



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
ФГБОУ ВПО ТЮМЕНСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В. А. АКСЕНТЬЕВ

# МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

*Учебное пособие*

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике  
Министерства образования и науки РФ (Свердловское  
региональное отделение) в качестве учебного пособия  
для студентов экономических специальностей вузов

Тюмень



Издательство

Тюменского государственного университета

2013

**УДК 517.97(075.8)**  
**ББК В181я73**  
**А 424**

**В. А. Аксентьев. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ:** учебное пособие. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2013. 452 с.

Составлено в соответствии с действующей программой курса «Методы оптимальных решений». Включает в себя теоретический материал, подробное описание основных методов решения, множество разобранных примеров и задач, демонстрирующих особенности алгоритма при различных числовых данных, задачи для самостоятельного решения, список литературы, ответы.

Предназначено для студентов всех форм обучения, в т. ч. с применением дистанционных технологий, направления «Экономика» и преподавателей, ведущих практические занятия.

Обсуждено на заседании УМК ИПЭУ, рекомендовано кафедрой математических методов, информационных технологий и систем управления в экономике.

Рабочие программы для всех специальностей и направлений размещены на сайте университета <http://utmn.ru/> и в разделе веб-кабинета информационной системы Института дистанционного образования: <https://iside.distance.ru> «Учебно-методическое обеспечение».

Рецензенты: **Н. С. Зоткина**, д-р экон. наук, профессор кафедры менеджмента ТюмГАСУ

**Т. Г. Латфуллин**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического анализа и теории функций Института математики, естественных наук и информационных технологий ТюмГУ

Ответственный

за выпуск: **А. В. Трофимова**, зав. отделом учебно-методического обеспечения Института дистанционного образования ТюмГУ

**ISBN 978-5-400-00780-4**

© ФГБОУ ВПО Тюменский государственный университет, 2013  
© В. А. Аксентьев, 2013

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1	
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ .....	10
Задачи 1–100 .....	24
Резюме .....	29
Вопросы для самоконтроля .....	30
ГЛАВА 2	
ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ .....	31
§ 1. Формулировка задачи.....	32
§ 2. Свойства решений задачи .....	37
§ 3. Графический метод решения стандартной задачи.....	39
§ 4. Примеры графического решения стандартной задачи с двумя переменными .....	44
§ 5. Графический метод решения канонической задачи .....	55
§ 6. Алгоритм симплекс-метода .....	60
§ 7. Метод искусственного базиса .....	71
§ 8. Двойственность в линейном программировании.....	88
§ 9. Несимметричные двойственные задачи .....	90
§ 10. Симметричные двойственные задачи .....	95
§ 11. Анализ модели на чувствительность .....	113
Задачи 101–200 .....	125
Задачи 201–300 .....	131
Задачи 301–400 .....	142
Задачи 401–500 .....	153
Резюме .....	162
Вопросы для самоконтроля .....	163
ГЛАВА 3	
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА .....	165
§ 1. Постановка задачи и ее математическая модель .....	166
§ 2. Свойства транспортной задачи.....	168
§ 3. Методы построения исходного опорного плана.....	171
Метод северо-западного угла .....	171
Метод минимального элемента .....	174
Метод Фогеля.....	176

§ 4. Циклы в транспортной таблице .....	185
§ 5. Метод потенциалов .....	187
§ 6. Открытая модель транспортной задачи .....	208
Задачи 501–600 .....	210
Резюме .....	220
Вопросы для самоконтроля .....	221
<b>ГЛАВА 4</b>	
<b>СЕТЕВАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА .....</b>	<b>223</b>
§ 1. Постановка задачи и ее математическая модель .....	224
§ 2. Метод потенциалов .....	228
Задачи 601–700 .....	242
Резюме .....	276
Вопросы для самоконтроля .....	277
<b>ГЛАВА 5</b>	
<b>ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ .....</b>	<b>278</b>
§ 1. Постановка задачи и ее математическая модель .....	279
§ 2. Метод потенциалов .....	281
§ 3. Венгерский метод .....	294
Задачи 701–800 .....	313
Резюме .....	329
Вопросы для самоконтроля .....	330
<b>ГЛАВА 6</b>	
<b>ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ .....</b>	<b>331</b>
§ 1. Постановка задачи и ее математическая модель .....	332
§ 2. Метод потенциалов .....	333
§ 3. Неразрешимая задача .....	363
§ 4. Упражнения .....	370
Задачи 801–900 .....	380
Резюме .....	393
Вопросы для самоконтроля .....	394
<b>ГЛАВА 7</b>	
<b>ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР .....</b>	<b>396</b>
Задачи 901–1000 .....	401
Резюме .....	409
Вопросы для самоконтроля .....	409



ГЛАВА 8	
ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.....	411
§ 1. Постановка задачи .....	411
§ 2. Метод Гомори .....	412
Резюме .....	417
Вопросы для самоконтроля .....	418
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	419
ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ.....	421
Рекомендуемые задачи.....	421
Ключи к задачам .....	423
Тесты для самоконтроля .....	431
Ключи к тестам для самоконтроля.....	442
Задания для контрольных работ.....	443
Вопросы к экзамену.....	445
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	449

## ВВЕДЕНИЕ

Потребность освоения математических методов для использования в реальной экономической и управленческой практике очевидна. В связи с этим растет число научных публикаций и учебных дисциплин, в которых обсуждается необходимость применения математики в экономике. К таким дисциплинам относятся: «Исследование операций», «Математика в экономике», «Математическое программирование», «Математические методы в экономике», «Теория игр», «Эконометрика» и др.

С 2012 г. вводится новая комплексная научная дисциплина «Методы оптимальных решений», которая является базовой дисциплиной математического и естественно-научного цикла. Это обстоятельство послужило поводом для написания учебного пособия под названием «Методы оптимальных решений».

Данное учебное пособие составлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению 080100.62 Экономика (Бакалавр). Вновь введенная дисциплина является завершающей частью курса высшей математики. Для успешного ее освоения необходимы знания линейной алгебры, математического анализа, теории вероятностей и информатики.

**Предметом курса** являются теория и прикладные задачи экономического содержания, решаемые математическими методами.

**Цели курса:** научить строить математические модели, отражающие экономическую сущность задачи; выбор наиболее удачного метода решения, возможности решения задачи с применением современных пакетов прикладных программ; анализировать полученные результаты с математической и экономической точки зрения.

Студент, успешно освоивший программу курса, должен

• **знать:**

- методы решения систем линейных уравнений;
- постановку основных типов задач линейного программирования, графический и аналитический методы решения;

- метод потенциалов для решения транспортной задачи;
- основные теоремы двойственности;
- метод Гомори;
- венгерский метод.

• **уметь:**

- исследовать неопределенные системы линейных уравнений методом полного исключения неизвестных;
- выписывать общее и базисное решение системы;
- строить по текстовой задаче математическую модель;
- объяснять смысл переменных и ограничений в задаче линейного программирования;
- приводить задачу к каноническому виду;
- строить первоначальный опорный план;
- решать задачу симплекс-методом;
- формулировать и решать двойственную задачу;
- решать целочисленную задачу методом Гомори;
- находить допустимый план методом минимального резерва пропускной способности;
- решать задачу о разборчивой невесте.

Учебное пособие состоит из 8 независимых глав. Все главы снабжены краткими теоретическими сведениями. Сначала ставится задача, затем строится математическая модель, рассматриваются свойства решений, формулируется критерий оптимальности и методы поиска решения. Затем дается подробное решение типовых задач и экономическая интерпретация полученного результата, выявление особенностей, возникающих при различных числовых данных.

Остановимся на каждой главе отдельно.

1. Вывод формул Жордана–Гаусса, запись общего и базисного решения, формулировка обобщенного правила прямоугольника, поиск всех базисных решений. Формулы, полученные в первой главе, являются базовыми формулами для решения задач второй и восьмой глав.

2. Приведено определение задачи линейного программирования. Изложены основные свойства и методы решения, теория двой-

ственности и анализ модели на чувствительность. Рассмотрено множество примеров, отражающих особенности задачи и иллюстрирующих графический и симплексный методы решения.

3. Приведены формулировка классической транспортной задачи, ее свойства. Изложены эвристические методы построения начального плана и метод потенциалов для нахождения оптимального плана. Предложены некоторые приемы преодоления трудностей решения вырожденных задач и задач с неправильным балансом.

4. Классическая транспортная задача представлена в виде сетевой модели, для которой изложена модификация метода потенциалов.

5. Приведена частная постановка распределительных задач, обладающая той особенностью, что для выполнения каждой работы расходуется только один вид ресурса, а каждый ресурс может быть использован на одной работе. Рассмотрено два метода решения — метод потенциалов и венгерский.

6. Рассматривается усложненная модель транспортной задачи по критерию стоимости, в которой пропускные способности ограничены. Приведены необходимые условия разрешимости задачи, критерий оптимальности и методы решения. Особое внимание уделено эвристическому методу минимального резерва пропускной способности для построения допустимого множества перевозок.

7. Речь идет об оптимизации производства двух видов продукции, спрос на которую зависит от погоды. Задача сведена к матричной игре, в которой ЛПР является первым игроком, а Природа — вторым. Под Природой понимается совокупность неопределенных факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений. С учетом себестоимости, отпускных цен и спроса строится платежная матрица и затем определяется оптимальный объем продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

8. Рассмотрены особенности решения задачи с целочисленными переменными. Изложены алгоритм и правило построения отсекающего ограничения Гомори.

В конце каждой главы формулируются задания для выполнения контрольной работы и приводятся задачи для самостоятельного



решения. В пособии содержится 1031 задача, большинство из них имеют ответы.

Обилие примеров и задач позволит использовать эту книгу на практических занятиях и для формирования контрольных работ, а также для самостоятельного изучения.

Предназначается в качестве учебного пособия для студентов направлений «Экономика», «Менеджмент», «Управление персоналом» всех форм обучения и преподавателей, ведущих практические занятия.

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Формулы Жордана–Гаусса. Правило прямоугольника. Признак несовместности системы. Базисные неизвестные. Свободные неизвестные. Целочисленный контроль. Общее решение. Базисное решение. Геометрическая интерпретация базисного решения. Преобразования однократного замещения.

Студент должен

**Знать:**

- сущность метода Жордана–Гаусса;
- понятие общего и базисного решения;

уметь:

- вычислять коэффициенты по правилу прямоугольника;
- выписывать общее решение системы;
- определять базисные решения системы линейных уравнений для разных базисов;
- осуществлять переход от одного базиса к другому.

Пусть задана произвольная система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

[illegible]

Здесь  $a_{ij}$  — коэффициент при неизвестном  $x_j$  в  $i$ -м уравнении,  $b_i$  — свободный член  $i$ -го уравнения. Множество номеров уравнений обозначим через  $M = \{1, 2, \dots, i, \dots, m\}$ , текущий номер уравнения  $i \in M$ , фиксированный —  $i_0 \in M$ . Запись  $i \in M \setminus i_0$  бу-

Запись  $j \in N \setminus j_0$  означает, что из множества  $N$  исключается  $j_0$ .  
В принятых обозначениях система (1.1) может быть записана в виде

виде

$$\left. \begin{array}{l} i_0: \quad a_{i_0 1} x_1 + \dots + a_{i_0 j} x_j + \dots + a_{i_0 j_0} x_{j_0} + \dots + a_{i_0 n} x_n = b_{i_0} \\ i \in M \setminus i_0: a_{i 1} x_1 + \dots + a_{i j} x_j + \dots + a_{i j_0} x_{j_0} + \dots + a_{i n} x_n = b_i \end{array} \right\}.$$

называется матрицей системы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

расширенную матрицу системы:

[illegible]

программирования используют идею приведения системы линейных уравнений (1.1) к более удобному виду с помощью так называемого метода Жордана–Гаусса, суть которого состоит в том, что каждая последовательная итерация начинается с выбора разрешающего элемента, этим элементом может быть любой коэффициент, отличный от нуля. Пусть разрешающим будет коэффициент,

стоящий при неизвестном  $x_{j_0}$  в уравнении  $i_0$ , т. е.  $a_{i_0 j_0} \neq 0$ . В дальнейшем коэффициент  $a_{i_0 j_0}$  будем называть разрешающим элементом, строку  $i_0$  — разрешающей строкой, а столбец  $j_0$  — разрешающим столбцом. Коэффициент при переменной  $x_{j_0}$  в разрешающем уравнении сделаем равным единице. Для этого разделим уравнение  $i_0$  на разрешающий элемент  $a_{i_0 j_0}$ :

$$\frac{a_{i_0 1}}{a_{i_0 j_0}} x_1 + \dots + \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} x_j + \dots + 1x_{j_0} + \dots + \frac{a_{i_0 n}}{a_{i_0 j_0}} x_n = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}. \quad (1.2)$$

Исключаем неизвестное  $x_{j_0}$  из всех остальных уравнений системы. Для этого преобразованную  $i_0$ -ю строку (1.2) умножим на  $a_{i j_0}$  и вычтем из  $i$ -й строки. В результате имеем:

$$\begin{aligned} & \left( a_{i 1} - \frac{a_{i_0 1} a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}} \right) x_1 + \dots + \left( a_{i j} - \frac{a_{i_0 j} a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}} \right) x_j + \dots + \left( a_{i j_0} - \frac{a_{i_0 j_0} a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}} \right) x_{j_0} + \\ & \dots + \left( a_{i n} - \frac{a_{i_0 n} a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}} \right) x_n = b_i - \frac{b_{i_0} a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В скобках получены новые коэффициенты при неизвестных в  $i$ -м уравнении. Полученные формулы для пересчета коэффициентов системы запишем в общем виде:

$$a'_{i_0 j} = \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}, \quad j \in N. \quad (1.4)$$

$$b'_{i_0} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}. \quad (1.5)$$



Формулы (1.4)–(1.5) означают, что коэффициенты при неизвестных и свободный член разрешающего уравнения делятся на разрешающий элемент.

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{i_0j_0} - a_{i_0j}a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}}, \quad i \in M \setminus i_0, \quad j \in N. \quad (1.6)$$

$$b'_i = \frac{b_i a_{i_0j_0} - b_{i_0} a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}}, \quad i \in M \setminus i_0. \quad (1.7)$$

Числа, необходимые для вычисления новых коэффициентов, разместим в вершинах прямоугольника (рис. 1.1).

	столбец $j$		столбец $j_0$
строка $i_0$	$a_{i_0j}$		$a_{i_0j_0}$
строка $i$	$a_{ij}$		$a_{ij_0}$

Рис. 1.1

В рассматриваемом прямоугольнике под главной диагональю мы будем понимать ту, на которой находится разрешающий элемент. Вторая диагональ называется побочной.

Тогда практический расчет по формулам (1.6)–(1.7) удобно производить, пользуясь мнемоническим «правилом прямоугольника», наглядно показанным на рис. 1.1.

Для получения нового коэффициента необходимо из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов побочной диагонали и полученный результат поделить на разрешающий элемент.

На втором шаге выбираем коэффициент  $a'_{i_1 j_1} \neq 0$  при неизвестном  $x_{j_1}$ , в уравнении  $i_1$ ,  $i_1 \neq i_0$ . Исключаем  $x_{j_1}$  из всех уравнений, кроме  $i_1$ .

Процесс последовательного исключения заканчивают после  $r$  шагов, где  $r$  — ранг матрицы системы. В результате указанных преобразований над строками и перестановкой столбцов расширенная матрица системы (1.1) может быть приведена к виду:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{1,r+1} & \cdots & \tilde{a}_{1,n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{2,r+1} & \cdots & \tilde{a}_{2,n} & \tilde{b}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \tilde{a}_{r,r+1} & \cdots & \tilde{a}_{r,n} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_n \end{array} \right\| . \quad (1.8)$$

Матрице (1.8) соответствует система уравнений

[illegible]

которая, с точностью до обозначения неизвестных, эквивалентна исходной системе.

Если хотя бы одно из чисел  $\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_m$  отлично от нуля, то система (1.9), а, следовательно, и исходная система (1.1) несовместны.

Если же  $\tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$ , то система совместна. После удаления нулевых строк она имеет вид:

[illegible]

Неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_r$  занимают особое положение: каждое из них входит только в одно уравнение, и притом с коэффициентом, равным единице. Эти неизвестные называются базисными, а остальные неизвестные  $x_{r+1}, \dots, x_n$  — свободными.

Непосредственно из системы (1.10) получаем выражение базисных неизвестных через свободные:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \tilde{b}_1 - (\tilde{a}_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{1,n}x_n) \\ x_2 &= \tilde{b}_2 - (\tilde{a}_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{2,n}x_n) \\ &\vdots \\ x_r &= \tilde{b}_r - (\tilde{a}_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{r,n}x_n) \end{aligned} \right\}. \quad (1.11)$$

Формулы (1.11) дают в совокупности с выбранными значениями свободных неизвестных решение системы. Поэтому совокупность выражений (1.11) называется общим решением системы (1.1). Так как свободные неизвестные принимают любые значения, то система (1.1) имеет бесчисленное множество решений. Каждое из них называется частным решением.

Частное решение, в котором свободные неизвестные полагаются равными нулю, называется базисным.

Из общего решения легко получить базисное решение.

$$X_B = (x_1 = \tilde{b}_1, x_2 = \tilde{b}_2, \dots, x_r = \tilde{b}_r, x_{r+1} = 0, \dots, x_n = 0).$$

Теперь зададим себе такой вопрос: «Есть ли еще базисные решения у данной системы?» Очевидно, что количество различных базисных решений системы определяется числом базисов и равно числу  $C_n^r$ . Каждое базисное решение соответствует угловой точке выпуклой оболочки, которую описывает система линейных уравнений (1.1).

Рассмотрим метод полного исключения неизвестных на следующем числовом примере.

**Пример 1.1.** Пусть система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 5 \\ -8x_1 + 5x_2 + 20x_3 + 2x_4 - 9x_5 = 8 \\ 4x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 13x_4 + 6x_5 = 11 \end{cases}$$

Необходимо, применяя метод полного исключения неизвестных (Жордана–Гаусса), найти любое общее и три базисных решения системы. Сделать проверку. Решение рекомендуется представить в виде последовательности таблиц.

**Решение.** Расчеты проводим в табл. 1.1 согласно алгоритму метода Жордана–Гаусса. В исходной части таблицы записываем расширенную матрицу системы и дополняем ее контрольным столбцом, элементы которого обозначим через  $\Sigma_i$ . Численное значение контрольного числа получаем суммированием коэффициентов строки, включая свободный член уравнения.

$$\Sigma_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} + b_i.$$

Первую итерацию начинаем с выбора разрешающего элемента, пусть это будет  $a_{11} = 3$ , который выделяем рамкой. Далее рассчитываем элементы разрешающей (1-й) строки по формулам (1.4)–(1.5), т. е. делим все коэффициенты на разрешающий элемент.



$$\begin{aligned}
 a'_{11} &= a_{11}/a_{11} = 1, & a'_{12} &= a_{12}/a_{11} = -2/3, & a'_{13} &= a_{13}/a_{11} = -7/3, \\
 a'_{14} &= a_{14}/a_{11} = 4/3, & a'_{15} &= a_{15}/a_{11} = 8/3, & b'_1 &= b_1/a_{11} = 5/3, \\
 \Sigma'_1 &= \Sigma_1/a_{11} = 11/3.
 \end{aligned}$$

Таблица 1.1

№ итерации	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b_i$	$\Sigma_i$
(0)	3	-2	-7	4	8	5	11
	-8	5	20	2	-9	8	18
	4	-1	1	13	6	11	34
(1)	1	-2/3	-7/3	4/3	8/3	5/3	11/3
	0	-1/3	4/3	38/3	37/3	64/3	142/3
	0	5/3	31/3	23/3	-14/3	13/3	58/3
(2)	1	0	9/5	22/5	4/5	17/5	57/5
	0	0	17/5	71/5	57/5	111/5	256/5
	0	1	31/5	23/5	-14/5	13/5	58/5
(3)	1	0	0	-53/17	-89/17	-142/17	-267/17
	0	0	1	71/17	57/17	111/17	256/17
	0	1	0	-362/17	-401/17	-644/17	-1390/17
$X_{\text{баз}}^{(1)}$	-142/17	-644/17	111/17	0	0		
проверка	-426/17	1288/17	-777/17	0	0	85/17=5	
	1136/17	-3220/17	2220/17	0	0	136/17=8	
	-568/17	644/17	111/17	0	0	187/17=11	

Элементы остальных строк вычисляются по формулам (1.6)–

$$(1.7). \text{ Так, например, } a'_{21} = \frac{a_{21} \cdot a_{11} - a_{11} \cdot a_{21}}{a_{11}} = \frac{-8 \cdot 3 - 3 \cdot (-8)}{3} = 0.$$

Как видим, неизвестное  $x_1$  исключается из второго уравнения, поскольку коэффициент  $a'_{21} = 0$ .

Далее вычислим

$$a'_{22} = \frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}} = \frac{5 \cdot 3 - (-2) \cdot (-8)}{3} = -\frac{1}{3},$$

$$a'_{23} = \frac{a_{23} \cdot a_{11} - a_{13} \cdot a_{21}}{a_{11}} = \frac{20 \cdot 3 - (-7) \cdot (-8)}{3} = \frac{4}{3},$$

$$a'_{24} = \frac{a_{24} \cdot a_{11} - a_{14} \cdot a_{21}}{a_{11}} = \frac{2 \cdot 3 - 4 \cdot (-8)}{3} = \frac{38}{3},$$

$$a'_{25} = \frac{a_{25} \cdot a_{11} - a_{15} \cdot a_{21}}{a_{11}} = \frac{-9 \cdot 3 - 8 \cdot (-8)}{3} = \frac{37}{3},$$

$$b'_2 = \frac{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11}} = \frac{8 \cdot 3 - 5 \cdot (-8)}{3} = \frac{64}{3}.$$

Пересчет элементов контрольного столбца проводится двумя способами: по правилу прямоугольника

$$\Sigma'_2 = \frac{\sigma_2 a_{11} - \sigma_1 a_{21}}{a_{11}} = \frac{18 \cdot 3 - 11 \cdot (-8)}{3} = \frac{142}{3}$$

и непосредственным суммированием

$$\Sigma'_2 = \sum_{j=1}^5 a'_{2j} + b'_2 = 0 - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{38}{3} + \frac{37}{3} + \frac{64}{3} = \frac{142}{3}.$$

Результаты вычислений совпадают, следовательно, расчеты произведены правильно, и можно перейти к вычислениям элементов 3-й строки. Пересчет остальных коэффициентов системы линейных уравнений проведен непосредственно в табл. 1.1. На второй итерации за разрешающий выбран элемент  $a'_{32} = 5/3$  и на третьей итерации — элемент  $a''_{23} = 17/5$ .

После третьей итерации получаем общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{142}{17} - \left(-\frac{53}{17}x_4 - \frac{89}{17}x_5\right) \\ x_3 = \frac{111}{17} - \left(\frac{71}{17}x_4 + \frac{57}{17}x_5\right) \\ x_2 = -\frac{644}{17} - \left(-\frac{362}{17}x_4 - \frac{401}{17}x_5\right), \end{cases}$$

где  $x_1, x_2, x_3$  — базисные неизвестные, а  $x_4$  и  $x_5$  — свободные неизвестные.

Полагая равными нулю свободные неизвестные, получим базисное решение  $X_{\text{баз}}^{(1)} = (-142/17, -644/17, 111/17, 0, 0)$ , которое записано в таблице отдельной строкой для удобства проверки. Подставим компоненты вектора  $X_{\text{баз}}^{(1)}$  в исходную систему:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-142/17) - 2 \cdot (-644/17) - 7 \cdot (111/17) &= 5 \\ -8 \cdot (-142/17) + 5 \cdot (-644/17) + 20 \cdot (111/17) &= 8 \\ 4 \cdot (-142/17) - 1 \cdot (-644/17) + 1 \cdot (111/17) &= 11. \end{aligned}$$

Уравнения обратились в верные равенства, это означает, что расчеты сделаны правильно.

*Примечание.* При решении систем линейных уравнений для контроля можно воспользоваться следующим замечательным фактом.

*Утверждение.* Если все элементы расширенной матрицы системы линейных уравнений — целые числа, то на  $(k+1)$ -й итерации получаются такие дроби, числители которых делятся на знаменатель элементов  $k$ -й итерации нацело.

Это утверждение дает возможность проводить вычисления отдельно с числителями и знаменателями, причем знаменатель получается без дополнительных вычислений. Знаменателем всех элементов, получаемых на  $(k+1)$ -й итерации, является числитель разрешающего элемента  $k$ -й итерации.

Что касается числителей новых элементов, то в формулах (1.6)–(1.7) достаточно подставить числители текущих элементов и результат вычислений поделить на знаменатель разрешающего элемента. Если нацело не делится, то вычисления проведены не правильно и следует искать ошибку в вершинах рассматриваемого прямоугольника. Вернувшись назад на одну итерацию, исправляем ошибку и продолжаем вычисления. Такой вид контроля назовем целочисленным. Контрольный столбец в совокупности с целочисленным контролем практически мгновенно реагируют на ошибку.

В справедливости факта, указанного в утверждении, можно убедиться на рассматриваемом примере. Для этого обратимся к третьей итерации, в которой за разрешающий элемент мы выбрали  $a''_{23} = 17/5$ . Нетрудно увидеть, что в разрешающей строке знаменателем является числитель разрешающего элемента.

Остальные элементы вычислены по правилу прямоугольника (по формулам (1.6)–(1.7)), например,

$$a_{14}^{(3)} = \frac{a''_{14} a''_{23} - a''_{24} a''_{13}}{a''_{23}} = \frac{\frac{22}{5} \cdot \frac{17}{5} - \frac{71}{5} \cdot \frac{9}{5}}{17/5} = \frac{374 - 639}{5 \cdot 17}.$$

Число, которое получилось в числителе, равно  $-265$ . Оно делится на 5 нацело (как и должно быть). После деления получим  $a_{14}^{(3)} = -53/17$ .

Вычислим еще несколько коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_{15}^{(3)} &= \frac{4 \cdot 17 - 57 \cdot 9}{5 \cdot 17} = \frac{-445}{5 \cdot 17} = -\frac{89}{17}, \\ b_1^{(3)} &= \frac{17 \cdot 17 - 111 \cdot 9}{5 \cdot 17} = \frac{-710}{5 \cdot 17} = -\frac{142}{17}, \\ \Sigma_1^{(3)} &= \frac{57 \cdot 17 - 256 \cdot 9}{5 \cdot 17} = \frac{-1335}{5 \cdot 17} = -\frac{267}{17}, \\ \Sigma_1^{(3)} &= 1 - \frac{53}{17} - \frac{89}{17} - \frac{142}{17} = -\frac{267}{17}. \end{aligned}$$



Проведенные вычисления позволяют сформулировать обобщенное правило прямоугольника.

*Для того чтобы получить новый коэффициент, необходимо из произведения числителей элементов главной диагонали вычесть произведение числителей элементов побочной диагонали, полученное число поделить на старый знаменатель. Если разрешающим элементом является отрицательное число, то, в конечном счете, необходимо поменять знак на противоположный.*

Как указывалось выше, исходная система имеет не одно базисное решение. Чтобы найти их, надо преобразовать систему так, чтобы перейти от одного единичного базиса к другому, после чего немедленно определяется соответствующее базисное решение. Мы рассмотрим один вид преобразований, получивший название *преобразования однократного замещения*.

Продолжим исследование системы, приведенной к единичному базису. Для этого коэффициенты, вычисленные в третьей итерации, перенесем в табл. 1.2. В любом неединичном столбце выберем произвольный, отличный от нуля разрешающий элемент, например,  $a_{14}^{(3)} = -53/17$ , выполним четвертую итерацию метода и перейдем к новому базису.

Для разрешающей строки получим:

$$a_{11}^{(4)} = \frac{a_{11}^{(3)}}{a_{14}^{(3)}} = \frac{1}{-53/17} = -\frac{17}{53}, \quad a_{14}^{(4)} = 1, \quad a_{15}^{(4)} = \frac{a_{15}^{(3)}}{a_{14}^{(3)}} = \frac{-89/17}{-53/17} = \frac{89}{53},$$

$$b_1^{(4)} = \frac{b_1^{(3)}}{a_{14}^{(3)}} = \frac{-142/17}{-53/17} = \frac{142}{53},$$

$$\Sigma_1^{(4)} = \frac{\Sigma_1^{(3)}}{a_{14}^{(3)}} = \frac{-267/17}{-53/17} = \frac{267}{53},$$

$$\Sigma_1^{(4)} = -\frac{17}{53} + 1 + \frac{89}{53} + \frac{142}{53} = \frac{267}{53}.$$

Таблица 1.2

№ ите-рации	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b_i$	$\Sigma_i$
(3)	1	0	0	-53/17	-89/17	-142/17	-267/17
	0	0	1	71/17	57/17	111/17	256/17
	0	1	0	-362/17	-401/17	-644/17	-1390/17
$X_{\text{баз}}^{(1)}$	-142/17	-644/17	111/17	0	0		
(4)	-17/53	0	0	1	89/53	142/53	267/53
	71/53	0	1	0	-194/53	-247/53	-317/53
	-362/53	1	0	0	645/53	1016/53	1352/53
$X_{\text{баз}}^{(2)}$	0	1016/53	-247/53	142/53	0		
про-верка	0	-2032/53	1729/53	568/53	0	265/53=5	
	0	5080/53	-4940/53	284/53	0	424/53=8	
	0	-1016/53	-247/53	1846/53	0	583/53=11	
(5)	0	0	17/71	1	57/71	111/71	256/71
	1	0	53/71	0	-194/71	-247/71	-317/71
	0	1	362/71	0	-461/71	-326/71	-354/71
$X_{\text{баз}}^{(3)}$	-247/71	-326/71	0	111/71	0		
про-верка	-741/71	652/71	0	444/71	0	355/71=5	
	1976/71	-1630/71	0	222/71	0	568/71=8	
	-988/71	326/71	0	1443/71	0	781/71=11	

Для третьей строки:  $a_{31}^{(4)} = \frac{0 \cdot (-53/17) - 1 \cdot (-362/17)}{-53/17} = -\frac{362}{53},$

$$a_{35}^{(4)} = \frac{-401 \cdot (-53) - (-89) \cdot (-362)}{17 \cdot (-53)} = \frac{-10965}{17 \cdot (-53)} = \frac{645}{53},$$

$$b_3^{(4)} = \frac{-644 \cdot (-53) - (-142) \cdot (-362)}{17 \cdot (-53)} = \frac{-17272}{17 \cdot (-53)} = \frac{1016}{53},$$

$$\Sigma_3^{(4)} = \frac{-1390 \cdot (-53) - (-267) \cdot (-362)}{17 \cdot (-53)} = \frac{-22984}{17 \cdot (-53)} = \frac{1352}{53}.$$

Контрольную сумму  $\Sigma_3^{(4)}$  после четвертой итерации вычислим непосредственным суммированием коэффициентов третьей строки

$$\begin{aligned}\Sigma_3^{(4)} &= a_{31}^{(4)} + a_{32}^{(4)} + a_{33}^{(4)} + a_{34}^{(4)} + a_{35}^{(4)} + b_3^{(4)} = \\ &= -362/53 + 1 + 0 + 0 + 645/53 + 1016/53 = 1352/53.\end{aligned}$$

В результате выполнения четвертой итерации получили новый набор базисных неизвестных:  $x_2, x_3, x_4$ ; и новый набор свободных неизвестных:  $x_1, x_5$ . На этом заканчивается переход от одного базиса к другому, преобразование однократного замещения.

Четвертая итерация приводит к следующему общему решению:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{142}{53} - \left( -\frac{17}{53}x_1 + \frac{89}{53}x_5 \right) \\ x_3 = -\frac{247}{53} - \left( \frac{71}{53}x_1 - \frac{194}{53}x_5 \right) \\ x_2 = \frac{1016}{53} - \left( -\frac{362}{53}x_1 + \frac{645}{53}x_5 \right) \end{cases}$$

и соответствующему ему второму базисному решению:

$$X_{\text{баз}}^{(2)} = (0, 1016/53, -247/53, 142/53, 0).$$

После пятой итерации приходим к новому базису:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{111}{71} - \left( \frac{17}{71}x_3 + \frac{57}{71}x_5 \right) \\ x_1 = -\frac{247}{71} - \left( \frac{53}{71}x_3 - \frac{194}{71}x_5 \right) \\ x_2 = -\frac{326}{71} - \left( \frac{362}{71}x_3 - \frac{461}{71}x_5 \right) \end{cases}$$

и третьему базисному решению:

$$X_{\text{баз}}^{(3)} = (-247/71, -326/71, 0, 111/71, 0).$$

Переходя от одного базисного решения к другому, можно найти все базисные решения системы линейных уравнений. В рассматриваемой системе число неизвестных равно пяти, ранг матрицы — трем, поэтому число базисных решений будет равно  $C_5^3 = 10$ .

### Задачи 1–100

Ниже приведены расширенные матрицы систем линейных уравнений. Во всех вариантах  $m = 3$ ,  $n = 5$ . Необходимо, применяя метод полного исключения неизвестных, найти любое общее и три базисных решения системы. Сделать проверку. Решение рекомендуется представить в виде таблицы.

$$1 \quad \left\| \begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 1 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 75 & 15 & -2 & 5 & 73 \\ 2 & 26 & 20 & 16 & -1 & 90 \end{array} \right\|$$

$$2 \quad \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 10 & -3 & 13 & 2 & 6 \\ 3 & 12 & 4 & 9 & 0 & 22 \\ 5 & 8 & 7 & 11 & -1 & 30 \end{array} \right\|$$

$$3 \quad \left\| \begin{array}{ccccc|c} 11 & 8 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & 15 & 10 & 2 & 4 & 16 \\ 20 & 9 & 6 & -1 & 5 & 18 \end{array} \right\|$$

$$4 \quad \left\| \begin{array}{ccccc|c} 13 & 6 & 10 & 7 & 2 & 3 \\ 18 & 11 & 14 & 9 & 1 & 4 \\ 36 & 16 & 25 & 20 & 5 & 8 \end{array} \right\|$$

$$5 \quad \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & -1 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 15 & 13 & 8 & 14 & 17 \end{array} \right\|$$

$$6 \quad \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & 13 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & -1 & 7 & 10 \\ 3 & 8 & -3 & 2 & 11 & 12 \end{array} \right\|$$



$$7 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 13 & 2 & 7 & 14 \\ -2 & 4 & 9 & 11 & 2 & 10 \end{array} \right\|$$

$$9 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 27 & 10 & 13 \\ -3 & 5 & 7 & 20 & 9 & 6 \end{array} \right\|$$

$$11 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 6 & 9 & 12 & 7 \\ 10 & 11 & 23 & -18 & 13 & 26 \end{array} \right\|$$

$$13 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 10 & 3 & 7 & 4 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 13 & 9 & 5 & 16 \\ 14 & 0 & -8 & 18 & 15 & 11 \end{array} \right\|$$

$$15 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 10 & 0 & 1 & 6 & 9 & 20 \\ 8 & 4 & 12 & 3 & 11 & 16 \\ -2 & 7 & 5 & 13 & 14 & 18 \end{array} \right\|$$

$$17 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 9 & 7 & 0 & 20 & 2 \\ 6 & 5 & 12 & 10 & 18 & 4 \\ -2 & 8 & -1 & 15 & 3 & 20 \end{array} \right\|$$

$$19 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 10 & 4 & 6 & 8 & 30 \\ 0 & -4 & 1 & -6 & 7 & -10 \\ 3 & 5 & 9 & 12 & 14 & 20 \end{array} \right\|$$

$$21 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 11 & 5 \\ 2 & -4 & 8 & 6 & 12 & 10 \\ 0 & 7 & 14 & 9 & 15 & 20 \end{array} \right\|$$

$$23 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 10 & 29 & 12 & 13 \\ -3 & 5 & 7 & 22 & 9 & 6 \end{array} \right\|$$

$$25 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 8 & 24 & 11 & 12 \\ 6 & -4 & 9 & 13 & 26 & 10 \end{array} \right\|$$

$$8 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 12 & 2 & 24 & -4 & 3 \\ 6 & 36 & 0 & -8 & 14 & 10 \\ 5 & 16 & 9 & 25 & -9 & 15 \end{array} \right\|$$

$$10 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 12 & 6 & 11 & 8 & 5 \\ -3 & 9 & 7 & 20 & 18 & 10 \end{array} \right\|$$

$$12 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 11 & 4 \\ 5 & 16 & 8 & 25 & 10 & 12 \\ -1 & 14 & 7 & 23 & 9 & 6 \end{array} \right\|$$

$$14 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & -3 & 12 & 16 & 14 \end{array} \right\|$$

$$16 \left\| \begin{array}{ccccc|c} -3 & 0 & 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & 9 & 30 & 11 & 15 \\ 2 & -4 & 6 & 20 & 8 & 12 \end{array} \right\|$$

$$18 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 18 & 4 & 9 & 2 & 11 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & 6 & -1 & 13 \\ 10 & 1 & 16 & 12 & 7 & 14 \end{array} \right\|$$

$$20 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 6 & 5 & -4 & 20 \\ 3 & 8 & 21 & -2 & 9 & 30 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & -1 & 10 \end{array} \right\|$$

$$22 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 26 & 12 & 14 \\ -2 & 6 & 9 & 11 & 13 & 6 \end{array} \right\|$$

$$24 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & 15 & -9 & 5 & -10 & 7 \\ 1 & 16 & 18 & 12 & -4 & 14 \\ 0 & 8 & 11 & 2 & 6 & 4 \end{array} \right\|$$

$$26 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 8 & -10 & 4 & 6 & 16 \\ -1 & 10 & 0 & 5 & 15 & 35 \\ 3 & 9 & 12 & 1 & 18 & 33 \end{array} \right\|$$

$$\begin{array}{l} 27 \\ 29 \end{array} \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 12 & 20 & 2 \\ 10 & 8 & 11 & 9 & 15 & 9 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 12 & 28 & 12 \\ 2 & 4 & 11 & 21 & 21 & 5 \end{array} \right\|$$

$$31 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 6 & -8 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 5 & 15 \\ 16 & 18 & 20 & -22 & 24 & 21 \end{array} \right\|$$

$$33 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & 6 & 7 & 3 & 9 \\ 4 & -8 & 25 & 12 & 10 & 14 \\ 2 & -16 & 15 & 18 & 0 & 24 \end{array} \right\|$$

$$35 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -5 & 11 & 8 & 13 \\ 4 & 12 & 7 & 12 & -9 & 18 \\ -14 & 16 & 2 & 20 & 19 & 20 \end{array} \right\|$$

$$37 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 1 & 9 & 4 & 9 \\ 14 & -3 & 2 & 12 & 7 & 12 \\ 15 & -4 & 3 & 16 & 10 & 16 \end{array} \right\|$$

$$39 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 10 & 7 & -2 & 6 & 12 \\ -1 & 22 & 14 & -4 & 9 & 6 \end{array} \right\|$$

$$41 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 4 & 3 & 8 & 12 \\ 11 & 3 & 0 & -2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 12 & 9 & 7 & 10 \end{array} \right\|$$

$$43 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 11 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 20 & 10 & 12 \\ -1 & -7 & 14 & 13 & 9 & 7 \end{array} \right\|$$

$$45 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & 11 & 2 & 0 & 8 \\ 10 & 14 & 0 & 3 & 9 & 15 \\ 7 & -12 & -6 & 0 & 13 & 4 \end{array} \right\|$$

$$28 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 10 & 5 & 3 & 2 & 20 \\ 8 & 9 & 6 & 7 & 4 & 17 \\ 13 & 12 & 15 & -11 & 0 & 14 \\ 8 & 10 & 1 & 9 & -12 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 13 & -15 & 6 \\ 16 & 17 & 11 & -14 & 0 & 27 \end{array} \right\|$$

$$32 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & 12 & -7 & 4 \\ 9 & 11 & 10 & 14 & -13 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 6 & 5 & 6 \end{array} \right\|$$

$$34 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 12 & 4 & 13 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & -8 & 11 & 0 & 10 \\ 2 & -14 & 1 & 15 & 17 & 16 \end{array} \right\|$$

$$36 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 10 & -12 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 4 & 11 & -16 & 6 & 18 \\ 5 & 7 & 9 & 13 & -19 & 20 \end{array} \right\|$$

$$38 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & 9 & 10 & 5 & 12 & 20 \\ 4 & 1 & -7 & 11 & 15 & -2 \\ 0 & -8 & 13 & 6 & 19 & 18 \end{array} \right\|$$

$$40 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & 7 & 1 & 9 & -4 & 6 \\ -2 & 6 & 2 & 3 & 5 & 16 \\ 4 & -5 & 2 & 5 & 2 & 17 \end{array} \right\|$$

$$42 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 9 & 29 & 12 & 13 \\ -1 & 5 & 6 & 22 & 9 & 6 \end{array} \right\|$$

$$44 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 5 & 12 & 9 & -4 \\ 10 & 4 & 7 & 14 & 6 & 15 \\ 3 & -2 & 1 & 8 & 5 & -3 \end{array} \right\|$$

$$46 \left\| \begin{array}{ccccc|c} -3 & 1 & 6 & 3 & 10 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 12 & 13 \\ 8 & 5 & 2 & 1 & 7 & 15 \end{array} \right\|$$

$$47 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 5 & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & 10 & 13 & 20 \\ 0 & 4 & -16 & 21 & 15 & 32 \end{array} \right\|$$

$$49 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 11 & 7 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 9 & 13 & 10 & 4 & 15 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 30 & 24 \end{array} \right\|$$

$$51 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -7 & 2 & 9 & 4 & 22 \\ -2 & 7 & 5 & 4 & 6 & 27 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 0 & 16 \end{array} \right\|$$

$$53 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 5 & 7 & 6 & 48 \end{array} \right\|$$

$$55 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 3 & -5 & 18 & 24 \\ 2 & 7 & 13 & 14 & 6 & 85 \\ 11 & 12 & 5 & 0 & 15 & 79 \end{array} \right\|$$

$$57 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & -3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 15 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right\|$$

$$59 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 31 \\ 5 & 6 & 10 & 13 & 9 & 29 \\ -1 & 8 & 5 & 20 & 7 & 41 \end{array} \right\|$$

$$61 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 25 \\ 10 & 0 & 12 & 14 & 13 & 40 \\ 7 & -2 & 1 & 3 & 15 & 32 \end{array} \right\|$$

$$63 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 4 & 21 & 10 & 16 \\ 15 & 2 & 6 & 9 & 11 & 13 \\ 3 & -7 & 12 & 8 & 20 & 14 \end{array} \right\|$$

$$65 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 5 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 6 & 8 & -10 & 16 \\ 7 & 19 & 21 & 15 & 12 & 17 \end{array} \right\|$$

$$48 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 16 & 14 \\ 9 & -18 & 20 & 11 & 22 & 24 \end{array} \right\|$$

$$50 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 1 & 2 & 8 & 10 \\ 7 & 3 & 5 & 9 & 11 & 13 \\ 22 & 16 & 20 & 12 & 15 & 18 \end{array} \right\|$$

$$52 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 10 & 0 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ -4 & 7 & 9 & -15 & 8 & 3 \\ 20 & -14 & 30 & 25 & 11 & 28 \end{array} \right\|$$

$$54 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 10 & 12 & 15 \\ -2 & 11 & 9 & 13 & 16 & 20 \end{array} \right\|$$

$$56 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 9 & 0 & 1 & 3 & 11 & 15 \\ 4 & 7 & 5 & 10 & 14 & 13 \\ 8 & 12 & 2 & 6 & 16 & 20 \end{array} \right\|$$

$$58 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 8 & 5 & 13 & 18 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 15 & 25 \\ -1 & 4 & 9 & 10 & 11 & 31 \end{array} \right\|$$

$$60 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 6 & 7 & 20 \\ 1 & 5 & 8 & 9 & -10 & 11 \\ 3 & 12 & 0 & 13 & -14 & 17 \end{array} \right\|$$

$$62 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 9 & 1 & 8 & 6 & 14 & 17 \\ 7 & 0 & 13 & 15 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 10 & 16 & 11 & 12 \end{array} \right\|$$

$$64 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -10 & 2 & 0 & 4 & 13 \\ 3 & -22 & 11 & 9 & 18 & 14 \\ 6 & 12 & 8 & 7 & 26 & 15 \end{array} \right\|$$

$$66 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & 15 & 6 & 1 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 5 & -4 & 21 & 11 \\ 17 & 10 & 16 & -7 & 18 & 20 \end{array} \right\|$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{67} \left\| \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 1 & 11 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 6 & 12 & 14 & 12 \\ 7 & 13 & 9 & 4 & 8 & 7 \end{array} \right\| \\
 \mathbf{69} \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -4 & 18 & 1 & 25 \\ -3 & 10 & 8 & 7 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 7 & 1 & 3 & 51 \end{array} \right\|
 \end{array}$$

$$\mathbf{71} \left\| \begin{array}{cccccc} 6 & 3 & 4 & 1 & 5 & 13 \\ 2 & -7 & 16 & 9 & 11 & 7 \\ 8 & 15 & 17 & 10 & 14 & 12 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{73} \left\| \begin{array}{cccccc} 3 & 13 & 1 & 14 & 7 & 11 \\ 9 & -20 & 24 & 4 & 5 & 15 \\ 6 & 8 & 12 & 16 & 2 & 10 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{75} \left\| \begin{array}{cccccc} 5 & 2 & 1 & 10 & 15 & 16 \\ 3 & -1 & 7 & 6 & 4 & 25 \\ 8 & -2 & 9 & -3 & 12 & 11 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{77} \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & -4 & 5 & 12 \\ 8 & 10 & 6 & 9 & -7 & 30 \\ 4 & 11 & -5 & 12 & 7 & 42 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{79} \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 7 & 9 & 2 & 10 & 5 \\ 3 & 11 & -1 & 14 & 0 & 18 \\ -6 & 4 & 12 & 8 & -2 & 27 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{81} \left\| \begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 3 & -1 & 0 & 15 \\ 2 & 11 & 8 & 4 & 1 & 27 \\ 0 & 5 & 6 & 12 & 4 & 30 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{83} \left\| \begin{array}{cccccc} 5 & 2 & -9 & 1 & 9 & 16 \\ 22 & 7 & -4 & 3 & 15 & 10 \\ 8 & 6 & 12 & -5 & 4 & 20 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{85} \left\| \begin{array}{cccccc} 13 & 3 & 6 & 10 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 8 & 5 & 7 \\ 2 & 14 & -3 & 12 & 11 & 9 \end{array} \right\|$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{68} \left\| \begin{array}{cccccc} 5 & 1 & -7 & 9 & 0 & 8 \\ 13 & 0 & -4 & 6 & 10 & 11 \\ 0 & 2 & 12 & 3 & -14 & 15 \end{array} \right\| \\
 \mathbf{70} \left\| \begin{array}{cccccc} 4 & 0 & 5 & 1 & 7 & 20 \\ 11 & 12 & 13 & 2 & 14 & 42 \\ 8 & 9 & 10 & 3 & 22 & 61 \end{array} \right\|
 \end{array}$$

$$\mathbf{72} \left\| \begin{array}{cccccc} 2 & -7 & 3 & 10 & 13 & 30 \\ 4 & 8 & 9 & -11 & 20 & 26 \\ 5 & 12 & 6 & 14 & 19 & 36 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{74} \left\| \begin{array}{cccccc} 8 & 4 & 1 & 5 & -2 & 26 \\ 2 & 9 & 0 & 6 & 12 & 37 \\ 3 & 7 & 10 & 11 & 13 & 49 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{76} \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 3 & 1 & 8 & 2 & 21 \\ -1 & -2 & 5 & 9 & 6 & 14 \\ 4 & 7 & 11 & -3 & 13 & 25 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{78} \left\| \begin{array}{cccccc} 6 & 0 & 1 & 7 & 12 & 14 \\ 5 & 9 & 2 & 11 & -10 & 15 \\ -1 & 10 & 4 & 3 & 13 & 20 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{80} \left\| \begin{array}{cccccc} 5 & 2 & -9 & 1 & 9 & 19 \\ 22 & 7 & -4 & 3 & 15 & 10 \\ 8 & 6 & 12 & -5 & 4 & 23 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{82} \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 25 & 0 & -13 & 4 & 16 \\ 3 & 7 & 2 & 1 & -8 & 4 \\ -4 & 12 & 5 & 0 & 6 & 21 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{84} \left\| \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 16 & 14 \\ 9 & -18 & 20 & 11 & 22 & 24 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{86} \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 0 & 12 & -1 & 6 \\ 11 & 2 & 10 & 5 & 14 & 8 \\ 7 & -2 & 3 & 13 & -3 & 9 \end{array} \right\|$$



$$87 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 8 \\ 2 & -8 & 17 & 10 & 12 & 9 \\ 3 & 11 & 13 & -9 & 14 & 15 \end{array} \right\|$$

$$88 \left\| \begin{array}{ccccc|c} -2 & 7 & 0 & 6 & 13 & 4 \\ 8 & 1 & 12 & -3 & 9 & 14 \\ 10 & 2 & -1 & 11 & 3 & 5 \end{array} \right\|$$

$$89 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 10 & -3 & 7 & 5 & 6 \\ 11 & 4 & 2 & 8 & -1 & 13 \\ 9 & -4 & 18 & 14 & 15 & 40 \end{array} \right\|$$

$$90 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 5 & 1 & 9 & 4 & 3 & 18 \\ -3 & 7 & 0 & 12 & 2 & 13 \\ 10 & 8 & 11 & -2 & 6 & 35 \end{array} \right\|$$

$$91 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 10 & 4 & 2 & 6 & 8 & 20 \\ 3 & 5 & 7 & 14 & 18 & 15 \\ 11 & 0 & 13 & 12 & 9 & 19 \end{array} \right\|$$

$$92 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 8 & 14 & 0 & 16 \\ -3 & 10 & 6 & 12 & 5 & 4 \\ 9 & -2 & 7 & 9 & -1 & 15 \end{array} \right\|$$

$$93 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -1 & 5 & 6 & 8 \\ 2 & 9 & 3 & -1 & 2 & 13 \\ 1 & 4 & 3 & -3 & -6 & 5 \end{array} \right\|$$

$$94 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 10 & -1 & 3 & 11 & 4 & 19 \\ 0 & 7 & 5 & 6 & 11 & 12 \end{array} \right\|$$

$$95 \left\| \begin{array}{ccccc|c} -1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 16 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & 2 & 20 \\ -4 & 0 & 4 & -1 & 2 & 10 \end{array} \right\|$$

$$96 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 12 & 4 & -3 & 1 & 7 & 19 \\ 6 & -2 & 4 & 0 & -5 & 9 \\ 7 & 1 & 3 & 2 & 4 & 27 \end{array} \right\|$$

$$97 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 24 \\ 3 & 14 & 8 & -1 & 1 & 12 \\ 8 & 2 & 0 & -2 & 2 & 38 \end{array} \right\|$$

$$98 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 10 & 4 & -2 & 58 \\ 14 & 7 & 8 & 1 & 9 & 13 \\ 6 & 3 & 12 & 0 & 5 & 34 \end{array} \right\|$$

$$99 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 3 & 8 & 0 & 7 & -1 & 33 \\ 9 & 5 & -3 & 24 & 15 & 40 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 13 & 18 \end{array} \right\|$$

$$100 \left\| \begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 25 & 10 & 24 \\ -3 & 6 & 7 & 20 & 9 & 6 \end{array} \right\|$$

## РЕЗЮМЕ

Исходными составляющими математического моделирования являются векторы, матрицы, функции, множества. Физический смысл скалярного произведения векторов — это работа по перемещению тела из одной точки в другую. Экономический смысл скалярного произведения — это деньги за работу физикам, которые везли тележку.

