4,-3	-1,-4,-4
D	-3,3,-4	-4,-4,-4	1,1,-4	-4,2,1	1,2,-4	-2,3,-4	-1,-4,1	3,-4,2	-4,-1,3	3,3,-2

№	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
A	-2,-4,-4	-4,-1,-1	2,-4,1	-4,-1,-4	-4,-1,-4	-4,1,-4	-1,-4,-4	-1,-1,-4	-4,-1,-1	-4,-4,1
B	-4,-4,-1	2,-4,1	-4,2,-2	-4,-2,2	-4,1,-4	-4,-1,-4	-3,-1,1	-2,3,1	2,-4,1	3,-2,-1
C	-4,-1,-1	-1,-1,-4	-1,2,-1	1,-4,-2	-3,-4,-1	-2,-4,-3	2,-3,-4	1,-4,3	-1,-1,-4	-2,-1,-1
D	1,2,1	-4,2,-4	-1,-1,2	-4,-3,-1	-4,-3,-3	-4,-1,3	-1,-3,3	-3,3,-4	-4,2,-4	-4,2,1