Совокупность скалярных произведений составляет систему линейных уравнений, которая геометрически представляет собой оболочку выпуклого многогранника (многогранного конуса). Система приводится к диагональному виду методом полного исключения неизвестных, выявляются базисные, свободные неизвестные и совместность системы уравнений. Далее выражаются базисные переменные через свободные, откуда находятся координаты произвольной угловой точки (базисное решение). И наконец, рассматривается метод однократного замещения, с помощью которого можно найти все базисные решения системы. Таким образом, правило Жордана–Гаусса положено в основу метода последовательного улучшения плана для решения задачи линейного программирования.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется матрицей системы? Как определить ранг матрицы методом полного исключения?
2. Какая система называется приведенной к единичному базису?
3. Какие неизвестные называются базисными?
4. Какие неизвестные называются свободными?
5. Что называется общим решением системы?
6. Что называется базисным решением системы? Сколько может быть базисных решений у системы?
7. Как называется процедура перехода от одного базиса к другому?
8. Что Вы знаете о целочисленном контроле?
9. Сформулируйте обобщенное правило прямоугольника.

## Глава 2

### ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

*Основная задача линейного программирования. Целевая функция. Векторы условий. Вектор ограничений. Выпуклый многогранник. Угловые точки. Опорная прямая (плоскость). Линии уровня. Опорные планы. Оптимальный план. Критерий оптимальности. Метод последовательного улучшения плана (симплекс-метод). Метод искусственного базиса. Признаки альтернативности и неразрешимости задачи. Признак неограниченности целевой функции. Коэффициенты разложения. Оценки. Симплексные отношения. Разрешающий элемент. Переход от одного плана к другому.*

Студент должен

*знать:*

- постановку общей задачи линейного программирования;
- понятие оптимального решения;
- алгоритм симплекс-метода;
- критерий оптимальности;
- признак неограниченности целевой функции;
- признак альтернативности оптимального плана;
- основные понятия теории двойственности;
- формулировку 1 и 2 теорем двойственности;
- связь между исходной и двойственной задачами;
- экономическую сущность двойственной задачи;
- понятие относительной стоимости сырья;

*уметь:*

- формулировать цель в поставленной задаче управления;
- выделять в задаче условия, задающие ограничения в деятельности объекта;
- по математической модели строить симплекс-таблицу;
- пересчитывать таблицу согласно алгоритму симплекс-метода;
- находить первоначальный опорный план;

- выписывать оптимальное решение задачи по последней симплекс-таблице;
- анализировать оптимальное решение с экономической точки зрения;
- строить двойственную задачу;
- находить решение двойственной задачи по решению исходной;
- устанавливать взаимосвязь между переменными прямой задачи и двойственной к ней;
- определять выбор задачи исходной и двойственной с точки зрения более простого решения (двойственный симплекс-метод);
- формулировать цель в двойственной задаче;
- определять экономический смысл всех переменных и ограничений в прямой и двойственной задачах;
- определять целесообразность введения нового вида продукции в производство, исходя из экономического анализа задачи.

## § 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Задачей линейного программирования называется задача нахождения минимума (или максимума) линейной функции от переменных, подчиненных линейным ограничениям.

*Определение 2.1.* Основной задачей линейного программирования называется задача, в которой требуется обратить в минимум линейную функцию:

$$f(X) = \sum_{j \in N} c_j x_j \quad (2.1)$$

при условиях:

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i \in M_1, \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in M_2, \quad (2.3)$$



$$x_j \geq 0, \quad j \in N_1, \quad (2.4)$$

$$-\infty < x_j < +\infty, \quad j \in N_2, \quad (2.5)$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$  — заданные действительные числа.

*Определение 2.2.* Функция (2.1) называется целевой функцией (или линейной формой) задачи (2.1)–(2.5), а условия (2.2)–(2.4) — ограничениями данной задачи.

$i$  означает номер ограничения;  $M = \{1, 2, \dots, m_1, m_1 + 1, \dots, m\}$  — множество номеров ограничений, где  $m_1 \leq m$ ;  $M_1 = \{1, 2, \dots, m_1\}$  — множество номеров ограничений-неравенств;  $M_2 = \{m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m\}$  — множество номеров ограничений-уравнений;  $M = M_1 \cup M_2$ ,  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ;  $j$  — номер переменной;  $N = \{1, 2, \dots, n_1, n_1 + 1, \dots, n\}$  — множество номеров переменных, где  $n_1 \leq n$ ;  $N_1 = \{1, 2, \dots, n_1\}$  — множество номеров неотрицательных переменных;  $N_2 = \{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n\}$  — множество номеров переменных, свободных в знаке;  $N = N_1 \cup N_2$ ,  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ .

*Определение 2.3.* Совокупность чисел  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих ограничениям задачи линейного программирования, называется допустимым решением (или планом).

*Определение 2.4.* План  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , обращающий в минимум линейную функцию (2.1), называется оптимальным планом (или оптимальным решением) задачи линейного программирования.

*Определение 2.5.* Стандартной задачей линейного программирования называется такая задача, в которой все ограничения типа неравенства и на все переменные налагаются условия неотрицательности. Ограничения всегда противоречат цели: для задачи минимизации неравенства должны быть « $\geq$ », а для задачи максимизации — « $\leq$ ».

$$\min \Rightarrow f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.6)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.8)$$

Стандартную задачу линейного программирования можно рассматривать как частный случай основной задачи, в которой  $M_2 = \emptyset$  и  $N_2 = \emptyset$ .

В матричном виде стандартная задача записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \min \Rightarrow f(X) &= CX \\ AX &\geq B, \\ X &\geq 0, \end{aligned}$$

где  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ,  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ .

*Определение 2.6.* Канонической задачей линейного программирования называется такая задача, в которой все ограничения типа равенства и на все переменные налагаются условия неотрицательности.

$$\min \Rightarrow f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.10)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.11)$$

Каноническую задачу линейного программирования можно рассматривать как частный случай основной задачи, в которой  $M_1 = \emptyset$  и  $N_2 = \emptyset$ .

В матричном виде каноническая задача записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\min \Rightarrow f(X) &= CX \\ AX &= B, \\ X &\geq 0.\end{aligned}$$

*Определение 2.7.* Столбцы  $A_j$ , матрицы  $A$  называются векторами условий, а  $B$  — вектором ограничений задачи линейного программирования.

Отметим, что в поставленной задаче не при любых исходных данных имеются допустимые планы, т. к. условия могут оказаться противоречивыми. Далее, при наличии допустимых планов не обязательно существуют оптимальные.

Указанные выше три формы задачи линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Это означает, что если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то тем самым может быть определен оптимальный план любой из трех задач.

В том случае, когда требуется найти максимум функции  $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ , можно перейти к нахождению минимума функции  $f_1(X) = -f(X) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$ , поскольку  $\max f(X) = -\min(-f(X))$ .

Ограничение-неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющего вид « $\leq$ », можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида « $\geq$ » — в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Таким образом, ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

преобразуется в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0,$$

а ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

преобразуется в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0.$$

В целевую функцию дополнительные переменные входят с нулевыми коэффициентами.

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражается расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане стандартной задачи равно объему неиспользуемого соответствующего ресурса.

В то же время каждое уравнение системы ограничений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде двух неравенств:

$$\left. \begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &\geq b_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n &\geq -b_i \end{aligned} \right\}.$$

И, наконец, если переменная  $x_k$  не подчиняется условиям неотрицательности  $(-\infty < x_k < +\infty)$ , то ее следует заменить разностью неотрицательных переменных  $x_k = x'_k - x''_k$ ,  $x'_k \geq 0$ ,  $x''_k \geq 0$ .



## § 2. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования, записанную в векторной форме

$$\min \rightarrow f(X) = \langle C, X \rangle \quad (2.12)$$

при условиях

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = B \quad (2.13)$$

$$X \geq 0, \quad (2.14)$$

где  $\langle C, X \rangle$  — скалярное произведение,  $A_j (j = \overline{1, n})$  —  $j$ -й столбец матрицы  $A$ .

*Определение 2.8.* План  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется опорным, если векторы  $A_j$ , входящие в разложение  $B = \sum_{j=1}^n x_j A_j$  с положительными коэффициентами  $x_j$ , являются линейно независимыми.

Непосредственно из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может превышать  $m$ .

*Определение 2.9.* Опорный план называется невырожденным, если он содержит ровно  $m$  положительных компонент.

**Теорема 2.1.** (о выпуклости планов). Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло (если оно не пусто).

*Определение 2.10.* Непустое множество планов канонической задачи линейного программирования называется многогранником решений, а всякая угловая точка многогранника решений  $G$  — вершиной.

**Теорема 2.2.** (о достижении оптимума в угловой точке многогранника решений). Целевая функция задачи линейного программирования достигает своего минимального значения в угловой

точке многогранника решений. Если целевая функция принимает минимальное значение более чем в одной угловой точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

**Теорема 2.3.** (о соответствии угловой точки многогранника решений линейно независимой системе векторов). Если известно, что система векторов  $A_1, A_2, \dots, A_r$  ( $r \leq n$ ) линейно независима и такова, что  $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_r A_r = B$ , где все  $x_j \geq 0$ , то точка  $X = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, 0, \dots, 0)$  является угловой точкой многогранника решений.

Здесь  $X$  —  $n$ -мерный вектор, последние  $(n - r)$  компонент которого равны нулю.

**Теорема 2.4.** (о соответствии линейно независимой системы векторов угловой точке многогранника решений). Если  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — угловая точка многогранника решений, то векторы  $A_j$ , соответствующие положительным компонентам  $x_j$ , образуют линейно независимую систему.

Отсюда, в частности, следует, что угловая точка многогранника решений имеет не более чем  $m$  положительных компонент.

Сформулированные теоремы позволяют сделать следующие выводы:

- 1) существует такая угловая точка многогранника  $G$ , в которой линейная функция достигает своего оптимума (минимума);
- 2) каждый опорный план соответствует угловой точке  $G$ ;
- 3) с каждой угловой точкой  $G$  связаны  $m$  линейно независимых векторов из данной системы  $n$  векторов.

Из этого можно заключить, что необходимо исследовать лишь угловые точки многогранника решений  $G$ , т. е. только опорные планы.

### § 3. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СТАНДАРТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть дана стандартная задача линейного программирования с двумя переменными

$$\min \Rightarrow f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (2.15)$$

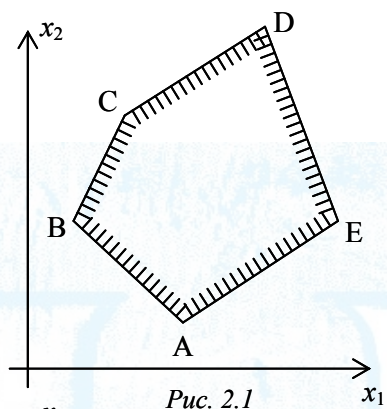
$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \geq b_m \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (2.17)$$

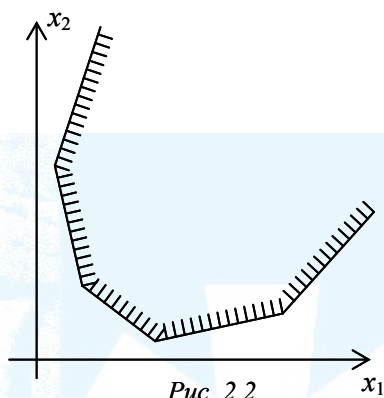
Каждое из неравенств (2.16), (2.17) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ),  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ .

Область допустимых решений задачи (2.15)–(2.17) является пересечением  $m + 2$  полуплоскостей. При различных числовых данных можно получить один из шести случаев: выпуклый многоугольник (рис. 2.1); выпуклая многоугольная область (рис. 2.2); отрезок (рис. 2.3); луч (рис. 2.4); единственная точка (рис. 2.5); пустое множество (рис. 2.6).

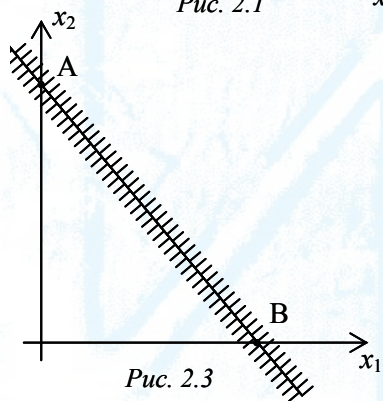
Линейная функция (2.15) представляет собой на плоскости  $x_1 O x_2$  семейство параллельных прямых, каждой из которых отвечает определенное значение  $f = \alpha$ . Перпендикулярный к этим прямым вектор  $\vec{n} = (c_1, c_2)$  указывает направление возрастания функции  $f$  (рис. 2.7), и задача (2.15)–(2.17) заключается в следующем: необходимо найти точку допустимой области, через которую проходит опорная прямая семейства  $f$ , отвечающая наименьшему значению функции (рис. 2.8).



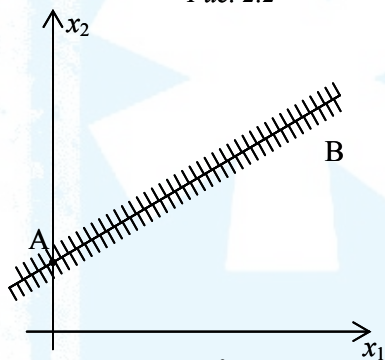
Puc. 2.1



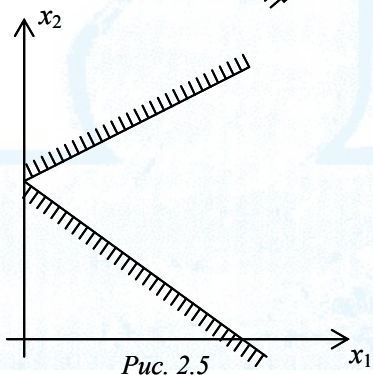
Puc. 2.2



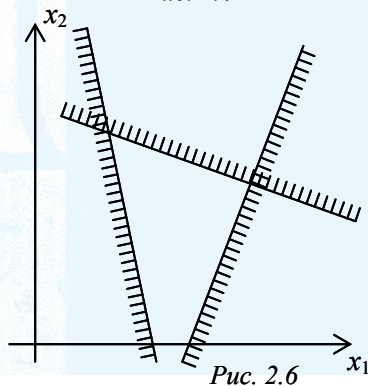
Puc. 2.3



Puc. 2.4

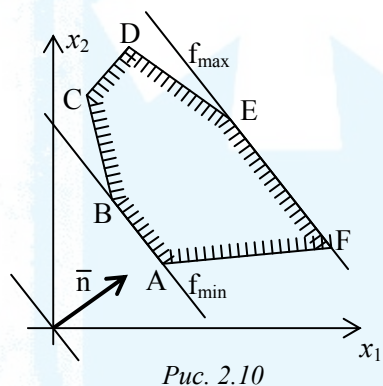
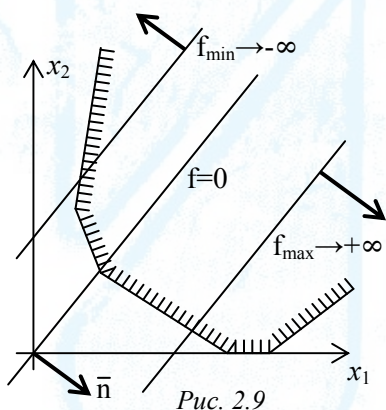
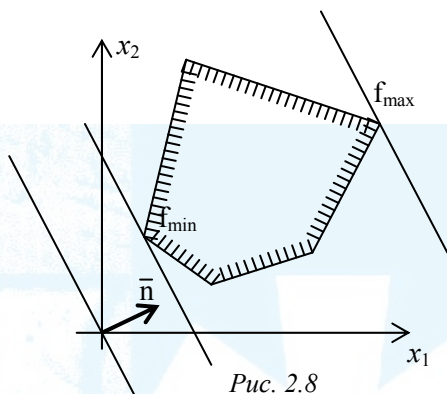
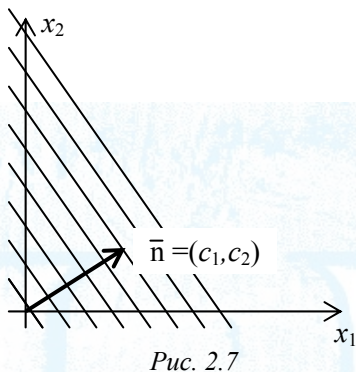


Puc. 2.5



Puc. 2.6





При решении задачи линейного программирования графическим способом могут встретиться следующие случаи: задача имеет единственное решение (рис. 2.8); функция  $f$  не имеет экстремального значения (рис. 2.9); задача имеет бесконечное множество решений (альтернативный оптимум) (рис. 2.10).

Решение задачи графическим способом проводится в такой последовательности:

1. Записывают уравнения граничных прямых  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$  и строят их на плоскости  $x_1Ox_2$ .

2. Определяют полуплоскости, соответствующие исходным ограничениям-неравенствам (2.16). Для этого берут произвольную точку, лежащую по ту или иную сторону от граничной прямой, и ее координаты подставляют в левую часть неравенства. Если оно удовлетворяется, то искомой будет полуплоскость, которая содержит выбранную точку; если не удовлетворяется, то искомой будет полуплоскость, которой данная точка не принадлежит.

3. Выделяют область допустимых решений задачи как общую часть  $m + 2$  полуплоскостей, где  $m$  полуплоскостей соответствуют исходным неравенствам (2.16), а две полуплоскости — условиям неотрицательности переменных ( $x_1 \geq 0$  — правая координатная полуплоскость;  $x_2 \geq 0$  — верхняя координатная полуплоскость).

4. Строят вектор  $\bar{n} = (c_1, c_2)$  и перпендикулярно к нему одну из прямых семейства  $f$ , например,  $f = 0$ .

5. Определяют точку минимума многоугольника решений путем параллельного перемещения вспомогательной прямой  $f = 0$  в направлении вектора  $\bar{n}$  до пересечения с точкой, в которой прямая  $f$  «встречается» с областью допустимых решений. Если необходимо найти точку, которой соответствует максимальное значение функции  $f$ , то вспомогательную прямую перемещают в направлении вектора  $\bar{n}$  до пересечения с точкой, в которой прямая  $f$  «прощается» с областью допустимых решений.

6. Вычисляют координаты оптимальной точки  $X^* = (x_1^*, x_2^*)$  и значение функции  $f(x_1^*, x_2^*)$ .

*Примечание.* В случае альтернативного оптимума и ограниченной области оптимальные решения соответствуют всем точкам отрезка, соединяющего две вершины области (например, на рис. 2.10 целевая функция принимает минимальное значение в точках  $A$  и

$B$ , следовательно, и на отрезке  $AB$ ). В таком случае следует найти общее оптимальное решение. Пусть  $X_{onm}^{(1)} = A$ ,  $X_{onm}^{(2)} = B$ , тогда общее оптимальное решение равно их выпуклой линейной комбинации и определяется по формуле:

$$X_{общ. onm} = (1 - \lambda) X_{onm}^{(1)} + \lambda X_{onm}^{(2)}, \quad (2.18)$$

где  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

В случае неограниченной области может случиться, что среди множества оптимальных решений только одно совпадает с вершиной области (точка  $X_{onm}^{(1)}$  на рис. 2.11).

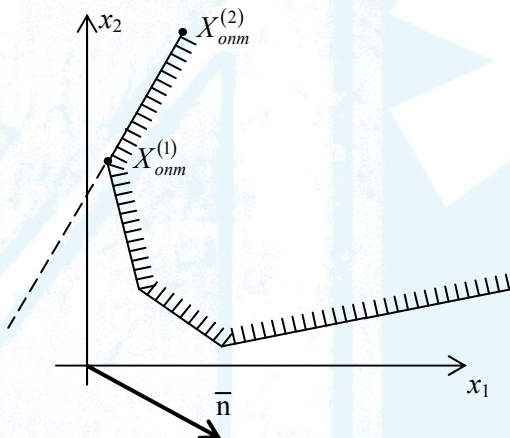


Рис. 2.11

Тогда на «оптимальном» граничном луче находят еще одно оптимальное решение  $X_{onm}^{(2)}$  и далее общее оптимальное решение представляют формулой:

$$X_{общ. onm} = (1 - \lambda) X_{onm}^{(1)} + \lambda X_{onm}^{(2)}, \quad (2.19)$$

где  $0 \leq \lambda \leq \infty$ .

## § 4. ПРИМЕРЫ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СТАНДАРТНОЙ ЗАДАЧИ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

### Пример 2.1 (единственное оптимальное решение)

Найти минимальное и максимальное значение функции  $f = 3x_1 - x_2$  при условиях

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 5x_1 + x_2 \geq 9 \\ (2) \quad -6x_1 + 5x_2 \leq 14 \\ (3) \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ (4) \quad x_1 \leq 6 \\ (5) \quad 4x_1 + 18x_2 \geq 33 \end{array} \right\}.$$

**Решение.** Каждое неравенство системы ограничений заменим на уравнение, получим систему из пяти уравнений, в которой номер уравнения соответствует номеру ограничения

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 5x_1 + x_2 = 9 \\ (2) \quad -6x_1 + 5x_2 = 14 \\ (3) \quad 2x_1 + 2x_2 = 21 \\ (4) \quad x_1 = 6 \\ (5) \quad 4x_1 + 18x_2 = 33 \end{array} \right\}.$$

Строим прямую (1)  $5x_1 + x_2 = 9$ . Находим полуплоскость, в которой неравенство (1) выполняется. Для этого берем произвольную точку, например, точку  $O = (0, 0)$ , подставляем ее координаты в первое ограничение  $5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 < 9$ . Координаты этой точки не удовлетворяют первому неравенству. Это значит, что область допустимых решений располагается в полуплоскости, не содержащей исследуемую точку  $O$ . Укажем найденную полуплоскость штриховкой. Так же строим остальные прямые и определяем области решений ограничений (2.2)–(2.5). В результате имеем многоуголь-



ник решений  $ABCDE$ , удовлетворяющий всем ограничениям исходной задачи (рис. 2.12).

Найдем такие точки многоугольника  $ABCDE$ , в которых функция цели принимает минимальное и максимальное значения. Строим нормаль  $\vec{n} = (3; -1)$  семейства прямых  $f$  и одну из линий уровня, расположенную за пределами многоугольника решений, например  $f = 3x_1 - x_2 = -2$ . Будем перемещать вспомогательную прямую параллельно самой себе в направлении вектора нормали  $\vec{n} = (3; -1)$ .

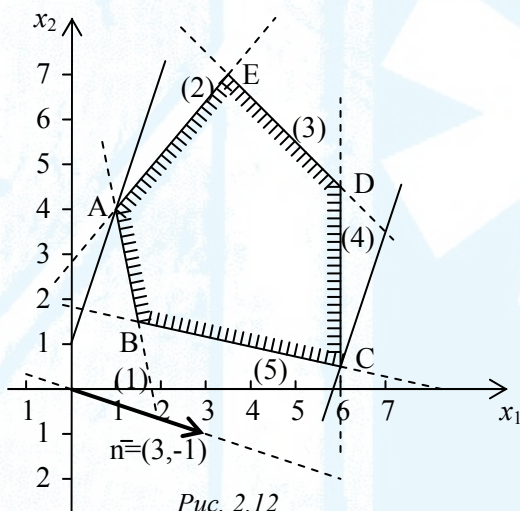


Рис. 2.12

На рис. 2.12 видно, что точкой «встречи» семейства прямых  $f$  и множества допустимых решений является точка  $A$ ; точкой, в которой  $f$  «прощается» с множеством, является точка  $C$ . В точке «встречи» функция принимает минимальное значение, а в точке «прощания» — максимальное.

Так как  $A = (1) \& (2)$ , то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 9 \\ -6x_1 + 5x_2 = 14. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим:  $x_1^{(A)} = 1$ ,  $x_2^{(A)} = 4$ . Вычислим минимальное значение функции. Оно равно  $f(A) = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 = -1$ .

Аналогично определяются координаты точки максимума. Поскольку  $C = (4) \& (5)$ , решаем систему, состоящую из (4) и (5) уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ 4x_1 + 18x_2 = 33, \end{cases}$$

откуда  $x_1^{(C)} = 6$ ,  $x_2^{(C)} = \frac{1}{2}$ . Вычислим максимальное значение функции

$$\max f(X) = f(C) = 3 \cdot 6 - 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{2}.$$

В данной задаче преследовалось две цели — найти минимальное и максимальное значения линейной функции на заданном множестве, поэтому приведем два ответа. Функция принимает минимальное значение в точке  $A = (1, 4)$ ,  $\min f(X) = -1$ . Максимум достигается в точке  $C = (6; 1/2)$ ,  $\max f(X) = 35/2$ .

### Пример 2.2 (альтернативные оптимальные планы на отрезке)

$$f(x_1, x_2) = 9x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \ 16x_1 + 10x_2 \geq 31 \\ (2) \ 2x_1 + 5x_2 \leq 26 \\ (3) \ 3x_1 + x_2 \leq 21 \\ (4) \ 10x_1 - 24x_2 \leq 49 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

Рис. 2.13

*Рис. 2.13*

Прямые семейства  $f$  параллельны граничной прямой  $NP$ , т. к. коэффициенты при соответствующих переменных в уравнениях  $9x_1 + 3x_2 = \alpha$ ,  $3x_1 + x_2 = 1$ , представляющих эти прямые, пропорциональны. Следовательно, опорная прямая  $f = \alpha_2$  совпадает с граничной прямой  $NP$ . Любая точка  $X^* \in [N, P]$  является оптимальным решением.

Угловая точка  $N = (3) \& (4)$ . Решим систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} (3) \quad 3x_1 + x_2 = 21 \\ (4) \quad 10x_1 - 24x_2 = 49 \end{array} \right\},$$

получим координаты точки  $N: x_1^{(N)} = 553/82$  и  $x_2^{(N)} = 63/82$ ;  $N = (553/82, 63/82)$ . Вычислим значение функции в точке  $N$

$$f(N) = 9 \cdot \frac{553}{82} + 3 \cdot \frac{63}{82} = \frac{5166}{82} = 63.$$

Угловая точка  $P = (2) \& (3)$ . Найдем ее координаты, решив систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} (2) \quad 2x_1 + 5x_2 = 26 \\ (3) \quad 3x_1 + x_2 = 21 \end{array} \right\}$$

$x_1^{(P)} = 79/13$ ,  $x_2^{(P)} = 36/13$ . Откуда  $P = (79/13, 36/13)$ . Значение функции в точке  $P$  равно  $f(P) = 9 \cdot \frac{79}{13} + 3 \cdot \frac{36}{13} = 63$ .

И, наконец, найдем все альтернативные оптимальные решения

$$X^* = (1 - \lambda)P + \lambda N, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Обозначив  $P$  через  $X_1^*$ , а  $N$  — через  $X_2^*$ , получим  $X^* = (1 - \lambda)X_1^* + \lambda X_2^*$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Максимальное значение функции равно  $f(X^*) = 63$ .

### Пример 2.3 (альтернативные оптимальные решения на луче)

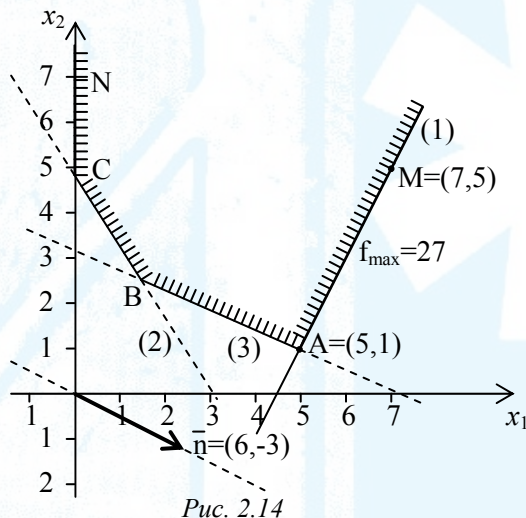
Найти максимальное значение линейной функции  $f(X) = 6x_1 - 3x_2$  при условиях



$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 2x_1 - x_2 \leq 9 \\ (2) \quad 28x_1 + 17x_2 \geq 84 \\ (3) \quad 3x_1 + 7x_2 \geq 22 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

**Решение.** Строим область допустимых решений, вектор нормали  $\bar{n} = (6, -3)$ , произвольную линию уровня, например  $f = 0$  (рис. 2.14).



Область решений представляет собой выпуклое, многоугольное, неограниченное множество  $MA BCN$ . Точки  $A, B, C$  — угловые, а точки  $M$  и  $N$  расположены на лучах, ограничивающих область решений.

График функции  $f = 6x_1 - 3x_2 = 0$  параллелен лучу  $[AM)$ . При этом на луче  $AM$  семейство прямых  $f$  покидает множество решений, становится опорной прямой.

Покажем, что целевая функция достигает максимального значения в угловой точке  $A$  и в любой точке луча  $AM$ . В точке  $A$

пересекаются (1) и (3) граничные прямые. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} (1) & 2x_1 - x_2 = 9 \\ (3) & 3x_1 + 7x_2 = 22 \end{cases}.$$

Получим координаты  $x_1^{(A)} = 5$ ,  $x_2^{(A)} = 1$ ;  $A = (5, 1)$ . Вычислим значение целевой функции  $f(A) = 6 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 27$ . Возьмем на луче фиксированную точку — это значит, что координаты выбранной точки должны удовлетворять уравнению  $2x_1 - x_2 = 9$ . Одну из координат зададим произвольно, пусть  $x_1 = 7$ , тогда  $x_2 = 2 \cdot 7 - 9 = 5$ . Получим точку  $M = (7, 5)$ , лежащую на луче  $AM$ . Вычислим значение целевой функции в этой точке  $f(M) = 6 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = 27$ . Далее найдем координаты произвольной оптимальной точки луча  $AM$ , которую обозначим через  $X^* = (1 - \lambda)A + \lambda M$ ,  $0 \leq \lambda < \infty$ ,

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + 5 \\ 4\lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

При  $\lambda = 0$  находимся в точке отсчета  $A = (5, 1)$ , при  $\lambda = 1$  переходим в точку  $M = (7, 5)$ , при  $0 < \lambda < 1$  точка  $X^*$  находится внутри отрезка  $[A, M]$ , при  $\lambda > 1$  получим любую точку луча за пределами отрезка  $[A, M]$ . Пусть  $\lambda = 100$ , тогда  $x_1^* = 205$ ,  $x_2^* = 401$ ,  $f = 6 \cdot 205 - 3 \cdot 401 = 27$ .

Далее найдем значение функции в произвольной точке луча

$$f(X^*) = 6 \cdot (2\lambda + 5) - 3 \cdot (4\lambda + 1) = 12\lambda + 30 - 12\lambda - 3 = 27.$$

Как видим, значение функции не зависит от величины параметра  $\lambda$ , следовательно, существует множество оптимальных планов, расположенных на луче  $AM$ , координаты которых можно увели-

чивать до бесконечности. При этом значение функции ограничено и для любого  $X^* \in [A, M]$  составляет величину, равную 27.

Ответ.  $X^* = (1 - \lambda)(5; 1) + \lambda(7; 5)$ ,  $0 \leq \lambda < \infty$ ,

$$\max f = f(X^*) = 27.$$

### Пример 2.4 (неограниченное значение целевой функции)

Найти минимальное и максимальное значения функции  $f(X) = 2x_1 - 3x_2$  при условиях

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & 2x_1 + 7x_2 \geq 15 \\ (2) \quad & 5x_1 + 4x_2 \geq 17 \\ (3) \quad & -3x_1 + x_2 \leq 3 \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

**Решение.** Строим область допустимых решений, нормаль  $\bar{n} = (2, -3)$  и какую-нибудь линию уровня  $f = \alpha$ . Область решений представляет собой выпуклое, многоугольное, не ограниченное множество  $CBAM$  (рис. 2.15).

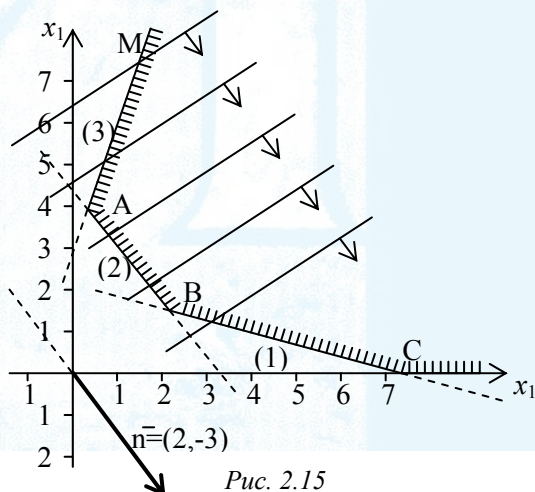


Рис. 2.15

В задаче минимизации вспомогательную прямую  $f = \alpha$  перемещаем против нормали. Из рисунка видно, что в данном направлении область не ограничена. Точка «встречи» семейства параллельных прямых  $f$  и пространства решений устремляется в бесконечность вместе с лучом  $AM$ . Значение функции неограниченно убывает,  $f \rightarrow -\infty$ . Задача оптимального решения не имеет.

Для доказательства найдем несколько точек на луче  $AM$  и значение функции цели в этих точках. Если точка принадлежит лучу, то, задав одну из координат, находим другую координату. Пусть  $x_1 = 2$ , тогда из уравнения  $AM$  получим  $x_2 = 3 + 6 = 9$ , откуда находим фиксированную точку  $X_1 = (2, 9)$ , лежащую на луче. Значение функции  $f(X_1) = 4 - 27 = -23$ . Аналогично найдем произвольную точку  $X_2 = (10, 33)$  на луче  $AM$ . Значение функции  $f(X_2) = -79$ . Итак, увеличивая координаты точек, лежащих на луче, видим, что значение функции убывает и стремится к минус бесконечности.

Для поиска точки максимума прямую  $f = \alpha$  будем перемещать по направлению нормали.

В данном направлении область также не ограничена. Точка «прощания» устремляется в бесконечность вместе с лучом  $Cx_1$ . Значение функции неограниченно возрастает,  $f(x_1, x_2) \rightarrow +\infty$ . (Проверьте).

### Пример 2.5 (множество решений пусто)

Найти минимальное значение линейной функции  $f(X) = 2x_1 - 3x_2$  при условиях

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & 2x_1 + 7x_2 \leq 15 \\ (2) \quad & 5x_1 + 4x_2 \geq 17 \\ (3) \quad & -x_1 + x_2 \geq 1 \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$



**Решение.** Строим оси координат, граничные прямые (1), (2), (3) системы ограничений. Определяем полуплоскости, удовлетворяющие каждому неравенству, и убеждаемся в том, что пересечение полуплоскостей образует пустое множество, т. е.  $G = \emptyset$ . Это значит, что на плоскости нет ни одной точки, которая бы удовлетворяла всем ограничениям одновременно.

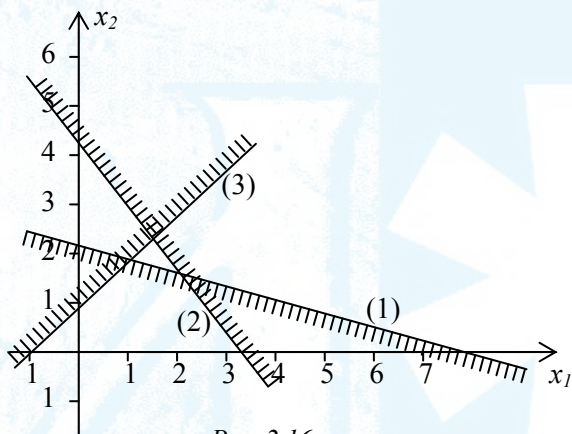


Рис. 2.16

Условия противоречивы. Задача решений не имеет.

### Пример 2.6 (множество решений состоит из одной точки)

Найти максимальное значение линейной функции

$$f(X) = 7x_1 - 3x_2$$

при условиях

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 15x_1 - 29x_2 \leq 15 \\ (2) \quad 3x_1 + 4x_2 \geq 24 \\ (3) \quad 5x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ (4) \quad x_1 - x_2 \geq 3 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

**Решение.** Строим граничные прямые (рис. 2.17). Штриховка у граничных прямых направлена в сторону той полуплоскости, в которой удовлетворяется соответствующее неравенство. Из рисунка видно, что множество решений состоит из одной точки  $A$ , поэтому максимальное значение достигается в этой единственной точке.

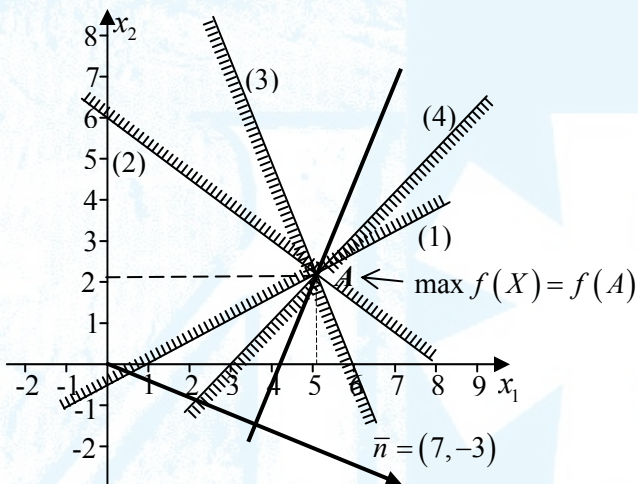


Рис. 2.17

Для того чтобы убедиться в этом, решим систему уравнений

$$\begin{cases} (1) & 15x_1 - 29x_2 = 15 \\ (2) & 3x_1 + 4x_2 = 24 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 29 \end{vmatrix}$$

$$49x_2 = 105 \Rightarrow x_2 = 105/49$$

$$147x_1 = 756 \Rightarrow x_1 = 252/49 \Rightarrow A = (252/49, 105/49).$$

Подставим координаты точки  $A$  в (3) и (4) ограничения задачи:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{252}{49} + 2 \cdot \frac{105}{49} &= \frac{1470}{49} = 30, \\ \frac{252}{49} - \frac{105}{49} &= \frac{147}{49} = 3. \end{aligned}$$

Оба неравенства обратились в равенства. Это свидетельствует о том, что все прямые пересекаются в точке  $A$  и область допустимых решений состоит из этой единственной точки.

## § 5. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим каноническую задачу в определении максимального (минимального) значения функции

$$\max \Rightarrow f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.20)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.21)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.22)$$

1. Решаем систему уравнений (2.21) методом Жордана–Гаусса до получения общего решения:

$$x_i = \tilde{b}_i - (\tilde{a}_{i j_1} x_{j_1} + \tilde{a}_{i j_2} x_{j_2}). \quad (2.23)$$

2. Учитывая условия неотрицательности, перейдем от уравнений к неравенствам:

$$x_i \geq 0 \Rightarrow \tilde{b}_i - (\tilde{a}_{i j_1} x_{j_1} + \tilde{a}_{i j_2} x_{j_2}) \geq 0$$

$$\tilde{a}_{i j_1} x_{j_1} + \tilde{a}_{i j_2} x_{j_2} \leq \tilde{b}_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.24)$$

$$x_{j_1} \geq 0, \quad x_{j_2} \geq 0. \quad (2.25)$$

3. Целевую функцию выражаем через свободные переменные:

$$f(x_{j_1}, x_{j_2}) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_{j_1} x_{j_1} + \tilde{c}_{j_2} x_{j_2}. \quad (2.26)$$

4. Из формул (2.26), (2.24) и (2.25) составим стандартную задачу с двумя переменными:

$$\max \Rightarrow f(x_{j_1}, x_{j_2}) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_{j_1} x_{j_1} + \tilde{c}_{j_2} x_{j_2} \quad (2.27)$$

$$\tilde{a}_{i_{j_1}} x_{j_1} + \tilde{a}_{i_{j_2}} x_{j_2} \leq \tilde{b}_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.28)$$

$$x_{j_1} \geq 0, \quad x_{j_2} \geq 0. \quad (2.29)$$

5. Строим область допустимых решений  $G$  :

- если  $G = \emptyset$ , то нет решений (процесс окончен);
- если  $G \neq \emptyset$ , переходим к п. 6.

6. Строим вектор нормали  $\bar{n} = (\tilde{c}_{j_1}, \tilde{c}_{j_2})$  и семейство прямых  $f$ . Каждая прямая  $f = \alpha$  перпендикулярна нормали. Прямые семейства  $f$  параллельны между собой, они называются линиями уровня.

Передвигая вспомогательную прямую  $f = \alpha$  параллельно самой себе, визуальнo определяем точку экстремума. Угловая точка, в которой линия уровня «прощается» с множеством, функция достигает своего максимального значения, а точка «встречи» является точкой минимума функции  $f$ . Возможны два случая: а) такой точки не существует (в задаче максимизации функция не ограничена сверху, а в задаче минимизации — снизу и, следовательно, задача не разрешима); б) такая точка существует. Пусть это будет точка  $A$ , в которой пересекаются прямые  $(i_1) \& (i_2)$ .

7. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{i_1 j_1} x_{j_1} + \tilde{a}_{i_1 j_2} x_{j_2} = \tilde{b}_{i_1} \\ \tilde{a}_{i_2 j_1} x_{j_1} + \tilde{a}_{i_2 j_2} x_{j_2} = \tilde{b}_{i_2} \end{cases} \Rightarrow A = (x_{j_1}^*, x_{j_2}^*).$$

8. Вычисляем значение функции

$$f(A) = f(x_{j_1}^*, x_{j_2}^*) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_{j_1} x_{j_1}^* + \tilde{c}_{j_2} x_{j_2}^*.$$

9. Точка  $A = (x_{j_1}^*, x_{j_2}^*)$  содержит только две координаты. Для определения недостающих координат оптимального плана  $X^*$



подставим  $x_{j_1}^*; x_{j_2}^*$  в общее решение (2.23). Получим оптимальный план исходной задачи  $X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ .

10. Находим значение функции

$$f(X^*) = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \dots + c_n x_n^*.$$

11. Для контроля сравним  $f(A)$  и  $f(X^*)$ . Если  $f(A) = f(X^*)$ , есть основание утверждать, что задача решена правильно.

$$\text{Ответ. } X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*), \max f(X) = f(X^*) = f(A).$$

### Пример 2.7 (графическое решение канонической задачи)

Решить графическим методом каноническую задачу линейного программирования

$$\min \Rightarrow f(X) = -12x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5$$

$$\left. \begin{aligned} -8x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 7 \\ -x_1 - 7x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 &= 13 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}.$$

**Решение.** Преобразуем систему уравнений методом Жордана–Гаусса до получения общего решения (табл. 2.1).

Общее решение системы уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_5 = \frac{45}{2} - \left( \frac{6}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 \right) \\ x_4 = \frac{21}{2} - \left( \frac{6}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 \right) \\ x_3 = -\frac{5}{2} - \left( -\frac{8}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 \right) \end{cases}.$$

Таблица 2.1

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b_i$
-8	5	2	-1	1	7
-1	-7	1	1	0	8
7	-4	-1	1	0	13
-9	-2	3	0	1	15
-1	-7	1	1	0	8
8	3	-2	0	0	5
6/2	5/2	0	0	1	45/2
6/2	-11/2	0	1	0	21/2
-8/2	-3/2	1	0	0	-5/2

Учитывая, что все переменные неотрицательны, перейдем от уравнений к неравенствам из общего решения системы.

$$\begin{cases} x_5 \geq 0 \Rightarrow \frac{45}{2} - \left( \frac{6}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 \right) \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \Rightarrow \frac{21}{2} - \left( \frac{6}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 \right) \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \Rightarrow -\frac{5}{2} - \left( -\frac{8}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 \right) \geq 0, \end{cases}$$

откуда получим систему неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ 6x_1 - 11x_2 \leq 21 \\ 8x_1 + 3x_2 \geq 5 \end{cases}$$

Целевую функцию выразим через свободные переменные  $x_1, x_2$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= -12x_1 + 6x_2 + \frac{45}{2} - \frac{6}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{21}{2} + \frac{6}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \\ &\quad - \frac{10}{2} + \frac{16}{2}x_1 + \frac{6}{2}x_2 = 7 - 4x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Окончательно получим стандартную задачу линейного программирования с двумя переменными

$$\min \Rightarrow f(x_1, x_2) = 7 - 4x_1 + x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 6x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ (2) \quad 6x_1 - 11x_2 \leq 21 \\ (3) \quad 8x_1 + 3x_2 \geq 5 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Строим область допустимых решений  $ABCDE$  (рис. 2.18).

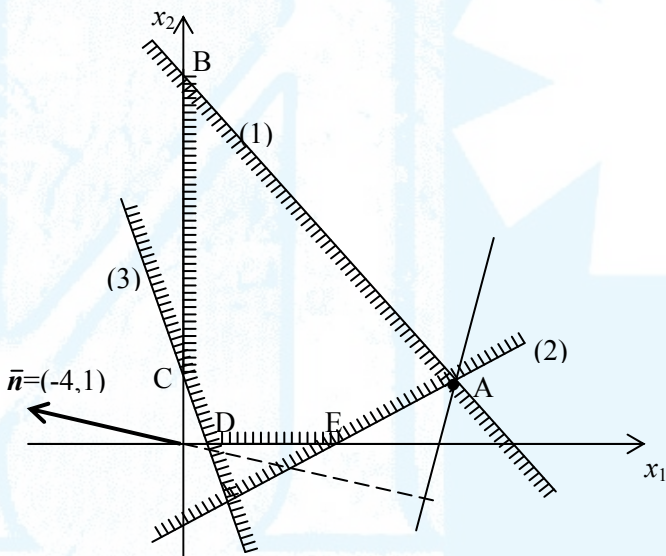


Рис. 2.18

Любая точка многоугольника  $ABCDE$  удовлетворяет системе неравенств. Вершина  $A$  является точкой входа семейства прямых  $f$  в область решений, следовательно, в этой точке она принимает минимальное значение.

В свою очередь,  $A = (1) \& (2)$ . Решим систему уравнений

$$\begin{cases} (1) \ 6x_1 + 5x_2 = 45 \\ (2) \ 6x_1 - 11x_2 = 21 \end{cases},$$

получим координаты точки  $A = \left( x_1^* = \frac{25}{4}; x_2^* = \frac{6}{4} \right)$  и вычислим значение функции  $f(A) = 7 - 4 \cdot \frac{25}{4} + \frac{6}{4} = -\frac{66}{4} = -16,5$ .

Недостающие координаты оптимального плана определяем из общего решения системы ограничений-уравнений

$$x_5^* = 0, \ x_4^* = 0, \ x_3^* = -\frac{5}{2} + \frac{8}{2} \cdot \frac{25}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{4} = \frac{198}{8} = \frac{99}{4}.$$

Окончательно получаем оптимальный план задачи

$$X^* = (25/4; 6/4; 99/4; 0; 0).$$

Для контроля вычислим значение функции

$$f(X^*) = -12 \cdot \frac{25}{4} + 6 \cdot \frac{6}{4} + 2 \cdot \frac{99}{4} = -\frac{66}{4} = -16,5.$$

Результаты вычислений совпадают  $f(A) = f(X^*) = -16,5$ .

## § 6. АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Симплекс-метод решения задачи линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции убывает (при условии, что данная задача имеет оптимальный план, и каждый ее опорный план является невырожденным). Указанный переход возможен, если известен какой-нибудь исходный опорный план.



Предположим сначала, что данная система из  $n$  векторов  $A_1, A_2, \dots, A_n$  содержит  $m$  единичных векторов, которые можно сгруппировать в виде единичной матрицы порядка  $m$ . Тогда задачу (2.9)–(2.11) можно переписать в таком виде:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right\} \quad (2.31)$$

За базисные неизвестные выбираем  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , свободные неизвестные  $x_{m+1}, \dots, x_n$  полагаем равными нулю (на практике базисные переменные обычно не группируются вместе, здесь это делается в целях наглядности). Далее, учитывая, что  $b_i > 0$ , ( $i = \overline{1, m}$ ), а векторы  $A_1, A_2, \dots, A_m$  — единичные, получаем исходный опорный план:

Итак, исходный опорный план построен, он определяется системой  $m$ -мерных единичных векторов  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Чтобы найти оптимальный план данной задачи или убедиться в ее неразрешимости, следует выполнить следующие предписания в указанном порядке.

61

поненты, т. е.  $x_{ij} = a_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ). В дальнейшем будем обозначать через  $X_j$  вектор, составленный из коэффициентов разложения вектора  $A_j$  по векторам базиса  $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T$ . Разложение вектора  $B$  по исходному базису известно:  $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m$ .

2. Для каждого  $j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) вычислить оценку

$$\gamma_j = f_j - c_j = \langle C_B, X_j \rangle - c_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} - c_j. \quad (2.34)$$

Если все  $\gamma_j \leq 0$ , процесс решения задачи окончен. Рассматриваемое опорное решение оптимально. Оптимум целевой функции:

$$f_{\min} = \langle C_B, X_0 \rangle = \sum_{i=1}^m c_i x_i, \quad (2.35)$$

где через  $X_0$  обозначено разложение вектора  $B$  по базису,  $C_B$  — вектор, составленный из коэффициентов целевой функции, соответствующих базисным неизвестным,  $i$  — номер строки в таблице.

Если есть  $\gamma_j > 0$ , то

3. Выяснить, существует ли хотя бы одна такая оценка  $\gamma_j > 0$ , что для этого  $j$  все  $x_{ij} \leq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Если такая  $\gamma_j > 0$  есть, процесс решения задачи окончен. Целевая функция задачи не ограничена снизу на допустимом множестве ( $f \rightarrow -\infty$ ).

Если таких  $\gamma_j > 0$  нет (т. е., если для любой  $\gamma_j > 0$  есть хотя бы одно  $x_{ij} > 0$ ), то

4. Выбрать одну из  $\gamma_j > 0$  (пусть это будет  $\gamma_q$ ); вычислить отношения  $\frac{x_i}{x_{iq}}$  для всех  $i$ , для которых  $x_{iq} > 0$ , и найти минимальное из этих отношений. Пусть это будет

$$\varepsilon_{oq} = \min_{i: x_{iq} > 0} \left\{ \frac{x_i}{x_{iq}} \right\} = \frac{x_p}{x_{pq}}. \quad (2.36)$$

Элемент  $x_{pq}$  называется разрешающим.

5. Осуществить переход к новому опорному решению, базис которого получается заменой вектора  $A_p$  в предыдущем базисе вектором  $A_q$ . Вычислить компоненты всех векторов  $B, A_1, A_2, \dots, A_n$  в новом базисе по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= \frac{x_i x_{pq} - x_p x_{iq}}{x_{pq}}, \quad i \neq p \\ x'_p &= \frac{x_p}{x_{pq}} \end{aligned} \right\}, \quad (2.37)$$

$$\left. \begin{aligned} x'_{ij} &= \frac{x_{ij} x_{pq} - x_{pj} x_{iq}}{x_{pq}}, \quad i \neq p, j = \overline{1, n} \\ x'_{pj} &= \frac{x_{pj}}{x_{pq}} \end{aligned} \right\}. \quad (2.38)$$

Выполнить предписание 2 и, если потребуется, дальнейшие предписания, имея в виду новый опорный план

$$X_1 = (x'_1, x'_2, \dots, x'_p = 0, \dots, x'_m, x'_{m+1} = 0, \dots, x'_q, \dots, x'_n = 0) \quad (2.39)$$

и новые значения величин  $x_{ij}$ .

Каждый переход к новому базису называется шагом или, чаще, итерацией симплекс-метода. Через конечное число итераций процесс закончится либо на п. 2 (найдено оптимальное решение), либо на п. 3 (установлено, что оптимального решения нет).

*Примечание 1.* В п. 4 алгоритма предписывается выбрать одну из положительных оценок  $\gamma_j$ . Если положительных оценок несколько, то целесообразно выбрать ту, которая соответствует наибольшему на данном шаге уменьшению значения целевой функции

$$\max_{j: \gamma_j > 0} \{ \Delta_j = \varepsilon_{0j} \gamma_j \},$$

где  $\varepsilon_0$  определяется для каждого  $j$  из соотношения (2.36). Такой выбор в большинстве случаев приводит к уменьшению количества итераций, что при решении задачи «вручную» позволяет быстрее получить оптимальное решение. Часто поступают и так: вектор, подлежащий включению в базис, выбирают по максимальной оценке, что оказывается вполне приемлемым.

*Примечание 2.* Приведенный алгоритм предписывает вычислять все оценки  $\gamma_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) по формуле (2.34). Однако, начиная со второй симплекс-таблицы, оценки можно вычислять по другим формулам

$$\gamma'_j = \frac{\gamma_j x_{pq} - x_{pj} \gamma_q}{x_{pq}}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.40)$$

Если  $\gamma'_j$  вычисляется по формулам (40), то это вычисление следует отнести к п. 5 алгоритма, и от него переходить сразу ко второй части п. 2 («Если все  $\gamma_j \leq 0 \dots$ »), лишь на отдельных итерациях, для контроля, осуществляя и прямые вычисления  $\gamma'_j$ .

*Примечание 3.* С той же целью контроля, начиная со второй симплекс-таблицы, значение функции может быть вычислено по формулам

$$f_1 = \frac{f_0 x_{pq} - x_p \gamma_q}{x_{pq}} = f_0 - \frac{x_p}{x_{pq}} \gamma_q = f_0 - \varepsilon_{0q} \gamma_q. \quad (2.41)$$

*Примечание 4.* Если при оптимальном плане нулевые оценки соответствуют только базисным векторам, то это говорит о единственности оптимального плана. Если же нулевая оценка соответствует вектору, не входящему в базис, то в общем случае это означает, что имеется альтернативный оптимальный план.

При ручном счете результаты вычислений удобно оформлять в виде таблиц (табл. 2.2).



Таблица 2.2

Первая итерация вычислительного процесса

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_p$	$\dots$	$c_m$	$c_{m+1}$	$\dots$	$c_j$	$\dots$	$c_q$	$\dots$	$c_n$
				$A_1$	$A_2$	$\dots$	$A_p$	$\dots$	$A_m$	$A_{m+1}$	$\dots$	$A_j$	$\dots$	$A_q$	$\dots$	$A_n$
1	$A_1$	$c_1$	$x_1$	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$x_{1,m+1}$	$\dots$	$x_{1,j}$	$\dots$	$x_{1,q}$	$\dots$	$x_{1,n}$
2	$A_2$	$c_2$	$x_2$	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$x_{2,m+1}$	$\dots$	$x_{2,j}$	$\dots$	$x_{2,q}$	$\dots$	$x_{2,n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$p$	$A_p$	$c_p$	$x_p$	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$x_{p,m+1}$	$\dots$	$x_{p,j}$	$\dots$	$x_{p,q}$	$\dots$	$x_{p,n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$m$	$A_m$	$c_m$	$x_m$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$x_{m,m+1}$	$\dots$	$x_{m,j}$	$\dots$	$x_{m,q}$	$\dots$	$x_{m,n}$
$m+1$			$f$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$f_{m+1} - c_{m+1}$	$\dots$	$f_j - c_j$	$\dots$	$f_q - c_q$	$\dots$	$f_n - c_n$

Таблица 2.3

Вторая итерация вычислительного процесса

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_p$	$\dots$	$c_m$	$c_{m+1}$	$\dots$	$c_j$	$\dots$	$c_q$	$\dots$	$c_n$
				$A_1$	$A_2$	$\dots$	$A_p$	$\dots$	$A_m$	$A_{m+1}$	$\dots$	$A_j$	$\dots$	$A_q$	$\dots$	$A_n$
1	$A_1$	$c_1$	$x'_1$	1	0	$\dots$	$x'_{1,p}$	$\dots$	0	$x'_{1,m+1}$	$\dots$	$x'_{1,j}$	$\dots$	0	$\dots$	$x'_{1,n}$
2	$A_2$	$c_2$	$x'_2$	0	1	$\dots$	$x'_{2,p}$	$\dots$	0	$x'_{2,m+1}$	$\dots$	$x'_{2,j}$	$\dots$	0	$\dots$	$x'_{2,n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$p$	$A_q$	$c_q$	$x'_p$	0	0	$\dots$	$x'_{p,p}$	$\dots$	0	$x'_{p,m+1}$	$\dots$	$x'_{p,j}$	$\dots$	1	$\dots$	$x'_{p,n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$m$	$A_m$	$c_m$	$x'_m$	0	0	$\dots$	$x'_{m,p}$	$\dots$	1	$x'_{m,m+1}$	$\dots$	$x'_{m,j}$	$\dots$	0	$\dots$	$x'_{m,n}$
$m+1$			$f''$	0	0	$\dots$	$f''_p - c_p$	$\dots$	0	$f''_{m+1} - c_{m+1}$	$\dots$	$f''_j - c_j$	$\dots$	0	$\dots$	$f''_n - c_n$

В  $(m+1)$ -й строке в столбце  $B$  записывается значение целевой функции  $f_0 = f(X_0)$ , которое она принимает при найденном опорном плане, а в столбцах  $A_j$  — значение оценок  $\gamma_j = f_j - c_j$ .

Так как переход к новому опорному решению связан с вычислением новых координат векторов  $B, A_1, A_2, \dots, A_n$  по основным формулам, то при заполнении таблицы, соответствующей новому опорному решению, используется правило прямоугольника, которое распространяется и на  $(m+1)$ -ю строку. Первые три столбца второй симплекс-таблицы отличаются от первой таблицы строкой с номером  $p$ . Вместо элементов  $p, A_p, c_p$  заносятся элементы  $p, A_q, c_q$  (табл. 2.3).

Проиллюстрируем алгоритм решения задачи линейного программирования на числовом примере. Результаты вычислений будем оформлять в виде последовательности таблиц.

### Пример 2.8 (единственный оптимальный план)

Найти максимальное значение линейной функции

$$f(X) = 7x_1 + 6x_2 - 13x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 \leq 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

**Решение.** Перейдем от неравенств к равенствам, прибавляя к левым частям неотрицательные дополнительные переменные  $x_4$  и  $x_5$  (напомним, что дополнительным переменным в целевой функции соответствуют нулевые коэффициенты):

$$\max \rightarrow f(x) = 7x_1 + 6x_2 - 13x_3$$

$$\left. \begin{aligned} 5x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 + x_5 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

Преобразованную систему ограничений запишем в векторной форме:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 = B,$$

$$\text{где } A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Исходный единичный базис состоит из векторов  $A_4, A_5$ ; ему соответствует опорный план

$$X_0 = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1).$$

Составляем симплекс-таблицу для первой итерации (табл. 2.4). В шапке таблицы расположены коэффициенты целевой функции:  $c_1 = 7, c_2 = 6, c_3 = -13, c_4 = 0, c_5 = 0$ . В столбец « $i$ » запишем номера строк 1, 2,  $(m+1)$ .

Базисные векторы  $A_4, A_5$  находятся в столбце « $A_B$ », причем базисный вектор занимает ту строку, в которой находится его единица в единичной базисной матрице. В столбец « $C_B$ » занесем коэффициенты целевой функции при базисных переменных  $c_4 = 0, c_5 = 0$ . В столбцах « $A_B$ » и « $C_B$ »  $(m+1)$ -я строка не заполняется.

В рабочей части таблицы первые две строки заполняются исходными данными. В столбец « $B$ » запишем базисные компоненты опорного плана —  $x_4 = 1, x_5 = 1$ . Столбцы « $A_j$ » ( $j = \overline{1, 5}$ ) заполним коэффициентами разложения  $j$ -го вектора по векторам базиса.

Вычислим текущее значение функции  $f_0 = \langle C_B, X_0 \rangle = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$  и поместим его в  $(m+1)$ -ю строку столбца « $B$ ». Остальные столбцы  $(m+1)$ -й строки заполним оценками:



$$\gamma_1 = \langle C_B, X_1 \rangle - c_1 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 3 - 7 = -7;$$

$$\gamma_2 = \langle C_B, X_2 \rangle - c_2 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 8 - 6 = -6;$$

$$\gamma_3 = \langle C_B, X_3 \rangle - c_3 = 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) + 13 = 13;$$

$$\gamma_4 = \langle C_B, X_4 \rangle - c_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$\gamma_5 = \langle C_B, X_5 \rangle - c_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

Таблица 2.4

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	7	6	-13	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1	$A_4$	0	1	5	-1	-2	1	0
2	$A_5$	0	1	3	8	-4	0	1
$m+1$			0	-7	-6	13	0	0

После заполнения таблицы 2.4 опорный план проверяем на оптимальность. Для этого просматриваем элементы  $(m+1)$ -й строки.

Как видим, для данного опорного решения есть отрицательные оценки:  $\gamma_1 = -7, \gamma_2 = -6$ . Решение не оптимально. В столбцах с отрицательными оценками имеются положительные коэффициенты разложения, поэтому нет оснований утверждать, что целевая функция не ограничена сверху на допустимом множестве.

Переходим к новому опорному решению (первая итерация). В базис вводим вектор  $A_1$ , т. к. он соответствует наименьшей оценке

$$\gamma_1 = \min_j \gamma_j = \min_j \{ \gamma_1 = -7, \gamma_2 = -6 \} = -7.$$

Далее столбец  $A_1$  будем называть разрешающим.

Для определения вектора, подлежащего исключению из базиса, находим отношение элементов столбца « $B$ » к положительным элементам разрешающего столбца. Строка, в которой это отношение окажется минимальным

$$\varepsilon_{01} = \min \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{5},$$

объявляется разрешающей. В нашем случае минимальное отношение оказалось в первой строке, поэтому вектор  $A_4$  подлежит исключению из базиса. Элемент  $x_{11} = 5$ , который находится на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, является разрешающим.

Пересчитываем рабочую часть таблицы по формулам (2.37), (2.38), (2.40) и (2.41). Например:

$$x'_{1,0} = \frac{1}{5}, \quad x'_{2,0} = \frac{1 \cdot 5 - 1 \cdot 3}{5} = \frac{2}{5}, \quad f_1 = \frac{0 \cdot 5 - 1 \cdot (-7)}{5} = \frac{7}{5},$$

$$x'_{1,2} = -\frac{1}{5}, \quad x'_{2,2} = \frac{8 \cdot 5 - (-1) \cdot 3}{5} = \frac{43}{5}, \quad \gamma'_2 = \frac{-6 \cdot 5 - 1 \cdot 7}{5} = -\frac{37}{5}.$$

В результате получаем таблицу для второй итерации (табл. 2.5).

Таблица 2.5

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	7	6	-13	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1	$A_1$	7	1/5	1	-1/5	-2/5	1/5	0
2	$A_5$	0	2/5	0	43/5	-14/5	-3/5	1
$m+1$			7/5	0	-37/5	51/5	7/5	0

Новый план  $X_1 = (x_1 = 1/5, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 2/5)$  соответствует значению целевой функции  $f(X_1) = 7/5$ .

Далее имеем  $\min_j \gamma'_j = \gamma'_2 = -37/5 < 0$  и  $\varepsilon_{02} = 2/43$ , поэтому во второй итерации в базис вводится  $A_2$ , а вектор  $A_5$  исключается. Преобразовав таблицу 2.5, получаем таблицу для третьей итерации.

Таблица 2.6

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	7	6	-13	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1	$A_1$	7	9/43	1	0	-20/43	8/43	1/43
2	$A_2$	6	2/43	0	1	-14/43	-3/43	5/43
$m+1$			75/43	0	0	335/43	38/43	37/43

В результате второй итерации мы получим опорный план

$$X_2 = (x_1 = 9/43, x_2 = 2/43, x_3 = 0).$$

Проверяем, является ли этот план оптимальным, для чего посмотрим  $(m+1)$ -ю строку таблицы 2.6. В данной строке среди оценок  $\gamma''_j$  нет отрицательных. Найденный опорный план является оптимальным и  $f_{\max} = 75/43$ . На основании оценок можно заключить, что оптимальный план единственный, т. к. нулевые оценки соответствуют только векторам, входящим в базис.

## § 7. МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА

Пусть имеется каноническая задача линейного программирования

$$\min \Rightarrow f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.42)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.43)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.44)$$

Можно считать все  $b_i \geq 0$ . Если это не так, соответствующее уравнение следует умножить на минус единицу. В общем случае векторы условий исходной задачи не содержат полного единичного базиса. Тогда пробный опорный план исходной задачи не является очевидным. Для его нахождения удобно использовать метод искусственного базиса.

Перейдем к рассмотрению расширенной задачи

$$\min \Rightarrow F(\tilde{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + M \sum_{i=1}^m \xi_i \quad (2.45)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \xi_i = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.46)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \xi_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.47)$$

где  $M$  — достаточно большое положительное число, значение которого заранее не задается,  $\xi_i \geq 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ) — искусственные переменные.

Искусственным переменным  $\xi_i$  соответствуют единичные векторы  $A_{n+i}$ , которые и образуют искусственный единичный базис.

Вектор  $\tilde{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  удовлетворяет всем условиям расширенной задачи и содержит  $(n + m)$  компонент. Свободные переменные  $x_j$  положим равными нулю, получим пробный опорный план

$$\tilde{X}_0 = (x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, \xi_1 = b_1, \xi_2 = b_2, \dots, \xi_m = b_m)$$

расширенной задачи.

При решении расширенной задачи симплекс-методом можно получить оптимальный план исходной задачи или убедиться в ее



неразрешимости. Теперь зададим себе вопрос: как из оптимального плана расширенной задачи получить оптимальный план исходной задачи? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

**Теорема 2.5.** Если в оптимальном плане расширенной задачи  $\tilde{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  все искусственные переменные  $\xi_i = 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ), то  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  является оптимальным планом исходной задачи.

*Следствие.* Если в оптимальном плане

$$\tilde{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

расширенной задачи хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля, то исходная задача не содержит опорных планов.

При опорном плане  $\tilde{X}_0 = (0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$  расширенной задачи значение целевой функции равно

$$F(\tilde{X}_0) = M \sum_{i=1}^m b_i.$$

Поскольку базисом является единичная матрица, то коэффициенты разложения векторов условий совпадают с их компонентами

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$$

и значения оценок  $\gamma_j$  вычисляются по формуле

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} - c_j = M \sum_{i=1}^m x_{ij} - c_j.$$

Таким образом, в расширенной задаче значения функции и оценок состоят из двух слагаемых, одно зависит от  $M$ , а второе — не зависит.

Сведем все числовые данные, значение функции и полученные оценки в симплекс-таблицу, которая содержит на одну строку больше, чем обычная симплекс-таблица. Для удобства вычислений слагаемое, которое не зависит от  $M$ , помещаем в  $(m+1)$ -й строке, а коэффициент при  $M$  — в  $(m+2)$ -й строке.

До тех пор, пока в базисе содержатся искусственные векторы, выбор разрешающего столбца осуществляется по наибольшему положительному элементу  $(m + 2)$ -й строки. Выбор разрешающей строки и преобразование симплекс-таблиц производится по правилам обычного симплекс-метода.

Возможны два случая:

- 1) все искусственные векторы исключены из базиса;
- 2) получен оптимальный план расширенной задачи, но не все искусственные векторы исключены из базиса.

В первом случае получен некоторый опорный план исходной задачи и дальнейшее улучшение плана продолжают по  $(m + 1)$ -й строке.

Во втором случае, если все искусственные переменные, входящие в базис, оказались равными нулю, то найденный опорный план является вырожденным оптимальным планом исходной задачи, в противном случае исходная задача не имеет ни одного плана — условия противоречивы.

Если исходная задача содержит единичные векторы, их следует включить в искусственный базис. Это уменьшит количество искусственных переменных и сократит число итераций.

Метод искусственного базиса иллюстрируется следующим примером.

### Пример 2.9 (метод искусственного базиса)

Найти минимальное значение линейной функции

$$f(X) = -12x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} -8x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 7 \\ -x_1 - 7x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 &= 13 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

**Решение.** Представим систему ограничений в векторном виде:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 = B$$

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Векторы условий не содержат полной единичной матрицы. Для получения полного единичного базиса прибавим в левую часть второго и третьего уравнений неотрицательные переменные  $\xi_2$  и  $\xi_3$ . Заметим, что номер искусственной переменной соответствует номеру строки, в которую она входит. В целевую функцию добавим штраф  $M\xi_2 + M\xi_3$ , где  $M$  — достаточно большое положительное число, такое, что при сравнении с другими коэффициентами всегда оказывается больше.

Получим расширенную задачу линейного программирования.

$$\min \Rightarrow F(\tilde{X}) = -12x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + M\xi_2 + M\xi_3$$

$$\left. \begin{aligned} -8x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 7 \\ -x_1 - 7x_2 + x_3 + x_4 + \xi_2 &= 8 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 + \xi_3 &= 13 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}, \xi_2 \geq 0, \xi_3 \geq 0.$$

Теперь к векторам условий добавились линейно независимые единичные векторы

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые вместе с вектором  $A_5$  образуют полный единичный базис расширенной задачи

$$\tilde{B}_0 = \{A_5, A_6, A_7\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Базисным векторам соответствуют базисные переменные  $x_5, \xi_2, \xi_3$ . Свободные переменные положим равными нулю, получим опорный план расширенной задачи.

$$\tilde{X}_0 = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 7, \xi_2 = 8, \xi_3 = 13).$$

Составим таблицу для первой итерации (табл. 2.7).

В строках 1, 2, 3 содержится информация о разложении вектора ограничений (столбец  $B$ ) и векторов условий (столбцы  $A_1, A_2, \dots, A_7$ ) по векторам базиса. В шапке таблицы записаны коэффициенты целевой функции:

$$c_1 = -12, c_2 = 6, c_3 = 2, c_4 = -1, c_5 = 1, c_6 = M, c_7 = M.$$

Таблица 2.7

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	-12	6	2	-1	1	$M$	$M$
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
1	$A_5$	$I$	7	-8	5	2	-1	1	0	0
2	$A_6$	$M$	8	-1	-7	1	1	0	1	0
3	$A_7$	$M$	13	<b>7</b>	-4	-1	1	0	0	1
$m+1$			7	4	-1	0	0	0	0	0
$m+2$			21	6	-11	0	2	0	0	0

Вычисляем значение целевой функции расширенной задачи

$$F(\tilde{X}_0) = 1 \cdot 7 + M \cdot 8 + M \cdot 13 = 7 + 21M$$

и оценки:

$$\gamma_1 = (1 \cdot (-8) + M \cdot (-1) + M \cdot 7) + 12 = 4 + 6M,$$



$$\gamma_2 = (1 \cdot 5 + M \cdot (-7) + M \cdot (-4)) - 6 = -1 - 11M,$$

$$\gamma_3 = (1 \cdot 2 + M \cdot 1 + M \cdot (-1)) - 2 = 0,$$

$$\gamma_4 = (1 \cdot (-1) + M \cdot 1 + M \cdot 1) + 1 = 0 + 2M,$$

$$\gamma_5 = (1 \cdot 1 + M \cdot 0 + M \cdot 0) - 1 = 0,$$

$$\gamma_6 = (1 \cdot 0 + M \cdot 1 + M \cdot 0) - M = 0,$$

$$\gamma_7 = (1 \cdot 0 + M \cdot 0 + M \cdot 1) - M = 0.$$

Как видим, в расширенной задаче значения функции и оценок состоят из двух слагаемых, одно не зависит от  $M$ , а второе — зависит. Для удобства вычислений слагаемое, которое не зависит от  $M$ , помещаем в  $(m+1)$ -й строке, а коэффициент при  $M$  — в  $(m+2)$ -й строке.

Среди оценок имеются положительные — это  $\gamma_1 = 4 + 6M$  и  $\gamma_4 = 2M$ , план не является оптимальным. В разложении каждого из векторов условий с положительными оценками содержатся положительные коэффициенты  $x_{ij}$ , следовательно, нет оснований считать задачу неразрешимой.

Вектор условий  $A_1$ , соответствующий наибольшей положительной оценке, объявляем разрешающим столбцом. Единственный положительный элемент разрешающего столбца  $x_{31} = 7$  объявляем разрешающим элементом. Это значит, что третья строка является разрешающей строкой и помещенный в ней вектор  $A_7$  подлежит исключению из текущего базиса. В третьей позиции столбца  $A_B$  место искусственного вектора  $A_7$  займет вектор условий  $A_1$ . Коэффициент целевой функции  $c_1 = -12$  помещается в третью строку столбца  $C_B$ .

Теперь преобразуем числовую информацию. Разрешающую строку делим на разрешающий элемент, получим  $x'_{3,0} = 13/7$ ,  $x'_{3,1} = 1$ ,  $x'_{3,2} = -4/7$ ,  $x'_{3,3} = -1/7$ ,  $x'_{3,4} = 1/7$ ,  $x'_{3,5} = 0$ ,  $x'_{3,6} = 0$ ,  $x'_{3,7} = 1/7$ . Разрешающий столбец становится единичным, единица находится в разрешающей строке. Столбцы  $A_5$ ,  $A_6$  остаются без изменения. Остальные элементы таблицы, включая  $(m+1)$ -ю и  $(m+2)$ -ю строки, преобразуем по правилу прямоугольника.

Например,

$$\begin{aligned}x'_{1,0} &= \frac{7 \cdot 7 - 13 \cdot (-8)}{7} = \frac{153}{7}, \quad x'_{2,4} = \frac{1 \cdot 7 - 1 \cdot (-1)}{7} = \frac{8}{7}, \\x'_{m+1,0} &= \frac{7 \cdot 7 - 4 \cdot 13}{7} = -\frac{3}{7}, \quad x'_{m+2,0} = \frac{21 \cdot 7 - 6 \cdot 13}{7} = \frac{69}{7}, \\x'_{m+1,2} &= \frac{-1 \cdot 7 - 4 \cdot (-4)}{7} = \frac{9}{7}, \quad x'_{m+2,2} = \frac{-11 \cdot 7 - 6 \cdot (-4)}{7} = -\frac{53}{7}\end{aligned}$$

и т. д.

Учитывая, что все коэффициенты  $(m+2)$ -й строки являются коэффициентами при параметре  $M$ , то текущее значение функции расширенной задачи равно

$$F(\tilde{X}_1) = x'_{m+1,0} + M \cdot x'_{m+2,0} = -\frac{3}{7} + \frac{69}{7}M.$$

Так же следует читать и оценки

$$\gamma'_j = x'_{m+1,j} + M \cdot x'_{m+2,j}.$$

$$\text{Например, для } j=2, \gamma'_2 = x'_{m+1,2} + M \cdot x'_{m+2,2} = \frac{9}{7} - \frac{53}{7}M,$$

$$\text{для } j=7, \gamma'_7 = x'_{m+1,7} + M \cdot x'_{m+2,7} = -\frac{4}{7} - \frac{6}{7}M.$$

Получим таблицу для второй итерации (табл. 2.8)

Таблица 2.8

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	-12	6	2	-1	1	$M$	$M$
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
1	$A_5$	1	153/7	0	3/7	6/7	1/7	1	0	8/7
2	$A_6$	$M$	69/7	0	-53/7	6/7	8/7	0	1	1/7
3	$A_1$	-12	13/7	1	-4/7	-1/7	1/7	0	0	1/7
$m+1$			-3/7	0	9/7	4/7	-4/7	0	0	-4/7
$m+2$			69/7	0	-53/7	6/7	8/7	0	0	-6/7

После преобразования всех элементов таблицы проводим контрольное вычисление функции

$$F(\tilde{X}_1) = \sum_{i=1}^m c_i x_{i0} = 1 \cdot \frac{153}{7} + M \cdot \frac{69}{7} - 12 \cdot \frac{13}{7} = -\frac{3}{7} + \frac{69}{7}M.$$

Для оценок контрольные вычисления проводятся по формуле

$$\gamma'_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} - c_j.$$

$$\gamma'_2 = \left( 1 \cdot \frac{3}{7} + M \cdot \left( -\frac{53}{7} \right) - 12 \cdot \left( -\frac{4}{7} \right) \right) - 6 = \frac{9}{7} - \frac{53}{7}M,$$

$$\gamma'_3 = \left( 1 \cdot \frac{6}{7} + M \cdot \frac{6}{7} - 12 \cdot \left( -\frac{1}{7} \right) \right) - 2 = \frac{4}{7} + \frac{6}{7}M,$$

$$\gamma'_4 = \left( 1 \cdot \frac{1}{7} + M \cdot \frac{8}{7} - 12 \cdot \frac{1}{7} \right) - (-1) = -\frac{4}{7} + \frac{8}{7}M,$$

$$\gamma'_5 = (1 \cdot 1 + M \cdot 0 - 12 \cdot 0) - 1 = 0,$$

$$\gamma'_6 = (1 \cdot 0 + M \cdot 1 - 12 \cdot 0) - M = 0,$$

$$\gamma_7' = \left(1 \cdot \frac{8}{7} + M \cdot \frac{1}{7} - 12 \cdot \frac{1}{7}\right) - M = -\frac{4}{7} - \frac{6}{7}M.$$

Оба способа вычисления дали одинаковый результат (как и должно быть!).

Наличие положительных оценок  $\gamma_3'$  и  $\gamma_4'$  свидетельствует о том, что план не оптимален, следовательно, имеются два компонента, которые можно ввести в базис, — это векторы  $A_3$ ,  $A_4$ . Выберем первый из них. Вычислим отношение элементов столбца  $B$  к положительным элементам разрешающего столбца  $A_3$ . Знаменатель наименьшего отношения объявим разрешающим элементом. В нашем случае получим

$$\varepsilon_{03} = \min \left\{ \frac{153/7}{6/7}, \frac{69/7}{6/7} \right\} = \frac{69/7}{6/7}.$$

Знаменателем наименьшего отношения является элемент  $x'_{2,3} = 6/7$ , который и будет разрешающим.

Итак, разрешающая строка  $p = 2$ , разрешающий столбец  $q = 3$ . Во второй итерации преобразование всех коэффициентов проведем по тем же соотношениям, что и в первой итерации. Получим таблицу для третьей итерации (табл. 2.9).

Таблица 2.9

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	-12	6	2	-1	1	$M$	$M$
				$A_I$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
1	$A_5$	1	72/6	0	48/6	0	-6/6	1	-6/6	6/6
2	$A_3$	2	69/6	0	-53/6	1	8/6	0	7/6	1/6
3	$A_I$	-12	21/6	1	-11/6	0	2/6	0	1/6	1/6
$m+1$			-42/6	0	38/6	0	-8/6	0	-4/6	-4/6
$m+2$			0	0	0	0	0	0	-1	-1



После второй итерации искусственные переменные вышли из базиса. Мы получили опорный план расширенной задачи:

$$\tilde{X}_2 = (x_1 = 21/6, x_2 = 0, x_3 = 69/6, x_4 = 0, x_5 = 72/6, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0),$$

но этот план не является оптимальным, т. к. имеется положительная оценка, которая соответствует столбцу  $A_2$ . Этот столбец и объявим разрешающим. Разрешающий элемент  $x_{1,2} = 48/6$ . Вектор  $A_5$  выведем из базиса. После преобразований получим таблицу для четвертой итерации (табл. 2.10).

Таблица 2.10

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	-12	6	2	-1	1	$M$	$M$
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
1	$A_2$	6	6/4	0	1	0	-6/48	6/48	-6/48	6/48
2	$A_3$	2	99/4	0	0	1	11/48	53/48	3/48	61/48
3	$A_1$	-12	25/4	1	0	0	5/48	11/48	-3/48	19/48
$m+1$			-66/4	0	0	0	-26/48	-38/48	6/48	-70/48
$m+2$			0	0	0	0	0	0	-1	-1

Положительных оценок нет. План

$$\tilde{X}_3 = (x_1 = 25/4, x_2 = 6/4, x_3 = 99/4, x_4 = 0, x_5 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0)$$

оптимален. В оптимальном плане расширенной задачи все искусственные переменные равны нулю, получаем оптимальный план исходной задачи:

$$X^* = (x_1^* = 24/4, x_2^* = 6/4, x_3^* = 99/4, x_4^* = 0, x_5^* = 0).$$

Минимальное значение функции равно

$$f(X^*) = -66/4 = -16,5.$$

Рассмотрим еще один числовой пример, иллюстрирующий применение метода искусственного базиса.

### Пример 2.10 (единственное оптимальное решение)

Найти максимум функции  $f(X) = 10x_1 + 9x_2 - 21x_3$  при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 19 \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 \leq 30 \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

**Решение.** Преобразуем задачу в каноническую форму. Для этого из левой части первого ограничения вычтем неотрицательную дополнительную переменную  $x_4$ , а к левой части второго ограничения прибавим дополнительную переменную  $x_5$ . Дополнительные переменные входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. Получим задачу:

$$\begin{aligned} \max \Rightarrow f(X) &= 10x_1 + 9x_2 - 21x_3 \\ \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 19 \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 + x_5 &= 30 \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{aligned}$$

Эта задача эквивалентна исходной задаче, но векторы условий

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

не содержат полного единичного базиса, следует перейти к расширенной задаче. Для этого достаточно в первое ограничение прибавить искусственную переменную  $\xi_1$ . Во втором уравнении нет необходимости прибавлять искусственную переменную, т. к. там уже есть переменная  $x_5$ , соответствующая единичному вектору  $A_5$ , которую можно ввести в базис. В задаче максимизации искусственная переменная  $\xi_1$  входит в целевую функцию с коэффициентом  $(-M)$ , где  $M$  — достаточно большое положительное число.

Расширенная задача имеет вид:

$$\begin{aligned} \max \Rightarrow F(\tilde{X}) &= 10x_1 + 9x_2 - 21x_3 - M\xi_1 \\ &\left. \begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + \xi_1 &= 19 \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 + x_5 &= 30 \end{aligned} \right\}, \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, 5}, \quad \xi_1 \geq 0, \end{aligned}$$

где к векторам условий добавился искусственный вектор  $A_6$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы  $A_6$  и  $A_5$  образуют единичный базис, следовательно,  $\xi_1, x_5$  являются базисными переменными. Положив равными нулю свободные переменные, получим опорный план расширенной задачи:

$$\tilde{X}_0 = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 30, \xi_1 = 19).$$

Дальнейшее решение представим без пояснений (табл. 2.11).

Таблица 2.11

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	10	9	-21	0	0	-M
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_6$	-M	19	-2	4	3	-1	0	1
2	$A_5$	0	30	5	8	-1	0	1	0
$m+1$			0	-10	-9	21	0	0	0
$m+2$			-19	2	-4	-3	1	0	0
1	$A_6$	-M	32/8	-36/8	0	28/8	-1	-4/8	1
2	$A_2$	9	30/8	5/8	1	-1/8	0	1/8	0
$m+1$			270/8	-35/8	0	159/8	0	9/8	0
$m+2$			-32/8	36/8	0	-28/8	1	4/8	0
1	$A_3$	-21	32/28	-36/28	0	1	-8/28	-4/28	8/28
2	$A_2$	9	109/28	13/28	1	0	-1/28	3/28	1/28
$m+1$			309/28	593/28	0	0	159/28	111/28	-159/28
$m+2$			0	0	0	0	0	0	1

После второй итерации все оценки удовлетворяют критерию оптимальности, получаем оптимальный план  $\tilde{X}^* = (0, 109/28, 32/28, 0, 0, 0)$  расширенной задачи, а за ним и оптимальный план исходной задачи  $X^* = (0, 109/28, 32/28)$ . Заметим, что в ответе участвуют только управляемые переменные. Максимальное значение целевой функции  $f(X^*) = 309/28$ .

### Пример 2.11. (множество решений пусто)

Найти максимальное значение линейной функции

$$f(X) = 15x_1 + 17x_2 - 3x_3$$

при условиях:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ -7x_1 - 4x_2 + x_3 &\geq 3 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

**Решение.** Каноническая задача получается в результате прибавления дополнительной переменной  $x_4$  в первое неравенство и вычитания дополнительной переменной  $x_5$  из второго. Эта задача будет записана следующим образом.

$$\begin{aligned} f(X) = 15x_1 + 17x_2 - 3x_3 &\Rightarrow \max \\ \left. \begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ -7x_1 - 4x_2 + x_3 - x_5 &= 3 \end{aligned} \right\} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{aligned}$$

Система векторов условий

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



не содержит единичного базиса, т. к. имеется только один единичный вектор  $A_4$ . Для получения единичного базиса достаточно во второе уравнение добавить искусственную переменную  $\xi_2$  и наложить штраф на целевую функцию, т. е. вычесть из нее  $M\xi_2$ .

Теперь векторы  $A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  образуют единичный базис.

Получим расширенную задачу линейного программирования: найти максимальное значение линейной функции

$$F(\tilde{X}) = 15x_1 + 17x_2 - 3x_3 - M\xi_2$$

при условиях:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ -7x_1 - 4x_2 + x_3 - x_5 + \xi_2 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}; \quad \xi_2 \geq 0.$$

Расширенная задача имеет опорный план

$$\tilde{X}_0 = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = 0, \xi_2 = 3),$$

где свободные переменные  $x_1, x_2, x_3, x_5$  по определению полагаются равными нулю. Дополнительная переменная  $x_4$  и искусственная переменная  $\xi_2$  являются базисными, численные значения которых равны, соответственно, 2 и 3.

Дальше составим симплекс-таблицу (табл. 2.12) и проведем все необходимые вычисления.

В таблице показано, что в первой итерации разрешающим выбран элемент  $x_{1,3}$ . В базис входит  $x_3$ , исключается из базиса  $x_4$ . После преобразования получаем таблицу для второй итерации. Отрицательных оценок нет. Имеем оптимальный план расширенной задачи

$$\tilde{X}^* = (x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 2/3, x_4^* = 0, x_5^* = 0, \xi_2^* = 7/3).$$

Таблица 2.12

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	15	17	-3	0	0	-M
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_4$	0	2	2	5	3	1	0	0
2	$A_6$	-M	3	-7	-4	1	0	-1	1
$m+1$			0	-15	-17	3	0	0	0
$m+2$			-3	7	4	-1	0	1	0
1	$A_3$	-3	2/3	2/3	5/3	1	1/3	0	0
2	$A_6$	-M	7/3	-23/3	-17/3	0	-1/3	-1	1
$m+1$			-6/3	-51/3	-66/3	0	-3/3	0	0
$m+2$			-7/3	23/3	17/3	0	1/3	1	0

Однако искусственная переменная  $\xi_2^*$  отлична от нуля. Это свидетельствует о том, что исходная задача не содержит опорных планов, следовательно, не разрешима.

### Пример 2.12 (целевая функция не ограничена)

Найти максимальное значение линейной функции

$$f(X) = -6x_1 + 2x_2 + 19x_3$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 \geq 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

**Решение.** Приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные  $x_4$  и  $x_5$ .

$$f(X) = -6x_1 + 2x_2 + 19x_3 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_5 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}.$$

Так как векторы условий не содержат полного единичного базиса, то для нахождения опорного плана переходим к расширенной задаче:

$$F(\tilde{X}) = -6x_1 + 2x_2 + 19x_3 - M\xi_2 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_5 + \xi_2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}, \xi_2 \geq 0.$$

По определению свободные переменные  $x_1, x_2, x_3, x_5$  полагаются равными нулю. Тогда базисные переменные  $x_4 = 7, \xi_2 = 1$ . Получим начальный план расширенной задачи:

$$\tilde{X}_0 = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 7, x_5 = 0, \xi_2 = 1).$$

Дальнейшее решение проводится в виде симплекс-таблиц без пояснений (табл. 2.13). Комментарии даются, когда дальнейшие вычисления становятся невозможными.

Таблица 2.13

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	-6	2	19	0	0	-M
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_4$	0	7	-2	-1	3	1	0	0
2	$A_6$	-M	1	3	-3	-5	0	-1	1
$m+1$			0	6	-2	-19	0	0	0
$m+2$			-1	-3	3	5	0	1	0
1	$A_3$	0	23/3	0	-9/3	-1/3	1	-2/3	2/3
2	$A_6$	-6	1/3	1	-3/3	-5/3	0	-1/3	1/3
$m+1$			-6/3	0	12/3	-27/3	0	6/3	-6/3
$m+2$			0	0	0	0	0	0	1

После первой итерации искусственный вектор  $A_6$  исключается из базиса и заменяется вектором условий  $A_1$ . Существует отрицательная оценка — это  $\gamma_3 = -9$ , соответствующая вектору  $A_3$ , который следует ввести в базис, но среди коэффициентов разложения этого вектора нет ни одного положительного, что является признаком неограниченности целевой функции.

Отсюда вывод. Задача не разрешима из-за неограниченности целевой функции  $f \rightarrow \infty$ .

## § 8. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

### Основная задача и двойственная к ней

*Определение 2.11.* Две задачи линейного программирования называются взаимно двойственными, если выполняются следующие соотношения:

Прямая задача		Двойственная задача
$f(X) = \sum_{j \in N} c_j x_j \Rightarrow \min$		$\varphi(Y) = \sum_{i \in M} b_i y_i \Rightarrow \max$
$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq b_i$	$i \in M_1$	$y_i \geq 0$
$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i$	$i \in M_2$	$-\infty < y_i < +\infty$
$x_j \geq 0$	$j \in N_1$	$\sum_{i \in M} a_{ij} y_i \leq c_j$
$-\infty < x_j < +\infty$	$j \in N_2$	$\sum_{i \in M} a_{ij} y_i = c_j$
Двойственная задача		Прямая задача



В прямой задаче буквой  $i$  обозначен номер ограничения. В двойственной задаче каждому ограничению  $i$  соответствует переменная  $y_i$ . Число переменных  $y_i$  двойственной задачи равно числу ограничений прямой задачи.

Буквой  $j$  обозначен номер переменной прямой задачи. Каждой переменной  $x_j$  прямой задачи соответствует  $j$ -е ограничение двойственной задачи. Число ограничений двойственной задачи равно числу переменных  $x_j$  прямой задачи.

### **Правила построения двойственных задач**

1. Если прямая задача на минимум, то двойственная — на максимум. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены ограничений прямой задачи.

2. Если в прямой задаче  $i$ -е ограничение имеет вид неравенства, то в двойственной задаче на переменную  $y_i$  налагают условия неотрицательности.

3. Если в прямой задаче  $i$ -е ограничение имеет вид уравнения, то в двойственной задаче на переменную  $y_i$  условия неотрицательности не налагают.

4. Если в прямой задаче на  $j$ -ю переменную налагается условие неотрицательности, то в двойственной задаче  $j$ -е ограничение имеет вид неравенства. Причем, неравенство типа « $\leq$ », т. к. ограничения должны противоречить цели. Свободные члены ограничений двойственной задачи  $c_j$  есть коэффициенты целевой функции прямой задачи.

5. Если в прямой задаче  $j$ -я переменная не ограничена в знаке, то в двойственной задаче  $j$ -е ограничение имеет вид уравнения.

Понятие двойственности взаимное, поэтому все равно, какую из этих задач назвать прямой, а какую — двойственной.

## § 9. НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования

$$\min \Rightarrow f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.48)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.49)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.50)$$

Двойственная задача имеет вид:

$$\max \Rightarrow \varphi(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (2.51)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.52)$$

Взаимосвязь между оптимальными решениями пары двойственных задач устанавливает следующая теорема.

**Теорема 2.6.** (Первая теорема двойственности). Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение, причем их оптимумы совпадают:

$$\min f(X) = \max \varphi(Y).$$

Если целевая функция одной из задач не ограничена, то другая задача не имеет опорных планов.

В процессе доказательства первой теоремы двойственности установлено, что оптимальное решение двойственной задачи определяется из соотношения

$$Y^* = C_B D^{-1}, \quad (2.53)$$

где вектор  $C_B$  составлен из коэффициентов целевой функции при базисных переменных в оптимальном плане прямой задачи;  $D$  — базисная матрица, составленная из компонент векторов окончательного (оптимального) базиса;  $D^{-1}$  — матрица обратная к базисной матрице.

### Пример 2.13 (первая теорема двойственности)

Для задачи линейного программирования с числовыми данными примера 2.9 построить двойственную задачу и найти ее оптимальное решение, используя первую теорему двойственности.

**Решение.** Для построения двойственной задачи нам потребуется математическая модель прямой задачи

$$f(X) = -12x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \Rightarrow \min$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right| \begin{array}{rcl} -8x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 & = & 7 \\ -x_1 - 7x_2 + x_3 + x_4 & = & 8 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 & = & 13 \end{array} \right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

Прямая задача содержит три ограничения, поэтому в двойственной задаче должно быть три переменных —  $y_1, y_2, y_3$ . Поскольку в прямой задаче все ограничения имеют вид уравнения, то на переменные двойственной задачи условия неотрицательности не налагаются  $-\infty < y_i < +\infty \quad i = 1, 2, 3$  (правило 3). Из этих переменных составим вектор  $Y = (y_1, y_2, y_3)$ .

Умножим скалярно вектор  $Y$  на вектор ограничений  $B$  прямой задачи, получим функцию  $\varphi(Y) = 7y_1 + 8y_2 + 13y_3$ , которую надо максимизировать, т. к. целевая функция прямой задачи минимизируется (правило 1).

Далее построим ограничения двойственной задачи. Поскольку в прямой задаче все переменные неотрицательны, то в двойственной задаче все ограничения должны быть неравенствами (правило 4).

Умножая скалярно вектор  $Y$  на соответствующие векторы условий прямой задачи, получим пять неравенств:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \geq 0 &\Rightarrow -8y_1 - y_2 + 7y_3 \leq -12 \\ x_2 \geq 0 &\Rightarrow 5y_1 - 7y_2 - 4y_3 \leq 6 \\ x_3 \geq 0 &\Rightarrow 2y_1 + y_2 - y_3 \leq 2 \\ x_4 \geq 0 &\Rightarrow -y_1 + y_2 + y_3 \leq -1 \\ x_5 \geq 0 &\Rightarrow y_1 \leq 1 \end{aligned} \right\}.$$

Неравенства имеют вид « $\leq$ », т. к. ограничения должны противоречить цели (в задаче максимизации все неравенства должны быть  $\leq$ ).

Итак, двойственная задача построена:

$$\max \Rightarrow \varphi(Y) = 7y_1 + 8y_2 + 13y_3$$

$$\left. \begin{aligned} -8y_1 - y_2 + 7y_3 &\leq -12 \\ 5y_1 - 7y_2 - 4y_3 &\leq 6 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 &\leq 2 \\ -y_1 + y_2 + y_3 &\leq -1 \\ y_1 &\leq 1 \end{aligned} \right\}.$$

Найдем ее оптимальное решение, используя первую теорему двойственности. Для этого нам потребуются две симплекс-таблицы: исходная (табл. 2.7) и завершающая (табл. 2.10). Объединим их, получим табл. 2.14.

Приведем оптимальное решение прямой задачи:

$$X^* = \left( \frac{25}{4}, \frac{6}{4}, \frac{99}{4}, 0, 0 \right), \min f(X) = f(X^*) = -\frac{66}{4} = -16,5.$$

Окончательный базис, соответствующий оптимальному решению прямой задачи, состоит из векторов  $A_2, A_3, A_1$ , поэтому базисная матрица имеет вид:



$$D = (A_2, A_3, A_1) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -7 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Таблица 2.14

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	-12	6	2	-1	1	$M$	$M$
				$A_I$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
1	$A_5$	1	7	-8	5	2	-1	1	0	0
2	$A_6$	$M$	8	-1	-7	1	1	0	1	0
3	$A_7$	$M$	13	7	-4	-1	1	0	0	1
$m+1$			7	4	-1	0	0	0	0	0
$m+2$			21	6	-11	0	2	0	0	0
1	$A_2$	6	6/4	0	1	0	-6/48	6/48	-6/48	6/48
2	$A_3$	2	99/4	0	0	1	11/48	53/48	3/48	61/48
3	$A_I$	-12	25/4	1	0	0	5/48	11/48	-3/48	19/48
$m+1$			-66/4	0	0	0	-26/48	-38/48	6/48/6	-70/48
$m+2$			0	0	0	0	0	0	-1	-1

Решение прямой задачи начиналось с единичного базиса  $A_5, A_6, A_7$  ( $A_5$  — один из векторов условий, а векторы  $A_6, A_7$  введены искусственно для образования единичного базиса). Поэтому в окончательной таблице указанные столбцы преобразуются в матрицу  $D^{-1}$ , обратную к базисной матрице  $D$ , следовательно,

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} 6/48 & -6/48 & 6/48 \\ 53/48 & 3/48 & 61/48 \\ 11/48 & -3/48 & 19/48 \end{vmatrix}.$$

Оптимальный план двойственной задачи найдем из соотношения (2.53)

$$Y^* = (6, 2, -12) \left\| \begin{array}{ccc} 6/48 & -6/48 & 6/48 \\ 53/48 & 3/48 & 61/48 \\ 11/48 & -3/48 & 19/48 \end{array} \right\| =$$

$$= (6 \cdot 6/48 + 2 \cdot 53/48 - 12 \cdot 11/48, 6 \cdot (-6/48) + 2 \cdot 3/48 - 12 \cdot (-3/48),$$

$$6 \cdot 6/48 + 2 \cdot 61/48 - 12 \cdot 19/48) = (10/48, 6/48, -70/48).$$

Откуда,  $Y^* = (10/48, 6/48, -70/48)$ . При этом плане максимальное значение функции двойственной задачи составляет величину, равную

$$\max \varphi(Y) = \varphi(Y^*) = 7 \cdot \frac{10}{48} + 8 \cdot \frac{6}{48} + 13 \cdot \left(-\frac{70}{48}\right) = -\frac{392}{48} = -16,5.$$

Действительно, максимальное значение целевой функции двойственной задачи совпадает с минимальным значением целевой функции прямой задачи.

Оптимальное решение двойственной задачи можно найти непосредственно из окончательной симплекс-таблицы прямой задачи. Информация содержится в оценках.

Оценка  $\gamma_5^*$  соответствует вектору  $A_5$ , занимавшему первую позицию первоначального единичного базиса, поэтому  $y_1^*$  находим по оценке  $\gamma_5^*$ . Для этого достаточно к оценке  $\gamma_5^*$  оптимальной симплекс-таблицы прибавить коэффициент целевой функции  $c_5$  (табл. 2.14).

$$y_1^* = \gamma_5^* + c_5 = -\frac{38}{48} + 1 = \frac{10}{48}.$$

Аналогично найдем

$$y_2^* = \gamma_6^* + c_6 = \left(\frac{6}{48} - M\right) + M = \frac{6}{48};$$

$$y_3^* = \gamma_7^* + c_7 = \left(-\frac{70}{48} - M\right) + M = -\frac{70}{48}.$$

## § 10. СИММЕТРИЧНЫЕ ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть имеется стандартная задача линейного программирования

$$\max \Rightarrow f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.54)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.55)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.56)$$

и двойственная к ней

$$\min \Rightarrow \varphi(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (2.57)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.58)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.59)$$

**Теорема 2.7.** (Вторая теорема двойственности). Для того чтобы допустимые планы  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  прямой и двойственной задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$y_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0 \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.60)$$

$$\left( c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = 0 \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.61)$$

Для удобства приведенные соотношения перефразируем следующим образом:

$$y_i^* > 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i \quad (2.62)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i \Leftrightarrow y_i^* = 0 \quad (2.63)$$

$$x_j^* > 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j \quad (2.64)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > c_j \Leftrightarrow x_j^* = 0. \quad (2.65)$$

Соотношения (2.62)–(2.65) называют условиями дополняющей нежесткости.

Содержательную сторону условий (2.62)–(2.63) можно интерпретировать следующим образом: если оценка  $i$ -го ресурса положительна, то в соответствии с уровнем производства  $X^*$  этот ресурс используется полностью; если же ресурс используется не полностью, то его оценка равна нулю.

С другой стороны, условия (2.64)–(2.65) допускают следующую интерпретацию: если  $j$ -й технологический способ вовлекается в производство (т. е. интенсивность его использования положительна), то он неубыточен в оценках  $y_1^*, \dots, y_m^*$ ; если  $j$ -й технологический способ убыточен в оценках  $y_1^*, \dots, y_m^*$ , то он не вовлекается в производство.

Для несимметричной пары задач работают только два последних условия, при этом условие (2.65) следует читать справа налево.

### Пример 2.14 (вторая теорема двойственности)

Необходимо проверить, являются ли оптимальными планами векторы  $X^* = \left( \frac{25}{4}, \frac{6}{4}, \frac{99}{4}, 0, 0 \right)$  и  $Y^* = \left( \frac{5}{24}, \frac{3}{24}, -\frac{35}{24} \right)$  несимметричной пары двойственных задач из примера 2.13.



**Решение.** Сначала проверим допустимость вектора  $X$ . Подставим его координаты в ограничения прямой задачи:

$$\left. \begin{aligned} -8 \cdot 25/4 + 5 \cdot 6/4 + 2 \cdot 99/4 &= 7 \\ -25/4 - 7 \cdot 6/4 + 99/4 &= 8 \\ 7 \cdot 25/4 - 4 \cdot 6/4 - 9/4 &= 13 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

Вектор  $X$  удовлетворяет условиям неотрицательности и всем ограничениям, следовательно, он допустимый.

Проверим выполнение условий (64), (65). Для этого подставим координаты вектора  $Y$  в ограничения двойственной задачи

$$\left. \begin{aligned} x_1 = 25/4 > 0 &\Rightarrow -8 \cdot 5/24 - 3/24 - 7 \cdot 35/24 \equiv -12 ! \\ x_2 = 6/4 > 0 &\Rightarrow 5 \cdot 5/24 - 7 \cdot 3/24 + 4 \cdot 35/24 \equiv 6! \\ x_3 = 99/4 > 0 &\Rightarrow 2 \cdot 5/24 + 3/24 + 35/24 \equiv 2! \\ x_4 = 0 &\Rightarrow -5/24 + 3/24 - 35/24 = -37/24 < -1! \\ x_5 = 0 &\Rightarrow 5/24 < 1! \end{aligned} \right\}.$$

*Ответ: Указанные векторы являются оптимальными планами прямой и двойственной задач.*

Если требуется найти значение оптимума, то можно подставить координаты любого из этих векторов в соответствующие целевые функции.

### **Пример 2.15 (комплексная задача 1)**

Пусть дана задача линейного программирования:

$$\begin{aligned} \max \Rightarrow f(X) &= 10x_1 + 9x_2 - 21x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\geq 19 \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 &\leq 30 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Необходимо выполнить следующие задания.

1. Применяя симплекс-метод, найти оптимальное решение или установить неразрешимость.
2. Построить двойственную задачу. Если прямая задача разрешима, то найти оптимальный план двойственной задачи по первой теореме двойственности.
3. Решить графически двойственную задачу и из графического решения двойственной задачи найти оптимальный план прямой задачи, применяя условия дополняющей нежесткости.

**Решение.** Первое задание выполнялось в примере 2.10. Приведем оптимальное решение:

$$X^* = \left( 0, \frac{109}{28}, \frac{32}{28} \right), \quad f(X^*) = \frac{309}{28} \quad (\text{табл. 2.11}).$$

Построим двойственную задачу. Сначала упорядочим запись прямой задачи, умножив первое ограничение на  $(-1)$ . Двойственная задача имеет вид:

$$\min \Rightarrow \varphi(Y) = -19y_1 + 30y_2$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 2y_1 + 5y_2 \geq 10 \\ (2) \quad -4y_1 + 8y_2 \geq 9 \\ (3) \quad -3y_1 - y_2 \geq -21 \end{array} \right\}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Оптимальный план прямой задачи получен в табл. 2.11. Для определения оптимального плана двойственной задачи надо учесть, что при построении двойственной задачи первое ограничение прямой задачи было умножено на  $-1$ , поэтому

$$-y_1^* = \gamma_6^* + c_6 = \left( -\frac{159}{28} + M \right) - M,$$

откуда  $y_1^* = \frac{159}{28}.$

$$y_2^* = \gamma_5^* + c_5 = \frac{111}{28}.$$

Тогда  $Y^* = \left( \frac{159}{28}, \frac{111}{28} \right)$ .

При этом плане минимальное значение целевой функции двойственной задачи равно

$$\varphi(Y^*) = -19 \cdot \frac{159}{28} + 30 \cdot \frac{111}{28} = \frac{309}{28}$$

и совпадает с максимальным значением целевой функции прямой задачи.

Двойственную задачу решим графическим способом (рис. 2.19).

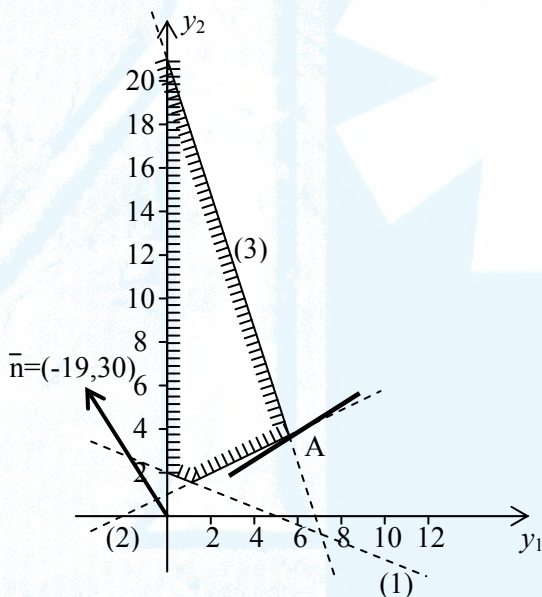


Рис. 2.19

Из рисунка видно, что целевая функция двойственной задачи принимает минимальное значение в точке  $A$ , в которой пересекаются (2) и (3) граничные прямые. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} (2) & -4y_1 + 8y_2 = 9 \\ (3) & 3y_1 + y_2 = 21 \end{cases}$$

и получим  $Y^* = A = \left( \frac{159}{28}, \frac{111}{28} \right)$ ,  $\varphi(Y^*) = \frac{309}{28}$ .

Учитывая условие (2.62), имеем:

$$y_1^* > 0 \Rightarrow -2x_1^* + 4x_2^* + 3x_3^* = 19$$

$$y_2^* > 0 \Rightarrow 5x_1^* + 8x_2^* - x_3^* = 30.$$

Граничная прямая (1) не проходит через оптимальную точку. Это равносильно тому, что первое ограничение двойственной задачи в этой точке обращается в строгое неравенство. Поэтому  $x_1^* = 0$ .

Итак, мы получили систему уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1^* + 4x_2^* + 3x_3^* = 19 \\ 5x_1^* + 8x_2^* - x_3^* = 30 \\ x_1^* = 0 \end{cases},$$

откуда  $X^* = (0, 109/28, 32/28)$ ,  $f(X^*) = 309/28$ .

Результат совпадает с результатом, который был получен симплекс-методом.

### **Пример 2.16 (вырожденное оптимальное решение прямой задачи, альтернативные оптимальные решения двойственной)**

$$\begin{aligned} f(X) &= 9x_1 - 84x_2 - 22x_3 \Rightarrow \min \\ &\begin{cases} 2x_1 - 28x_2 - 3x_3 \geq 6 \\ x_1 + 17x_2 + 7x_3 \leq 3 \end{cases} \\ &x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Найти все оптимальные решения прямой и двойственной задач.

**Решение.** Перейдем к канонической задаче линейного программирования:



$$f(X) = 9x_1 - 84x_2 - 22x_3 \Rightarrow \min$$

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 28x_2 - 3x_3 - x_4 &= 6 \\ x_1 + 17x_2 + 7x_3 + x_5 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n}.$$

Запишем ее ограничения в векторном виде:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 = B$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} -28 \\ 17 \end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}x_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Среди векторов-условий имеется лишь один единичный, поэтому будем решать расширенную задачу:

$$\min \Rightarrow F(\tilde{X}) = 9x_1 - 84x_2 - 22x_3 + M\xi_1$$

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 28x_2 - 3x_3 - x_4 + \xi_1 &= 6 \\ x_1 + 17x_2 + 7x_3 + x_5 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \xi_1 \geq 0,$$

где  $M$  — достаточно большое положительное число. Опорный план расширенной задачи  $\tilde{X}_0 = (0, 0, 0, 0, 3, 6)$  определяется системой двух единичных векторов  $A_6, A_5$ . Дальнейшее решение проведем в табл. 2.15.

Положительных оценок нет. Вектор

$$\tilde{X}_1 = (x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, \xi_1 = 0)$$

является оптимальным планом расширенной задачи. Искусственный вектор  $A_6$  входит в окончательный базис, но численное значение искусственной переменной равно нулю, поэтому при определении оптимального решения исходной задачи искусственную переменную  $\xi_1 = 0$  можно отбросить. Из этого следует вырожденность оптимального плана исходной задачи. Окончательно получа-

ем оптимальное решение  $X^* = (3, 0, 0)$ , минимальное значение целевой функции  $f(X) = 27$ .

Таблица 2.15

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	9	-84	-22	0	0	$M$
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_6$	$M$	6	2	-28	-3	-1	0	1
2	$A_5$	0	3	1	17	7	0	1	0
$m+1$			0	-9	84	22	0	0	0
$m+2$			6	2	-28	-3	-1	0	0
1	$A_6$	$M$	0	0	-62	-17	-1	-2	1
2	$A_1$	9	3	1	17	7	0	1	0
$m+1$			27	0	237	85	0	9	0
$m+2$			0	0	-62	-17	-1	-2	0

Составим двойственную задачу:

$$\begin{aligned}
 \max \Rightarrow \varphi(Y) &= 6y_1 - 3y_2 \\
 \left. \begin{aligned} 2y_1 - y_2 &\leq 9 \\ -28y_1 - 17y_2 &\leq -84 \\ -3y_1 - 7y_2 &\leq -22 \end{aligned} \right\} \\
 y_1 &\geq 0, \quad y_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Найдем оптимальное решение двойственной задачи по первой теореме двойственности:

$$(y_1^*, -y_2^*) = (M, 9) \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array} \left\| = (M; -2M + 9) \Rightarrow Y^* = (M; 2M - 9).$$

Остается определить все значения параметра  $M$ , при которых удовлетворяются ограничения двойственной задачи. Для этого решим систему неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2M - (2M - 9) \leq 9 \\ -28M - 17(2M - 9) \leq -84 \\ -3M - 7(2M - 9) \leq -22 \\ M \geq 0 \\ 2M - 9 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9 = 9 \\ M \geq 237/2 \\ M \geq 5 \\ M \geq 0 \\ M \geq 9/2. \end{array} \right.$$

Первое ограничение обращается в равенство при любом  $M$ . Остальные неравенства дают  $5 \leq M < \infty$ , откуда заключаем, что в двойственной задаче существует множество альтернативных оптимальных планов, представляющих собой луч  $Y^* = (M, 2M - 9)$ ,  $\forall M \in [5, +\infty)$ .

Зададим граничное значение параметра  $M = 5$ , найдем точку отсчета на луче  $Y_1^* = (5, 1)$ . В любой точке луча значение функции равно 27 и не зависит от параметра  $M$ .

Действительно,

$$M = 5, Y_1^* = (5, 1), \varphi(Y_1^*) = 6 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 27;$$

$$M = 6, Y_1^* = (6, 3), \varphi(Y_1^*) = 6 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 27;$$

$$M = 100, Y^* = (100, 191), \varphi(Y^*) = 6 \cdot 100 - 3 \cdot 191 = 27;$$

$$\forall M \in [5, +\infty) \quad \varphi(Y^*) = 6 \cdot M - 3 \cdot (2M - 9) = 27.$$

При решении прямой задачи на первой итерации появилась неоднозначность выбора разрешающего элемента, поскольку симплексные отношения в обеих строках оказались равными

$$\varepsilon_{01} = \min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{i1}} \right\} = \min \left\{ \frac{6}{2}, \frac{3}{1} \right\} = 3. \text{ Мы выбрали } x_{21} = 1.$$

Сейчас пойдем другим путем (табл. 2.16).

Таблица 2.16

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	9	-84	-22	0	0	$M$
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_6$	$M$	6	2	-28	-3	-1	0	1
2	$A_5$	0	3	1	17	7	0	1	0
$m+1$			0	-9	84	22	0	0	0
$m+2$			6	2	-28	-3	-1	0	0
1	$A_1$	9	6/2	1	-28/2	-3/2	-1/2	0	1/2
2	$A_5$	0	0	0	62/2	17/2	1/2	1	-1/2
$m+1$			54/2	0	-84/2	17/2	-9/2	0	9/2
$m+2$			0	0	0	0	0	0	-1
1	$A_1$	9	6/2	1	-145/2	0	-7/17	3/17	7/17
2	$A_3$	-22	0	0	62/17	1	1/17	2/17	-1/17
$m+1$			54/2	0	-1241/17	0	-85/17	-17/17	85/17
$m+2$			0	0	0	0	0	0	-1

На первой итерации разрешающим элементом выберем элемент  $x_{11} = 2$ . При этом вектор  $A_1$  входит в базис, а искусственный вектор  $A_6$  выходит из базиса. В результате новый план оказался вырожденным  $\tilde{X}_1 = (x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, \xi_1 = 0)$ .

На второй итерации разрешающий элемент  $x_{23} = 17/2$  определяется однозначно. Вектор  $A_3$  включается в базис, а вектор  $A_5$  исключается из базиса. В связи с тем, что  $\varepsilon_{03} = \frac{0}{17/2} = 0$ , значение функции не изменилось, вырожденность не исчезла — переменная  $x_3$  входит в базис с нулевым значением.

Из окончательной симплекс-таблицы получаем вырожденный оптимальный план прямой задачи  $X^* = (3, 0, 0)$  и единственное оптимальное решение двойственной задачи



$$(y_1^*; -y_2^*) = (9; -22) \left\| \begin{array}{cc} 7/17 & 3/17 \\ -1/17 & 2/17 \end{array} \right\| = (5; -1) \Rightarrow Y^* = (5; 1).$$

Как установить, что в двойственной задаче существуют альтернативные оптимальные планы?

К сожалению, без дополнительных вычислений невозможно определить все оптимальные планы двойственной задачи. Можно только подобрать какое-нибудь альтернативное решение. Затем составить выпуклую линейную комбинацию и найти все оптимальные планы.

К примеру, так. Задаем одну из координат  $y_2 = 3$ . Из первого ограничения двойственной задачи получим  $y_1 = 6$ , откуда  $Y = (6; 3)$ . Полученные значения подставим во второе и третье ограничения

$$-28 \cdot 6 - 17 \cdot 3 = -219 < -84$$

$$-3 \cdot 6 - 7 \cdot 3 = -39 < -22$$

и убеждаемся в том, что вектор  $Y = (6; 3)$  является допустимым планом двойственной задачи. Вычислим значение  $\varphi(Y) = 6 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 27$ . Откуда заключаем, что вектор  $Y = (6; 3)$  — один из альтернативных оптимальных планов двойственной задачи. Пронумеруем найденные планы произвольным образом. Пусть  $Y_1^* = (5; 1)$ ,  $Y_2^* = (6; 3)$ . Составим из них линейную комбинацию

$$Y^* = (1 - \lambda)Y_1^* + \lambda Y_2^* = (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + \lambda \\ 1 + 2\lambda \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \lambda < \infty.$$

$$\text{Вычислим } \varphi(Y^*) = 6(5 + \lambda) - 3(1 + 2\lambda) = 27.$$

Отсюда вывод — множество оптимальных планов двойственной задачи лежит на луче с точкой отсчета  $Y_1^* = (5; 1)$  и значением функции, равным 27.

Двойственную задачу решим графическим способом.

$$\max \Rightarrow \varphi(Y) = 6y_1 - 3y_2$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \ 2y_1 - y_2 \leq 9 \\ (2) \ 28y_1 + 17y_2 \geq 84 \\ (3) \ 3y_1 + 7y_2 \geq 22 \end{array} \right\}$$

$$y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0.$$

Строим область допустимых решений, вектор нормали и производную линию уровня (рис. 2.20).

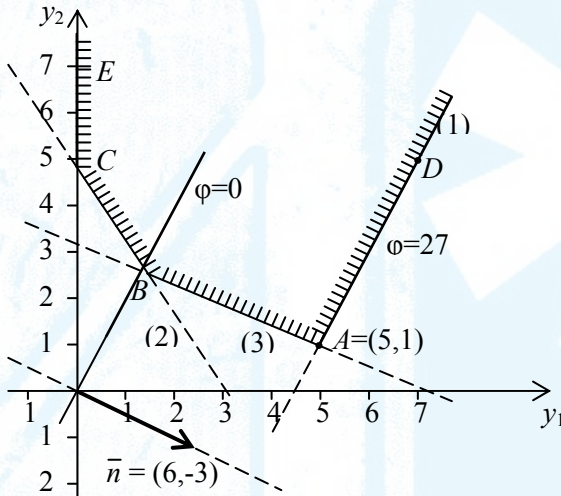


Рис. 2.20

Область решений представляет собой выпуклое многоугольное, неограниченное множество с угловыми точками  $A, B, C$ . На рисунке показано, что экстремальными точками являются все точки луча  $[A, D)$ . В угловой точке  $A$  пересекаются (1) и (3) прямые. Составим систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} 2y_1 - y_2 = 9 \\ -3y_1 - 7y_2 = -22 \end{array} \right\},$$

откуда находим  $A = (5, 1)$ ,  $\max \varphi = 27$ .

Все оптимальные решения двойственной задачи можно найти из линейной комбинации  $Y^* = (1 - \lambda)A + \lambda D$ ,  $0 \leq \lambda < \infty$ .

Оптимальное решение прямой задачи найдем по второй теореме двойственности. Составим систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} y_1^* > 0 \Rightarrow 2x_1^* - 28x_2^* - 3x_3^* = 6 \\ y_2^* > 0 \Rightarrow x_1^* + 17x_2^* + 7x_3^* = 3 \\ -28 \cdot 5 - 17 \cdot 1 = -157 < -84 \Rightarrow x_2^* = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow X^* = (3, 0, 0), \min f = 27.$$

Результат совпадает с результатом, полученным симплекс-методом.

### Пример 2.17 (комплексная задача 2)

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 4x_1 - 3x_2 \leq 9 \\ (2) \quad 8x_1 + 5x_2 \leq 39 \\ (3) \quad -6x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ (4) \quad x_1 + 4x_2 \geq 6 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Выполнить в указанном порядке следующие задания.

1. Найти оптимальное решение прямой задачи графическим методом.

2. Построить двойственную задачу.

3. Найти оптимальное решение двойственной задачи из графического решения прямой, применяя вторую теорему двойственности (условия дополняющей нежесткости).

4. Найти оптимальный план прямой задачи симплекс-методом (для построения исходного опорного плана рекомендуется использовать метод искусственного базиса).

5. Найти оптимальный план двойственной задачи по первой теореме двойственности, используя окончательную симплекс-

таблицу, полученную при решении прямой задачи (п. 4). Проверить утверждение «значения целевых функций пары двойственных задач на своих оптимальных решениях совпадают».

6. Двойственную задачу решить симплекс-методом, затем, используя окончательную симплекс-таблицу двойственной задачи, найти оптимальный план прямой задачи по первой теореме двойственности. Сравнить результат с результатом, полученным графическим методом (п. 1).

### Решение.

1. Строим область решений (рис. 2.21).

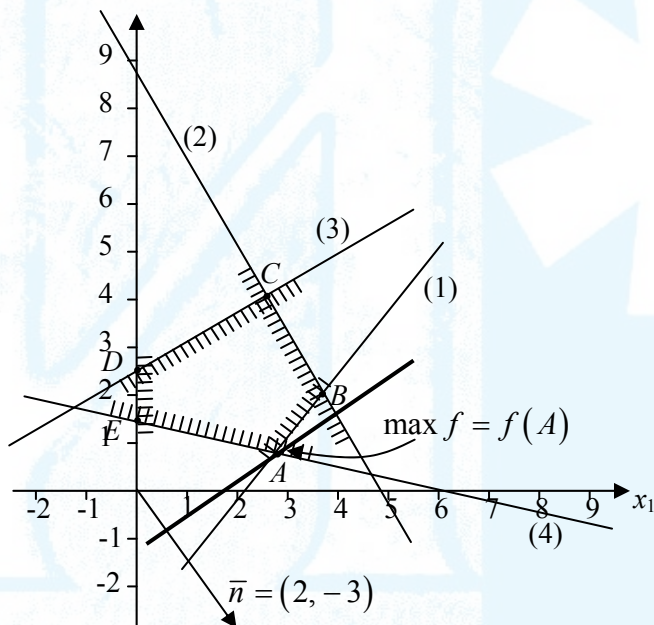


Рис. 2.21

Семейство прямых  $f$  прощасяется с множеством решений в точке  $A$ , следовательно, в этой точке целевая функция достигает сво-



его максимального значения. Для определения координат точки  $A$  решим систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} (1) 4x_1 - 3x_2 = 9 \\ (4) x_1 + 4x_2 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow X^* = A = (54/19, 15/19), \max f(X) = 63/19.$$

2. Двойственная задача имеет вид:

$$\varphi(Y) = 9y_1 + 39y_2 + 25y_3 - 6y_4 \Rightarrow \min$$

$$(1) \quad 4y_1 + 8y_2 - 6y_3 - 1y_4 \geq 2$$

$$(2) \quad 3y_1 - 5y_2 - 10y_3 + 4y_4 \leq 3$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

3. Оптимальное решение двойственной задачи найдем, используя условия дополняющей нежесткости.

$$\left. \begin{array}{l} x_1^* > 0 \Rightarrow 4y_1^* + 8y_2^* - 6y_3^* - y_4^* = 2 \\ x_2^* > 0 \Rightarrow 3y_1^* - 5y_2^* - 10y_3^* + 4y_4^* = 3 \\ (i=2) \quad 8 \cdot \frac{54}{19} + 5 \cdot \frac{15}{19} = 26,68 < 39 \Rightarrow y_2^* = 0 \\ (i=3) \quad -6 \cdot \frac{54}{19} + 10 \cdot \frac{15}{19} = -9,17 < 25 \Rightarrow y_3^* = 0 \end{array} \right\}.$$

Откуда следует:

$$\left. \begin{array}{l} 4y_1^* - y_4^* = 2 \\ 3y_1^* + 4y_4^* = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1^* = \frac{11}{19}, y_4^* = \frac{6}{19}.$$

$$\Rightarrow Y^* = \left( y_1^* = \frac{11}{19}, y_2^* = 0, y_3^* = 0, y_4^* = \frac{6}{19} \right),$$

$$\min \varphi(Y) = 9 \cdot \frac{11}{19} - 6 \cdot \frac{6}{19} = \frac{63}{19}.$$

4. Перейдем к расширенной задаче:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 - M\xi_4 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{lcl} (1) & 4x_1 - 3x_2 + x_3 & = 9 \\ (2) & 8x_1 + 5x_2 + x_4 & = 39 \\ (3) & -6x_1 + 10x_2 + x_5 & = 25 \\ (4) & x_1 + 4x_2 - x_6 + \xi_4 & = 6 \end{array} \right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6} \quad \xi_4 \geq 0.$$

Расчеты проведем в табл. 2.17.

Таблица 2.17

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	2	-3	0	0	0	0	$-M$
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
1	$A_3$	0	9	4	-3	1	0	0	0	0
2	$A_4$	0	39	8	5	0	1	0	0	0
3	$A_5$	0	25	-6	10	0	0	1	0	0
4	$A_7$	$-M$	6	1	<b>4</b>	0	0	0	-1	1
$m+1$			0	-2	3	0	0	0	0	0
$m+2$			-6	-1	-4	0	0	0	1	0
1	$A_3$	0	27/2	<b>19/4</b>	0	1	0	0	-3/4	3/4
2	$A_4$	0	63/2	27/4	0	0	1	0	5/4	-5/4
3	$A_5$	0	10	-17/2	0	0	0	1	5/2	-5/2
4	$A_2$	-3	3/2	1/4	1	0	0	0	-1/4	1/4
$m+1$			-9/2	-11/4	0	0	0	0	3/4	-3/4
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	1
1	$A_1$	2	54/19	1	0	4/19	0	0	-3/19	3/19
2	$A_4$	0	234/19	0	0	-27/19	1	0	44/19	-44/19
3	$A_5$	0	649/19	0	0	34/19	0	1	22/19	-22/19
4	$A_3$	-3	15/19	0	1	-1/19	0	0	-4/19	4/19
$m+1$			63/19	0	0	11/19	0	0	6/19	-6/19
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	1

После второй итерации получаем оптимальный план расширенной задачи

$$\tilde{X}^* = \left( x_1^* = \frac{54}{19}, x_2^* = \frac{15}{19}, x_3^* = 0, x_4^* = \frac{234}{19}, x_5^* = \frac{649}{19}, x_6^* = 0, \xi_4^* = 0 \right)$$

и оптимальный план исходной задачи

$$X^* = \left( x_1^* = 54/19, x_2^* = 15/19 \right),$$

где участвуют только управляемые переменные. Максимальное значение целевой функции исходной задачи  $f(X^*) = 63/19$ .

5. Оптимальный план двойственной задачи найдем, используя окончательную симплекс-таблицу прямой задачи (табл. 2.17).

$$\begin{aligned} (y_1^*, y_2^*, y_3^*, -y_4^*) &= (2, 0, 0, -3) \cdot \begin{vmatrix} 4/19 & 0 & 0 & 3/19 \\ -27/19 & 1 & 0 & -44/19 \\ 34/19 & 0 & 1 & -22/19 \\ -1/19 & 0 & 0 & 4/19 \end{vmatrix} = \\ &= (11/19, 0, 0, -6/19). \end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$Y^* = (y_1^* = 11/19, y_2^* = 0, y_3^* = 0, y_4^* = 6/19), \min \varphi(Y) = 63/19.$$

Минимальное значение функции двойственной задачи совпадает с максимальным значением функции прямой задачи, что подтверждает первую теорему двойственности.

6. Решим двойственную задачу симплекс-методом. Для этого сначала составим расширенную задачу

$$\varphi(Y) = 9y_1 + 39y_2 + 25y_3 - 6y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 + M\psi_1 \Rightarrow \min$$

$$(1) \quad 4y_1 + 8y_2 - 6y_3 - 1y_4 - y_5 + \psi_1 = 2$$

$$(2) \quad 3y_1 - 5y_2 - 10y_3 + 4y_4 + y_6 = 3$$

$$y_i \geq 0 \quad i = \overline{1, 6}; \quad \psi_1 \geq 0,$$

а затем все расчеты проведем в табл. 2.18.

Таблица 2.18

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	9	39	25	-6	0	0	$M$
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
1	$A_7$	$M$	2	4	<b>8</b>	-6	-1	-1	0	1
2	$A_6$	0	3	3	-5	-10	4	0	1	0
$m+1$			0	-9	-39	-25	6	0	0	0
$m+2$			2	4	8	-6	-1	-1	0	0
1	$A_2$	39	1/4	<b>1/2</b>	1	-3/4	-1/8	-1/8	0	1/8
2	$A_6$	0	17/4	11/2	0	-55/4	27/8	-5/8	1	5/8
$m+1$			39/4	21/2	0	-217/4	9/8	-39/8	0	39/8
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	-1
1	$A_1$	9	1/2	1	2	-3/2	-1/4	-1/4	0	1/4
2	$A_6$	0	3/2	0	-11	-11/2	<b>19/4</b>	3/4	1	-3/4
$m+1$			9/2	0	-21	-77/2	15/4	-9/4	0	9/4
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	-1
1	$A_1$	9	11/19	1	27/19	-34/19	0	-4/19	1/19	4/19
2	$A_4$	-6	6/19	0	-44/19	-22/19	1	3/19	4/19	-3/19
$m+1$			63/19	0	-234/19	-649/19	0	-54/19	-15/19	54/19
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	-1

В первой итерации переменная  $y_2$  вводится в базис, искусственная переменная  $\psi_1$  выводится из базиса; во второй итерации вместо переменной  $y_2$  в базис включается  $y_1$ ; в третьей итерации исключается из базиса дополнительная переменная  $y_6$ , а вместо нее включается управляемая переменная  $y_4$ .

После третьей итерации симплекс-метода получены следующие значения оценок:  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -234/19$ ,  $\gamma_3 = -649/19$ ,  $\gamma_4 = 0$ ,  $\gamma_5 = -54/19$ ,  $\gamma_6 = -15/19$ ,  $\gamma_5 = 54/19 - M$  (табл. 2.18,  $(m+1)$ -я строка). При достаточно больших значениях параметра  $M$  все



оценки не положительны, следовательно, получен оптимальный план двойственной задачи

$$Y^* = (y_1^* = 11/19, y_2^* = 0, y_3^* = 0, y_4^* = 6/19).$$

Минимальное значение целевой функции  $\varphi(Y^*) = 63/19$ .

Далее найдем оптимальный план прямой задачи по первой теореме двойственности

$$(x_1^*, -x_2^*) = (9, -6) \left\| \begin{array}{cc} 4/19 & 1/19 \\ -3/19 & 4/19 \end{array} \right\| = \left( \frac{54}{19}, -\frac{15}{19} \right) \Rightarrow X^* = \left( \frac{54}{19}, \frac{15}{19} \right).$$

Результат совпадает с результатом, полученным в пп. 1 и 4.

## § 11. АНАЛИЗ МОДЕЛИ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Анализ модели на чувствительность — это процесс, реализуемый после того, как оптимальное решение задачи получено. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели.

Основы анализа рассмотрим на примере задачи о ресурсах.

### Пример 2.18 (задача о ресурсах)

Для изготовления четырех видов продукции  $P_1, P_2, P_3$ , и  $P_4$  используются ресурсы трех видов  $S_1, S_2$  и  $S_3$ , запасы которых составляют  $b_1, b_2$  и  $b_3$  единиц соответственно. Нормы расхода  $i$ -го вида ресурса на единицу  $j$ -й продукции  $(a_{ij})$  и цена единицы продукции  $(c_j)$  приведены в табл. 2.19.

Таблица 2.19

Ресурсы	Продукция				Запасы ресурса	П5
	П1	П2	П3	П4		
S1	2	7	1	6	83	7
S2	5	2	8	9	58	3
S3	4	3	10	13	64	6
Цена реализации	28	18	32	40		25

1. Определить оптимальный ассортимент выпускаемой продукции, доставляющий предприятию максимальный доход.

2. Составить модель двойственной задачи. Используя соответствие между переменными прямой и двойственной задач, выписать оптимальное решение двойственной задачи. Дать содержательный экономический анализ управляемых и дополнительных переменных прямой и двойственной задач.

3. Оценить рентабельность новой продукции и ее цену, характеристики которой  $c_{n+1}$  и  $a_{i,n+1}$  представлены в табл. 2.19. Если производство продукции  $\Pi_5$  рентабельно, скорректировать оптимальное решение, сравнить новое оптимальное значение  $f$  с тем, которое соответствовало условиям задачи до введения новой переменной.

4. Определить границы изменения коэффициентов целевой функции, в пределах которых ассортимент выпускаемой продукции не меняется.

5. Определить границы изменения ресурсов, в пределах которых сохраняется устойчивость двойственных оценок.

**Решение.**

1. Пусть  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) — объем производства продукции,  $f$  — суммарный доход от реализации продукции. Математическая модель задачи примет вид:

$$\max \Rightarrow f = 28x_1 + 18x_2 + 32x_3 + 40x_4$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 6x_4 &\leq 83 \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 9x_4 &\leq 58 \\ 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 13x_4 &\leq 64 \end{aligned} \right\}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Решение задачи симплекс-методом представлено в табл. 2.20.

Таблица 2.20

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	28	18	32	40	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_6$	$A_7$	$A_8$
1	$A_6$	0	83	2	7	1	6	1	0	0
2	$A_7$	0	58	5	2	8	9	0	1	0
3	$A_8$	0	64	4	3	10	13	0	0	1
$m+1$			0	-28	-18	-32	-40	0	0	0
.....										
1	$A_2$	18	299/31	0	1	-11/31	12/31	5/31	-2/31	0
2	$A_1$	28	240/31	1	0	54/31	51/31	-2/31	7/31	0
3	$A_8$	0	127/31	0	0	127/31	163/31	-7/31	-22/31	1
$m+1$			12102/31	0	0	322/31	404/31	34/31	160/31	0

Из окончательной симплекс-таблицы получаем оптимальный план исходной задачи

$$X^* = (x_1^* = \frac{240}{31}, x_2^* = \frac{299}{31}, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_6^* = 0, x_7^* = 0, x_8^* = \frac{127}{31}),$$

$\max f(X) = 12102/31 = 390,39$ . Здесь управляемые переменные

$x_1^* = 240/31$ ,  $x_2^* = 299/31$ ,  $x_3^* = 0$ ,  $x_4^* = 0$  показывают, что продукции первого вида следует произвести 240/31 единиц, второго — 299/31, а продукцию третьего и четвертого видов производить нецелесообразно. Дополнительные переменные первого и второго ограничений  $x_6^* = 0$ ,  $x_7^* = 0$ . Это свидетельствует о том, что ресурсы  $S_1$  и  $S_2$  израсходованы полностью. Такие ресурсы называются дефицитными относительно оптимального решения. Дополнительная переменная третьего ограничения  $x_8^* = 127/31$  показывает количество неизрасходованного ресурса  $S_3$ . Другими словами, ресурс  $S_3$  является недефицитным. Все оценки для небазисных переменных положительны, поэтому оптимальное решение единственно.

2. Обозначим относительную стоимость единицы ресурса  $S_i$  через  $y_i$ ,  $i=1,2,3$ . Получим математическую модель двойственной задачи

$$\min \Rightarrow \varphi(Y) = 83y_1 + 58y_2 + 64y_3$$

$$\left. \begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 + 4y_3 &\geq 28 \\ 7y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\geq 18 \\ 1y_1 + 8y_2 + 10y_3 &\geq 32 \\ 6y_1 + 9y_2 + 13y_3 &\geq 40 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Оптимальное решение двойственной задачи находим из окончательной симплекс-таблицы по формуле  $Y^* = C_B D^{-1}$ .

$$(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (18, 28, 0) \begin{vmatrix} 5/31 & -2/31 & 0 \\ -2/31 & 7/31 & 0 \\ -7/31 & -22/31 & 1 \end{vmatrix}.$$

Откуда имеем:

$$y_1^* = \frac{5}{31} \cdot 18 - \frac{2}{31} \cdot 28 - \frac{7}{31} \cdot 0 = \frac{34}{31},$$

$$y_2^* = -\frac{2}{31} \cdot 18 + \frac{7}{31} \cdot 28 - \frac{22}{31} \cdot 0 = \frac{160}{31},$$

$$y_3^* = 18 \cdot 0 + 28 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

$$Y^* = (34/31, 160/31, 0).$$

На самом деле численные значения оптимального решения двойственной задачи уже получены в окончательной симплекс-таблице задачи о ресурсах. Дублирующие вычисления приведены только для того чтобы показать, что оптимальное решение двойственной задачи находится в строке оценок (строка  $m+1$ ). Переменная  $y_i^*$  соответствует оценке  $\gamma_{n+i}^*$ , где число управляемых пере-



менных  $n=4$ . Поскольку коэффициенты при дополнительных переменных в целевой функции равны нулю, то справедливо равенство  $y_i^* = \gamma_{n+i}^*$ .

Откуда  $y_1^* = \gamma_{4+1}^* = \gamma_5^* = 34/31$ ,  $y_2^* = \gamma_6^* = 160/31$ ,  $y_3^* = \gamma_7^* = 0$ .

Значение функции двойственной задачи

$$\varphi(Y^*) = 83 \cdot 34/31 + 58 \cdot 160/31 + 64 \cdot 0 = 12102/31.$$

Раскроем экономический смысл матрицы  $D^{-1}$ . Численные значения элементов первого столбца обратной матрицы показывают величину изменения объема производства продукции и величину остатков избыточного ресурса (если таковые имеются) при увеличении первого вида ресурса на единицу. При этом величина приращения функции будет равна двойственной переменной  $y_1^* = 34/31$ .

Действительно, объем выпуска первого вида продукции  $x_1$  сократится на  $2/31$ , второго вида продукции  $x_2$  увеличится на  $5/31$ . Объем остатков третьего вида ресурсов уменьшится на  $7/31$ . Скорректированный оптимальный текущий план имеет вид:

$$X_{n_1}^* = (238/31, 304/31, 0, 0).$$

Соответствующее значение функции

$$f(X_{n_1}^*) = 28 \cdot \frac{238}{31} + 18 \cdot \frac{301}{31} + 32 \cdot 0 + 40 \cdot 0 = \frac{12136}{31}.$$

Величина приращения функции

$$\Delta_1(f) = f(X_{n_1}^*) - f(X^*) = \frac{12136}{31} - \frac{12102}{31} = \frac{34}{31}.$$

Рассуждения для единичного приращения ресурса  $S_2$  относятся ко второму столбцу матрицы  $D^{-1}$ . Здесь приращение функции составит  $160/31$ :

$$X_{n_2}^* = (247/31, 297/31, 0, 0),$$

$$f(X_{n_2}^*) = 28 \cdot \frac{247}{31} + 18 \cdot \frac{297}{31} + 32 \cdot 0 + 40 \cdot 0 = \frac{12262}{31},$$

$$\Delta_2(f) = f(X_{n_2}^*) - f(X^*) = \frac{12262}{31} - \frac{12102}{31} = \frac{160}{31}.$$

Третий столбец матрицы  $D^{-1}$  отражает влияние изменений ресурса  $S_3$  на текущее оптимальное решение. Увеличение запасов данного вида ресурса на единицу приводит к увеличению дополнительной переменной  $x_8^*$  на единицу. При этом управляемые переменные и значение функции исходной задачи не меняются. Это объясняется тем, что запасы ресурса  $S_3$  превышают имеющиеся в нем потребности.

Таким образом, двойственные переменные показывают меру дефицитности ресурсов, они численно равны приращению целевой функции при единичном приращении соответствующего ресурса.

3. Предположим, что в задаче о ресурсах нас интересует производство нового вида продукции  $\Pi_5$ , удельная стоимость которой прогнозируется равной 25 ден. ед. Нормы расхода ресурсов  $S_1, S_2, S_3$  на единицу готового продукта равны 7, 3 и 6 единиц соответственно. Оценим эффективность выпуска новой продукции с характеристиками  $c_5 = 25, a_{15} = 7, a_{25} = 3, a_{35} = 6$ . Относительная стоимость всех видов ресурсов, расходуемых на единицу этой продукции, составит:

$$a_{15}y_1^* + a_{25}y_2^* + a_{35}y_3^* = 7 \cdot 34/31 + 3 \cdot 160/31 + 6 \cdot 0 = 718/31 \approx 23,16.$$

Это меньше 25, следовательно, выпускать эту продукцию целесообразно. Продукция  $\Pi_5$  будет рентабельной при установлении ее цены  $c_5 \geq 23,17$ .

Найдем оптимальное решение с учетом нового вида продукции. Обозначим объем производства продукции  $\Pi_5$  через  $x_5$ ; при этом задача о ресурсах формулируется следующим образом:

$$\max \Rightarrow f = 28x_1 + 18x_2 + 32x_3 + 40x_4 + 25x_5$$

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 6x_4 + 7x_5 &\leq 83 \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 3x_5 &\leq 58 \\ 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 13x_4 + 6x_5 &\leq 64 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

Двойственная задача имеет вид:

$$\min \Rightarrow \varphi(Y) = 83y_1 + 58y_2 + 64y_3$$

$$\left. \begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 + 4y_3 &\geq 28 \\ 7y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\geq 18 \\ 1y_1 + 8y_2 + 10y_3 &\geq 32 \\ 6y_1 + 9y_2 + 13y_3 &\geq 40 \\ 7y_1 + 3y_2 + 6y_3 &\geq 25 \end{aligned} \right\}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Вектор  $A_5 = (7, 3, 6)^T$  разложим по векторам оптимального базиса:

$$\begin{pmatrix} x_{1,5} \\ x_{2,5} \\ x_{3,5} \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{ccc} 5/31 & -2/31 & 0 \\ -2/31 & 7/31 & 0 \\ -7/31 & -22/31 & 1 \end{array} \right\| \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/31 \\ 7/31 \\ 71/31 \end{pmatrix}.$$

Оценка для вновь введенного вектора определяется из пятого ограничения двойственной задачи. Для этого из относительной стоимости всех ресурсов, расходуемых на производство единицы продукции  $\Pi_5$ , вычтем оптовую цену  $c_5 = 25$ , получим

$$\gamma_5 = a_{15}y_1^* + a_{25}y_2^* + a_{35}y_3^* - c_5 = 718/31 - 25 = -57/31.$$

Столбец  $A_5$  с коэффициентами разложения вектора  $A_5$  и оценкой  $\gamma_5$  присоединим к окончательной симплекс-таблице исходной задачи справа от  $A_8$ .

Таблица 2.21

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	28	18	32	40	0	0	0	25
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_5$
1	$A_2$	18	299/31	0	1	-11/31	12/31	5/31	-2/31	0	29/31
2	$A_1$	28	240/31	1	0	54/31	51/31	-2/31	7/31	0	7/31
3	$A_8$	0	127/31	0	0	127/31	163/31	-7/31	-22/31	1	71/31
$m+1$			12102/31	0	0	322/31	404/31	34/31	160/31	0	-57/31

В столбце  $A_5$  выбираем разрешающий элемент. Реализация симплекс-метода предусматривает замену текущей базисной переменной  $x_8$  на переменную  $x_5$ . Сгруппируем столбцы так, чтобы первая группа соответствовала управляемым переменным, включая новый вид продукции, а вторая — дополнительным переменным исходной задачи. Для этого столбец  $A_5$  поместим между столбцами  $A_4$  и  $A_6$ , т. е. получим естественную нумерацию столбцов. Перейдем к следующему решению, в котором фигурирует новый вид продукции.

В табл. 2.22 представлен новый оптимальный план

$$X_n^* = (x_1^* = 521/71, x_2^* = 566/71, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 127/71),$$

$$\max f(X_n) = 27951/71 = 393,68 > \max f(X) = 12102/31 = 390,39.$$

Случилось так, что все дополнительные переменные оказались равными нулю. Это значит, что все ресурсы израсходованы полностью. Такой случай называется идеальным, что на практике встречается редко.

Добавление нового вида продукции (введение нового вида деятельности, новой переменной) обосновано только в том случае, если эта продукция экономически рентабельна и не ухудшает оптимальное значение целевой функции.



Таблица 2.22

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	28	18	32	40	25	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$
1	$A_2$	18	566/71	0	1	-144/71	-125/71	0	18/71	16/71	-29/71
2	$A_1$	28	521/71	1	0	95/71	80/71	0	-3/71	21/71	-7/71
3	$A_5$	25	127/71	0	0	127/71	163/71	1	-7/71	-22/71	31/71
$m+1$			27951/71	0	0	971/71	1225/71	0	65/71	326/71	57/71

#### 4. Изменение коэффициентов целевой функции.

Для определения границ изменения коэффициентов целевой функции  $c_j$ , в пределах которых сохраняется ассортимент выпускаемой продукции, воспользуемся формулой для вычисления оценок:

$$\begin{aligned}\gamma'_j &= \sum_{i=1}^m c'_i x_{ij} - c'_j = \sum_{i=1}^m (c_i + \Delta c_i) x_{ij} - (c_j + \Delta c_j) = \\ &= \gamma_j + \sum_{i=1}^m \Delta c_i x_{ij} - \Delta c_j \geq 0.\end{aligned}\quad (2.66)$$

Как видим, оценки состоят из трех слагаемых: первое слагаемое является оценкой оптимального решения исходной задачи (величина постоянная); второе слагаемое характеризует величину изменения коэффициентов целевой функции при базисных переменных; третье слагаемое отражает величину изменения коэффициентов целевой функции при свободных переменных.

Рассмотрим два случая.

а) Анализ коэффициентов целевой функции при свободных переменных.

Предположим, что коэффициенты при свободных переменных  $x_j$  получают приращение  $\Delta c_j$  (положительное или отрицательное)

и становятся равными  $c'_j = c_j + \Delta c_j$ , тогда второе слагаемое обращается в ноль и формула (2.66) приобретает вид:

$$\gamma'_j = \gamma_j - \Delta c_j \geq 0. \quad (2.67)$$

В текущем оптимальном решении исходной задачи свободными переменными являются переменные  $x_3^*$  и  $x_4^*$ , что приводит к системе неравенств:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma'_3 = \gamma_3 - \Delta c_3 \geq 0 \\ \gamma'_4 = \gamma_4 - \Delta c_4 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 322/31 - \Delta c_3 \geq 0 \\ 404/31 - \Delta c_4 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Delta c_3 \leq 322/31 \\ \Delta c_4 \leq 404/31 \end{array} \right\}.$$

Пусть исходный коэффициент  $c_3 = 32$  заменяется на новый  $c'_3 = 32 + \Delta c_3$ , остальные коэффициенты остаются неизменными, т. е.  $\Delta c_4 = 0$ . В этом случае система неравенств будет состоять из одного неравенства  $-\infty < \Delta c_3 \leq 322/31$ , откуда  $-\infty < c'_3 - 32 \leq 322/31$ ,  $-\infty < c'_3 \leq 1314/31$ . Так как по экономическому смыслу задачи  $c_j \geq 0$ , то  $0 \leq c'_3 \leq 1314/31 \approx 42,39$ .

Аналогично для  $c_4 = 40$  получим неравенство  $-\infty < \Delta c_4 \leq 404/31$ . Учитывая, что  $c'_4 = 40 + \Delta c_4$  имеем  $-\infty < c'_4 - 40 \leq 404/31$ ,  $-\infty < c'_4 \leq 1644/31$ . Так как  $c_j \geq 0$ , то  $0 \leq c'_4 \leq 1644/31 \approx 53,03$ .

б) Анализ коэффициентов целевой функции при базисных переменных.

Теперь предположим, что коэффициенты при базисных переменных  $c_i$  получают приращение  $\Delta c_i$  и становятся равными  $c'_i = c_i + \Delta c_i$ , тогда третье слагаемое обращается в ноль и формула (66) приобретает вид:

$$\gamma'_j = \gamma_j + \sum_{i=1}^m \Delta c_i x_{ij} \geq 0. \quad (2.68)$$

Проведем анализ для управляемых базисных переменных  $x_1^*$  и  $x_2^*$ . Для этого запишем систему неравенств (2.68), где каждое неравенство соответствует оценке  $\gamma'_j \geq 0$ .

$$\left. \begin{aligned} \gamma'_3 &= \frac{322}{31} + \frac{54}{31}\Delta c_1 - \frac{11}{31}\Delta c_2 \geq 0, \\ \gamma'_4 &= \frac{404}{31} + \frac{51}{31}\Delta c_1 + \frac{12}{31}\Delta c_2 \geq 0, \\ \gamma'_6 &= \frac{34}{31} - \frac{2}{31}\Delta c_1 + \frac{5}{31}\Delta c_2 \geq 0, \\ \gamma'_7 &= \frac{160}{31} + \frac{7}{31}\Delta c_1 - \frac{2}{31}\Delta c_2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 322 + 54\Delta c_1 - 11\Delta c_2 &\geq 0 \\ 404 + 51\Delta c_1 + 12\Delta c_2 &\geq 0 \\ 34 - 2\Delta c_1 + 5\Delta c_2 &\geq 0 \\ 160 + 7\Delta c_1 - 2\Delta c_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.69)$$

Пусть  $c'_1 = c_1 + \Delta c_1 = 18 + \Delta c_1$ , остальные коэффициенты не меняются. Это значит, что в системе неравенств (2.69)  $\Delta c_2 = 0$ . Исключив нулевые слагаемые, получим:

$$\left. \begin{aligned} 322 + 54\Delta c_1 &\geq 0 \\ 404 + 51\Delta c_1 &\geq 0 \\ 34 - 2\Delta c_1 &\geq 0 \\ 160 + 7\Delta c_1 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta c_1 &\geq -322/54 \\ \Delta c_1 &\geq -404/51 \\ \Delta c_1 &\leq 34/2 \\ \Delta c_1 &\geq -160/7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -322/54 \leq \Delta c_1 \leq 17, \quad -322/54 \leq c'_1 - 18 \leq 17, \quad 22,04 \leq c'_1 \leq 45.$$

Аналогично для коэффициента  $c_2 = 18$  получим:

$$\left. \begin{aligned} 322 - 11\Delta c_2 &\geq 0 \\ 404 + 12\Delta c_2 &\geq 0 \\ 34 + 5\Delta c_2 &\geq 0 \\ 160 - 2\Delta c_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -34/5 \leq \Delta c_2 \leq 322/11,$$

$$-34/5 + 18 \leq c'_2 \leq 322/11 + 18, \quad 11,2 \leq c'_2 \leq 47,27.$$

### 5. Изменение правых частей ограничений.

Предположим, что запасы ресурсов  $b_i$  стали равными  $b'_i = b_i + \Delta b_i$ . Изменение правых частей ограничений может повлиять только на допустимость решения, поэтому нужно определить новые значения элементов правой части симплекс-таблицы с использованием обратной матрицы

$$X_n^* = D^{-1}(B + \Delta B) = \begin{pmatrix} 5/31 & -2/31 & 0 \\ -2/31 & 7/31 & 0 \\ -7/31 & -22/31 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 83 + \Delta b_1 \\ 58 + \Delta b_2 \\ 64 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{299}{31} + \frac{5}{31}\Delta b_1 - \frac{2}{31}\Delta b_2 &\geq 0 \\ \frac{240}{31} - \frac{2}{31}\Delta b_1 + \frac{7}{31}\Delta b_2 &\geq 0 \\ \frac{127}{31} - \frac{7}{31}\Delta b_1 - \frac{22}{31}\Delta b_2 + \Delta b_3 &\geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.70)$$

Рассмотрим два случая.

а) Анализ дефицитных ресурсов  $b_1 = 83, b_2 = 58$ .

Пусть  $b'_1 = b_1 + \Delta b_1 = 83 + \Delta b_1, b'_2 = b_2 = 58, b'_3 = b_3 = 64$ . Тогда система неравенств (70) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} 299 + 5\Delta b_1 &\geq 0 \\ 240 - 2\Delta b_1 &\geq 0 \\ 127 - 7\Delta b_1 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta b_1 &\geq -299/5 \\ \Delta b_1 &\leq 120 \\ \Delta b_1 &\leq 127/7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -299/5 \leq \Delta b_1 \leq 127/7 \Rightarrow$$

$$-\frac{299}{5} + 83 \leq b'_1 \leq \frac{127}{7} + 83 \Rightarrow \frac{116}{5} \leq b'_1 \leq \frac{708}{7} \Rightarrow 23,2 \leq b'_1 \leq 101,14.$$

Аналогично для ресурса  $b_2$ :  $b'_1 = 83, b'_2 = 58 + \Delta b_2, b'_3 = 64$ .

$$-\frac{240}{7} + 58 \leq b'_2 \leq \frac{127}{58} + 58 \Rightarrow \frac{166}{7} \leq b'_2 \leq \frac{1403}{22} \Rightarrow 23,71 \leq b'_2 \leq 63,77.$$



б) Анализ недефицитного ресурса:  $b'_3 = b_3 + \Delta b_3 = 64 + \Delta b_3$ .

В системе (2.70) первое и второе неравенства выполняются автоматически, из третьего неравенства получим  $\Delta b_3 \geq -127/31$ . Откуда следует  $b'_3 \geq -127/31 + 64 = 1857/31 = 59,9$ .

## ЗАДАЧИ 101–200

Ниже приведены числовые данные задач линейного программирования, записанные в виде таблиц,

$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\Rightarrow$	$\min (\max)$
$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$R$	$b_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$R$	$b_2$

которые эквивалентны следующей записи

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \Rightarrow \min (\max)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad R_1 \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \quad R_2 \quad b_2 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

где  $R_1, R_2$  — один из знаков « $\leq$ » или « $\geq$ ».

Необходимо выполнить последовательно следующие задания:

1. Применяя симплекс-метод, решить задачу или установить, что задача не имеет решения. В последнем случае указать причину неразрешимости: а) множество решений пусто; б) целевая функция не ограничена на заданном множестве решений. Если существуют альтернативные оптимальные планы, следует найти общее оптимальное решение.

2. Построить двойственную задачу. Если прямая задача разрешима, то найти оптимальное решение двойственной задачи, применяя первую теорему двойственности. Сравнить значения функций, соответствующих оптимальным планам  $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $Y^* = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ .

3. Решить графическим методом двойственную задачу и, применяя условия дополняющей нежесткости, найти оптимальное решение прямой задачи. Сравнить результат с результатом, полученным симплекс-методом.

**101**

-9	48	24	$\Rightarrow$	min
1	3	-5	$\geq$	8
9	2	-12	$\leq$	12

**103**

4	10	-60	$\Rightarrow$	max
-1	2	-5	$\leq$	1
4	1	4	$\leq$	4

**105**

-9	7	-52	$\Rightarrow$	max
-1	7	-4	$\leq$	5
-6	-1	13	$\geq$	2

**107**

7	-30	6	$\Rightarrow$	max
8	3	2	$\leq$	12
5	-10	-3	$\geq$	3

**109**

54	-7	12	$\Rightarrow$	min
-5	-1	5	$\geq$	2
-9	4	3	$\leq$	4

**111**

15	-34	21	$\Rightarrow$	min
-3	-20	9	$\geq$	14
-7	-2	10	$\leq$	3

**113**

-4	-82	-9	$\Rightarrow$	max
11	-12	1	$\leq$	2
-2	7	1	$\geq$	5

**115**

1	-48	-36	$\Rightarrow$	max
3	-1	-9	$\leq$	7
1	4	-8	$\geq$	3

**102**

-21	66	-33	$\Rightarrow$	max
14	1	-3	$\leq$	7
-3	3	2	$\leq$	2

**104**

-42	30	48	$\Rightarrow$	min
14	-5	-1	$\leq$	2
3	-6	3	$\geq$	7

**106**

65	96	-91	$\Rightarrow$	min
-1	8	-28	$\geq$	3
10	-3	-52	$\geq$	2

**108**

-32	9	-88	$\Rightarrow$	max
8	-7	8	$\geq$	3
20	5	-11	$\leq$	2

**110**

30	-15	-13	$\Rightarrow$	max
9	3	-1	$\leq$	8
-10	10	0	$\geq$	3

**112**

9	29	-17	$\Rightarrow$	max
8	3	-15	$\leq$	5
3	-4	-9	$\geq$	1

**114**

2	-22	72	$\Rightarrow$	min
1	-3	1	$\geq$	5
1	5	-9	$\leq$	2

**116**

1	-32	-30	$\Rightarrow$	min
1	4	3	$\leq$	5
2	-1	-5	$\geq$	2

117	7	59	61	$\Rightarrow$	min
	5	1	-4	$\leq$	1
	-1	7	5	$\geq$	7

118	-32	45	21	$\Rightarrow$	max
	8	-1	7	$\leq$	8
	7	-6	-6	$\geq$	6

119	13	-9	14	$\Rightarrow$	max
	-6	7	-3	$\geq$	4
	2	8	5	$\leq$	10

120	27	-28	36	$\Rightarrow$	min
	7	-11	2	$\geq$	9
	6	5	-3	$\leq$	7

121	-12	2	4	$\Rightarrow$	min
	-3	1	-1	$\geq$	4
	-2	2	-4	$\leq$	2

122	-53	10	2	$\Rightarrow$	min
	-9	3	-2	$\geq$	9
	8	5	-1	$\leq$	15

123	3	-20	28	$\Rightarrow$	min
	1	-5	4	$\geq$	2
	3	4	-7	$\leq$	1

124	15	-1	45	$\Rightarrow$	min
	5	1	-9	$\leq$	1
	6	-1	5	$\geq$	2

125	-2	10	20	$\Rightarrow$	min
	-4	2	1	$\geq$	5
	1	5	-5	$\leq$	3

126	-4	3	9	$\Rightarrow$	max
	1	1	1	$\leq$	2
	-8	2	-1	$\geq$	0

127	21	1	-6	$\Rightarrow$	min
	-6	2	3	$\leq$	6
	-14	1	-1	$\geq$	1

128	8	4	-7	$\Rightarrow$	max
	4	1	1	$\leq$	5
	-1	-4	2	$\geq$	2

129	-11	24	6	$\Rightarrow$	min
	-11	1	2	$\geq$	3
	1	2	-3	$\geq$	3

130	1	10	13	$\Rightarrow$	min
	-1	-6	5	$\leq$	5
	-1	2	2	$\geq$	3

131	-15	14	9	$\Rightarrow$	min
	5	-1	-1	$\leq$	1
	1	2	-3	$\geq$	6

132	6	6	-12	$\Rightarrow$	max
	1	4	-3	$\leq$	6
	2	-1	4	$\leq$	2

133	21	-3	-18	$\Rightarrow$	max
	14	1	1	$\leq$	4
	6	-3	6	$\geq$	3

134	-4	66	19	$\Rightarrow$	min
	-1	11	-1	$\geq$	2
	-4	6	3	$\geq$	3

135	12	-19	26	$\Rightarrow$	max
	3	-8	-9	$\geq$	1
	7	-4	6	$\leq$	5

137	-14	35	49	$\Rightarrow$	min
	7	10	-2	$\leq$	1
	2	21	7	$\geq$	6

139	26	-45	56	$\Rightarrow$	min
	-13	-9	7	$\geq$	5
	-1	5	-8	$\leq$	2

141	6	2	28	$\Rightarrow$	min
	2	-2	4	$\geq$	2
	3	-1	-7	$\leq$	1

143	-6	-5	31	$\Rightarrow$	min
	3	-7	4	$\geq$	8
	8	2	-6	$\leq$	11

145	-10	-6	42	$\Rightarrow$	min
	-5	-2	7	$\geq$	9
	2	3	-6	$\leq$	7

147	84	-2	36	$\Rightarrow$	min
	28	-2	-4	$\geq$	4
	-9	-1	9	$\geq$	6

149	6	7	-9	$\Rightarrow$	max
	2	4	5	$\leq$	8
	-3	-1	6	$\geq$	2

151	4	-6	10	$\Rightarrow$	min
	-4	-2	2	$\geq$	3
	-1	3	-1	$\leq$	1

136	-5	13	7	$\Rightarrow$	min
	-1	1	-1	$\geq$	3
	-10	2	-2	$\leq$	3

138	6	-6	23	$\Rightarrow$	min
	1	-3	2	$\geq$	3
	6	2	-1	$\leq$	3

140	-30	-9	20	$\Rightarrow$	min
	-6	-1	3	$\geq$	3
	5	3	-2	$\leq$	1

142	5	-4	-22	$\Rightarrow$	min
	1	-4	-2	$\geq$	1
	-1	1	11	$\leq$	1

144	42	-4	-20	$\Rightarrow$	max
	7	-1	6	$\leq$	13
	-12	-1	15	$\geq$	10

146	15	-3	15	$\Rightarrow$	min
	3	-1	-6	$\geq$	6
	-1	3	-10	$\leq$	1

148	9	6	15	$\Rightarrow$	min
	1	1	-10	$\geq$	3
	-1	2	3	$\leq$	1

150	-4	-6	8	$\Rightarrow$	max
	-1	-3	5	$\leq$	5
	6	1	2	$\geq$	4

152	-3	-10	33	$\Rightarrow$	min
	1	-5	5	$\geq$	7
	-1	-2	2	$\geq$	2



153	12	22	-2	$\Rightarrow$	min
	3	3	-1	$\geq$	0
	-6	4	0	$\geq$	5

155	-13	26	-14	$\Rightarrow$	max
	-7	-3	8	$\leq$	6
	-2	5	13	$\leq$	19

157	-9	12	10	$\Rightarrow$	min
	-6	1	2	$\geq$	7
	3	-3	1	$\leq$	2

159	28	21	3	$\Rightarrow$	max
	-6	-14	1	$\geq$	1
	5	6	3	$\leq$	9

161	12	28	-18	$\Rightarrow$	max
	16	7	3	$\leq$	4
	9	-8	6	$\geq$	1

163	-15	18	16	$\Rightarrow$	max
	-3	20	5	$\leq$	6
	-7	9	-4	$\geq$	2

165	9	6	5	$\Rightarrow$	min
	3	2	4	$\geq$	5
	7	-3	2	$\leq$	1

167	-17	9	23	$\Rightarrow$	min
	-8	-5	6	$\geq$	10
	-18	4	4	$\geq$	3

169	-3	12	7	$\Rightarrow$	min
	-3	3	1	$\geq$	2
	1	2	-1	$\leq$	1

154	2	-4	24	$\Rightarrow$	min
	1	-1	3	$\geq$	4
	2	4	-8	$\leq$	3

156	33	-15	28	$\Rightarrow$	min
	-2	-10	7	$\geq$	13
	-7	6	4	$\leq$	5

158	37	35	-14	$\Rightarrow$	min
	-3	-7	7	$\leq$	3
	8	-4	2	$\geq$	8

160	10	6	-12	$\Rightarrow$	min
	3	-3	2	$\geq$	11
	-2	-2	9	$\leq$	4

162	-26	-11	12	$\Rightarrow$	max
	9	4	-10	$\geq$	4
	-6	5	-3	$\leq$	5

164	-4	13	12	$\Rightarrow$	min
	1	-6	9	$\geq$	2
	5	-7	4	$\leq$	3

166	-10	35	-16	$\Rightarrow$	min
	21	-16	4	$\leq$	21
	7	-22	-11	$\geq$	7

168	4	-3	9	$\Rightarrow$	min
	1	-3	1	$\geq$	4
	2	1	-1	$\leq$	2

170	11	-7	-5	$\Rightarrow$	max
	4	-8	1	$\geq$	2
	9	-3	-1	$\leq$	1

171	6	-4	3	$\Rightarrow$	max
	-1	-4	1	$\geq$	1
	3	-1	3	$\leq$	5

173	-5	8	9	$\Rightarrow$	max
	4	1	2	$\leq$	7
	3	-3	-1	$\geq$	2

175	25	-27	35	$\Rightarrow$	max
	-12	4	-11	$\geq$	5
	-21	-7	12	$\leq$	13

177	12	27	-38	$\Rightarrow$	max
	2	-10	3	$\geq$	1
	7	6	-5	$\leq$	6

179	-7	11	28	$\Rightarrow$	min
	-3	8	-4	$\leq$	8
	-10	3	5	$\geq$	3

181	2	-3	10	$\Rightarrow$	min
	2	-1	-1	$\leq$	1
	1	-3	2	$\geq$	4

183	5	2	-7	$\Rightarrow$	max
	1	2	-3	$\leq$	4
	3	-1	7	$\leq$	1

185	11	-12	15	$\Rightarrow$	min
	4	-2	4	$\geq$	8
	3	-7	5	$\geq$	10

187	-4	6	7	$\Rightarrow$	min
	-4	2	1	$\geq$	4
	1	3	-1	$\leq$	2

172	6	-1	61	$\Rightarrow$	min
	-3	-1	4	$\geq$	4
	1	-2	5	$\geq$	14

174	-2	7	9	$\Rightarrow$	min
	1	4	1	$\geq$	4
	2	3	-1	$\leq$	3

176	-5	-16	19	$\Rightarrow$	min
	-3	-6	3	$\geq$	2
	2	-5	5	$\geq$	1

178	-11	-12	13	$\Rightarrow$	min
	2	-4	1	$\geq$	6
	5	3	-1	$\leq$	2

180	17	19	-7	$\Rightarrow$	min
	-5	4	-2	$\geq$	1
	4	2	-3	$\geq$	1

182	3	-28	6	$\Rightarrow$	max
	1	-7	-2	$\leq$	3
	1	-4	3	$\leq$	3

184	3	-1	5	$\Rightarrow$	min
	1	1	-1	$\leq$	1
	3	1	0	$\geq$	2

186	2	-3	17	$\Rightarrow$	min
	2	4	-5	$\leq$	3
	3	-1	6	$\geq$	4

188	5	1	-1	$\Rightarrow$	max
	1	4	-3	$\leq$	3
	3	-1	5	$\leq$	2

189

9	-12	25	$\Rightarrow$	min
3	-8	4	$\geq$	6
4	-3	-5	$\leq$	7

190

-15	12	5	$\Rightarrow$	min
3	-8	1	$\geq$	2
10	-3	-1	$\leq$	1

191

4	5	-24	$\Rightarrow$	max
-2	1	3	$\geq$	1
1	3	-4	$\leq$	4

192

35	17	45	$\Rightarrow$	min
15	4	5	$\geq$	5
21	-2	-8	$\leq$	7

193

-5	-4	3	$\Rightarrow$	max
2	-1	2	$\leq$	6
-4	3	1	$\leq$	2

194

9	16	10	$\Rightarrow$	min
-8	13	15	$\geq$	12
2	5	-19	$\geq$	14

195

15	-13	11	$\Rightarrow$	min
-1	-3	4	$\geq$	6
-5	7	3	$\leq$	2

196

23	27	-30	$\Rightarrow$	max
-7	-5	12	$\geq$	6
2	6	25	$\leq$	14

197

-21	6	20	$\Rightarrow$	max
35	-1	5	$\leq$	7
15	-7	-4	$\geq$	3

198

2	-3	40	$\Rightarrow$	min
2	-1	-8	$\leq$	2
1	-3	5	$\geq$	7

199

-4	2	28	$\Rightarrow$	min
-1	1	3	$\geq$	7
1	2	-5	$\leq$	6

200

-5	36	30	$\Rightarrow$	min
-6	8	4	$\geq$	11
3	13	-7	$\leq$	10

## Задачи 201–300

В каждом варианте приведены таблицы, в которых записаны условия канонической задачи линейного программирования на минимум, т. е.  $\min \Rightarrow f(X) = CX$ ,  $AX = B$ ,  $X \geq 0$ . В первой строке помещены коэффициенты целевой функции. В остальных строках, в первых пяти столбцах, находятся векторы условий, а в последнем столбце записан вектор ограничений. В правом верхнем углу таблицы указана цель задачи.

Необходимо последовательно выполнить следующие задания.

1. Задачу решить графическим методом (см. пример 2.7).

2. Применяя симплекс-метод, решить задачу или установить, что задача не имеет решения. Начальный план рекомендуется искать методом искусственного базиса (см. пример 2.9).

3. Построить двойственную задачу. Если вектор  $X^*$  найден, вычислить оптимальный план  $Y^*$  двойственной задачи, используя первую теорему двойственности ( $Y^* = C_B D^{-1}$ ). Вычислить значение функции  $\varphi(Y^*)$  (см. пример 2.13).

4. Провести анализ полученного решения, применяя условия дополняющей нежесткости (см. пример 2.14).

$$\text{Если } x_j^* > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j. \text{ Если } x_j^* = 0, \text{ то } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* < c_j.$$

**201**

7	-2	4	-1	6	min
2	-1	7	3	6	12
4	5	8	0	9	10
11	-2	13	1	15	20

**202**

-7	5	-8	9	12	min
4	5	1	2	10	20
15	0	7	-1	14	11
8	12	9	-10	-6	6

**203**

13	-6	2	17	22	min
1	-2	3	4	5	6
-1	7	8	9	10	11
12	13	-3	14	15	16

**204**

1	-5	6	8	-2	min
11	7	1	12	5	16
14	10	0	3	8	17
13	2	9	4	6	15

**205**

3	9	-4	-11	-2	min
5	9	-2	11	6	19
2	1	4	15	10	17
3	7	2	-1	8	21

**206**

4	5	2	-5	19	min
2	4	3	1	12	7
5	9	-2	8	15	10
-1	0	6	18	-4	20

**207**

7	-1	11	4	-5	min
1	2	3	4	5	6
7	0	8	9	-1	10
-2	11	-4	12	15	14

**208**

-7	12	8	3	19	min
5	10	1	12	9	49
4	8	11	2	16	30
12	3	15	7	13	38



209

1	4	38	2	7	min
10	1	4	-2	5	34
2	3	5	1	-6	53
7	4	3	-6	8	56

210

23	2	-1	-24	-3	min
4	1	2	6	8	30
12	8	0	-4	10	52
13	4	2	10	6	40

211

1	2	5	-18	1	min
3	7	1	11	5	32
4	9	2	1	12	46
6	13	5	14	3	60

212

2	1	-3	5	4	min
5	0	6	4	5	64
3	1	7	6	4	68
1	2	8	3	7	75

213

2	1	-4	6	2	min
4	1	1	18	5	31
-2	5	6	11	1	38
3	2	9	20	0	32

214

-2	4	3	-1	4	min
4	7	1	8	5	78
8	6	2	7	3	69
1	3	4	6	7	77

215

2	3	-1	8	6	min
2	3	1	-5	7	63
4	0	7	8	-3	67
5	9	-8	1	2	71

216

1	-4	1	2	-3	min
4	8	6	9	3	61
10	12	-5	9	2	70
-3	0	2	16	1	68

217

3	2	-2	3	4	min
5	3	7	2	0	68
16	0	10	6	3	73
7	12	1	4	8	90

218

2	1	-3	5	1	min
4	2	3	5	0	45
5	6	4	-1	1	35
8	3	2	6	1	56

219

1	1	-3	1	-2	min
3	2	4	6	8	64
6	4	1	9	0	61
8	5	9	7	-2	62

220

1	2	1	4	3	min
2	3	4	9	1	32
1	2	8	6	5	49
3	4	5	7	9	54

**221**

1	3	6	2	3	min
2	3	4	5	6	70
7	3	5	8	0	60
6	4	8	7	-1	66

**222**

1	2	4	3	7	min
0	1	2	-4	5	32
2	3	1	5	-7	51
6	4	3	-7	8	54

**223**

-2	4	-1	-4	5	min
5	0	7	3	4	58
7	6	2	3	4	57
2	9	1	6	1	52

**224**

-2	2	1	-5	1	min
7	2	1	-4	3	35
6	8	0	6	5	55
7	2	1	10	4	40

**225**

8	-2	5	-25	10	min
4	0	9	-1	-8	39
3	4	8	10	12	36
6	3	7	4	5	40

**226**

8	7	2	-10	4	min
1	12	6	8	4	37
23	5	18	9	11	86
2	14	7	20	3	32

**227**

20	-2	14	3	5	min
-6	12	9	2	15	88
3	14	0	8	10	70
2	12	7	1	5	78

**228**

1	8	-4	3	5	min
1	0	13	-4	6	69
3	-8	9	-7	1	71
3	2	10	-5	11	83

**229**

12	5	8	1	3	min
8	5	3	2	7	70
5	6	3	4	6	72
7	8	2	0	9	74

**230**

2	8	-3	1	1	min
2	3	5	1	8	67
6	4	9	1	2	62
7	9	5	0	6	70

**231**

2	1	3	2	4	min
3	0	1	2	9	35
6	2	4	5	8	48
3	4	1	6	4	47

**232**

2	1	3	-1	4	min
0	5	9	2	3	35
7	8	11	1	5	50
1	4	10	6	4	40

**233**

2	1	-3	5	4	min
5	0	6	4	5	64
3	1	7	6	4	68
1	2	8	3	7	75

**234**

1	1	-3	5	1	min
0	1	4	11	3	74
2	6	1	5	9	81
6	2	8	7	4	88

**235**

5	1	2	1	3	min
3	5	-2	11	-1	67
-1	4	6	19	2	79
7	8	10	9	0	86

**236**

4	2	-1	5	1	min
7	2	1	-5	3	32
6	8	0	6	5	55
7	3	1	10	4	40

**237**

1	2	1	3	5	min
5	4	7	2	3	70
2	6	1	10	5	66
8	3	8	7	1	85

**238**

2	7	3	2	5	min
3	0	9	15	1	62
6	3	5	11	2	78
-5	4	13	7	8	90

**239**

1	3	-5	2	4	min
5	1	2	6	8	31
12	7	0	-1	9	50
11	4	2	10	3	45

**240**

1	4	38	2	7	min
0	1	4	-2	5	34
2	3	5	1	-6	53
7	4	3	-6	8	56

241

25	-5	30	-3	18	min
4	9	-5	15	7	40
17	12	13	-2	14	42
8	9	10	3	4	29

242

-7	8	18	-9	-20	min
2	-4	10	1	15	11
5	9	3	0	12	13
8	7	20	6	14	18

243

14	5	-11	-16	10	min
2	1	5	12	18	24
7	3	0	9	20	35
8	4	-6	13	10	28

244

5	24	8	13	3	min
1	12	8	4	0	20
6	2	-2	9	5	22
11	7	3	-1	10	30

245

-4	6	7	10	3	min
10	3	6	5	-2	19
5	-7	4	8	9	23
2	6	1	8	3	17

246

3	5	-4	17	-1	min
3	-7	1	9	0	2
13	14	-5	4	18	12
17	8	-6	16	11	10

247

11	3	-8	2	-14	min
2	1	0	5	7	4
3	6	-1	8	10	9
-4	9	11	21	13	12

248

25	-10	1	3	-24	min
3	1	10	-3	15	20
8	0	-2	4	9	14
5	2	-6	6	11	12

249

3	0	-2	-17	-5	min
1	5	7	10	11	72
2	4	6	0	-8	81
3	9	-12	16	-18	45

250

12	9	8	-1	11	min
10	2	-3	1	5	11
-4	3	4	0	6	15
8	7	9	-1	13	12



**251**

2	3	1	5	9	min
3	9	7	4	-6	55
2	-2	24	13	10	32
-6	5	14	11	-8	46

**252**

12	-2	-3	1	5	min
4	0	1	3	2	4
5	6	9	29	12	13
-1	5	6	22	9	6

**253**

8	3	10	-16	11	min
1	9	4	-10	15	17
2	7	5	-11	14	16
3	8	6	-12	13	19

**254**

2	2	-3	-8	4	min
-1	18	2	-5	3	32
2	8	-1	-15	5	1
1	10	1	-12	4	5

**255**

-1	5	2	6	-6	min
1	3	4	11	2	4
2	2	2	-3	-2	2
3	0	3	-1	3	3

**256**

2	7	4	12	9	min
1	2	-2	4	3	23
2	0	1	-1	2	15
0	3	2	2	-1	12

**257**

6	-2	7	12	-1	min
1	-3	4	2	0	6
2	5	2	3	8	36
8	1	7	10	4	68

**258**

-4	28	2	11	8	min
3	0	1	2	6	4
4	5	3	15	2	12
-2	8	1	3	7	5

**259**

17	-2	1	2	3	min
3	0	1	4	1	4
4	5	7	30	15	16
-3	4	6	27	9	5

**260**

2	-1	8	15	24	min
4	2	9	12	13	64
3	8	5	11	10	56
2	6	8	7	7	38

**261**

-4	8	6	4	9	min
1	0	4	2	1	18
1	2	3	4	5	20
-2	4	6	1	3	22

**262**

1	-22	-11	2	4	min
2	0	1	2	1	2
3	4	8	27	10	10
-1	3	5	20	7	5

**263**

6	5	8	1	4	min
10	-8	1	0	4	15
7	0	11	3	1	28
4	5	2	-2	8	16

**264**

2	12	10	3	7	min
1	-2	1	4	0	8
2	3	2	4	3	20
3	5	-2	2	1	15

**265**

-29	-14	3	11	8	min
4	1	0	1	3	5
18	1	7	-4	9	18
20	8	-4	2	6	7

**266**

5	10	15	-13	-21	min
1	-1	4	-5	6	10
4	4	5	7	1	70
3	2	3	8	5	50

**267**

-1	1	5	10	-4	min
1	25	0	-13	4	16
3	7	2	1	-8	4
-4	12	5	0	6	21

**268**

5	8	-2	2	0	min
3	-4	2	1	5	11
4	2	3	2	1	13
2	3	-4	1	4	14

**269**

13	-5	3	2	4	min
4	1	5	-2	4	7
4	5	10	1	-6	24
21	-7	4	2	8	21

**270**

-6	2	5	-31	-23	min
1	-1	-2	3	27	55
0	1	4	6	2	15
1	0	1	8	7	18

**271**

15	11	9	-3	14	min
4	-5	3	0	1	16
6	0	7	-2	5	6
2	7	-6	2	3	22

**272**

10	18	3	-9	14	min
5	1	2	1	3	24
0	5	4	3	14	42
2	-2	1	2	0	12

**273**

-1	5	22	38	2	min
1	0	-2	1	3	18
2	3	7	25	9	60
-4	2	4	19	6	30

**274**

-1	12	0	-6	5	min
1	25	0	-13	4	16
3	7	2	1	-8	4
-4	12	5	0	6	21

**275**

4	-12	-1	1	-7	min
1	-7	2	9	4	22
-2	7	5	4	6	27
1	-2	3	2	0	19

**276**

11	5	4	23	8	min
4	2	1	6	2	8
3	4	7	22	17	46
6	5	0	-10	7	18

**277**

26	10	9	12	36	min
12	4	-3	1	7	12
6	-2	4	0	-5	9
7	1	3	2	4	27

**278**

-2	7	21	9	5	min
2	2	3	3	1	8
1	8	5	1	2	20
12	1	1	11	1	16

**279**

9	11	-8	4	17	min
3	-2	1	5	6	10
1	0	2	1	3	15
2	3	-4	0	1	6

**280**

-1	-3	8	1	4	min
2	1	0	-3	4	6
3	2	8	5	2	36
10	8	4	1	7	68

**281**

2	5	3	1	-1	min
1	-4	-1	6	0	15
2	-8	-8	12	1	30
4	1	0	1	2	21

**282**

6	-1	8	4	-21	min
9	1	3	-2	3	9
17	2	5	1	0	21
15	7	4	3	-1	66

**283**

-4	0	-5	13	1	min
3	2	0	4	1	32
2	0	1	5	3	36
4	1	2	1	2	38

**284**

2	5	-3	-1	3	min
1	-2	1	6	-5	6
1	3	5	4	4	22
3	6	0	2	2	26

**285**

-5	13	7	-2	-3	min
5	2	1	3	-4	8
1	3	1	2	6	16
2	4	3	1	-7	4

**286**

7	-2	-3	1	9	min
1	8	3	2	-5	16
3	4	7	8	1	20
6	2	0	3	4	10

**287**

6	7	18	-5	1	min
1	5	-10	2	5	20
2	3	4	0	1	12
3	4	6	3	2	33

**288**

-8	9	-14	2	-2	min
2	3	1	0	10	21
-4	5	2	3	1	14
1	0	12	2	4	7

**289**

5	-2	15	-3	8	min
4	2	13	1	-2	15
5	0	-4	3	4	9
3	1	-5	4	0	3

**290**

4	-3	-4	9	8	min
2	3	-5	1	2	30
1	4	2	5	-6	15
2	3	-7	10	0	27



**291**

8	-10	9	25	-2	min
2	0	1	4	1	16
3	4	-6	11	9	42
5	1	-2	16	7	44

**292**

7	21	2	-5	-8	min
1	-5	1	11	6	28
6	7	0	4	2	12
3	7	2	3	-2	15

**293**

5	-16	9	-15	10	min
1	3	-5	1	2	9
0	4	1	3	-1	7
3	2	7	0	1	28

**294**

11	-4	-8	7	1	min
2	0	1	3	2	15
3	2	4	6	1	18
-4	3	7	0	3	20

**295**

2	20	-13	17	8	min
2	5	3	14	7	42
4	3	5	23	3	58
1	9	-8	4	9	29

**296**

3	14	9	-6	5	min
8	7	3	-2	1	10
7	3	0	2	6	27
0	5	3	-1	2	16

**297**

9	1	4	16	14	min
2	3	1	8	0	11
4	-5	3	2	-6	19
2	0	2	4	-10	13

**298**

2	5	9	3	16	min
1	-2	1	6	-5	3
1	3	5	4	4	11
3	6	0	2	2	13

**299**

4	17	24	9	1	min
3	2	4	0	1	5
8	17	9	2	2	14
-3	12	11	4	5	26

**300**

5	7	-5	18	-3	min
1	5	3	-2	6	12
3	8	-4	7	0	16
2	5	0	3	4	15

## Задачи 301–400

Ниже приведены таблицы с числовыми данными задачи о ресурсах (запасы  $b_i$ , нормы расхода на единицу продукции  $a_{ij}$ , цены  $c_j$ ). Требуется последовательно выполнить следующие задания (см. пример 2.18).

1. Найти оптимальный план исходной задачи, доставляющий предприятию максимальный доход.

2. Сформулировать двойственную задачу. Найти оптимальное решение двойственной задачи. Дать содержательный экономический анализ переменных прямой и двойственной задач.

3. Оценить рентабельность новой продукции и ее цену, характеристики которой  $c_{n+1}$  и  $a_{i,n+1}$  представлены отдельным столбцом, справа от основных таблиц. Если производство продукции  $P_5$  рентабельно, найти новое оптимальное решение, сравнить значение новой функции с тем, которое соответствовало условиям задачи до введения переменной  $x_5$ .

4. Найти интервалы изменения коэффициентов целевой функции, в пределах которых ассортимент выпускаемой продукции не меняется.

5. Найти интервалы изменения ресурсов, в пределах которых сохраняется устойчивость двойственных оценок.

Параметры задачи	Номер варианта									
	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310
$b_1$	30	55	44	50	40	35	28	45	90	90
$b_2$	40	48	29	65	61	40	68	60	55	73
$b_3$	70	31	62	29	58	60	75	58	83	82
$a_{11}$	6	1	2	1	2	5	1	5	2	2
$a_{21}$	3	8	3	9	1	3	1	9	1	1
$a_{31}$	13	2	5	3	9	4	9	3	7	5
$c_1$	9	13	12	50	31	20	41	32	14	57
$a_{12}$	1	9	1	5	5	4	6	6	17	6
$a_{22}$	8	0	4	1	6	2	0	1	5	3
$a_{32}$	9	4	1	2	4	3	4	4	9	1
$c_2$	5	18	27	25	27	37	27	26	34	42
$a_{13}$	7	3	3	3	3	1	3	2	6	4
$a_{23}$	5	3	5	2	4	5	4	2	4	7
$a_{33}$	4	7	3	3	8	4	8	5	1	9
$c_3$	8	26	32	48	42	15	32	10	25	28
$a_{14}$	4	6	4	12	10	2	4	8	3	5
$a_{24}$	1	2	1	7	2	6	2	2	2	8
$a_{34}$	7	4	2	9	3	2	3	9	8	4
$c_4$	13	22	16	21	24	23	24	30	40	35
$a_{15}$	2	3	6	2	1	5	5	7	1	3
$a_{25}$	6	1	2	4	3	2	3	3	6	4
$a_{35}$	3	5	4	3	5	3	5	1	2	1
$c_5$	17	27	38	65	56	40	60	64	44	72

Параметры задачи	Номер варианта									
	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
$b_1$	80	90	72	39	40	80	73	83	50	40
$b_2$	95	40	82	50	90	78	57	43	37	20
$b_3$	73	85	75	88	60	90	97	70	49	38
$a_{11}$	3	5	3	1	3	1	5	2	5	1
$a_{21}$	2	4	4	3	4	4	8	7	15	2
$a_{31}$	7	9	6	1	8	7	12	3	6	10
$c_1$	63	40	62	42	62	36	10	39	27	30
$a_{12}$	12	7	1	4	2	13	6	4	10	6
$a_{22}$	6	1	1	2	5	5	2	10	4	14
$a_{32}$	4	10	3	5	7	10	5	2	7	5
$c_2$	46	38	40	35	59	24	26	13	14	12
$a_{13}$	4	2	2	0	5	2	1	11	3	5
$a_{23}$	3	6	4	3	4	7	9	2	1	3
$a_{33}$	5	3	2	6	7	4	4	1	9	4
$c_3$	32	25	76	43	46	49	39	22	18	18
$a_{14}$	9	3	7	6	7	11	7	6	2	8
$a_{24}$	14	5	5	4	3	5	1	3	6	1
$a_{34}$	2	6	7	3	1	12	8	12	8	2
$c_4$	55	18	31	29	35	28	12	15	17	20
$a_{15}$	5	2	1	4	6	10	3	1	13	2
$a_{25}$	6	7	3	2	8	4	2	11	2	1
$a_{35}$	4	8	1	4	3	9	1	2	3	2
$c_5$	73	43	70	65	64	70	45	52	40	43



Параметры задачи	Номер варианта									
	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
$b_1$	81	27	60	72	17	55	40	30	53	79
$b_2$	63	41	40	39	20	48	62	61	71	59
$b_3$	45	38	30	57	40	64	72	43	84	47
$a_{11}$	8	5	19	2	7	2	1	2	2	14
$a_{21}$	18	12	6	5	11	11	4	15	1	1
$a_{31}$	3	8	14	13	6	12	7	1	5	9
$c_1$	48	13	16	24	10	9	23	14	24	17
$a_{12}$	9	3	4	3	1	4	2	5	4	4
$a_{22}$	2	2	13	4	8	7	7	8	7	11
$a_{32}$	2	16	8	6	17	2	4	7	3	1
$c_2$	31	11	15	14	18	8	15	4	16	24
$a_{13}$	20	10	7	5	4	3	4	11	8	5
$a_{23}$	7	1	9	1	13	12	3	10	5	8
$a_{33}$	1	4	3	2	7	1	1	1	2	12
$c_3$	25	35	10	23	5	13	20	12	21	11
$a_{14}$	4	7	2	4	18	5	5	8	5	3
$a_{24}$	6	14	5	9	9	1	8	4	4	17
$a_{34}$	9	3	12	7	2	5	6	9	2	2
$c_4$	17	20	13	19	15	11	14	10	13	9
$a_{15}$	13	11	11	2	5	6	1	7	1	2
$a_{25}$	10	7	7	5	2	5	4	5	2	17
$a_{35}$	12	3	3	4	8	6	3	6	3	6
$c_5$	60	30	36	35	29	23	35	30	35	34

Параметры задачи	Номер варианта									
	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
$b_1$	42	51	37	68	24	39	34	57	41	85
$b_2$	38	78	71	48	73	32	48	75	80	40
$b_3$	46	97	83	56	47	28	81	67	59	77
$a_{11}$	1	4	6	9	7	2	6	5	2	8
$a_{21}$	6	3	3	3	4	3	2	1	7	3
$a_{31}$	11	2	1	7	5	1	1	4	4	4
$c_1$	12	31	27	47	17	23	27	15	28	23
$a_{12}$	10	8	2	12	3	6	7	17	8	2
$a_{22}$	2	0	7	6	14	12	1	5	9	13
$a_{32}$	13	9	6	8	1	7	5	9	3	6
$c_2$	18	19	18	19	12	19	41	39	17	35
$a_{13}$	8	7	10	2	6	4	2	3	6	10
$a_{23}$	9	1	4	1	10	8	9	2	1	7
$a_{33}$	4	2	11	11	3	6	13	12	7	16
$c_3$	25	20	29	35	7	13	29	22	10	18
$a_{14}$	3	1	8	8	9	17	17	1	7	3
$a_{24}$	7	5	9	5	6	1	10	7	3	6
$a_{34}$	5	1	12	3	5	3	3	8	4	5
$c_4$	38	43	21	24	11	30	20	30	20	13
$a_{15}$	2	3	3	3	8	2	7	9	1	6
$a_{25}$	4	2	1	2	5	7	5	1	2	4
$a_{35}$	3	1	7	2	3	12	2	2	1	9
$c_5$	45	54	38	50	29	40	45	48	47	41

Параметры задачи	Номер варианта									
	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350
$b_1$	97	99	86	80	85	81	91	65	41	95
$b_2$	83	53	91	82	76	64	72	50	47	45
$b_3$	68	77	77	79	85	55	80	73	39	76
$a_{11}$	15	5	1	18	3	11	2	6	7	10
$a_{21}$	10	7	11	1	14	7	13	3	2	15
$a_{31}$	8	18	5	17	7	4	3	10	3	9
$c_1$	33	30	17	25	37	19	21	31	31	20
$a_{12}$	8	1	2	5	18	8	6	2	4	7
$a_{22}$	2	13	4	23	4	23	1	7	1	4
$a_{32}$	18	4	6	4	16	1	23	3	11	5
$c_2$	42	23	12	26	13	16	19	40	35	35
$a_{13}$	9	2	6	3	2	5	5	10	9	5
$a_{23}$	14	8	9	11	11	9	6	2	7	8
$a_{33}$	11	15	8	6	5	12	7	8	2	1
$c_3$	54	17	12	16	24	18	14	16	21	25
$a_{14}$	10	3	12	10	14	2	9	3	6	3
$a_{24}$	5	6	4	9	12	6	4	11	5	3
$a_{34}$	1	9	10	12	20	3	2	9	8	14
$c_4$	17	14	15	27	18	11	18	28	41	35
$a_{15}$	8	4	19	6	9	4	6	7	4	10
$a_{25}$	5	12	21	8	10	13	12	8	5	7
$a_{35}$	7	1	13	4	17	7	50	17	14	9
$c_5$	25	11	10	22	29	22	17	22	19	27

Параметры задачи	Номер варианта									
	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
$b_1$	75	71	70	54	94	86	91	90	55	80
$b_2$	62	52	38	68	60	83	83	56	67	48
$b_3$	25	92	88	74	76	35	70	72	96	88
$a_{11}$	5	3	16	2	14	19	1	4	2	9
$a_{21}$	9	5	2	3	3	2	5	1	5	5
$a_{31}$	2	4	5	6	8	6	2	5	20	3
$c_1$	17	43	30	31	24	21	16	25	11	32
$a_{12}$	1	17	3	7	13	7	18	1	4	5
$a_{22}$	4	4	1	5	15	8	8	3	9	17
$a_{32}$	3	2	14	10	10	10	11	12	3	8
$c_2$	15	50	31	20	57	32	28	42	33	23
$a_{13}$	6	1	2	8	7	3	14	2	6	20
$a_{23}$	3	6	3	7	4	5	16	2	8	1
$a_{33}$	10	10	9	12	6	1	9	13	10	11
$c_3$	23	29	40	38	30	29	34	26	50	45
$a_{14}$	12	4	1	4	9	12	3	7	21	7
$a_{24}$	8	8	5	9	2	4	1	14	3	6
$a_{34}$	1	3	12	1	11	8	7	3	22	19
$c_4$	14	33	48	19	32	46	14	29	40	27
$a_{15}$	3	16	10	3	7	3	12	8	12	2
$a_{25}$	5	3	14	12	5	14	17	18	19	13
$a_{35}$	8	4	6	4	8	6	4	6	24	9
$c_5$	21	27	40	30	31	27	19	20	34	18



Параметры задачи	Номер варианта									
	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
$b_1$	91	61	95	45	59	59	43	94	75	83
$b_2$	39	62	50	50	65	81	61	98	34	60
$b_3$	85	39	43	68	80	44	77	87	80	58
$a_{11}$	2	21	1	9	7	20	2	1	2	6
$a_{21}$	6	6	18	7	13	8	2	4	12	5
$a_{31}$	7	2	2	11	17	11	6	6	5	7
$c_1$	86	29	27	20	63	52	23	40	27	40
$a_{12}$	3	4	4	4	4	9	1	5	0	14
$a_{22}$	4	18	3	8	7	7	10	10	13	1
$a_{32}$	9	5	3	3	11	4	10	2	6	5
$c_2$	53	15	23	40	18	26	24	32	42	28
$a_{13}$	7	22	5	14	14	17	3	13	4	1
$a_{23}$	11	10	4	5	1	6	11	8	2	3
$a_{33}$	10	12	6	18	9	13	8	9	9	9
$c_3$	50	47	41	45	15	20	38	40	37	34
$a_{14}$	1	4	8	3	9	1	5	3	18	12
$a_{24}$	8	3	17	16	20	8	4	15	1	8
$a_{34}$	20	8	7	4	7	2	6	9	7	7
$c_4$	64	27	25	27	28	19	34	22	24	22
$a_{15}$	5	10	12	6	2	7	8	16	21	3
$a_{25}$	2	13	11	13	12	3	12	20	6	23
$a_{35}$	4	20	13	11	19	12	15	3	17	4
$c_5$	48	50	34	37	20	25	27	25	37	27

Параметры задачи	Номер варианта									
	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
$b_1$	92	41	79	45	83	53	92	59	65	60
$b_2$	50	70	67	79	45	70	44	70	80	40
$b_3$	46	40	53	85	60	95	54	44	30	52
$a_{11}$	3	2	1	4	3	1	9	4	15	2
$a_{21}$	1	1	2	2	1	8	17	5	5	9
$a_{31}$	15	10	7	11	12	9	5	16	7	3
$c_1$	40	36	16	16	24	12	42	57	42	40
$a_{12}$	5	9	19	1	2	5	1	13	9	6
$a_{22}$	11	4	3	0	16	1	2	3	3	1
$a_{32}$	3	2	4	4	5	5	11	10	4	4
$c_2$	36	29	12	18	29	14	35	73	32	25
$a_{13}$	14	13	4	6	4	3	6	6	2	3
$a_{23}$	2	3	5	3	5	2	8	2	11	5
$a_{33}$	8	5	8	12	10	10	3	3	8	7
$c_3$	27	28	14	24	34	13	10	31	13	26
$a_{14}$	7	7	13	10	9	2	5	5	17	4
$a_{24}$	10	11	7	7	7	6	12	1	5	9
$a_{34}$	11	6	6	9	8	11	1	12	3	2
$c_4$	41	50	29	43	40	27	40	42	25	37
$a_{15}$	9	6	3	5	1	4	14	6	1	7
$a_{25}$	7	8	1	13	17	3	6	8	14	5
$a_{35}$	6	9	10	8	14	6	14	11	12	6
$c_5$	23	16	21	18	26	20	39	15	50	19

Параметры задачи	Номер варианта									
	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
$b_1$	78	25	20	62	53	73	38	43	70	90
$b_2$	80	40	40	38	68	51	84	79	92	80
$b_3$	53	30	85	38	71	72	52	54	84	29
$a_{11}$	13	1	4	7	1	7	2	6	9	4
$a_{21}$	1	7	6	4	6	12	4	13	7	7
$a_{31}$	9	8	7	17	5	10	7	8	11	10
$c_1$	46	31	24	41	20	39	24	50	21	50
$a_{12}$	7	5	1	1	3	11	3	5	7	10
$a_{22}$	4	6	17	5	8	13	6	8	10	9
$a_{32}$	2	1	5	6	4	9	2	11	3	13
$c_2$	38	40	40	24	35	18	32	41	28	48
$a_{13}$	8	4	6	6	2	12	1	4	2	14
$a_{23}$	11	3	4	9	7	9	5	10	16	13
$a_{33}$	3	2	2	1	6	11	4	1	15	1
$c_3$	10	50	26	26	52	33	26	49	40	40
$a_{14}$	5	6	4	5	4	10	4	9	5	8
$a_{24}$	6	2	12	6	3	8	12	14	21	14
$a_{34}$	4	7	7	3	2	14	3	7	10	8
$c_4$	32	20	20	32	46	42	42	35	31	34
$a_{15}$	8	6	9	4	2	12	2	16	11	11
$a_{25}$	9	8	8	8	3	8	18	4	12	12
$a_{35}$	6	4	7	4	4	9	5	2	6	11
$c_5$	22	42	38	27	47	35	28	34	42	25

Параметры задачи	Номер варианта									
	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400
$b_1$	80	50	61	80	77	70	90	86	44	47
$b_2$	76	71	72	47	40	54	83	48	32	32
$b_3$	62	46	52	68	60	48	67	52	55	43
$a_{11}$	8	1	2	7	4	11	3	5	13	2
$a_{21}$	13	13	6	3	5	8	5	1	5	26
$a_{31}$	4	12	14	12	1	2	17	20	3	24
$c_1$	70	14	29	71	29	35	35	40	27	30
$a_{12}$	15	18	17	4	8	6	10	2	6	7
$a_{22}$	9	4	7	5	3	1	8	9	9	9
$a_{32}$	7	8	3	6	5	10	14	3	4	29
$c_2$	65	20	22	65	20	25	14	21	10	41
$a_{13}$	11	3	1	9	9	9	4	8	2	15
$a_{23}$	2	9	13	1	2	4	2	11	8	12
$a_{33}$	9	2	5	8	17	7	8	4	12	11
$c_3$	43	10	15	40	43	24	16	34	20	25
$a_{14}$	8	2	4	1	6	3	9	3	17	23
$a_{24}$	14	4	10	11	12	5	11	1	15	18
$a_{34}$	5	1	9	13	2	8	7	13	14	2
$c_4$	90	18	8	56	50	29	20	30	18	32
$a_{15}$	5	14	15	8	14	12	16	14	10	8
$a_{25}$	11	7	11	10	7	8	6	7	11	4
$a_{35}$	9	16	5	14	2	14	8	2	19	10
$c_5$	52	15	34	52	25	58	22	23	35	15



## Задачи 401–500

Ниже приведены комплексные задачи линейного программирования. Необходимо выполнить в указанном порядке следующие задания.

1. Найти оптимальный план задачи графическим методом.
2. Построить двойственную задачу.
3. Найти оптимальный план двойственной задачи из графического решения прямой задачи, используя условия дополняющей нежесткости.
4. Найти оптимальный план прямой задачи симплекс-методом (для построения исходного опорного плана рекомендуется использовать метод искусственного базиса).
5. Найти оптимальный план двойственной задачи по первой теореме двойственности, используя окончательную симплекс-таблицу, полученную при решении прямой задачи (п. 4). Проверить утверждение «значения целевых функций пары двойственных задач на своих оптимальных решениях совпадают».
6. Двойственную задачу решить симплекс-методом, затем, используя окончательную симплекс-таблицу двойственной задачи, найти оптимальный план прямой задачи по первой теореме двойственности. Сравнить результат с результатом, полученным графическим методом (п. 1).

**401**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\Rightarrow \max \\ \left. \begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\leq 29 \\ 2x_1 - 5x_2 &\leq 4 \\ -4x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1 - 3x_2 &\geq -19 \end{aligned} \right\} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**402**

$$\begin{aligned} 13x_1 - 8x_2 &\Rightarrow \max \\ \left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 7 \\ 3x_1 - 10x_2 &\geq -24 \\ 7x_1 + x_2 &\geq 14 \\ 5x_1 + 4x_2 &\leq 72 \end{aligned} \right\} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**403**

$$\begin{aligned} 4x_1 - 10x_2 &\Rightarrow \min \\ \left. \begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &\leq 4 \\ 7x_1 + 4x_2 &\leq 35 \\ -9x_1 + 6x_2 &\leq 31 \\ 3x_1 + 3x_2 &\geq 1 \end{aligned} \right\} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

404

$$\begin{aligned}
 & x_1 - 3x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 53 \\ -4x_1 + 7x_2 &\geq -17 \\ 6x_1 + 8x_2 &\geq 37 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

407

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} -5x_1 + 4x_2 &\geq -19 \\ -2x_1 - 5x_2 &\leq 28 \\ 4x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 6x_1 + 7x_2 &\leq 47 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

410

$$\begin{aligned}
 & -4x_1 + 7x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\geq 9 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 11x_1 + 7x_2 &\leq 72 \\ -x_1 + 18x_2 &\geq 13 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

413

$$\begin{aligned}
 & 8x_1 + 9x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geq 2 \\ 7x_1 + 3x_2 &\geq 22 \\ -3x_1 + 4x_2 &\leq 13 \\ x_1 + 6x_2 &\geq 5 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

405

$$\begin{aligned}
 & 7x_1 - 4x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} -4x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 8x_1 + 12x_2 &\leq 88 \\ 3x_1 - 14x_2 &\leq 25 \\ 5x_1 + 6x_2 &\geq 28 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

408

$$\begin{aligned}
 & -2x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} x_1 + 11x_2 &\geq 20 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 2 \\ -5x_1 + 12x_2 &\leq 65 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 41 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

411

$$\begin{aligned}
 & -9x_1 + x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &\geq 15 \\ 6x_1 + 8x_2 &\leq 56 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 11 \\ 10x_1 + x_2 &\geq 12 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

414

$$\begin{aligned}
 & 10x_1 + 15x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &\leq 12 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ 7x_1 + 8x_2 &\geq 10 \\ 5x_1 + 6x_2 &\leq 13 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

406

$$\begin{aligned}
 & -13x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 5x_1 - 8x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 2x_2 &\geq 48 \\ 4x_1 + 10x_2 &\geq 60 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

409

$$\begin{aligned}
 & -5x_1 + 5x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} x_1 + 9x_2 &\geq 24 \\ 4x_1 - 10x_2 &\geq -54 \\ 3x_1 - x_2 &\geq 5 \\ 8x_1 - 3x_2 &\leq 83 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

412

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 - 3x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &\geq 49 \\ 4x_1 - 6x_2 &\leq 17 \\ 5x_1 + 7x_2 &\geq 36 \\ 9x_1 + 8x_2 &\leq 99 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

415

$$\begin{aligned}
 & -13x_1 + 2x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 5x_1 + 4x_2 &\leq 38 \\ -x_1 + 6x_2 &\leq 29 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

416

$$\begin{aligned}
 & -5x_1 + 5x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 &\geq 37 \\ 3x_1 - 3x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + 6x_2 &\geq 24 \\ 7x_1 + 11x_2 &\leq 72 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

419

$$\begin{aligned}
 & -12x_1 + 10x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} -9x_1 + 20x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\geq 9 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ 30x_1 - 17x_2 &\leq 53 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

422

$$\begin{aligned}
 & 4x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} -17x_1 + 37x_2 &\leq 74 \\ 5x_1 + 14x_2 &\leq 65 \\ 10x_1 + 5x_2 &\leq 78 \\ 20x_1 + 29x_2 &\geq 44 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

425

$$\begin{aligned}
 & 13x_1 - x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\geq 9 \\ 5x_1 - x_2 &\leq 12 \\ -2x_1 + 7x_2 &\leq 19 \\ 2x_1 + 6x_2 &\leq 21 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

417

$$\begin{aligned}
 & 3x_1 + 12x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} -5x_1 + 9x_2 &\geq 12 \\ 8x_1 + x_2 &\geq 21 \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 42 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 17 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

420

$$\begin{aligned}
 & 15x_1 + 9x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} -40x_1 + 31x_2 &\leq 65 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 12x_1 + 19x_2 &\geq 58 \\ 7x_1 - 8x_2 &\leq 28 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

423

$$\begin{aligned}
 & x_1 + x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ 3x_1 + 20x_2 &\geq 19 \\ 7x_1 + 4x_2 &\geq 6 \\ 4x_1 + 8x_2 &\leq 37 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

426

$$\begin{aligned}
 & 16x_1 - 9x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &\leq 39 \\ 6x_1 + 5x_2 &\geq 31 \\ 2x_1 + 11x_2 &\leq 88 \\ -13x_1 + 8x_2 &\leq 20 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

418

$$\begin{aligned}
 & 17x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 17x_1 + 10x_2 &\geq 37 \\ 6x_1 - x_2 &\leq 33 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\ -3x_1 + 9x_2 &\leq 49 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

421

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 + 5x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ 4x_1 + 6x_2 &\geq 13 \\ 8x_1 - 35x_2 &\leq 29 \\ 5x_1 + 11x_2 &\leq 73 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

424

$$\begin{aligned}
 & 11x_1 + 17x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} -5x_1 + 13x_2 &\geq 52 \\ 9x_1 + 2x_2 &\geq 32 \\ -x_1 + 7x_2 &\leq 40 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 17 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

427

$$\begin{aligned}
 & 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 &\geq 34 \\ -7x_1 + 40x_2 &\geq 52 \\ 12x_1 - 16x_2 &\leq 39 \\ 6x_1 + x_2 &\geq 9 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

428

$$12x_1 + 17x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1 + 4x_2 \geq 10 \\ 15x_1 - 10x_2 \leq 32 \\ 7x_1 + x_2 \geq 7 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

431

$$19x_1 + 9x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} 9x_1 + 7x_2 \leq 69 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 21 \\ -x_1 + 11x_2 \leq 28 \\ 6x_1 + 8x_2 \geq 33 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

434

$$-14x_1 + 2x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left. \begin{array}{l} 8x_1 + 11x_2 \leq 82 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ -x_1 + 10x_2 \leq 61 \\ 7x_1 - x_2 \leq 35 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

437

$$12x_1 - 8x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} 7x_1 + 8x_2 \leq 67 \\ -13x_1 + 5x_2 \leq 14 \\ x_2 \geq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 3 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

429

$$10x_1 + 8x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} 5x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ 9x_1 + 2x_2 \leq 36 \\ x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ -9x_1 + 18x_2 \geq 18 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

432

$$12x_1 + 9x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left. \begin{array}{l} -1x_1 + 19x_2 \geq 23 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ -6x_1 + 5x_2 \leq 22 \\ 8x_1 - 7x_2 \leq 45 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

435

$$9x_1 - 2x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} -x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 65 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 53 \\ 7x_1 + x_2 \leq 15 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

438

$$x_1 - x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 \leq 7 \\ 8x_1 + 12x_2 \geq 98 \\ 11x_1 - 19x_2 \geq 23 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 50 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

430

$$6x_1 + 9x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} 7x_1 + 7x_2 \leq 49 \\ 6x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ -3x_1 + 7x_2 \leq 28 \\ -2x_1 + 11x_2 \geq 13 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

433

$$4x_1 + 3x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left. \begin{array}{l} 5x_1 + 8x_2 \geq 32 \\ -6x_1 + 41x_2 \geq 51 \\ 12x_1 - 16x_2 \leq 39 \\ 6x_1 + x_2 \geq 10 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

436

$$-3x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} 9x_1 + 6x_2 \geq 38 \\ 5x_1 - 2x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 11x_2 \geq 15 \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

439

$$5x_1 - 4x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left. \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 25 \\ 9x_1 + 7x_2 \leq 83 \\ -4x_1 + 11x_2 \geq 2 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



440

$$-13x_1 + 9x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 7x_2 \geq 22 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 14x_1 + 3x_2 \geq 27 \\ 13x_1 - 9x_2 \leq 47 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

443

$$9x_1 - 3x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 \leq 51 \\ 6x_1 + 9x_2 \geq 78 \\ -4x_1 + 7x_2 \leq 38 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

446

$$7x_1 - 3x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -18x_1 + 8x_2 \leq 7 \\ 13x_1 + 12x_2 \geq 17 \\ 4x_1 + x_2 \leq 22 \\ 10x_1 - 23x_2 \leq 31 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

449

$$10x_1 - 3x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 \leq 24 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

441

$$-4x_1 + 13x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 19x_1 - 9x_2 \geq 17 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 31 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 52 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

444

$$2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 11x_2 \geq 55 \\ 4x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ 3x_1 - x_2 \geq 3 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

447

$$9x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 16x_1 + 10x_2 \geq 31 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 26 \\ 3x_1 + x_2 \leq 21 \\ 10x_1 - 24x_2 \leq 49 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

450

$$12x_1 - x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 36 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 33 \\ 10x_1 + 7x_2 \geq 70 \\ 5x_1 + 9x_2 \geq 53 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

442

$$x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 9x_2 \leq 72 \\ -10x_1 + 35x_2 \geq 34 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ -18x_1 + 8x_2 \leq 19 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

445

$$x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x_1 + 8x_2 \leq 63 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 30 \\ 4x_1 + 11x_2 \leq 75 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 21 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

448

$$-x_1 + 5x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 8x_1 + 15x_2 \geq 53 \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 4 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

451

$$x_1 + x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 15x_1 + 3x_2 \geq 43 \\ 5x_1 + 13x_2 \leq 65 \\ 9x_1 + 7x_2 \leq 58 \\ 7x_1 + 28x_2 \geq 56 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

452

$$\begin{aligned}
 &5x_1 - x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &\leq 70 \\ 3x_1 - 5x_2 &\leq 3 \\ 6x_1 - 2x_2 &\geq 18 \\ -x_1 + 4x_2 &\geq 9 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

455

$$\begin{aligned}
 &14x_1 - 23x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} 7x_1 + 10x_2 &\leq 52 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ 9x_2 &\leq 34 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned} 5x_1 - 6x_2 &\leq 7 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

458

$$\begin{aligned}
 &9x_1 - 5x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} 10x_1 + x_2 &\geq 49 \\ x_2 &\leq 7 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned} 5x_1 + 9x_2 &\geq 63 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 45 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

461

$$\begin{aligned}
 &-2x_1 + 13x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 29 \\ 4x_1 + 11x_2 &\geq 45 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned} 10x_1 - 12x_2 &\leq 17 \\ -x_1 + 5x_2 &\leq 38 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

453

$$\begin{aligned}
 &-5x_1 + 48x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} 4x_1 + 13x_2 &\geq 24 \\ 25x_1 + 10x_2 &\geq 43 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 26 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 4 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

456

$$\begin{aligned}
 &-5x_1 + 13x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} 8x_1 + x_2 &\geq 43 \\ 21x_1 - 4x_2 &\geq 28 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned} x_2 &\geq 7 \\ -2x_1 + 3x_2 &\geq 9 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

459

$$\begin{aligned}
 &-2x_1 + 19x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\geq 8 \\ 8x_1 - 13x_2 &\leq 28 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned} 7x_1 + 10x_2 &\geq 32 \\ 9x_1 + x_2 &\geq 11 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

462

$$\begin{aligned}
 &17x_1 - 4x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 24 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 48 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned} 12x_1 - 5x_2 &\geq 0 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 0 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

454

$$\begin{aligned}
 &6x_1 - x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 &\geq 24 \\ -2x_1 + 27x_2 &\geq 32 \\ 12x_1 + 3x_2 &\leq 83 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned} x_1 + 29x_2 &\leq 60 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

457

$$\begin{aligned}
 &5x_1 - x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 29 \\ 8x_1 + 11x_2 &\geq 22 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned} -15x_1 + 14x_2 &\leq 56 \\ 7x_1 - 4x_2 &\leq 27 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

460

$$\begin{aligned}
 &12x_1 + 14x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} 4x_2 &\leq 9 \\ 7x_1 + 7x_2 &\geq 8 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned} 6x_1 &\leq 17 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 33 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

463

$$\begin{aligned}
 &5x_1 - 6x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} -12x_1 + 23x_2 &\leq 32 \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 9 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned} 10x_1 + 7x_2 &\leq 89 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

464

$$\begin{aligned}
 & -2x_1 + 10x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} -11x_1 + 23x_2 &\geq 32 \\ 3x_1 + 5x_2 &\geq 16 \\ 9x_1 + 8x_2 &\leq 77 \\ -x_1 + x_2 &\leq 6 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

467

$$\begin{aligned}
 & -1x_1 + 8x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 2x_1 - 7x_2 &\leq 9 \\ 17x_1 - 4x_2 &\geq 25 \\ 5x_1 + 19x_2 &\geq 76 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 28 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

470

$$\begin{aligned}
 & -3x_1 + 14x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 &\geq 9 \\ x_2 &\leq 4 \\ -7x_1 + 18x_2 &\geq 12 \\ 22x_1 + 13x_2 &\leq 78 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

473

$$\begin{aligned}
 & 9x_1 - x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\geq 27 \\ -2x_1 + 7x_2 &\leq 51 \\ 5x_1 + 6x_2 &\geq 50 \\ 8x_1 - x_2 &\leq 65 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

465

$$\begin{aligned}
 & -5x_1 + 8x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 13x_1 - 4x_2 &\geq 0 \\ -3x_1 + 8x_2 &\geq 0 \\ 12x_1 + 7x_2 &\geq 84 \\ 6x_1 - 7x_2 &\leq 42 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

468

$$\begin{aligned}
 & 5x_1 + 8x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} -2x_1 + 10x_2 &\geq 9 \\ 19x_1 - 4x_2 &\geq 31 \\ 7x_1 + 19x_2 &\geq 75 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 28 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

471

$$\begin{aligned}
 & x_1 - x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} -13x_1 - 10x_2 &\leq 18 \\ 15x_1 - 17x_2 &\leq 34 \\ -11x_1 + 6x_2 &\leq 19 \\ 2x_1 + 9x_2 &\leq 59 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

474

$$\begin{aligned}
 & 9x_1 - 5x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 12x_1 + 7x_2 &\leq 84 \\ 4x_2 &\geq 13 \\ -10x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\ -9x_1 + 8x_2 &\geq 9 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

466

$$\begin{aligned}
 & -6x_1 + 5x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 &\leq 9 \\ x_1 + 8x_2 &\leq 54 \\ 11x_1 - 2x_2 &\geq 26 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 44 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

469

$$\begin{aligned}
 & 14x_1 - 7x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ -3x_1 + x_2 &\leq 0 \\ 12x_1 + 5x_2 &\leq 62 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 17 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

472

$$\begin{aligned}
 & x_1 + x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} -7x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 8x_1 + 17x_2 &\geq 39 \\ 5x_1 + 4x_2 &\geq 13 \\ 3x_1 - 8x_2 &\leq 7 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

475

$$\begin{aligned}
 & -4x_1 + 13x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 3x_1 - 8x_2 &\leq 0 \\ 7x_1 - 2x_2 &\geq 0 \\ 12x_1 + 5x_2 &\geq 73 \\ 4x_1 + 19x_2 &\geq 76 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

476

$$\begin{aligned}
 & -10x_1 + 8x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 5x_1 - x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 25 \\ x_1 - 6x_2 &\leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

479

$$\begin{aligned}
 & -4x_1 + 11x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &\geq 19 \\ 5x_1 - 9x_2 &\leq 7 \\ 2x_1 + 10x_2 &\leq 53 \\ -6x_1 + 13x_2 &\leq 42 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

482

$$\begin{aligned}
 & 5x_1 + 6x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} x_2 &\leq 12 \\ -3x_1 + 4x_2 &\geq 8 \\ 8x_1 + 3x_2 &\leq 95 \\ -37x_1 + 12x_2 &\leq 24 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

485

$$\begin{aligned}
 & -4x_1 + 5x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} 7x_1 - x_2 &\leq 30 \\ -8x_1 + 15x_2 &\leq 24 \\ 9x_1 + 5x_2 &\geq 28 \\ 11x_1 + 13x_2 &\leq 93 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

477

$$\begin{aligned}
 & -9x_1 + 13x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} -4x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 43 \\ 6x_1 - x_2 &\leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 4 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

480

$$\begin{aligned}
 & -6x_1 + 29x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &\geq 22 \\ -x_1 + 4x_2 &\geq 3 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 14 \\ -2x_1 + x_2 &\geq -9 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

483

$$\begin{aligned}
 & 12x_1 - 1x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 &\leq 10 \\ 8x_1 + 6x_2 &\geq 23 \\ 7x_1 + 9x_2 &\leq 63 \\ 13x_1 - 3x_2 &\geq 10 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

486

$$\begin{aligned}
 & 7x_1 + 6x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 &\geq 45 \\ x_1 + 9x_2 &\geq 63 \\ 23x_1 - 3x_2 &\geq 46 \\ -4x_1 + 14x_2 &\geq 27 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

478

$$\begin{aligned}
 & 11x_1 + 7x_2 \Rightarrow \max \\
 & \left. \begin{aligned} -5x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\ x_2 &\geq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ 8x_1 + 6x_2 &\leq 41 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

481

$$\begin{aligned}
 & 13x_1 + 14x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} x_1 &\geq 1 \\ 6x_1 + 10x_2 &\leq 59 \\ -x_1 + 4x_2 &\geq 2 \\ -8x_1 + 9x_2 &\leq 28 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

484

$$\begin{aligned}
 & 5x_1 + 6x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 &\geq 29 \\ 12x_1 + 21x_2 &\geq 85 \\ -x_1 + 10x_2 &\geq 13 \\ x_1 - x_2 &\leq 8 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

487

$$\begin{aligned}
 & 17x_1 - 1x_2 \Rightarrow \min \\
 & \left. \begin{aligned} 4x_1 - 1x_2 &\geq 0 \\ -1x_1 + 7x_2 &\geq 0 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 13 \\ -5x_1 - 6x_2 &\geq -39 \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



488

$$\begin{aligned}
 &7x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\leq 25 \\ 2x_1 + 6x_2 &\geq 17 \\ -3x_1 + 20x_2 &\geq 28 \\ -2x_1 + 5x_2 &\leq 20 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

491

$$\begin{aligned}
 &4x_1 + 10x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 32 \\ 7x_1 + 17x_2 &\geq 65 \\ 1x_1 + 6x_2 &\leq 28 \\ 8x_1 + 2x_2 &\geq 17 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

494

$$\begin{aligned}
 &-3x_1 + 17x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 &\leq 12 \\ 13x_1 + 5x_2 &\geq 52 \\ 4x_1 + 11x_2 &\geq 55 \\ -2x_1 + 4x_2 &\geq 6 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

497

$$\begin{aligned}
 &-7x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} 10x_1 + 7x_2 &\geq 67 \\ -2x_1 + 6x_2 &\geq 11 \\ -4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 1x_1 + 5x_2 &\geq 30 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

489

$$\begin{aligned}
 &-1x_1 + 1x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} 10x_1 + 14x_2 &\geq 93 \\ -9x_1 + 8x_2 &\leq 38 \\ 4x_1 + 11x_2 &\leq 81 \\ -5x_1 + 17x_2 &\geq 7 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

492

$$\begin{aligned}
 &-2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 &\geq 28 \\ 1x_1 &\leq 6 \\ -9x_1 + 8x_2 &\leq 48 \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 60 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

495

$$\begin{aligned}
 &-3x_1 + 7x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &\geq 20 \\ -3x_1 + 7x_2 &\leq 24 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 8x_1 + x_2 &\geq 13 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

498

$$\begin{aligned}
 &10x_1 + 14x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} x_1 &\geq 2 \\ 5x_1 + 7x_2 &\geq 40 \\ -8x_1 + 11x_2 &\leq 58 \\ -3x_1 + 13x_2 &\geq 37 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

490

$$\begin{aligned}
 &5x_1 - 4x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} 9x_1 - 2x_2 &\geq 10 \\ 8x_1 - 7x_2 &\leq 35 \\ 8x_1 + 11x_2 &\geq 60 \\ 7x_1 + 6x_2 &\leq 67 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

493

$$\begin{aligned}
 &-2x_1 + 8x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} 1x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ 9x_1 + 14x_2 &\geq 63 \\ 8x_1 + 4x_2 &\geq 32 \\ 5x_1 + x_2 &\geq 10 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

496

$$\begin{aligned}
 &8x_1 - x_2 \Rightarrow \min \\
 &\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 14x_1 + 29x_2 &\geq 80 \\ -5x_1 + 27x_2 &\geq 35 \\ -25x_1 + 18x_2 &\leq 45 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

499

$$\begin{aligned}
 &2x_1 - 1x_2 \Rightarrow \max \\
 &\left. \begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 44 \\ 14x_1 + 2x_2 &\geq 27 \\ 4x_1 + 9x_2 &\geq 41 \\ 7x_1 - 1x_2 &\leq 35 \end{aligned} \right\} \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$19x_1 - 18x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 9x_2 \leq 83 \\ 7x_1 - 5x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \geq 39 \\ 8x_1 - 2x_2 \leq 37 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

## РЕЗЮМЕ

Линейное программирование является наиболее разработанным разделом науки об исследовании операций. Содержание линейного программирования составляют теория и методы решения задач о нахождении экстремумов линейных функций на множествах, определяемых линейными ограничениями. ЛП успешно применяется в военной области, индустрии, сельском хозяйстве, транспортной отрасли, экономике, системе здравоохранения и даже в социальных науках. По оценкам специалистов, примерно 80-85% всех решенных на практике задач оптимизации относятся к задачам линейного программирования.

В главе дается описание графического метода решения, алгоритмов симплекс-метода, метода искусственного базиса, теория двойственности, экономическая интерпретация двойственных переменных. Анализ модели на чувствительность рассматривается на примере задачи о ресурсах. Для каждого из алгоритмов приведены примеры с подробным описанием всех этапов. Приведено большое число тщательно подобранных и решенных задач.

Симплексный метод является универсальным, т. к. позволяет решать практически любую задачу ЛП, записанную в каноническом виде. На алгоритмах ЛП (учитывая их компьютерную эффективность) базируются оптимизационные алгоритмы других более сложных типов моделей и задач, включая целочисленное, нелинейное и стохастическое программирование.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте основную задачу линейного программирования.
2. Дайте определение для следующих понятий: план, допустимый план, оптимальный план, решение задачи.
3. Покажите, что стандартная и каноническая задачи линейного программирования являются частным случаем основной задачи.
4. Всегда ли основную задачу линейного программирования можно привести к каноническому виду?
5. Дайте определения для следующих понятий: выпуклое множество, внутренняя и граничная точки, гиперплоскость, базис.
6. Чем отличается выпуклый многогранник от многогранного выпуклого множества?
7. В чем отличие понятий «линейная оболочка» и «выпуклая оболочка»?
8. Любой ли конус является выпуклым множеством?
9. Какая точка выпуклого множества называется угловой?
10. В чем заключается геометрическая интерпретация задачи линейного программирования?
11. Какой план называется опорным?
12. Как связаны базисные планы и угловые точки области определения задачи линейного программирования?
13. Какой план задачи линейного программирования называется вырожденным?
14. Как, с точки зрения геометрической интерпретации, можно представить процесс поиска оптимального плана в задаче линейного программирования?
15. Сформулируйте критерий оптимальности опорного плана, применяемый в симплекс-методе.
16. Сформулируйте основные этапы стандартной итерации симплекс-метода.
17. Для чего применяется преобразование Жордана–Гаусса?
18. Какой элемент симплекс-таблицы называется разрешающим?

19. При каких условиях делается вывод о неограниченности целевой функции в решаемой задаче? Какая геометрическая интерпретация соответствует данному случаю?

20. Можно ли заранее точно определить количество итераций, которое потребуется для решения задачи симплекс-методом? Можно ли найти верхнюю границу для данной величины?

21. Какая задача называется вырожденной? По каким признакам можно узнать, что текущий план является вырожденным?

22. Какие проблемы возникают при решении вырожденных задач?

23. Какую экономическую интерпретацию имеет ситуация вырожденности?

24. Дайте определение двойственной задачи.

25. Какими основными свойствами обладает пара двойственных задач?

26. В чем заключается экономическая интерпретация переменных двойственной задачи?

27. Сформулируйте условия для допустимых изменений целевой функции задачи, при которых ее оптимальный план остается неизменным.



## Глава 3

### ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

*Закрытая транспортная задача по критерию стоимости. Допустимые планы перевозок. Оптимальный план. Циклы в транспортной задаче. Цикл пересчета. Метод потенциалов. Разрешающая коммуникация. Величина корректировки плана. Борьба с вырожденностью. Признак альтернативности. Открытая транспортная задача.*

Студент должен

*знать:*

- постановку задачи в общем виде;
- экономический смысл математической модели задачи;
- условие сбалансированности задачи;
- основные методы построения первоначального опорного

плана;

- метод потенциалов для решения задачи;
- критерий оптимального плана;

*уметь:*

- строить математическую модель задачи;
- сводить задачи открытого типа к задаче закрытого типа;
- строить допустимые начальные планы разными методами;
- вычислять суммарные транспортные издержки;
- составлять систему потенциалов для данного плана;
- проверять план на оптимальность;
- строить цикл пересчета в транспортных таблицах;
- осуществлять корректировку плана в сторону улучшения;
- выписывать оптимальное решение задачи;
- выписывать все альтернативные оптимальные решения.

## § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Имеется  $m$  поставщиков определенного вида продукции, назовем их  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , запасы которых составляют  $a_1, a_2, \dots, a_m$  единиц соответственно. Эта продукция используется  $n$  потребителями  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Объемы потребностей заданы и равны  $b_1, b_2, \dots, b_n$  единиц соответственно. Стоимость перевозки единицы продукции от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю известна для всех  $i = \overline{1, m}$  и  $j = \overline{1, n}$  и равна  $c_{ij}$ .

Требуется составить такой план перевозок, который обеспечивал бы при минимальных общих транспортных издержках удовлетворение спроса всех потребителей за счет реализации всей продукции, имеющейся у поставщиков.

Пусть  $x_{ij}$  обозначает количество продукции, запланированной к перевозке от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю. Тогда математическая формулировка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.4)$$

*Определение 3.1.* Задача (3.1)–(3.4) называется транспортной задачей по критерию стоимости.

Рассмотрим сначала случай, когда суммарные запасы всех поставщиков равны суммарным потребностям всех потребителей, т. е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.5)$$

*Определение 3.2.* Задача (3.1)–(3.4) при условии (3.5) называется закрытой транспортной задачей по критерию стоимости.

Линейная функция (3.1), определяющая величину транспортных издержек, называется целевой функцией. Равенства (3.2) называются горизонтальной системой ограничений и гарантируют полный вывоз продукции из всех пунктов производства. Равенства (3.3) называются вертикальной системой ограничений и обеспечивают полное удовлетворение спроса всех пунктов потребления. Условия неотрицательности (3.4) означают, что перевозки от потребителей к поставщикам исключены. Условие (3.5) называется балансом между запасами и потребностями или балансовым уравнением.

*Определение 3.3.* Набор величин  $x_{ij}$ , удовлетворяющих условиям (3.2)–(3.4), называется планом транспортной задачи.

Переменные  $x_{ij}$  удобно нумеровать с помощью двух индексов (первый индекс указывает откуда, второй — куда, а число — сколько отправлено продукции), поэтому план транспортной задачи целесообразно записывать в виде матрицы:

$$X = (x_{ij})_{m \times n} = \left\| \begin{array}{ccccccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{array} \right\|.$$

*Определение 3.4.* План  $X^* = (x_{ij}^*)_{m \times n}$ , при котором целевая функция принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.

Совокупность величин  $c_{ij}$ , как и планы транспортной задачи, удобно записывать в виде матрицы:

$$C = (c_{ij})_{m \times n} = \left\| \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{array} \right\|,$$

которую принято называть матрицей транспортных издержек.

При выполнении условия (3.5) модель транспортной задачи называется закрытой. Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется открытой.

Если суммарные потребности потребителей превышают суммарные запасы поставщиков:  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ , то вводится фиктивный

поставщик с объемом поставок  $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ , стоимость

перевозки единицы продукции —  $c_{m+1,j} = 0$  ( $j = \overline{1, n}$ ). Если же

$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ , вводится фиктивный потребитель с объемом потреб-

ления  $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ , тариф на перевозку от каждого постав-

щика к фиктивному потребителю  $c_{i,n+1} = 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

Этим задача сводится к обычной транспортной задаче, из оптимального плана которой получается оптимальный план исходной задачи. В дальнейшем мы будем рассматривать закрытую модель транспортной задачи.

## § 2. СВОЙСТВА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

**Теорема 3.1.** (О допустимости и разрешимости). Любая транспортная задача закрытого типа допустима и разрешима, т. е. задача



имеет хотя бы одно решение, и целевая функция ограничена на заданном множестве решений.

Из теоремы следует, что необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи является условие баланса между запасами и потребностями.

**Теорема 3.2.** (О ранге матрицы системы ограничений транспортной задачи). Ранг матрицы системы ограничений-уравнений закрытой транспортной задачи равен  $m + n - 1$ .

Следовательно, опорный план транспортной задачи может иметь не более чем  $m + n - 1$  отличных от нуля неизвестных. Если в опорном плане число отличных от нуля переменных равно в точности  $m + n - 1$ , то план является невырожденным, а если меньше — то вырожденным.

Условия транспортной задачи записывают в виде таблицы.

Таблица 3.1

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$	
$A_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{12}$ $x_{12}$	...	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
$A_2$	$c_{21}$ $x_{21}$	$c_{22}$ $x_{22}$	...	$c_{2n}$ $x_{2n}$	$a_2$
...	...	...	...	...	...
$A_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	$c_{m2}$ $x_{m2}$	...	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
Потребности	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Каждая клетка этой таблицы ассоциируется с определенной коммуникацией  $(i, j)$ , а именно, клетка, расположенная в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце, соответствует коммуникации, соединяющей  $i$ -го

поставщика с  $j$ -м потребителем. В клетки  $(i, j)$  транспортной таблицы будем заносить объемы перевозок  $x_{ij}$ .

**Пример 3.1.** Тюменская строительная компания возводит пять жилых домов в разных районах. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся домов соответственно равны 76, 74, 65, 50, 42 тыс. штук. Согласно договору, кирпич поставляется с четырех заводов. Первый завод может поставлять ежедневно 97 тыс. штук, второй — 69, третий — 55, а четвертый — 86. На каждый объект кирпич может завозиться с любого завода. Известна стоимость перевозки одной тысячи штук кирпичей с каждого завода к каждому из строящихся объектов (ден. ед.):

$$C = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 & 1 & 3 \\ 25 & 15 & 21 & 4 & 18 \\ 19 & 30 & 27 & 8 & 26 \\ 17 & 10 & 29 & 6 & 24 \end{vmatrix}.$$

Составить план перевозки кирпича, удовлетворяющий потребности всех строящихся объектов при минимальных транспортных расходах.

Исходные данные задачи сведем в таблицу (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	5	2	7	1	3	<b>97</b>
$A_2$	25	15	21	4	18	<b>69</b>
$A_3$	19	30	27	8	26	<b>55</b>
$A_4$	17	10	29	6	24	<b>86</b>
Потребности	<b>76</b>	<b>74</b>	<b>65</b>	<b>50</b>	<b>42</b>	

### § 3. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ИСХОДНОГО ОПОРНОГО ПЛАНА

Процесс решения транспортных задач начинается с построения исходного опорного плана. Для его определения существуют несколько методов. Три из них: метод северо-западного угла, метод минимального элемента, метод Фогеля — рассматриваются ниже.

#### Метод северо-западного угла

Алгоритм построения плана складывается из нескольких шагов, на каждом из которых заполняется либо строка (случай 1), либо столбец (случай 2) матрицы, отвечающей искомому плану  $X = (x_{ij})_{m \times n}$ .

Определим левый верхний элемент матрицы  $X$ , положив  $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ .

Возможны два случая:

1)  $a_1 < b_1$ , т. е.  $x_{11} = a_1$ . Запасы исчерпаны — вычеркиваем 1-ю строку;

2)  $a_1 \geq b_1$ , т. е.  $x_{11} = b_1$ . Потребность удовлетворена — вычеркиваем 1-й столбец.

На этом заканчивается первый шаг метода. Допустим, что уже проделано  $t$  шагов; опишем следующий  $(t+1)$ -й шаг. Вычисляем левый верхний элемент матрицы  $X$  из числа еще не определенных.

Пусть этим элементом будет  $x_{\lambda\mu} (\lambda + \mu = t + 2)$ . Полагаем

$$x_{\lambda\mu} = \min(a_{\lambda}^{(t)}, b_{\mu}^{(t)}), \text{ где } a_{\lambda}^{(t)} = a_{\lambda} - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j}; \quad b_{\mu}^{(t)} = b_{\mu} - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}.$$

Если  $a_{\lambda}^{(t)} < b_{\mu}^{(t)}$  (случай 1-й), то вычеркиваем  $\lambda$ -ю строку матрицы. Если  $a_{\lambda}^{(t)} \geq b_{\mu}^{(t)}$  (случай 2), то вычеркиваем  $\mu$ -й столбец матрицы. При этом

$$a_i^{(t+1)} = \begin{cases} a_\lambda^{(t)} - x_{\lambda\mu}, & i = \lambda, \\ a_i^{(t)}, & i > \lambda, \end{cases} \quad b_j^{(t+1)} = \begin{cases} b_\mu^{(t)} - x_{\lambda\mu}, & j = \mu, \\ b_\mu^{(t)}, & j > \mu. \end{cases}$$

Если после  $(t+1)$ -го шага заполнены не все позиции матрицы, то переходим к следующему  $(t+2)$ -му шагу. Поскольку каждый шаг метода приводит к заполнению строки или столбца матрицы  $X$ , то общее число шагов равно  $m+n-1$ .

**Пример 3.2.** Построить опорный план задачи из примера 3.1 методом северо-западного угла.

**Решение.** Объем перевозки от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю и последовательность заполнения матрицы  $X$  будем записывать в соответствующие клетки табл. 3.3.

1.  $x_{11}^{(1)} = \min(97, 76) = 76$ . (Здесь и далее будем считать за единицу объема одну тысячу штук кирпича). Первый строящийся объект  $B_1$  исключается из рассмотрения, т. к. он получил причитающийся ему кирпич в полном объеме. Ресурсы первого кирпичного завода уменьшились на 76 тыс. штук:  $a_1^{(1)} = a_1 - x_{11}^{(1)} = 97 - 76 = 21$ .

2.  $x_{12}^{(2)} = \min(97 - 76, 74) = 21$ . Первый кирпичный завод  $A_1$  выполнил свои обязательства перед строительной компанией, исключаем его из рассмотрения. Спрос второго потребителя уменьшился на величину  $x_{12}^{(2)}$  и стал равным  $b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - x_{12}^{(2)} = 74 - 21 = 53$ .

3.  $x_{22}^{(3)} = \min(69, 74 - 21) = 53$ . Потребности второго потребителя удовлетворены, исключаем его. После третьего шага ресурсы завода  $A_2$  становятся равными  $a_2^{(3)} = a_2^{(2)} - x_{22}^{(3)} = 69 - 53 = 16$ .

4.  $x_{23}^{(4)} = \min(16, 65) = 16$ . Ресурсы  $A_2$  будут нулевыми, вычеркиваем вторую строку. Теперь спрос потребителя  $B_3$  будет равен  $b_3^{(4)} = b_3^{(3)} - x_{23}^{(4)} = 65 - 16 = 49$ .



5.  $x_{33}^{(5)} = \min(55, 49) = 49$ . Следует исключить потребителя  $B_3$ .

Объем не реализованного кирпича  $a_3^{(5)} = a_3^{(4)} - x_{33}^{(5)} = 55 - 49 = 6$ .

6.  $x_{34}^{(6)} = \min(6, 50) = 6$ . Поставщик  $A_3$  вывез весь объем кирпича, предназначенный для строительной компании, исключаем строку 3. Объект  $B_4$  должен получить еще 44 тыс. штук.

7.  $x_{44}^{(7)} = \min(86, 44) = 44$ . Объект  $B_4$  получил все, что заказывал, исключаем его из рассмотрения. После 7-го шага остаток груза в пункте  $A_4$  будет равен  $a_4^{(7)} = a_4^{(6)} - x_{44}^{(7)} = 86 - 44 = 42$ .

8.  $x_{45}^{(8)} = \min(42, 42) = 42$ . Запасы кирпичных заводов исчерпаны, потребности строящихся объектов удовлетворены. Опорный план построен (табл. 3.3).

Таблица 3.3

5 76 <sup>(1)</sup>	2 21 <sup>(2)</sup>	7	1	3	97
25	15 53 <sup>(3)</sup>	21 16 <sup>(4)</sup>	4	18	69
19	30	27 49 <sup>(5)</sup>	8 6 <sup>(6)</sup>	26	55
17	10	29	6 44 <sup>(7)</sup>	24 42 <sup>(8)</sup>	86
76	74	65	50	42	

Здесь и далее цифры, стоящие в скобках над объемами перевозок, обозначают номер шага, на котором они определяются при построении первоначального плана. Суммарные транспортные издержки на перевозку кирпича с заводов на строящиеся объекты составляют:

$$f = 76 \cdot 5 + 21 \cdot 2 + 53 \cdot 15 + 16 \cdot 21 + 49 \cdot 27 + 6 \cdot 8 + 44 \cdot 6 + 42 \cdot 24 = 4196.$$

## Метод минимального элемента

Шаг 1. Определяем минимальный элемент матрицы транспортных издержек  $C$ . Если им оказался  $c_{i_1 j_1}$ , то полагаем

$x_{i_1 j_1} = \min(a_{i_1}, b_{j_1})$ . Возможны два случая:

1)  $a_{i_1} \leq b_{j_1}$ ,  $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ . Временно исключаем из рассмотрения строку  $A_{i_1}$ .

2)  $a_{i_1} > b_{j_1}$ ,  $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$ . Временно исключаем из рассмотрения столбец  $B_{j_1}$ .

Шаг 2. Пусть  $C_1$  — матрица, полученная из  $C$  вычеркиванием либо  $i_1$ -й строки (случай 1), либо  $j_1$ -го столбца (случай 2).

Положим

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} a_i, & i \neq i_1, \\ a_i - x_{i_1 j_1}, & i = i_1, \end{cases} \quad b_j^{(1)} = \begin{cases} b_j, & j \neq j_1, \\ b_j - x_{i_1 j_1}, & j = j_1. \end{cases}$$

Очевидно, что общее число строк и столбцов матрицы  $C_1$  на единицу меньше числа строк и столбцов матрицы  $C$ . Второй шаг состоит в проведении уже описанных операций применительно к матрице  $C_1$  и величинам  $a_i^{(1)}$ ,  $b_j^{(1)}$ . В результате второго шага заполняется еще одна линия (строка или столбец) матрицы  $X$ . Процесс продолжается до тех пор, пока не будет удовлетворен спрос всех потребителей, т. е. до полного заполнения матрицы  $X = (x_{ij})_{m \times n}$ .

Метод минимального элемента всегда приводит к опорному плану закрытой транспортной задачи. Число шагов, необходимых для построения плана, равно  $m + n - 1$ , где  $m$  — число поставщиков,  $n$  — число потребителей.

**Пример 3.3.** Построить опорный план задачи из примера 3.1 методом минимального элемента.

**Решение.**

1.  $\min c_{ij} = c_{14} = 1$ ,  $x_{14}^{(1)} = \min(97, 50) = 50$ . Объем запасов и потребностей после первого шага уменьшается на  $x_{14}^{(1)}$ :  $a_1^{(1)} = 97 - 50 = 47$ ,  $b_4^{(1)} = 50 - 50 = 0$ . Потребности пункта  $B_4$  удовлетворены, исключим из рассмотрения четвертый столбец.

2.  $\min c_{ij} = c_{12} = 2$ ,  $x_{12}^{(2)} = \min(47, 74) = 47$ . Объем запасов и потребностей после второго шага:  $a_1^{(2)} = a_1^{(1)} - x_{12}^{(2)} = 47 - 47 = 0$ ,  $b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - x_{12}^{(2)} = 74 - 47 = 27$ . Запасы  $A_1$  исчерпаны, исключим первую строку.

3.  $\min c_{ij} = c_{42} = 10$ ,  $x_{42}^{(3)} = \min(86, 27) = 27$ . Корректируем объемы запасов четвертого поставщика и потребностей второго потребителя после третьего шага:  $a_4^{(3)} = a_4^{(2)} - x_{42}^{(3)} = 86 - 27 = 59$ ,  $b_2^{(3)} = b_2^{(2)} - x_{42}^{(3)} = 27 - 27 = 0$ . Потребности второго потребителя удовлетворены, исключим столбец  $B_2$ .

4.  $\min c_{ij} = c_{41} = 17$ ,  $x_{41}^{(4)} = \min(59, 76) = 59$ . Корректируем запасы и потребности:  $a_4^{(4)} = a_4^{(3)} - x_{41}^{(4)} = 59 - 59 = 0$ ,  $b_1^{(4)} = b_1^{(3)} - x_{41}^{(4)} = 76 - 59 = 17$ . Запасы  $A_4$  исчерпаны, вычеркнем четвертую строку.

5.  $\min c_{ij} = c_{25} = 18$ ,  $x_{25}^{(5)} = \min(69, 42) = 42$ . После 5 шага запасы поставщика  $A_2$  будут равны  $a_2^{(5)} = a_2^{(4)} - x_{25}^{(5)} = 69 - 42 = 27$ , потребности  $b_5^{(5)} = b_5^{(4)} - x_{25}^{(5)} = 42 - 42 = 0$ . Спрос пункта  $B_5$  удовлетворен, вычеркнем пятый столбец.

6.  $\min c_{ij} = c_{31} = 19$ ,  $x_{31}^{(6)} = \min(55, 17) = 17$ . После шестого шага остатки запасов поставщика  $A_3$  будут равны  $a_3^{(6)} = a_3^{(5)} - x_{31}^{(6)} = 55 - 17 = 38$ , потребности потребителя  $B_1$  становятся равными  $b_1^{(6)} = b_1^{(5)} - x_{31}^{(6)} = 17 - 17 = 0$ . Потребности потребителя  $B_1$  удовлетворены, исключим первый столбец.

7.  $\min c_{ij} = c_{23} = 21$ ,  $x_{23}^{(7)} = \min(27, 65) = 27$ . После седьмого шага уменьшаем запасы поставщика  $A_2$  и потребности потребителя  $B_3$  на величину  $x_{23}^{(7)}$ , получим  $a_2^{(7)} = a_2^{(6)} - x_{23}^{(7)} = 27 - 27 = 0$ ,  $b_3^{(7)} = b_3^{(6)} - x_{23}^{(7)} = 65 - 27 = 38$ . Запасы завода  $A_2$  исчерпаны, исключим его из рассмотрения.

8.  $\min c_{ij} = c_{33} = 27$ ,  $x_{33}^{(8)} = \min(38, 38) = 38$ . Потребности всех строительных объектов удовлетворены, а запасы кирпичных заводов исчерпаны. После восьмого шага мы получили исходный опорный план  $X_0$  (табл. 3.4).

Таблица 3.4

5	2 47 <sup>(2)</sup>	7	1 50 <sup>(1)</sup>	3	97
25	15	21 27 <sup>(7)</sup>	4	18 42 <sup>(5)</sup>	69
19 17 <sup>(6)</sup>	30	27 38 <sup>(8)</sup>	8	26	55
17 59 <sup>(4)</sup>	10 27 <sup>(3)</sup>	29	6	24	86
76	74	65	50	42	

Так же как и в предыдущем случае, номер шага помещен в скобках над объемами перевозок. Суммарные транспортные расходы, соответствующие данному плану перевозок, равны

$$f = 47 \cdot 2 + 50 \cdot 1 + 27 \cdot 21 + 42 \cdot 18 + 17 \cdot 19 + 38 \cdot 27 + \\ + 59 \cdot 17 + 27 \cdot 10 = 4089.$$

### Метод Фогеля

Здесь будут полезными некоторые дополнительные обозначения. Множество номеров строк транспортной таблицы обозначим



через  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i \in M$  — текущий номер строки,  $i_1, i_2$  — фиксированные номера строк ( $i_1 \neq i_2$ ), запись  $i \in M \setminus i_1$  означает, что из множества  $M$  исключается элемент  $i_1$ . Приведем аналогичные обозначения для столбцов:  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество номеров столбцов,  $j \in N$  — текущий номер столбца,  $j_1, j_2$  — фиксированные номера столбцов ( $j_1 \neq j_2$ ), запись  $j \in N \setminus j_1$  означает, что из множества  $N$  исключается элемент  $j_1$ .

Шаг 1. В каждой строке матрицы стоимостей находим два элемента: минимальный  $c_{ij_1} = \min_{j \in N} c_{ij}$ ,  $i \in M$  и следующий по величине  $c_{ij_2} = \min_{j \in N \setminus j_1} c_{ij}$ ,  $c_{ij_1} \leq c_{ij_2}$ . Вычисляется разность между ними  $p_i = c_{ij_2} - c_{ij_1}$ ,  $i \in M$ . Для столбцов также находим минимальный элемент  $c_{i_1j} = \min_{i \in M} c_{ij}$ ,  $j \in N$  и следующий по величине  $c_{i_2j} = \min_{i \in M \setminus i_1} c_{ij}$ ,  $c_{i_1j} \leq c_{i_2j}$ ; вычисляем разность  $q_j = c_{i_2j} - c_{i_1j}$ ,  $j \in N$ . Очевидно, что  $p_i \geq 0$ ,  $q_j \geq 0$  для всех  $i \in M$ ,  $j \in N$ .

Шаг 2. Из чисел  $p_i$  и  $q_j$  выбирается наибольшее. Если таковых несколько, выбор произволен. Возможны два случая: 1) максимальная разность находится в строке  $i = k$ , т. е.  $\max(p_i, q_j) = p_k$ ,  $k \in M$ ; 2) максимальная разность находится в столбце  $j = l$ , т. е.  $\max(p_i, q_j) = q_l$ ,  $l \in N$ . В первом случае в  $k$ -й строке находим минимальный тариф (пусть это будет  $c_{kr} = \min_j c_{kj}$ ), определяем объем перевозки  $x_{kr} = \min(a_k, b_r)$  и вычеркиваем строку  $k$ , если исчерпаны запасы поставщика  $A_k$ , или столбец  $r$ , если удовлетворены потребности потребителя  $B_r$ . Во втором случае минимальный тариф находим в  $l$ -м столбце (пусть это будет  $c_{sl} = \min_i c_{il}$ ), определяем объем перевозки

$x_{sl} = \min(a_s, b_l)$  и вычеркиваем строку или столбец, в зависимости от того, исчерпаны запасы или удовлетворены потребности. Если одновременно исчерпаны запасы и удовлетворены потребности, вычеркивается либо поставщик, либо потребитель, причем оставшемуся потребителю (поставщику) приписывается нулевой объем потребностей (запасов).

В обоих случаях для не вычеркнутых поставщиков и потребителей корректируется объем оставшихся запасов и неудовлетворенных потребностей. Дальнейшие рассуждения будут относиться к скорректированным запасам и потребностям.

Шаги 1 и 2 повторяются до тех пор, пока останется не вычеркнутым только один поставщик или только один потребитель. В данном случае в оставшейся строке или в оставшемся столбце базисные перевозки определяются однозначно (как положительные, так и нулевые).

Процесс заполнения матрицы перевозок продолжают до полного удовлетворения потребностей всех потребителей. Метод Фогеля всегда приводит к опорному плану закрытой транспортной задачи. Число этапов, необходимых для построения плана, равно  $m + n - 1$ . Заметим, что каждая последующая итерация связана с меньшим количеством операций по сравнению с предыдущей.

**Пример 3.4.** Построить исходный опорный план задачи из примера 3.1 методом Фогеля (два различных опорных плана этой задачи ранее были найдены методами: северо-западного угла и минимальной стоимости).

**Решение.** В табл. 3.5 показаны последовательность определения базисных переменных, наборы разностей  $p_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) в строках справа от таблицы, а  $q_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) в столбцах снизу под таблицей.

Этап 1. Шаг 1. Вычисляем  $p_i$  для строк и  $q_j$  для столбцов:

$$\begin{aligned} p_1 &= c_{12} - c_{14} = 1, & p_3 &= c_{31} - c_{34} = 11, & p_4 &= c_{42} - c_{44} = 4, \\ q_1 &= c_{41} - c_{11} = 12, & q_2 &= c_{42} - c_{12} = 8, & q_3 &= c_{23} - c_{13} = 14, \\ q_4 &= c_{24} - c_{14} = 3, & q_5 &= c_{25} - c_{15} = 15. \end{aligned}$$

Шаг 2. Выбираем  $\max(p_i, q_j) = q_5 = 15$ . Максимальная разность соответствует столбцу  $j = 5$ . Минимальным тарифом пятого столбца является  $c_{15} = 3$ , определим перевозку  $x_{15}^{(1)} = \min(a_1, b_5) = \min(97, 42) = 42$ . После первого этапа запасы поставщика  $A_1$  и потребности потребителя  $B_5$  будут равны:  $a_1^{(1)} = a_1 - x_{15}^{(1)} = 97 - 42 = 55$ ,  $b_5^{(1)} = b_5 - x_{15}^{(1)} = 42 - 42 = 0$ . Потребности потребителя  $B_5$  удовлетворены, исключаем пятый столбец из рассмотрения.

Этап 2. Шаг 1. Вычисляем  $p_i$  и  $q_j$  для невычеркнутых строк и столбцов:  $p_1 = c_{12} - c_{14} = 1$ ,  $p_2 = c_{22} - c_{24} = 11$ ,  $p_3 = c_{31} - c_{34} = 11$ ,  $p_4 = c_{42} - c_{44} = 4$ ,  $q_1 = c_{41} - c_{11} = 12$ ,  $q_2 = c_{42} - c_{12} = 8$ ,  $q_3 = c_{23} - c_{13} = 14$ ,  $q_4 = c_{24} - c_{14} = 3$ .

Шаг 2.  $\max(p_i, q_j) = q_3$ . В столбце  $j = 3$  находим минимальный тариф:  $\min c_{i3} = c_{13} = 7$ . Определим перевозку  $x_{13}^{(2)} = \min(a_1^{(1)}, b_3^{(1)}) = \min(55, 65) = 55$ . Корректируем запасы и потребности:  $a_1^{(2)} = a_1^{(1)} - x_{13}^{(2)} = 0$ ,  $b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - x_{13}^{(2)} = 10$ . Запасы первого поставщика исчерпаны, вычеркнем первую строку.

Этап 3. Шаг 1. Вычисляем  $p_i$  и  $q_j$  для невычеркнутых строк и столбцов:  $p_2 = c_{22} - c_{24} = 11$ ,  $p_3 = c_{31} - c_{34} = 11$ ,  $p_4 = c_{42} - c_{44} = 4$ ,  $q_1 = c_{31} - c_{41} = 2$ ,  $q_2 = c_{22} - c_{42} = 5$ ,  $q_3 = c_{33} - c_{23} = 6$ ,  $q_4 = c_{44} - c_{24} = 2$ .

Шаг 2. Из двух строк с максимальными разностями  $p_2 = 11$  и  $p_3 = 11$  предпочтем вторую строку, т. к.  $\min c_{2j} = c_{24} = 4 < \min c_{3j} = c_{34} = 8$ . Определим переменную  $x_{24}^{(3)} = \min(a_2^{(2)}, b_4^{(2)}) = \min(69, 50) = 50$ . После корректировки запасы поставщика  $A_2$

составят  $a_2^{(3)} = a_2^{(2)} - x_{24}^{(3)} = 69 - 50 = 19$ , а потребности потребителя  $B_4$  будут равны  $b_4^{(3)} = b_4^{(2)} - x_{24}^{(3)} = 50 - 50 = 0$ . Спрос потребителя  $B_4$  удовлетворен, исключим четвертый столбец.

Этап 4. Шаг 1. Вычислим  $p_i$  и  $q_j$  для невычеркнутых строк и столбцов:  $p_2 = c_{23} - c_{22} = 6$ ,  $p_3 = c_{33} - c_{31} = 8$ ,  $p_4 = c_{41} - c_{42} = 7$ ,  $q_1 = c_{31} - c_{41} = 2$ ,  $q_2 = c_{22} - c_{42} = 5$ ,  $q_3 = c_{33} - c_{23} = 6$ .

Шаг 2. Выделим линию с максимальной разностью — это  $i = 3$ . Минимальной стоимостью в третьей строке является  $c_{31} = 19$ , определим переменную  $x_{31}^{(4)} = \min(a_3^{(3)}, b_1^{(3)}) = \min(55, 76) = 55$ . Запасы  $A_3$  становятся равными  $a_3^{(4)} = a_3^{(3)} - x_{31}^{(4)} = 55 - 55 = 0$ , потребности  $B_1$  составят  $b_1^{(4)} = b_1^{(3)} - x_{31}^{(4)} = 76 - 55 = 21$ . Запасы поставщика  $A_3$  исчерпаны, исключим из рассмотрения третью строку.

Этап 5. Шаг 1. Вычислим  $p_i$  и  $q_j$  для невычеркнутых строк и столбцов:  $p_2 = c_{23} - c_{22} = 6$ ,  $p_4 = c_{41} - c_{42} = 7$ ,  $q_1 = c_{21} - c_{41} = 8$ ,  $q_2 = c_{22} - c_{42} = 5$ ,  $q_3 = c_{43} - c_{23} = 8$ .

Шаг 2. Из двух столбцов с максимальными разностями  $q_1 = 8$  и  $q_3 = 8$  выделим второй столбец, т. к.  $\min c_{i1} = c_{41} = 17 < \min c_{i3} = c_{23} = 21$ . Определим переменную  $x_{41}^{(5)} = \min(a_4^{(4)}, b_1^{(4)}) = \min(86, 21) = 21$ . После пятого этапа запасы  $A_4$  будут равны  $a_4^{(5)} = a_4^{(4)} - x_{41}^{(5)} = 86 - 21 = 65$ , потребности  $B_1$  составят  $b_1^{(5)} = b_1^{(4)} - x_{41}^{(5)} = 21 - 21 = 0$ . Потребности потребителя  $B_1$  удовлетворены, исключим из рассмотрения первый столбец.

Этап 6. Шаг 1. Вычислим  $p_i$  и  $q_j$  для невычеркнутых строк и столбцов:  $p_2 = c_{23} - c_{22} = 6$ ,  $p_4 = c_{43} - c_{42} = 19$ ,  $q_2 = c_{22} - c_{42} = 5$ ,  $q_3 = c_{43} - c_{23} = 8$ .



Шаг 2. Выделим линию с максимальной разностью — это  $i = 4$ . Минимальной стоимостью перевозки в четвертой строке является  $c_{42} = 10$ . Определим переменную  $x_{42}^{(6)} = \min(a_4^{(5)}, b_2^{(5)}) = \min(65, 74) = 65$ . Корректируем запасы и потребности:  $a_4^{(6)} = a_4^{(5)} - x_{42}^{(6)} = 0$ ,  $b_2^{(6)} = b_2^{(5)} - x_{42}^{(6)} = 74 - 65 = 9$ . Запасы четвертого поставщика исчерпаны, вычеркнем 4-ю строку.

Этап 7. Остается не вычеркнутой только вторая строка, в которой объем не вывезенной продукции составляет 19 условных единиц. Применим метод наименьшей стоимости к этой строке, получим  $x_{22}^{(7)} = \min(a_2^{(6)}, b_2^{(6)}) = \min(19, 9) = 9$ . Потребности потребителя  $B_2$  удовлетворены, исключим из рассмотрения второй столбец.

Этап 8. Для оставшейся коммуникации (2, 3) определим базисную переменную  $x_{23}^{(8)} = \min(a_2^{(7)}, b_3^{(7)}) = \min(10, 10) = 10$ . В результате получим начальный опорный план  $X_0$  (табл. 3.5).

Суммарные транспортные расходы, соответствующие данному плану перевозок, равны  $f_0 = 55 \cdot 7 + 42 \cdot 3 + 9 \cdot 15 + 10 \cdot 21 + 50 \cdot 4 + 55 \cdot 19 + 21 \cdot 17 + 65 \cdot 10 = 3108$ .

В данном случае применение метода Фогеля дает лучшее приближение к оптимальному решению, чем метод северо-западного угла или метод минимального элемента. Однако опыт решения транспортных задач показал, что так бывает далеко не всегда. Кроме того, не всегда лучшее приближение приводит к оптимальному решению за меньшее число итераций, т. к. скорость убывания функции в последнем случае может оказаться меньше, чем при худших приближениях. Какому методу отдать предпочтение, сказать трудно. Все зависит от комбинации чисел: запасов, потребностей и удельных стоимостей.

Таблица 3.5

	1	2	3	4	5	6	7
5	2	7	1	3			
			55 <sup>(2)</sup>		42 <sup>(1)</sup>	97	
25	15	21	4	18			
	9 <sup>(7)</sup>	10 <sup>(8)</sup>	50 <sup>(3)</sup>		69		
19	30	27	8	26			
	55 <sup>(4)</sup>				55		
17	10	29	6	24			
	21 <sup>(5)</sup>	65 <sup>(6)</sup>			86		
76	74	65	50	42			
Этап 1	12	8	14	3	15		
Этап 2	12	8	14	3	–		
Этап 3	2	5	6	2	–		
Этап 4	2	5	6	–	–		
Этап 5	8	5	8	–	–		
Этап 6	–	5	8	–	–		
Этап 7	–	0	0	–	–		

Приведем пример, в котором применение метода северо-западного угла значительно выгоднее, чем метод Фогеля и метод минимального элемента.

**Пример 3.5.** Для задачи, условие которой представлено в табл. 3.6, построить исходный опорный план тремя методами: северо-западного угла, Фогеля и минимального элемента. Сравнить значения целевых функций.

Таблица 3.6

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	20	8	40	52	47	97
$A_2$	15	7	9	10	12	83
$A_3$	27	11	39	25	21	54
$A_4$	32	13	28	33	27	67
Потребности	59	67	50	50	75	

**Решение.** Последовательность определения базисных перевозок в табл. 3.7–3.9 для наглядности будем указывать верхним индексом (в скобках).

1. Опорный план, построенный методом северо-западного угла, указан в табл. 3.7.

План  $X_0^{c.-з.у.}$

Таблица 3.7

20 59 <sup>(1)</sup>	8 38 <sup>(2)</sup>	40	52	47	97
15	7 29 <sup>(3)</sup>	9 50 <sup>(4)</sup>	10 4 <sup>(5)</sup>	12	83
27	11	39	25 46 <sup>(6)</sup>	21 8 <sup>(7)</sup>	54
32	13	28	33	27 67 <sup>(8)</sup>	67
59	67	50	50	75	

Значение функции при данном плане перевозок равно  $f(X_0^{c.-з.у.}) = 5304$ .

2. Опорный план, построенный методом Фогеля, представлен в табл. 3.8.

Суммарные транспортные расходы плана  $X_0^{\text{Фогель}}$  равны  $f(X_0^{\text{Фогель}}) = 5819$ .

3. Множество базисных перевозок опорного плана, построенного методом минимального элемента, представлено в табл. 3.9.

Суммарные транспортные расходы равны  $f(X_0^{\min \text{эл.}}) = 6818$ .

Сравнивая значения целевых функций для опорных планов, построенных разными методами, получим цепочку неравенств

$$f(X_0^{c.-з.у.}) = 5304 < f(X_0^{\text{Фогель}}) = 5819 < f(X_0^{\min \text{эл.}}) = 6818,$$

План  $X_0^{\text{Фогель}}$

Таблица 3.8

	1	2	3	4	5	6
20 59 <sup>(7)</sup>	8 0 <sup>(6)</sup>	40	52	47 38 <sup>(8)</sup>	97	12
15	7	9 50 <sup>(1)</sup>	10 33 <sup>(2)</sup>	12	83	2
27	11	39	25 17 <sup>(4)</sup>	21 37 <sup>(5)</sup>	54	10
32	13 67 <sup>(3)</sup>	28	33	27	67	14
59	67	50	50	75		
Этап 1	5	1	19	15	9	
Этап 2	5	1	–	15	9	
Этап 3	7	3	–	8	6	
Этап 4	7	3	–	27	26	
Этап 5	7	3	–	–	26	
Этап 6	0	0	–	–	0	

План  $X_0^{\min \text{ эл.}}$

Таблица 3.9

5	2 47 <sup>(2)</sup>	7	1 50 <sup>(1)</sup>	3	97
25	15	21 27 <sup>(7)</sup>	4	18 42 <sup>(5)</sup>	69
19 17 <sup>(6)</sup>	30	27 38 <sup>(8)</sup>	8	26	55
17 59 <sup>(4)</sup>	10 27 <sup>(3)</sup>	29	6	24	86
76	74	65	50	42	

откуда следует, что в данной задаче предпочтительнее использовать метод северо-западного угла. Для сравнения приведем оптимальный план (табл. 3.10).



$X^*$ 

Таблица 3.10

5 59	2 38	7	1	3	97
25	15	21 33	4 50	18	69
19	30	27	8	26 54	55
17	10 29	29 17	6	24 21	86
76	74	65	50	42	

Минимальные транспортные расходы равны  $f(X^*) = 4835$ .

Нетрудно подсчитать, что транспортные расходы плана, построенного методом северо-западного угла, отличаются от минимальных расходов  $f(X^*)$  на 10%. Метод Фогеля дает план с затратами  $f(X_0^{\text{Фогель}})$ , отличающимися от минимальных на 20%, а метод минимального элемента приводит к плану с суммарными затратами, отличающимися от минимальных на 41%.

#### § 4. Циклы в ТРАНСПОРТНОЙ ТАБЛИЦЕ

*Определение 3.5.* Циклом называется замкнутая ломаная, вершины которой находятся в клетках таблицы, а ребра идут по строкам и по столбцам. При этом удовлетворяются два условия:

- 1) Из каждой вершины цикла выходит ровно два ребра: одно по строке, другое по столбцу.
- 2) Цикл должен быть связным в том смысле, что из любой его вершины можно попасть в любую другую по ребрам ломаной.

Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами. Примеры циклов показаны на рис. 3.1. Вершины циклов пронумерованы.

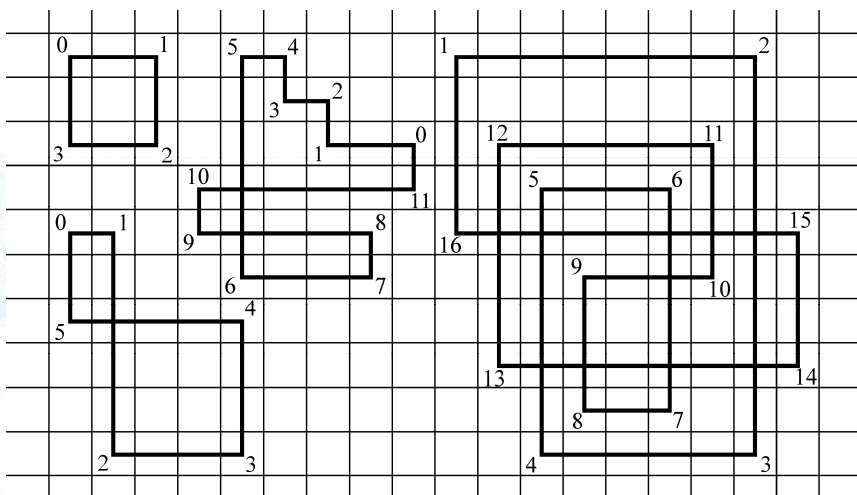


Рис. 3.1

**Теорема 3.3.** (О четности вершин в цикле). Число вершин в каждом цикле четно.

*Определение 3.6.* Цикл называется *означенным*, если его вершинам, начиная с любой, присвоены знаки «+», «-» поочередно. Поскольку число вершин в цикле четно, то можно говорить о положительном и отрицательном полуциклах.

*Определение 3.7.* Циклом *пересчета* называется означенный цикл, одна из положительных вершин которого находится в разрешающей клетке, а остальные вершины — в базисных.

*Разъяснение.* Вершины цикла пересчета могут и не занимать всех базисных клеток. Важно лишь, что все вершины цикла (кроме одной) лежат в базисных клетках.

В дальнейшем нам понадобится критерий оптимальности плана транспортной задачи.

**Теорема 3.4.** Для оптимальности плана  $X = (x_{ij})_{m \times n}$  закрытой транспортной задачи необходимо и достаточно существование чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  и  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  таких, что

$$\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij} \text{ для } i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \quad (3.6)$$

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0. \quad (3.7)$$

*Определение 3.8.* Числа  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  называются потенциалами соответственно пунктов отправления (поставщиков)  $A_i$  и пунктов потребления  $B_j$ .

## § 5. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Этот первый точный метод решения транспортной задачи был предложен в 1949 г. Л. В. Канторовичем совместно с М. К. Гавуриным. Метод потенциалов состоит из конечного числа однотипных итераций. Каждая итерация разбивается на два этапа. На первом этапе проверяется на оптимальность план, полученный в результате предыдущих итераций. Если план оказывается оптимальным, процесс заканчивается. Если же это не так, осуществляется переход ко второму этапу. На втором этапе строится новый план перевозок, который в невырожденном случае связан с меньшими транспортными издержками.

Рассмотрим отдельную итерацию метода, ограничившись вначале невырожденным случаем. Итак, допустим, что уже проведено  $k$  итераций метода потенциалов и в результате получен опорный план  $X_k = (x_{ij}^{(k)})_{m \times n}$ . Разберем подробно очередную  $(k+1)$ -ю итерацию.

Этап 1. Вычисляются потенциалы, и с их помощью производится проверка плана  $X_k$  на оптимальность. Потенциалы  $\alpha_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , и  $\beta_j^{(k)}$ ,  $j = \overline{1, n}$  определяются из системы уравнений.

$$\alpha_i^{(k)} + \beta_j^{(k)} = c_{ij} \quad (3.8)$$

для всех  $c_{ij}$ , соответствующих базисным неизвестным плана  $X_k$ .

В этой системе  $m+n$  неизвестных  $\alpha_i^{(k)}$  и  $\beta_j^{(k)}$  (столько, сколько

поставщиков и потребителей вместе взятых) и  $m + n - 1$  уравнений (столько, сколько базисных неизвестных).

Придадим неизвестной  $\alpha_1^{(k)}$  произвольное значение, например, положим  $\alpha_1^{(k)} = 0$ . Допустим, что поставщик  $A_1$  снабжает в соответствии с планом  $X_k$  пункты  $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_s}$ . Тогда каждой базисной неизвестной  $x_{1j_\lambda}^{(k)}$  отвечает в системе (3.8) определенное уравнение  $\alpha_1^{(k)} + \beta_{j_\lambda}^{(k)} = c_{1j_\lambda}$ ,  $\lambda = \overline{1, s}$ .

Из этих уравнений определим все  $\beta_{j_\lambda}^{(k)}$ ,  $\lambda = \overline{1, s}$ . Далее аналогичным способом определим  $\alpha_i^{(k)}$  для тех  $A_i$ , которые снабжают один из пунктов  $B_{j_\lambda}$ ,  $\lambda = \overline{1, s}$ . Например, если  $A_{i_\mu}$  снабжает пункт  $B_{j_1}$ , то

$$\alpha_{i_\mu}^{(k)} = c_{i_\mu j_1} - \beta_{j_1}^{(k)},$$

затем определяются  $\beta_j^{(k)}$  для  $B_j$ , снабжающихся за счет пунктов  $A_i$  с уже вычисленными значениями  $\alpha_i^{(k)}$  и т. д. Таким образом, задавшись произвольным значением  $\alpha_1^{(k)}$ , мы определим  $\alpha_i^{(k)}$ ,  $\beta_j^{(k)}$  для всех тех пунктов  $A_i, B_j$ , которые можно соединить с  $A_1$  маршрутами из базисных коммуникаций плана  $X_k$ . Можно показать, что подобным маршрутом могут быть соединены любые два пункта рассматриваемой задачи и притом единственным образом. Следовательно, при заданном  $\alpha_1^{(k)}$  величины  $\alpha_i^{(k)}, \beta_j^{(k)}$  определяются однозначно для всех пунктов транспортной задачи. Нетрудно усмотреть, что если бы мы задались произвольными значениями любой из величин  $\alpha_i^{(k)}$  или  $\beta_j^{(k)}$ , то получившиеся в результате числа  $\bar{\alpha}_i^{(k)}, \bar{\beta}_j^{(k)}$  отличались бы от  $\alpha_i^{(k)}, \beta_j^{(k)}$ , вычисленных



в предположении  $\alpha_1^{(k)} = 0$ , на некоторую постоянную. Отсюда следует, что величина  $\alpha_i^{(k)} + \beta_j^{(k)}$  определяется однозначно для любых  $i, j$ .

Далее для небазисных коммуникаций вычисляются оценки  $\gamma_{ij}^{(k)}$  плана  $X_k$ :

$$\gamma_{ij}^{(k)} = (\alpha_i^{(k)} + \beta_j^{(k)}) - c_{ij}. \quad (3.9)$$

Если все оценки неположительны,  $X_k$  — оптимальное решение. Если же среди величин  $\gamma_{ij}^{(k)}$  имеются положительные, необходимо перейти ко второму этапу.

Этап 2. Улучшение плана  $X_k$ . Определяем разрешающую коммуникацию  $(i_0, j_0)$  из условия  $\gamma_{i_0 j_0}^{(k)} = \max_{i, j} \{\gamma_{ij}^{(k)} > 0\}$ . Переходим к построению цикла пересчета, замыкающегося на элементе  $x_{i_0 j_0}^{(k)}$  (очевидно  $x_{i_0 j_0}^{(k)} = 0$ ). Базисные перевозки из цикла пересчета образуют цепочку вида:

$$x_{i_0 j_1}^{(k)}, x_{i_1 j_1}^{(k)}, \dots, x_{i_\lambda j_\lambda}^{(k)}, x_{i_\lambda j_{\lambda+1}}^{(k)}, \dots, x_{i_s j_s}^{(k)}, x_{i_s j_0}^{(k)}. \quad (3.10)$$

Построив цепочку, можно сформировать новый план  $X_{k+1}$ . Положим

$$\rho_k = \min_{0 \leq \lambda \leq s} \{x_{i_\lambda j_{\lambda+1}}^{(k)}\}. \quad (3.11)$$

Новый план  $X_{k+1}$  определяется согласно правилу: из нечетных элементов цепочки (3.10) вычитается  $\rho_k$ , к четным элементам цепочки и к элементу  $x_{i_0 j_0}^{(k)}$  величина  $\rho_k$  прибавляется, остальные элементы плана  $X_k$  сохраняют свои прежние значения.

$$x_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} \rho_k, & i = i_0, j = j_0, \\ x_{ij}^{(k)} - \rho_k, & i = i_\lambda, j = j_{\lambda+1}, \lambda = \overline{0, s} \quad (j_{s+1} = j_0), \\ x_{ij}^{(k)} + \rho_k, & i = i_\lambda, j = j_\lambda, \lambda = \overline{1, s} \\ x_{ij}^{(k)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Итак, в результате  $(k+1)$ -й итерации мы перешли от плана  $X_k$  к улучшенному плану  $X_{k+1}$ , реализация которого приводит к меньшим транспортным расходам по сравнению с планом  $X_k$ . Действительно

$$f_{k+1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(k+1)} = f_k - \rho_k \cdot \gamma_{i_0 j_0}^{(k)}. \quad (3.13)$$

Поскольку при невырожденной ситуации  $\rho_k > 0$ , то из соотношения (3.13) вытекает, что  $f_{k+1} < f_k$ .

**Пример 3.6.** Числовые данные транспортной задачи приведены в табл. 3.11. Требуется построить начальный план тремя методами: минимального элемента, северо-западного угла, методом Фогеля. Из каждого опорного плана найти оптимальный план методом потенциалов. Провести анализ каждого исходного плана относительно степени приближения к оптимальному плану, в процентах. Сравнить объем вычислительной работы.

Таблица 3.11

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	9	11	17	20	14	<b>48</b>
$A_2$	7	8	19	14	26	<b>37</b>
$A_3$	5	4	10	11	7	<b>84</b>
$A_4$	9	13	16	24	28	<b>51</b>
Потребности	<b>40</b>	<b>44</b>	<b>65</b>	<b>37</b>	<b>34</b>	

**Решение.** Суммарные запасы равны суммарным потребностям. Это означает, что задача закрытого типа. Найдем опорный план методом минимального элемента. Заполнение транспортной таблицы начнем с коммуникации, соответствующей наименьшей стоимости перевозки единицы продукции. В нашем случае  $\min c_{ij} = c_{32} = 4$ . Определяем объем перевозки  $x_{32}^{(1)} = 44$ . Потребности второго потребителя удовлетворены, вычеркивается столбец. Затем из невычеркнутых коммуникаций вновь находим минимальный тариф, определяем объем перевозки так же, как и в предыдущем случае. Продолжаем выполнять указанные процедуры до выполнения потребностей всех потребителей. Получим начальный план (табл. 3.12)

План  $X_0^{\min \text{эл.}}$

Таблица 3.12

9	11	17 14 <sup>(7)</sup>	20	14 34 <sup>(4)</sup>	48
7 0 <sup>(3)</sup>	8	19 0 <sup>(8)</sup>	14 37 <sup>(5)</sup>	26	37
5 40 <sup>(2)</sup>	4 44 <sup>(1)</sup>	10	11	7	84
9	13	16 51 <sup>(6)</sup>	24	28	51
40	44	65	37	34	

Суммарные издержки на перевозку продукции составляют величину, равную  $f_0 = 17 \cdot 14 + 14 \cdot 34 + 7 \cdot 0 + 19 \cdot 0 + 14 \cdot 37 + 5 \cdot 40 + 16 \cdot 51 + 4 \cdot 44 = 2424$ .

Для проверки плана на оптимальность составим систему уравнений, следуя условию — для базисных переменных сумма потенциалов равна тарифу. Значение одного из потенциалов зададим произвольно (пусть  $\alpha_1 = 0$ ), последовательность вычисления остальных потенциалов указана ниже: 1), 2), ..., 8).

$x_{13} \in B_0$	$\alpha_1 + \beta_3 = 17$	$\alpha_1 = 0$	1) $\beta_3 = 17 - 0 = 17$
$x_{15} \in B_0$	$\alpha_1 + \beta_5 = 14$		2) $\beta_5 = 14 - 0 = 14$
$x_{21} \in B_0$	$\alpha_2 + \beta_1 = 7$		5) $\beta_1 = 7 - 2 = 5$
$x_{23} \in B_0$	$\alpha_2 + \beta_3 = 19$	3) $\alpha_2 = 19 - 17 = 2$	
$x_{24} \in B_0$	$\alpha_2 + \beta_4 = 14$		6) $\beta_4 = 14 - 2 = 12$
$x_{31} \in B_0$	$\alpha_3 + \beta_1 = 5$	7) $\alpha_3 = 5 - 5 = 0$	
$x_{32} \in B_0$	$\alpha_3 + \beta_2 = 4$		8) $\beta_2 = 4 - 0 = 4$
$x_{43} \in B_0$	$\alpha_4 + \beta_3 = 16$	4) $\alpha_4 = 16 - 17 = -1$	

Потенциалы поставщиков  $\alpha_i$  поместим слева от таблицы, а потенциалы потребителей  $\beta_j$  — сверху над таблицей (табл. 3.13).

План  $X_0^{\min \text{эл.}}$

Таблица 3.13

	5	4	17	12	14	
0	9 -4	11 -7	17 14 <sup>+</sup>	20 -8	14 34 <sup>-</sup>	48
2	7 0 <sup>+</sup>	8 -2	19 0 <sup>-</sup>	14 37	26 -10	37
0	5 40 <sup>-</sup>	4 44	10 7	11 1	7 7 <sup>+</sup>	84
-1	9 -5	13 -10	16 51	24 -13	28 -15	51
	40	44	65	37	34	

Для небазисных переменных вычислим оценки по формуле (3.9).

$$\gamma_{11} = (\alpha_1 + \beta_1) - c_{11} = (0 + 5) - 9 = -4,$$

$$\gamma_{12} = (\alpha_1 + \beta_2) - c_{12} = (0 + 4) - 11 = -7,$$



$$\begin{aligned}
\gamma_{13} &= (\alpha_1 + \beta_3) - c_{13} = (0 + 12) - 20 = -8, \\
\gamma_{22} &= (\alpha_2 + \beta_2) - c_{22} = (2 + 4) - 8 = -2, \\
\gamma_{25} &= (\alpha_2 + \beta_5) - c_{25} = (2 + 14) - 26 = -10, \\
\gamma_{33} &= (\alpha_3 + \beta_3) - c_{33} = (0 + 17) - 10 = 7, \\
\gamma_{34} &= (\alpha_3 + \beta_4) - c_{34} = (0 + 12) - 11 = 1, \\
\gamma_{35} &= (\alpha_3 + \beta_5) - c_{35} = (0 + 14) - 7 = 7, \\
\gamma_{41} &= (\alpha_4 + \beta_1) - c_{41} = (-1 + 5) - 9 = -5, \\
\gamma_{42} &= (\alpha_4 + \beta_2) - c_{42} = (-1 + 4) - 13 = -10, \\
\gamma_{44} &= (\alpha_4 + \beta_4) - c_{44} = (-1 + 12) - 24 = -13, \\
\gamma_{45} &= (\alpha_4 + \beta_5) - c_{45} = (-1 + 14) - 28 = -15.
\end{aligned}$$

Описанные процедуры настолько просты, что нет необходимости в явном виде записывать уравнения. Все вычисления можно выполнять непосредственно в транспортной таблице, как показано в табл. 3.13. Один из потенциалов задается произвольно (например,  $\alpha_1 = 0$ ), остальные потенциалы вычисляются однозначно. Для этого каждый раз необходимо из тарифа базисной переменной вычитать известный потенциал. После того как все потенциалы определены, вычисляются оценки. Значения оценок поместим в левом нижнем углу незанятых клеток табл. 3.13. Фиксируем наибольшую положительную оценку. В данном случае таковых две:  $\gamma_{33} = 7, \gamma_{35} = 7$ . Разрешающей объявим коммуникацию (3,5), которой соответствует меньший тариф. Строим цикл пересчета, который показан в табл. 3.13 пунктирной линией.

Величина корректировки  $\rho_0 = \min(34, 0, 40) = 0$ . Вносим изменение в план: перевозки отрицательного полуцикла уменьшаем на  $\rho_0$ , а перевозки положительного полуцикла увеличиваем на эту же величину, остальные перевозки оставим без изменения. Перемен-

ная  $x_{23}$  исключается из базиса, а переменная  $x_{35}$  вводится в базис с нулевым значением. Получим план  $X_1$  (табл. 3.14).

План  $X_1$

Таблица 3.14

	12	11	17	19	14	
9	+	11	17	20	14	-
0			14		34	48
3		0		-1		
7		8	19	14	26	
-5	0			37		37
		-2	-7		-17	
5	-	4	10	11	7	+
-7	40	44			0	84
			0	1		
9		13	16	24	28	
-1			51			51
2		-3		-6	-15	
	40	44	65	37	34	

Значение функции  $f_1 = 2424$ . Заново вычисляем потенциалы и оценки (табл. 3.14). Имеются положительные оценки, план не оптимален. Находим наибольшую положительную оценку — это  $\gamma_{11} = 3$ . Строим цикл пересчета и определяем  $\rho_1 = \min(34, 40) = 34$ . Изменяя перевозки в вершинах цикла, получим план  $X_2$  (табл. 3.15).

Значение функции  $f_2 = 2322$ . Повторяем вычисление потенциалов и оценок, как показано в табл. 3.15. Новой базисной переменной будет  $x_{33}$ , переменную  $x_{31}$  исключаем из базиса. Получим опорный план  $X_3$  (табл. 3.16).

План  $X_2$ 

Таблица 3.15

	9	8	17	16	11	
0	9 34 +	11 -3	17 14 -	20 -4	14 -3	48
-2	7 0 -	8 -2	19 -4	14 37	26 -17	37
-4	5 6 -	4 44	10 3 +	11 1	7 34	84
-1	9 -1	13 -6	16 51	24 -9	28 -18	51
	40	44	65	37	34	

План  $X_3$ 

Таблица 3.16

	9	11	17	16	14	
0	9 40 +	11 0	17 8 -	20 -4	14 0	48
-2	7 0 -	8 1 +	19 -4	14 37	26 -14	37
-7	5 -3	4 44 -	10 6 +	11 -2	7 34	84
-1	9 -1	13 -3	16 51	24 -9	28 -15	51
	40	44	65	37	34	

Значение функции  $f_3 = 2304$ . Для плана  $X_3$  заново вычисляем потенциалы и оценки (табл. 3.16). Есть положительная оценка, план не оптимален. Включаем в базис  $x_{22}$ , исключаем из базиса  $x_{21}$ , получим план  $X_4$  (табл. 3.17).

План  $X_4$

Таблица 3.17

	9	11	17	17	14	
0	9 40	11 0	17 8	20 -3	14 0	48
-3	7 -1	8 0	19 -5	14 37	26 -15	37
-7	5 -3	4 44	10 6	11 -1	7 34	84
-1	9 -1	13 -3	16 51	24 -8	28 -15	51
	40	44	65	37	34	

Значение функции  $f_4 = 2304$ . Вычислив потенциалы и оценки, убеждаемся в том, что положительных оценок нет, план  $X_4$  оптимален. Однако имеются нулевые оценки ( $\gamma_{12} = 0, \gamma_{15} = 0$ ), это свидетельствует о том, что наряду с полученным оптимальным планом существуют альтернативные оптимальные планы. Приведем один из них, включив в базис  $x_{12}$  (табл. 3.18). Значение функции  $f_5 = 2304$ .



План  $X_5$

Таблица 3.18

	9	11	17	17	14	
0	9 40	11 8	17 0	20 -3	14 0	48
-3	7 -1	8 0	19 -5	14 37	26 -15	37
-7	5 -3	4 36	10 14	11 -1	7 34	84
-1	9 -1	13 -3	16 51	24 -8	28 -15	51
	40	44	65	37	34	

Рассмотрим  $X^* = (1-\lambda)X_1^* + \lambda X_2^*$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$  (табл. 3.19),

Таблица 3.19

	9	11	17	20	14	
	40	$8\lambda$	$8-8\lambda$	-3	0	48
	7	8	19	14	26	37
	-1	0	-5	37	-15	
	5	4	10	11	7	84
	-3	$44-8\lambda$	$6+8\lambda$	-1	34	
	9	13	16	24	28	51
	-1	-3	51	-8	-15	
	40	44	65	37	34	

где  $X_1^* = X_4$ ,  $X_2^* = X_5$  — альтернативные оптимальные планы, а их выпуклая линейная комбинация  $X^*$  является общим оптимальным планом. Кроме того, при  $\lambda = 0$  получим оптимальный план  $X_4$ , а при  $\lambda = 1$  — оптимальный план  $X_5$ .

Покажем, как получены элементы матрицы  $X^*$ :

$$x_{11}^* = (1 - \lambda)x_{11}^{(4)} + \lambda x_{11}^{(5)} = (1 - \lambda) \cdot 40 + \lambda \cdot 40 = 40,$$

$$x_{12}^* = (1 - \lambda)x_{12}^{(4)} + \lambda x_{12}^{(5)} = (1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot 8 = 8\lambda,$$

$$x_{13}^* = (1 - \lambda)x_{13}^{(4)} + \lambda x_{13}^{(5)} = (1 - \lambda) \cdot 8 + \lambda \cdot 0 = 8 - 8\lambda,$$

$$x_{22}^* = (1 - \lambda)x_{22}^{(4)} + \lambda x_{22}^{(5)} = (1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = 0,$$

$$x_{24}^* = (1 - \lambda)x_{24}^{(4)} + \lambda x_{24}^{(5)} = (1 - \lambda) \cdot 37 + \lambda \cdot 37 = 37,$$

$$x_{32}^* = (1 - \lambda)x_{32}^{(4)} + \lambda x_{32}^{(5)} = (1 - \lambda) \cdot 44 + \lambda \cdot 36 = 44 - 8\lambda,$$

$$x_{33}^* = (1 - \lambda)x_{33}^{(4)} + \lambda x_{33}^{(5)} = (1 - \lambda) \cdot 6 + \lambda \cdot 14 = 6 + 8\lambda,$$

$$x_{35}^* = (1 - \lambda)x_{35}^{(4)} + \lambda x_{35}^{(5)} = (1 - \lambda) \cdot 34 + \lambda \cdot 34 = 34,$$

$$x_{43}^* = (1 - \lambda)x_{43}^{(4)} + \lambda x_{43}^{(5)} = (1 - \lambda) \cdot 51 + \lambda \cdot 51 = 51.$$

Вычислим значение функции  $f(X^*) = 9 \cdot 40 + 11 \cdot 8\lambda + 17 \cdot (8 - 8\lambda) + 8 \cdot 0 + 14 \cdot 37 + 4 \cdot (44 - 8\lambda) + 10 \cdot (6 + 8\lambda) + 7 \cdot 34 + 16 \cdot 51 = 2304 + 88\lambda - 136\lambda - 32\lambda + 80\lambda = 2304$  при любом значении  $\lambda \in [0, 1]$ . Как видим, целевая функция принимает минимальное значение при произвольной выпуклой линейной комбинации альтернативных оптимальных планов.

Стоимость перевозок за четыре итерации снижена на 120 денежных единиц, или на 5% по сравнению с начальным планом.

Теперь для построения первоначального опорного плана применим метод северо-западного угла. Этот план записан в табл. 3.20. Порядок определения базисных перевозок указан индексом  $(k)$  над перевозками.

Таблица 3.20

9	11	17	20	14	
40 <sup>(1)</sup>	8 <sup>(2)</sup>				48
7	8	19	14	26	
	36 <sup>(3)</sup>	1 <sup>(4)</sup>			37
5	4	10	11	7	
		64 <sup>(5)</sup>	20 <sup>(6)</sup>		84
9	13	16	24	28	
			17 <sup>(7)</sup>	34 <sup>(8)</sup>	51
	40	44	65	37	34

Далее вычисление потенциалов, оценок и корректировку планов проведем непосредственно в таблицах 3.21–3.28 без комментариев.

План  $X_0$

Таблица 3.21

	9	11	22	23	27	
0	9	11	17	20	14	
	40	8				48
-3	7	8	19	14	26	
		36	1			37
-12	5	4	10	11	7	
			64	20		84
1	9	13	16	24	28	
				17	34	51
	40	44	65	37	34	

Значение функции  $f_0^{cзy} = 2975$ . Имеются положительные оценки, план неоптимален. Наибольшая положительная оценка  $\gamma_{15}^{(0)} = 13$ . Изменим перевозки в цикле на  $\rho_0 = \min(8, 1, 20, 34) = 1$ , получим новый план  $X_1$ .

План  $X_1$

Таблица 3.22

	9	11	9	10	14	
	9 -	11	17	20	14 +	
0	40	7			1	48
			-8	-10		
-3	7	8	19	14	26	37
	-1	37	-13	-7	-15	
1	5	4	10	11	7	84
	5	8	65	19	8	
14	9 +	13	16	24	28 -	51
				18	33	
	14	12	7			
	40	44	65	37	34	

Значение функции  $f_1 = 2962$ ,  $\rho_1 = \min(40, 33) = 33$ .

Переменная  $x_{45}$  исключается из базиса, а переменная  $x_{41}$  вводится в базис. Получим план  $X_2$  (табл. 3.23).

Значение функции  $f_2 = 2500$ . План не является оптимальным. Разрешающая коммуникация (2,4). Переменную  $x_{11}$  исключаем из базиса и переходим к плану  $X_3$  (табл. 3.24).



План  $X_2$ 

Таблица 3.23

	2	11	16	17	14	
0	9 7	- 11 7	17	20	14 34	48
-3	7	8 37	19	14 7	26 -15	37
-6	5 -9	4 -6	10 65	11 19	7 -6	84
7	9 33	13 -2	16 7	24 18	28 -14	51
	40	44	65	37	34	

План  $X_3$ 

Таблица 3.24

	2	11	16	17	14	
0	9 -7	11 14	17	20 -3	14 34	48
-3	7	8 30	19	14 7	26 -15	37
-6	5 -9	4 1	10 65	11 19	7 1	84
7	9 40	13 5	16 7	24 11	28 -7	51
	40	44	65	37	34	

Значение функции  $f_3 = 2451$ . Есть положительные оценки, план не оптимален. Включаем в базис  $x_{43}$ , исключаем из базиса  $x_{44}$ , получим план  $X_4$  (табл. 3.25).

План  $X_4$

Таблица 3.25

	9	11	16	17	14	
0	9	11 14	17	20	14 34	48
0			-1	-3		
-3	7	8 - 30	19	14 + 7	26	37
-1			-6		-15	
-6	5	4 + 54	10	11 - 30	7	84
-2						
0	9	13 40	16 11	24 -7	28 -14	51
		-2				
	40	44	65	37	34	

Значение функции  $f_4 = 2374$ . Есть положительные оценки, план не оптимален. Включаем в базис переменную  $x_{32}$ , исключаем из базиса  $x_{34}$ , получим план  $X_5$  (табл. 3.26).

Значение функции  $f_5 = 2344$ . Уменьшим перевозки отрицательного полуцикла и увеличим перевозки положительного полуцикла на  $\rho_5 = \min(14, 54, 40) = 14$ , получим план  $X_6$  (табл. 3.27).

План  $X_5$ 

Таблица 3.26

	10	11	17	17	14	
0	9 +	11 -	17	20	14	48
	1	14			34	
	7	8	19	14	26	
-3	0	0		37		37
	5	4 +	10 -	11	7	
-7		30	54			84
	-2			-1	0	
-1	9 -	13	16 +	24	28	51
	40		11			
		-3		-8	-15	
	40	44	65	37	34	

План  $X_6$ 

Таблица 3.27

	9	10	16	16	14	
0	9 +	11	17	20	14 -	48
	14				34	
		-1	-1	-4		
-2	7	8	19	14	26	37
	0		-5	37	-14	
-6	5	4	10 -	11	7 +	84
		44	40			
	-2			-1	1	
0	9 -	13	16 +	24	28	51
	26		25			
		-3		-8	-14	
	40	44	65	37	34	

Значение функции  $f_6 = 2330$ . Уменьшим перевозки отрицательного полуцикла и увеличим перевозки положительного полуцикла на  $\rho_6 = \min(34, 26, 40) = 26$ , получим план  $X_7$  (табл. 3.28).

План  $X_7$ 

Таблица 3.28

		9	11	17	17	14	
0	9	40	11	17	20	14	48
			0	0	-3	8	
-3	7		8	19	14	26	37
			0		37		
	-1			-5		-15	
-7	5		4	10	11	7	84
			44	14		26	
	-3				-1		
-1	9		13	16	24	28	51
				51			
	-1		-3		-8	-15	
		40	44	65	37	34	

Положительных оценок нет, план  $X_7$  является одним из альтернативных оптимальных планов, не указанных ранее  $\min f = f_7 = 2304$ . Обозначим  $X_7$  через  $X_3^*$ .

Выпуклая линейная комбинация планов  $X_1^*, X_2^*, X_3^*$  является общим оптимальным решением (табл. 3.29):

$$X_{\text{общее}}^* = \lambda_1 X_1^* + \lambda_2 X_2^* + \lambda_3 X_3^*, \quad \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

Покажем, что линейная функция  $f$  принимает минимальное значение в произвольной точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией оптимальных планов  $X_1^*, X_2^*, X_3^*$ . Для этого подставим  $X_{\text{общее}}^*$  в целевую функцию  $f$ . Получим  $f(X_{\text{общее}}^*) = 360 + 88\lambda_2 + 136\lambda_1 + 112\lambda_3 + 518 + 176\lambda_1 + 144\lambda_2 + 176\lambda_3 + 60\lambda_1 + 140\lambda_2 + 140\lambda_3 + 238\lambda_1 + 238\lambda_2 + 182\lambda_3 + 816 = 1694 + 610\lambda_1 + 610\lambda_2 + 610\lambda_3 = 2304$ .



Таблица 3.29

9 40	11 $8\lambda_2$	17 $8\lambda_1$ 0	20 -3	14 $8\lambda_3$ 0
7 -1	8 0	19 -5	14 37	26 -15
5 -3	4 $44\lambda_1 + 36\lambda_2 + 44\lambda_3$	10 $6\lambda_1 + 14\lambda_2 + 14\lambda_3$	11 -1	7 $34\lambda_1 + 34\lambda_2 + 26\lambda_3$
9 -1	13 -3	16 51	24 -8	28 -15

Действительно,  $f(X_{\text{общее}}^*) = \min f(X) = 2304$ .

Наконец, для построения первоначального опорного плана применим эвристический метод Фогеля. Этот план записан в табл. 3.30. Порядок определения базисных перевозок указан индексом ( $k$ ) сверху над перевозками.

Проверим план  $X_0$  на оптимальность (табл. 3.31)

План не является оптимальным, перейдем к плану  $X_1$  (табл. 3.32). Новой вводимой в базис переменной будет  $x_{11}$ . Исключаем из базиса переменную  $x_{13}$ .

Суммарная стоимость перевозок равна 2340. Имеется положительная оценка — это  $\gamma_{32} = 1$ . План не оптимален. Для улучшения плана введем в базис переменную  $x_{32}$ , а выведем из базиса  $x_{41}$ , получим план  $X_2$  (табл. 3.33).

План  $X_0$

Таблица 3.30

	1	2	3	4	5	6	7
9	11	17	20	14			
	44 <sup>(6)</sup>	4 <sup>(8)</sup>					
7	8	19	14	26			
	0 <sup>(5)</sup>		37 <sup>(3)</sup>				
5	4	10	11	7			
		50 <sup>(2)</sup>		34 <sup>(1)</sup>			
9	13	16	24	28			
	40 <sup>(4)</sup>	11 <sup>(7)</sup>					
	40	44	65	37	34		
1	2	4	6	3	7		
2	2	4	6	3	—		
3	2	3	1	6	—		
4	2	3	1	—	—		
5	—	3	1	—	—		
6	—	2	1	—	—		
7	—	—	1	—	—		

$$f_0 = 11 \cdot 44 + 17 \cdot 4 + 8 \cdot 0 + 14 \cdot 37 + 10 \cdot 50 + 7 \cdot 34 + 9 \cdot 40 + 16 \cdot 11 = 2344.$$

План  $X_0$

Таблица 3.31

	10	11	17	17	14	
0	9 +	11	17 -	20	14	48
		44	4	-3	0	
-3	7	8	19	14	26	37
	0	0	-5	37	-15	
-7	5	4	10	11	7	84
	-2	0	50		34	
-1	9 -	13	16 +	24	28	51
	40		11	-8	-15	
	40	44	65	37	34	

План  $X_1$ 

Таблица 3.32

	9	11	16	17	13	
0	9 4	+ 11 44	- 17	20 -1	14 -3	48 -1
-3	7 -1	8 0	19 -6	14 37	26 -16	37
-6	5 -2	4 1	+ 10 50	- 11 0	7 34	84
0	9 36	- 13	16 15	+ 24	28 -15	51
	40	44	65	37	34	

План  $X_2$ 

Таблица 3.33

	9	11	17	17	14	
0	9 40	11 8	17 0	20 -3	14 0	48
-3	7 -1	8 0	19 -5	14 37	26 -15	37
-7	5 -3	4 36	10 14	11 -1	7 34	84
-1	9 -1	13 -3	16 51	24 -8	28 -15	51
	40	44	65	37	34	

Положительных оценок нет, опорный план  $X_2$  оптимален,  $\min f = 2304$ . Метод минимального элемента привел к оптималь-

ному решению за 5 итераций, метод северо-западного угла — за 7, а метод Фогеля — за две.

## § 6. ОТКРЫТАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим два случая: 1) суммарные запасы меньше суммарных потребностей; 2) суммарные запасы больше суммарных потребностей (перепроизводство). В первом случае вводится фиктивный поставщик  $A_{m+1}$  с запасами  $a_{m+1}$ , равными недостающим суммарным потребностям. Тарифы на перевозку от фиктивного поставщика ко всем потребителям считаются равными нулю, т. е.  $c_{m+1,j} = 0$  ( $j = \overline{1,n}$ ). В случае перепроизводства вводится фиктивный потребитель  $B_{n+1}$  с потребностями  $b_{n+1}$ , равными излишкам суммарных запасов. Тарифы на перевозку от всех поставщиков к фиктивному потребителю считаются равными нулю, т. е.  $c_{i,n+1} = 0$  ( $i = \overline{1,m}$ ).

**Пример 3.7.** Для задачи, условие которой представлено в табл. 3.34, найти оптимальный план.

Таблица 3.34

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	14	9	3	10	<b>43</b>
$A_2$	8	7	2	5	<b>45</b>
$A_3$	13	11	4	6	<b>61</b>
Потребности	<b>54</b>	<b>25</b>	<b>17</b>	<b>23</b>	



**Решение.** Запасы составляют  $43+45+61=149$ , потребности равны  $54+25+17+23=119$  единиц. Баланс не выполняется, модель задачи открытая. Объем запасов больше объема потребностей, поэтому необходимо ввести дополнительный пункт потребления  $B_5$  с объемом потребностей  $b_5 = 149 - 119 = 30$ . Тарифы на перевозку по всем коммуникациям, заканчивающимся у фиктивного потребителя, равны нулю:  $c_{15} = c_{25} = c_{35} = 0$ . Получаем закрытую транспортную задачу, которую можно решить методом потенциалов.

Начальный опорный план закрытой транспортной задачи построим методом минимального элемента (табл. 3.35).

Таблица 3.35

14	9 20	3	10	0 23	43
8	7 5	2 17	5 23	0	45
13 54	11	4	6	0 7	61
54	25	17	23	30	

После третьей итерации получен оптимальный план (табл. 3.36).

Переменные  $x_{15} = 1, x_{35} = 29$  указывают на то, что одна единица продукции остается у поставщика  $A_1$  и 29 единиц продукции остаются у поставщика  $A_3$ . Транспортные расходы составляют  $\min f = 891$ .

Таблица 3.36

	13	9	3	6	0	
0	14	9	3	10	0	43
	-1	25	17	-4	1	
-5	8	7	2	5	0	45
	45	-3	-4	-4	-5	
0	13	11	4	6	0	61
	9	-2	-1	23	29	
	54	25	17	23	30	

### Задачи 501—600

Ниже приведены числовые данные транспортных задач. Стоимость перевозки единицы продукции записана в клетках таблицы. Запасы указаны справа от таблиц, а потребности — снизу. Требуется построить начальный план методами северо-западного угла, минимального элемента, методом Фогеля. Из каждого плана найти оптимальный план методом потенциалов.

#### 501

15	9	24	30	21	38
19	10	25	18	17	56
29	8	33	16	20	81
5	4	6	7	13	25
42	25	70	28	35	

#### 503

17	9	10	19	20	75
5	8	4	21	15	31
18	6	14	13	23	67
6	1	2	5	3	49
50	30	44	58	40	

#### 502

17	10	20	21	19	77
7	5	8	9	6	24
13	2	11	5	4	65
26	16	21	23	30	49
50	39	37	45	44	

#### 504

7	12	31	20	19	75
9	22	15	18	30	38
6	8	11	9	15	67
8	21	33	35	28	96
67	50	80	39	40	

**505**

38	25	17	40	49	78
22	30	11	38	26	92
9	13	8	16	10	67
21	35	14	38	50	71
39	51	67	81	70	

**507**

41	38	19	29	35	94
36	40	13	21	49	81
14	11	10	15	18	49
33	50	16	30	27	78
58	36	49	79	80	

**509**

41	39	26	8	35	55
25	24	30	10	29	98
39	40	41	13	22	79
9	7	10	8	12	87
65	39	71	88	56	

**511**

46	15	42	35	38	88
39	10	41	50	22	80
31	12	29	37	38	99
17	15	14	18	13	80
73	87	50	87	50	

**513**

7	19	23	31	25	71
6	5	8	3	9	32
10	23	31	41	26	85
12	49	30	20	22	56
50	35	62	57	40	

**506**

9	5	7	10	18	78
36	29	6	38	40	94
41	20	11	25	19	29
30	28	13	39	50	86
49	60	78	50	50	

**508**

30	24	29	10	26	73
31	38	40	11	29	84
9	8	10	7	13	29
19	26	31	12	28	66
48	59	60	29	56	

**510**

17	13	9	15	11	54
38	42	10	39	50	95
41	33	13	25	29	78
36	20	14	22	31	86
72	38	54	69	80	

**512**

33	8	41	40	30	78
35	17	29	20	21	94
14	10	36	25	28	62
11	9	7	8	13	90
80	76	68	52	48	

**514**

13	5	24	41	33	72
11	7	38	29	21	58
2	1	9	14	8	91
10	3	50	27	46	83
49	42	75	75	63	

## 515

24	10	33	35	38	85
9	7	13	18	10	92
19	8	40	33	27	67
25	15	26	50	29	89
47	45	90	60	91	

## 517

32	18	29	31	40	81
26	19	30	42	35	98
21	17	29	38	44	95
20	16	21	25	18	73
59	73	80	69	66	

## 519

38	40	26	50	31	78
22	19	15	30	18	95
34	26	20	29	38	47
45	41	19	25	33	84
38	59	95	43	69	

## 521

50	9	8	35	26	53
33	17	20	24	49	71
25	28	13	14	19	97
21	38	15	32	41	86
32	80	77	58	60	

## 523

29	9	38	41	26	47
36	14	44	33	50	74
13	8	10	15	11	62
38	16	28	24	35	85
50	62	61	48	47	

## 516

50	48	19	20	45	48
15	20	14	13	16	63
37	39	18	15	39	75
40	41	17	16	46	59
38	37	50	57	63	

## 518

49	10	36	29	30	71
50	9	33	31	29	42
12	8	15	17	14	58
41	13	36	38	22	99
33	58	77	52	50	

## 520

20	6	9	7	10	42
11	25	31	29	26	99
15	34	32	50	31	83
19	22	24	34	45	98
60	65	71	82	44	

## 522

48	50	41	12	28	76
38	26	30	10	33	48
11	12	13	9	14	50
50	40	30	13	49	84
48	38	52	22	98	

## 524

38	23	16	25	33	89
18	13	10	19	15	36
41	39	11	29	49	92
50	30	13	40	35	95
73	56	36	89	58	



525

14	10	7	10	13	76
30	50	17	33	41	53
48	42	20	26	42	84
21	29	19	29	24	84
61	90	50	26	70	

527

21	30	10	12	19	47
31	41	13	9	18	91
25	33	11	8	26	29
10	14	7	5	15	56
38	45	40	16	84	

529

25	10	18	40	38	68
13	5	14	8	9	35
15	6	7	18	19	41
29	8	11	32	34	93
74	76	30	28	29	

531

41	18	29	36	22	42
30	13	28	19	39	93
50	10	25	33	19	81
8	7	11	15	9	56
35	56	49	70	62	

533

38	25	41	16	29	78
18	11	13	14	17	85
29	31	24	15	27	36
40	25	19	10	21	59
61	53	49	34	61	

526

7	9	3	13	8	73
4	19	33	20	21	38
10	25	29	31	19	29
6	27	31	40	33	56
24	39	48	50	35	

528

9	3	1	8	7	38
5	4	12	13	6	21
10	14	3	2	17	90
20	22	3	4	30	72
25	34	57	55	50	

530

17	2	7	9	10	38
22	5	14	8	25	42
13	6	24	30	19	59
15	8	14	24	31	73
42	31	57	61	21	

532

7	11	8	9	5	54
21	19	38	22	10	85
31	25	29	30	18	93
36	20	23	38	13	27
49	37	58	61	54	

534

9	18	15	14	16	38
7	3	5	9	8	93
10	2	6	15	17	47
13	3	4	20	26	74
53	27	35	73	64	

535

7	9	8	1	2	29
13	15	12	5	22	58
18	19	21	10	8	95
29	14	23	11	13	72
42	35	28	74	75	

537

34	26	20	16	40	71
8	4	2	14	10	53
42	36	30	6	38	82
38	48	34	8	49	88
37	44	87	44	82	

539

9	13	14	19	26	53
8	33	41	35	22	89
10	25	38	45	20	62
5	7	14	13	8	47
47	29	93	40	42	

541

22	30	41	50	18	73
14	10	15	16	13	90
8	9	4	12	17	38
31	13	38	24	29	54
50	78	29	35	63	

543

43	26	8	34	30	47
50	31	9	27	44	88
11	8	5	6	10	40
25	42	7	29	38	84
58	83	40	40	38	

536

17	38	49	50	30	58
10	21	25	33	29	93
9	18	24	37	28	79
13	15	12	16	11	84
79	48	59	60	68	

538

9	5	8	1	7	79
13	19	17	4	25	23
21	14	27	10	18	78
31	20	19	3	13	25
27	36	41	79	22	

540

42	14	36	25	29	89
50	20	30	38	40	37
13	11	17	15	19	58
21	15	28	35	41	97
68	58	74	40	41	

542

25	19	30	8	14	72
10	5	9	4	7	54
28	42	31	19	22	90
18	15	13	11	16	36
75	50	37	62	28	

544

17	5	40	29	27	66
1	2	7	13	10	59
10	8	34	33	50	80
13	9	48	25	26	39
25	34	60	41	84	

545

40	1	33	22	50	84
3	5	6	9	7	89
24	7	34	38	36	67
35	10	40	17	25	84
33	56	73	73	89	

547

41	20	43	43	48	48
7	14	5	16	18	56
24	15	30	40	21	33
29	17	28	38	48	83
26	33	30	70	61	

549

42	36	11	40	35	49
38	31	9	37	34	58
29	30	6	38	40	65
7	10	5	8	12	79
65	49	30	60	47	

551

50	41	43	20	9	64
38	36	30	42	8	82
47	26	29	27	10	58
14	17	12	6	2	88
40	64	42	58	88	

553

37	10	24	38	25	93
4	2	7	9	5	84
40	13	31	20	28	55
27	14	44	48	25	69
55	84	59	38	65	

546

11	10	13	7	14	70
24	29	33	13	40	33
35	21	20	9	50	40
33	48	26	8	24	95
50	45	21	70	52	

548

6	10	33	38	29	73
2	1	4	5	3	85
9	4	19	30	50	90
11	8	48	42	31	46
40	45	83	60	66	

550

44	20	40	29	50	36
33	22	36	24	38	86
42	15	39	27	49	85
20	13	17	19	18	40
43	40	50	78	36	

552

5	6	4	9	7	70
17	31	8	38	34	84
21	29	10	40	50	93
41	26	13	33	38	85
63	48	70	60	91	

554

9	2	1	13	10	46
41	50	9	24	36	54
14	25	7	31	29	38
29	31	11	40	22	65
30	25	46	60	42	

**555**

17	46	38	36	40	48
13	40	29	33	27	56
14	15	18	10	16	93
15	41	39	38	24	84
48	60	20	93	60	

**557**

7	13	14	9	10	74
5	10	40	51	38	63
13	19	33	20	24	56
8	26	40	26	39	80
40	34	85	40	74	

**559**

42	48	14	41	33	90
21	24	9	41	38	28
19	20	6	14	13	35
50	25	15	27	33	80
45	45	35	28	80	

**561**

41	50	38	3	7	92
13	8	10	2	4	48
42	46	32	15	22	58
21	29	35	18	36	67
70	55	48	50	42	

**563**

14	8	2	18	20	78
3	7	1	9	5	39
22	4	3	19	24	25
23	6	10	28	29	91
39	64	39	52	39	

**556**

7	2	9	10	8	96
14	7	25	18	29	69
31	19	50	38	26	84
40	13	36	24	19	47
22	96	25	85	68	

**558**

33	7	41	30	18	79
2	1	5	10	9	98
29	8	41	38	32	96
35	6	24	26	29	39
50	48	90	80	44	

**560**

50	16	39	38	36	76
48	8	49	31	24	89
46	7	33	28	42	68
9	6	8	10	13	72
50	52	90	61	52	

**562**

40	9	50	19	30	76
18	4	20	14	26	68
38	11	41	42	33	82
19	20	26	31	20	99
80	68	40	52	85	

**564**

17	5	24	21	39	35
10	8	11	13	12	81
33	14	25	28	37	79
19	7	22	36	49	90
38	52	74	70	51	



**565**

24	18	9	33	21	58
17	13	8	11	14	94
29	37	10	25	33	39
19	27	14	36	41	83
72	45	61	33	63	

**567**

7	9	13	8	5	38
4	2	19	1	18	75
3	20	6	14	15	49
10	18	24	11	29	79
55	44	49	61	32	

**569**

9	11	17	20	14	47
7	8	19	21	26	38
5	4	10	11	7	85
9	13	16	24	28	51
41	43	65	38	34	

**571**

24	19	9	30	37	74
25	28	5	21	17	26
11	13	4	18	15	39
26	33	14	22	18	51
30	44	58	20	38	

**573**

42	41	13	9	33	73
4	7	1	2	5	80
33	36	10	8	43	56
29	25	15	6	50	79
75	56	50	30	77	

**566**

17	39	20	24	41	75
2	8	9	6	4	67
15	35	24	28	40	89
13	41	30	17	22	58
70	55	48	54	62	

**568**

7	8	19	27	30	84
10	13	39	20	25	92
5	4	41	22	40	41
6	7	12	16	14	55
49	47	76	50	50	

**570**

23	4	8	1	15	32
13	10	1	2	2	59
27	7	9	6	20	83
24	5	7	2	5	24
42	43	57	32	24	

**572**

2	1	21	36	15	47
9	11	40	26	19	91
4	3	41	14	18	38
6	5	4	9	3	85
40	45	64	59	53	

**574**

9	18	15	14	16	38
7	3	5	9	8	93
10	2	6	15	17	47
13	3	4	20	26	74
53	27	35	73	64	

575

24	18	9	7	21	58
17	13	8	11	14	94
13	37	10	4	33	39
19	27	14	5	31	83
39	77	61	33	64	

577

29	15	33	27	40	65
14	10	35	41	28	93
7	5	13	16	9	37
50	12	43	39	41	88
60	70	53	72	28	

579

41	12	36	35	46	73
40	16	30	29	31	58
15	8	9	19	14	45
43	13	38	39	50	99
44	45	55	59	72	

581

5	7	9	14	13	50
11	25	35	33	29	79
20	26	38	41	21	43
17	19	50	48	37	68
90	40	37	30	43	

583

50	31	13	31	35	95
44	30	17	26	29	81
14	10	9	16	18	93
34	36	15	27	43	76
50	31	93	97	74	

576

17	5	24	21	39	38
5	8	11	13	12	81
33	14	25	28	37	79
19	7	22	36	40	91
38	55	74	70	52	

578

50	8	41	40	34	55
46	5	38	43	50	92
48	7	44	39	45	84
11	4	12	6	9	76
60	55	80	80	32	

580

13	17	15	10	18	63
51	33	29	11	36	80
26	42	42	20	40	75
25	30	38	14	45	79
70	85	40	63	39	

582

13	50	44	25	42	64
9	46	27	29	38	98
2	4	5	8	3	55
10	41	25	30	49	81
60	47	72	59	60	

584

14	10	17	8	15	81
46	38	26	9	50	66
41	23	29	13	35	48
40	27	30	20	39	79
60	54	51	49	60	

**585**

13	7	8	9	6	53
24	36	38	40	14	84
50	25	35	21	15	63
20	37	44	49	10	47
50	60	40	44	53	

**587**

46	38	43	10	50	67
15	20	12	7	18	59
25	45	41	13	35	73
39	24	29	8	37	82
61	65	50	59	46	

**589**

50	41	46	10	30	90
20	31	38	13	28	73
4	2	10	8	1	81
38	26	39	5	35	55
48	65	56	60	70	

**591**

45	39	21	2	50	79
35	28	30	4	40	81
26	25	49	6	39	95
10	11	19	5	16	46
46	90	70	50	45	

**593**

49	38	25	31	10	81
38	37	26	33	8	74
12	6	8	13	5	59
50	49	27	29	9	77
70	70	48	50	53	

**586**

50	41	5	39	46	57
27	47	12	21	38	87
7	9	2	4	8	38
25	30	4	38	29	76
77	70	29	45	37	

**588**

27	33	7	43	48	95
29	38	10	34	44	81
14	8	1	9	16	59
33	25	5	32	21	90
70	70	65	60	60	

**590**

18	24	28	36	7	83
40	28	48	32	10	92
4	2	6	3	5	67
25	29	35	30	12	85
49	67	83	60	68	

**592**

3	7	9	10	13	46
5	50	40	21	26	59
2	33	38	26	35	75
7	48	43	41	26	85
75	49	63	50	28	

**594**

11	10	14	9	18	65
33	29	41	15	36	84
24	17	20	12	36	46
50	40	39	13	35	79
73	57	48	65	31	

**595**

36	28	30	15	37	80
48	30	46	13	50	62
19	20	19	10	14	32
43	35	47	9	45	70
54	46	36	32	76	

**597**

42	34	29	8	33	94
15	7	10	5	13	86
25	36	40	9	44	47
49	38	35	6	50	58
50	55	60	86	34	

**599**

6	8	5	7	3	51
39	22	28	37	12	99
33	30	29	35	10	51
41	40	20	47	7	74
83	34	50	57	51	

**596**

12	39	42	17	22	84
8	20	41	24	25	80
4	45	48	29	27	59
9	16	18	14	15	86
59	80	62	41	67	

**598**

47	16	46	36	37	64
40	17	49	30	50	83
18	13	15	20	19	47
25	14	29	24	33	59
80	47	43	59	24	

**600**

47	40	19	31	24	92
31	13	14	15	6	50
18	7	5	28	30	46
49	50	11	35	34	97
74	49	46	63	53	

## РЕЗЮМЕ

Классическая транспортная задача представляет собой частный случай общей задачи линейного программирования, имеющей специфическую структуру. Для нее разработаны эффективные вычислительные методы решения, основанные на теории двойственности.

Из всех экономико-математических методов транспортная задача получила наиболее широкое и успешное применение, в особенности в области планирования поставок материально-технического снабжения и перевозок. Помимо этого, транспортная модель используется для описания проблем, не связанных с транспортом.



ровкой, например, в задачах управления запасами и задачах производственного планирования.

В этой главе приведены формулировка транспортной задачи, свойства решений, методы построения начального плана. Подробно описан метод потенциалов. Рассмотрены примеры, на которых указаны приемы преодоления трудностей, возникающих при решении задач с особенностями, такими как вырожденность и альтернативность. Для вычисления потенциалов в случае вырожденности предлагается ввести нулевую базисную перевозку. В случае альтернативности рассматривается возможность получения общего оптимального решения как выпуклой линейной комбинации всех оптимальных планов. В конце главы приводится пример решения открытой транспортной задачи.

Опыт показывает, что принятие решений на основе оптимальных планов позволит уменьшить объем перевозочной работы на величину, сравнимую с годовым приростом грузооборота транспорта.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие специфические свойства позволяют выделить транспортные задачи в отдельный класс из множества задач линейного программирования?
2. Как доказать, что область допустимых решений транспортной задачи не пустая и ограниченная?
3. Сформулируйте необходимое и достаточное условие разрешимости транспортной задачи.
4. Опишите методы построения допустимого плана транспортной задачи («северо-западного угла», «минимального элемента», «двойного предпочтения», «эвристический метод Фогеля»).
5. Докажите, что исходное решение, построенное по вышеуказанным правилам, является опорным.

6. Сколько положительных элементов должен содержать невырожденный опорный план транспортной задачи?
7. Сформулируйте критерий оптимальности для допустимого плана закрытой транспортной задачи.
8. Что положено в основу метода потенциалов?
9. Из чего вытекает критерий оптимальности допустимого плана транспортной задачи?
10. Перечислите основные этапы метода потенциалов.
11. Каково экономическое толкование потенциалов?
12. Что такое цикл? Приведите примеры циклов.
13. Докажите, что число вершин в каждом цикле четно.
14. Какие условия должны быть соблюдены при построении цикла пересчета в методе потенциалов?
15. Как определяется величина корректировки плана?
16. Что следует делать при возникновении ситуации вырожденности текущего плана в транспортной задаче?

## Глава 4

### СЕТЕВАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

*Неориентированный связный граф. Вершины. Ребра как неупорядоченные пары  $[i_r, j_r]$ . Допустимые планы перевозок. Требования, предъявляемые к допустимому плану. Потенциалы. Оценки. Разрешающая стрелка. Цикл пересчета. Переход от одного плана к другому. Особенности транспортной задачи в сетевой постановке.*

Студент должен  
знать:

- постановку задачи в общем виде;
- условие сбалансированности задачи;
- условия допустимости плана;
- метод потенциалов для решения задачи;
- критерий оптимального плана;
- признак альтернативности оптимального плана;

уметь:

- строить математическую модель задачи;
- записывать двойственную задачу;
- строить первоначальный план;
- преодолевать проблему вырожденности;
- вычислять значение целевой функции;
- строить систему потенциалов для данного плана;
- вычислять оценки и проверять план на оптимальность;
- строить цепь и цикл пересчета;
- вычислять величину корректировки плана;
- переходить от одного допустимого плана к другому;
- вычислять величину «приращения» целевой функции;
- выписывать решение задачи.

## § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В больших задачах, связанных с планированием перевозок массовых грузов, например, строительных материалов, в масштабе Тюменской области или угля в масштабе всей России, как правило, имеются сотни пунктов производства и порядка тысячи пунктов потребления. Если планирование таких перевозок осуществлять на основе транспортной задачи в матричной постановке, то потребуются предварительно рассчитать затраты  $c_{ij}$ , связанные с перевозкой единицы груза из каждого пункта производства в каждый пункт потребления. А это означает, что соответствующая матрица затрат будет содержать сотни тысяч элементов. Подготовка столь обширной исходной информации, а также ее хранение и практическое использование в процессе счета связаны с большими, порой непреодолимыми, трудностями.

Между тем реальные перевозки массовых грузов осуществляются, как правило, по железнодорожным или автодорожным сетям. Число участков (дорог) в таких сетях обычно лишь немногим превосходит количество связываемых пунктов. Поэтому естественно попытаться поставить задачу таким образом, чтобы в ней использовалась лишь информация о затратах по перевозке единицы продукта по каждому участку сети. Тогда при тех же сотнях пунктов производства и порядка тысячи пунктов потребления исходная информация о затратах будет содержать лишь две-три тысячи величин.

Отметим еще, что в сетевой постановке ограничения по пропускным способностям отдельных участков сети учитываются с помощью стандартных приемов, таких, как алгоритмический учет двусторонних ограничений в задаче линейного программирования.

Предположим теперь, что имеющиеся пункты производства и потребления расположены на некоторой транспортной сети, состоящей из  $n$  коммуникаций, связывающих между собой  $m$  пунктов, для большинства из которых имеется возможность как ввозить, так и вывозить продукцию. То есть имеется транспортная сеть (нефтегазопроводы, железные или автомобильные дороги, теле-



фонная сеть, сеть Интернет и др.), по которой перевозится однородная продукция (нефть, газ, уголь, строительные материалы, оборудование, информация). Для наглядности транспортную сеть изобразим графически. Для этого отведем каждому пункту сети некоторую точку плоскости, которую будем называть вершиной, а участки сети (коммуникации) будем изображать линиями и называть ребрами. Естественно, что при графическом изображении транспортной сети реальный масштаб не соблюдается.

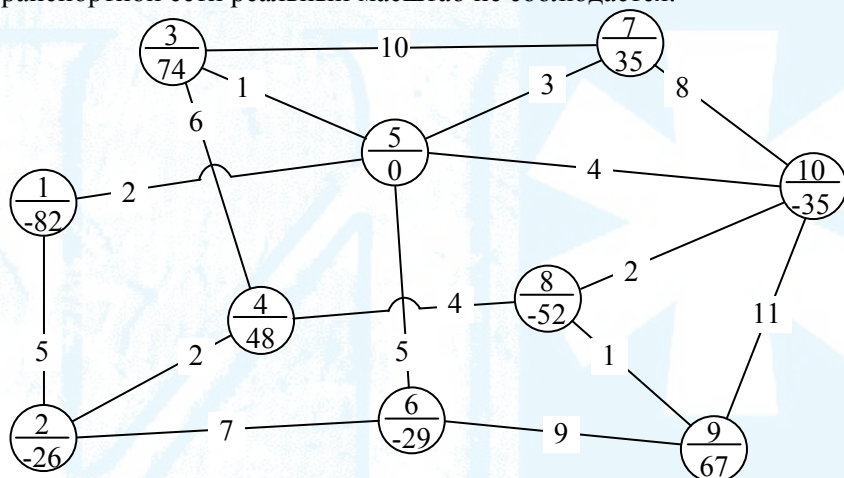
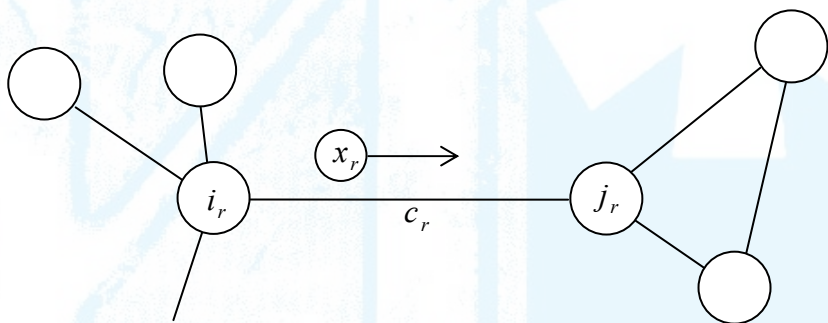


Рис. 4.1

На рис. 4.1 изображен неориентированный связный граф, где вершины изображены кружками, разделенными на две части. В верхней части находится номер  $i$ , в нижней — вещественное число  $b_i$ . Если  $b_i > 0$ , то это означает, что вершина  $i$  отвечает пункту производства с объемом производства  $b_i$  единиц. Если  $b_i < 0$ , то вершина  $i$  отвечает пункту потребления с объемом потребления  $|b_i|$  единиц. Наконец, в случае  $b_i = 0$ , в соответствующем пункте рассматриваемый продукт не производится и не потребляется. Такие пункты используются только при транзитных

перевозках. Нумерацию вершин будем вести слева направо, сверху вниз.

Каждому ребру  $r$  поставлено в соответствие положительное число  $c_r$ , которое может быть интерпретировано либо как расстояние, либо как стоимость перевозки единицы продукции из пункта  $i_r$  в пункт  $j_r$  по соответствующему участку сети  $(i_r, j_r)$ , если считать, что стоимость не зависит от направления перевозки. В нашем случае ребро отождествляется с неупорядоченной парой  $[i_r, j_r]$ , по которой номер ребра может быть однозначно определен. Поставки груза из вершины  $i_r$  в вершину  $j_r$  будем называть перевозками и на транспортной сети изображать стрелками, в кружке будем указывать количество перевозимого груза  $x_r$ , а стрелкой — направление движения. К примеру, так:



Предполагается, что суммарный объем производства совпадает с суммарным объемом потребления.

$$\sum_{i=1}^m b_i = 0. \quad (4.1)$$

Целью задачи является удовлетворение потребностей всех потребителей за счет продукции, имеющейся у поставщиков при минимальных транспортных расходах, т. е. задача состоит в отыскании  $n$ -мерного вектора

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_r \geq 0, \quad r = \overline{1, n}, \quad (4.2)$$

который определяет наименьшее значение целевой функции

$$f(x) = \sum_{r=1}^n c_r x_r. \quad (4.3)$$

В дальнейшем для сокращения записи неупорядоченной пары  $[i_r, j_r]$  будем использовать запись  $(i, j)$  или  $(j, i)$ . Это необходимо для компактной записи двойственной задачи и удобства изложения метода потенциалов.

Каждой вершине  $i = 1, 2, \dots, m$  сопоставим переменную  $\alpha_i$ . Из этих переменных составим вектор  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ . Тогда двойственная задача будет состоять в определении  $m$ -мерного вектора

$$Y = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad (4.4)$$

максимизирующего линейную функцию

$$\varphi(Y) = \left| \sum_{i=1}^m b_i \alpha_i \right|, \quad (4.5)$$

при ограничениях

$$|\alpha_i - \alpha_j| \leq c_{ij}. \quad (4.6)$$

Различия между транспортными задачами в матричной и сетевой постановках весьма незначительны и методы их решения основаны на одних и тех же идеях. Заметим, что если транспортная сеть является связной, то всегда можно построить допустимый план перевозок.

Сеть называется связной, если в ней нет изолированных вершин, т. е. все вершины связаны между собой ребрами, по которым можно из любой вершины попасть в любую другую.

## § 2. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Процесс решения транспортной задачи на сети методом потенциалов состоит из конечного числа итераций. Изложение метода проводится в предположении о невырожденности задачи, при условии, что опорный план построен.

### Построение исходного опорного плана

Никаких особых рекомендаций для построения пробного опорного плана не существует, поэтому можно начинать с любой вершины. Если начальная вершина соответствует пункту производства, то продукция из нее вывозится, и, следовательно, она является началом стрелки, которая должна входить в одну из смежных вершин. Если же начальная вершина является потребителем, то продукция в нее ввозится, поэтому она должна быть концом стрелки, выходящей из любой смежной вершины.

В результате получим начальный опорный план, который должен удовлетворять следующим требованиям:

1. Все запасы должны быть вывезены, а потребности удовлетворены.

2. Все вершины должны быть задействованы, т. е. в каждую вершину груз должен либо ввозиться, либо вывозиться из нее, либо ввозиться и вывозиться.

3. Число базисных ребер должно быть на единицу меньше числа вершин.

4. Базисные перевозки не должны образовывать циклов.

Требования 2–4 означают, что опорный план должен быть деревом, т. е. конечным связным графом, не содержащим циклов.

### Вычисление потенциалов

Для полученного опорного плана в каждой вершине вычисляются потенциалы. Один из потенциалов задается произвольно, остальные вычисляются по базисным ребрам. Пусть  $[i, j]$  — базисное



ребро, зададим вершине  $i$  потенциал, равный  $\alpha_i$ , затем идем по базисному ребру, вычисляем потенциал  $\alpha_j$ . Для этого к известному потенциалу прибавим тариф  $c_{ij}$ , если перевозка направлена от вершины  $i$  к вершине  $j$ , и вычтем тариф, если перевозка направлена от  $j$  к  $i$ . Получим формулы для вычисления потенциалов:

$$\alpha_j = \alpha_i + c_{ij} \quad (4.7)$$

$$\alpha_j = \alpha_i - c_{ij}. \quad (4.8)$$

### Проверка плана на оптимальность

Имея в виду найденные в п. 2 потенциалы, для всех небазисных ребер вычисляются оценки: из абсолютной величины разности потенциалов вычитается стоимость перевозки единицы продукции  $c_{ij}$  по заданному участку сети.

$$\gamma_{ij} = |\alpha_i - \alpha_j| - c_{ij} \quad (4.9)$$

или, что то же самое, из большего потенциала вычитается меньший, а из полученной разности вычитается тариф.

Если положительных оценок нет, рассматриваемое опорное решение оптимально, процесс окончен. Если имеются положительные оценки, то план не является оптимальным и его можно улучшить. Для улучшения плана перейдем к п. 4.

*Примечание к п. 3.* Оценки можно записывать около соответствующих ребер. В отличие от других показателей каждую оценку можно заключить в треугольник так, чтобы одна вершина касалась указанного ребра.

### Построение нового плана

Выбираем наибольшую положительную оценку. Пусть это будет  $\gamma_{i_0 i_1} = \max \{ \gamma_{ij} > 0 \}$  и  $\alpha_{i_0} < \alpha_{i_1}$ . Ребро  $(i_0, i_1)$  объявляем разре-

шающим. Для улучшения плана следует увеличить перевозку по ребру  $(i_0, i_1)$ . Будущая перевозка по разрешающему ребру должна быть направлена от меньшего потенциала к большему, т. е. от  $i_0$  к  $i_1$ . Будущую перевозку назовем разрешающей стрелкой и изобразим так  $(\overset{\circ}{\curvearrowright}) \dashrightarrow$ .

Начиная от вершины  $i_0$ , строим цикл пересчета, который является последовательностью базисных ребер, замыкающейся на разрешающем ребре. Такой цикл всегда можно построить, причем только один.

Для определения величины корректировки плана необходимо выписать ребра, принадлежащие циклу, с указанием объемов и направления перевозок.

$$C: \left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ (i_0, i_1) \\ +\rho \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ (i_1, i_2) \\ x_{i_1, i_2} \\ +\rho \end{array} \right| \cdots \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ (i_\lambda, i_{\lambda+1}) \\ x_{i_{\lambda+1}, i_\lambda} \\ -\rho \end{array} \right| \cdots \left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ (i_{s-1}, i_s) \\ x_{i_{s-1}, i_s} \\ +\rho \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ (i_s, i_0) \\ x_{i_s, i_0} \\ +\rho \end{array} \right| \quad (4.10)$$

Величина корректировки плана  $\rho$  равна минимальному значению перевозки из тех перевозок цикла, которые направлены против разрешающей стрелки.

$$\rho = \min_{1 \leq \lambda \leq s} \{x_{i_{\lambda+1}, i_\lambda}\}. \quad (4.11)$$

Вносим изменения в план: перевозки, направленные против разрешающей стрелки, уменьшаем на величину  $\rho$ ; перевозки, совпадающие по направлению с разрешающей стрелкой, и перевозку по коммуникации  $(i_0, i_1)$  увеличиваем на эту же величину; перевозки, не вошедшие в цикл пересчета, оставляем без изменения.

Ребро  $(i_0, i_1)$  включается в базис, в то же время ребро  $(i_{\lambda+1}, i_\lambda)$ , на котором достигается величина  $\rho$ , исключается из базиса. Общее количество базисных ребер сохраняется.

Получим новый опорный план. Значение функции при этом будет равно

$$f' = f - \gamma_{i_0, i_1} \times \rho. \quad (4.12)$$

В формуле (4.11) оценка  $\gamma_{i_0, i_1} > 0$ , величина корректировки  $\rho > 0$ , следовательно, значение функции уменьшится на величину

$$\Delta = \gamma_{i_0, i_1} \times \rho. \quad (4.13)$$

Вернуться к п. 2, имея в виду новое опорное решение.

**Пример 4.1.** Найти оптимальный план транспортной задачи на сети, определяемой рис. 4.1, в каждой вершине которой записан номер  $i$  и объем производства-потребления  $b_i$ , на каждом ребре указаны транспортные расходы.

Кроме того, введем вспомогательные обозначения: перевозки  $x_{ij}$  запишем около соответствующего ребра в кружок со стрелкой, указывающей направление  $\textcircled{x_{ij}} \rightarrow$ , потенциалы  $\alpha_i$  проставим у каждой вершины  $i$  и заключим в рамку  $\boxed{\alpha_i}$ ; оценки  $\gamma_{ij}$  выпишем отдельно около небазисных ребер и обведем треугольником  $\triangle \gamma_{ij}$ .

Последовательность вычисления и записи величин  $x_{ij}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\gamma_{ij}$  на схеме соответствует последовательности, указанной в алгоритме, т. е. сначала вычисляются  $x_{ij}$ , затем —  $\alpha_i$ , наконец —  $\gamma_{ij}$ .

Процесс решения задачи начинается с построения опорного плана.

На рис. 4.2 показан исходный опорный план. Опишем, как он был построен.

План  $X_0$ .

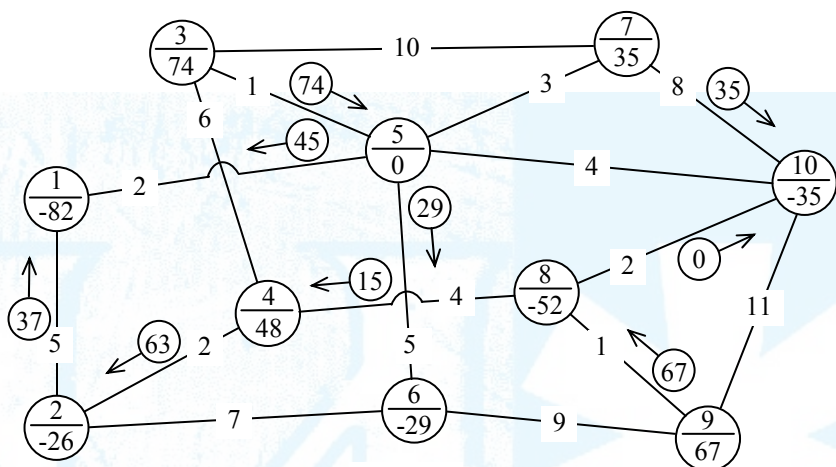


Рис. 4.2

Произвольно, в качестве точки отсчета был выбран пункт 3, который является поставщиком, с запасами в 74 единицы продукции. Из третьего в пятый пункт отправляем 74 единицы груза, затем из пятого возем 45 единиц в первый и 29 единиц — в шестой. Из девятого отправим 67 единиц в восьмой, потребности которого составляют 52 единицы; остатки в 15 единиц отправим в четвертый пункт. Теперь в четвертом пункте накопилось 63 единицы, которые можно перевезти во второй и далее 37 единиц — в первый пункт. Из седьмого пункта перевезем 35 единиц в десятый. Перевозки, определенные для различных участков сети, на рис. 4.2 помещены в кружок со стрелкой, которая показывает направление перемещения груза.

В результате проведенных операций все запасы вывезены, потребности всех потребителей удовлетворены, но с формальной точки зрения построение опорного плана еще не закончено, т. к. он не является деревом и состоит из двух связанных компонент. Число базисных ребер здесь равно 8, а их должно быть 9, т. к. число вершин — 10. Следовательно, на одном из ребер нужно включить фиктивную (нулевую) перевозку любого направления, но таким образом, чтобы



не образовался цикл. Такую перевозку целесообразно направить из 8-й вершины в 10-ю. Это обусловлено минимальной стоимостью из всех возможных вариантов фиктивных поставок.

Заметим также, что для транспортной задачи на сети не существует особых алгоритмов построения пробного опорного плана, которые в той или иной степени обеспечивали бы их приближение к оптимальному плану. Поэтому можно лишь дать практический совет, заключающийся в том, что при составлении опорного плана следует загрузить ребра с меньшими значениями удельных стоимостей, но выполнить это условие для начального плана достаточно трудно.

Итак, полученный план является опорным, т. к. удовлетворяет всем требованиям опорного плана. Значение функции, которое соответствует построенному плану, равно

$$f_0 = 5 \times 37 + 2 \times 63 + 2 \times 45 + 74 + 4 \times 15 + \\ + 5 \times 29 + 67 + 8 \times 35 = 1027.$$

Проверка плана на оптимальность осуществляется с помощью потенциалов. Процесс вычисления потенциалов и порядок их записи в транспортной сети мы покажем на рис. 4.3.

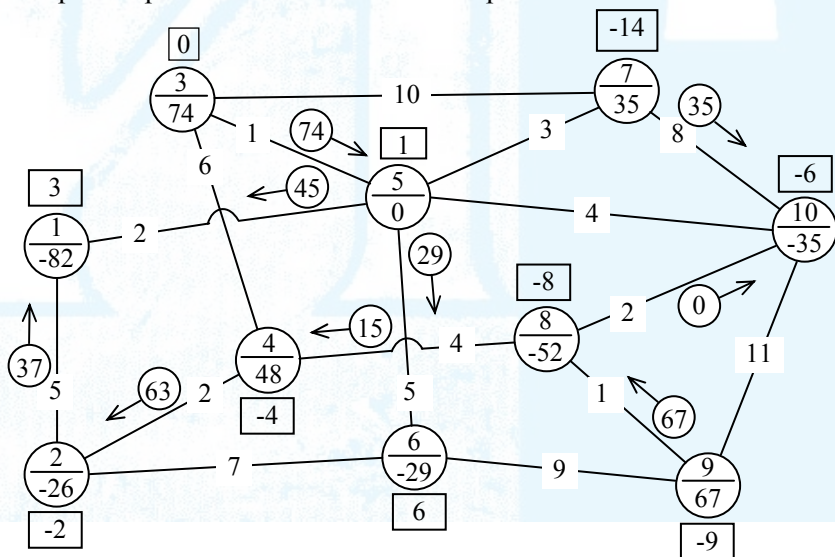


Рис. 4.3

Одной из вершин (например, 3) зададим произвольное значение потенциала  $\alpha_3 = 0$ . Запишем его около третьей вершины и обведем в рамку.

Затем, двигаясь по базисным ребрам, вычисляем потенциалы остальных вершин. Так, вершины 3 и 5 являются смежными, причем перевозка направлена от 3-й вершины к 5-й, следовательно  $\alpha_5 = \alpha_3 + c_{3,5} = 0 + 1 = 1$ . Коммуникации (5,1) и (5,6) также являются базисными, при этом груз отправлен из 5-й вершины в 1-ю и в 6-ю. Потенциал пятой вершины  $\alpha_5$  известен, поэтому потенциалы искомых вершин вычисляются прибавлением тарифов к известному потенциалу:  $\alpha_1 = \alpha_5 + c_{5,1} = 1 + 2 = 3$  и  $\alpha_6 = \alpha_5 + c_{5,6} = 1 + 5 = 6$ . Коммуникация (1,2) также является базисной, но здесь перевозка направлена от 2-й вершины в 1-ю, поэтому для определения искомого потенциала необходимо из известного потенциала вычесть тариф:  $\alpha_2 = \alpha_1 - c_{2,1} = 3 - 5 = -2$ .

Далее, двигаясь по базисному ребру из 2-й вершины в 4-ю против движения груза, определяем потенциал  $\alpha_4 = \alpha_2 - c_{4,2} = -2 - 2 = -4$ .

Аналогично находим остальные потенциалы:

$$\alpha_8 = \alpha_4 - c_{4,8} = -4 - 4 = -8, \quad \alpha_{10} = \alpha_8 + c_{8,10} = -8 + 2 = -6, \\ \alpha_7 = \alpha_{10} - c_{7,10} = -6 - 8 = -14, \quad \alpha_9 = \alpha_8 - c_{8,9} = -8 - 1 = -9.$$

После вычисления потенциалов находим оценки для небазисных ребер: (3,4), (3,7), (5,7), (5,10), (2,6), (6,9), (9,10). Они определяются по формуле (4.9) и равны соответственно:

$$\gamma_{3,4} = |\alpha_4 - \alpha_3| = |-4 - 0| = -6 = -2, \\ \gamma_{3,7} = |\alpha_3 - \alpha_7| = |0 + 14| = 14 = 4, \quad \gamma_{5,7} = |\alpha_5 - \alpha_7| = |1 + 14| = 15 = 12, \\ \gamma_{5,10} = |\alpha_5 - \alpha_{10}| = |1 + 6| = 7 = 3, \quad \gamma_{2,6} = |\alpha_2 - \alpha_6| = |-2 - 6| = -8 = 1, \\ \gamma_{6,9} = |\alpha_6 - \alpha_9| = |6 + 9| = 15 = 6, \quad \gamma_{9,10} = |\alpha_9 - \alpha_{10}| = |-9 + 6| = -3 = -8.$$

Как видим, имеются положительные оценки, следовательно, построенный опорный план не является оптимальным и его можно улучшить. Фиксируем наибольшую из положительных оценок — это  $\gamma_{5,7} = \max(\gamma_{3,7} = 4; \gamma_{5,7} = 12; \gamma_{5,10} = 3; \gamma_{2,6} = 1; \gamma_{6,9} = 6) = 12$ . Ребро (7,5) объявляем разрешающим, направляем разрешающую стрелку (пока пустую) от вершины с меньшим потенциалом к вершине с большим потенциалом, т. е. от 7-й вершины к 5-й (на рис. 4.4 разрешающая стрелка намечена пунктиром). Для улучшения плана строим цикл пересчета, замыкающийся на ребре (7,5). Цикл пересчета на рис. 4.4 также намечен пунктирной линией.

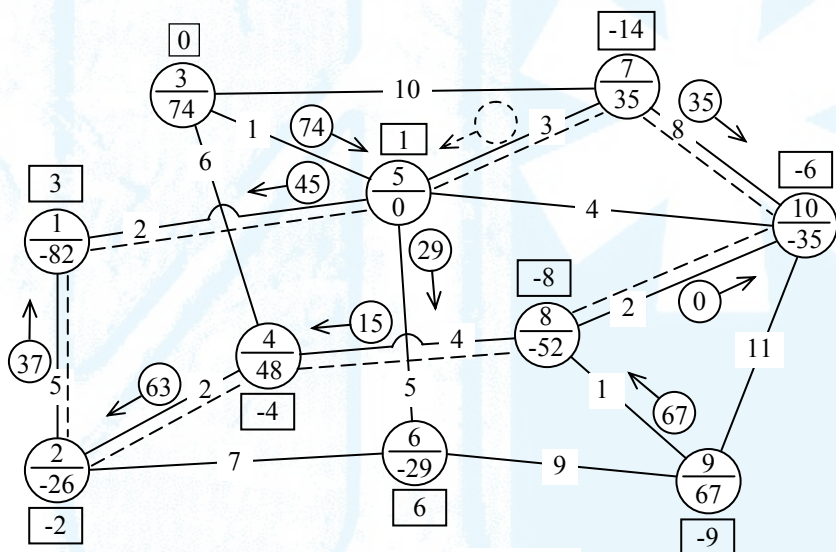


Рис. 4.4

Во второй строке выписываем ребра, принадлежащие циклу пересчета. В первой строке над ребрами с помощью стрелок укажем направление перевозок, а в третьей — объем перевозимого груза. В четвертой строке полученной конструкции запишем  $+\rho$ , если направление перевозки совпадает с разрешающей стрелкой, и  $-\rho$  — в противном случае.

$$C: \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \rightarrow & \rightarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ \hline (7,5) & (5,1) & (1,2) & (2,4) & (4,8) & (8,10) & (10,7) \\ \hline & 45 & 37 & 63 & 15 & 0 & 35 \\ \hline +\rho & +\rho & -\rho & -\rho & -\rho & +\rho & -\rho \end{array}.$$

Дальнейший ход решения задачи предусматривает изменение в распределении поставок. Определяем величину корректировки плана на  $\rho$ . Поскольку перевозки  $x_{2,1}, x_{4,2}, x_{8,4}, x_{7,10}$  направлены против разрешающей стрелки, величина  $\rho$  полагается равной меньшей из них  $\rho = \min(37, 63, 15, 35) = 15$ .

Вносим изменение в план  $X_0$ : перевозки из цикла, направленные против разрешающей стрелки, уменьшим на  $\rho$ ; перевозки из цикла, совпадающие по направлению с разрешающей стрелкой, и перевозку по коммуникации  $(7,5)$  увеличим на эту же величину; перевозки, не вошедшие в цикл пересчета, остаются без изменения. Получим новые значения перевозок:  $x_{7,5} = 15$ ,  $x_{5,1} = 60$ ,  $x_{2,1} = 22$ ,  $x_{4,2} = 48$ ,  $x_{8,10} = 15$ ,  $x_{7,10} = 20$ . Улучшенный план  $X_1$  представлен на рис. 4.5.

Значение функции  $f_1 = 847$ .

Для того чтобы проследить за изменением целевой функции, найдем величину «приращения» (в данном случае величину убывания).

$$\Delta = \rho \times \gamma_{7,5} = 15 \times 12 = 180.$$

При переходе к новому опорному плану  $X_1$  значение функции уменьшится на величину  $\Delta$  и будет равным  $f_1 = f_0 - \Delta = 1027 - 180 = 847$ . Как видим, результаты совпадают.

Проведем вторую итерацию. План  $X_1$  вновь подвергаем проверке на оптимальность. Опуская выкладки, аналогичные тем, которые приводились в первой итерации, вычисляем потенциалы и



оценки. Результаты вычислений записываем непосредственно на схеме, изображенной на рис. 4.5.

План  $X_1$ .

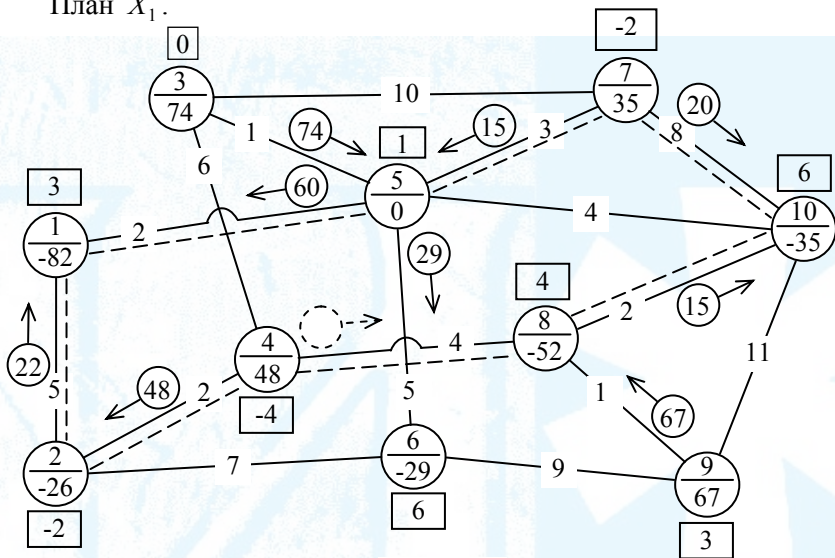


Рис. 4.5

Пусть  $\alpha_3 = 0$ , тогда

$$\alpha_5 = 0 + 1 = 1; \alpha_1 = 1 + 2 = 3; \alpha_6 = 1 + 5 = 6;$$

$$\alpha_2 = 3 - 5 = -2; \alpha_4 = -2 - 2 = -4; \alpha_7 = 1 - 3 = -2; \alpha_{10} = -2 + 8 = 6;$$

$$\alpha_8 = 6 - 2 = 4; \alpha_9 = 4 - 1 = 3.$$

Для небазисных ребер (3,4), (3,7), (4,8), (5,10), (2,6), (6,9), (9,10) вычислим оценки:  $\gamma_{3,4} = |-4 - 0| - 6 = -2$ ,  $\gamma_{3,7} = |0 + 2| - 10 = -8$ ,

$$\gamma_{4,8} = |-4 - 4| - 4 = 4, \gamma_{2,6} = |-2 - 6| - 7 = 1, \gamma_{5,10} = |1 - 6| - 4 = 1,$$

$$\gamma_{6,9} = |6 - 3| - 9 = -6, \gamma_{9,10} = |3 - 6| - 11 = -8.$$

Среди оценок имеются положительные, план  $X_1$  не является оптимальным. Причем наибольшая положительная оценка соответствует коммуникации (4,8), только что вышедшей из базиса. Это свидетельствует о том, что мы не только не то количество груза везли, но еще и не в ту сторону. Улучшение плана будем проводить за счет увеличения перевозки  $x_{4,8}$ . Построим цикл пересчета, замыкающийся на коммуникации (4,8)

$$C: \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \rightarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \rightarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ (4,8) & (8,10) & (10,7) & (7,5) & (5,1) & (1,2) & (2,4) \\ \hline & 15 & 20 & 15 & 60 & 22 & 48 \\ \hline +\rho & +\rho & -\rho & +\rho & +\rho & -\rho & -\rho \end{array}.$$

Величина корректировки плана определяется минимальной перевозкой из тех перевозок цикла пересчета, которые направлены против разрешающей стрелки  $\rho = \min(20, 22, 48) = 20$ . Корректируем план  $X_1$ : перевозку  $x_{4,8}$  включим в базис, а перевозку  $x_{7,10}$  исключим из базиса. Получим новые значения перевозок из цикла:  $x_{7,5} = 35$ ,  $x_{5,1} = 80$ ,  $x_{2,1} = 2$ ,  $x_{4,2} = 28$ ,  $x_{4,8} = 20$ ,  $x_{8,10} = 35$ . Перевозки, не вошедшие в цикл пересчета, остаются без изменения. Новый более экономный план  $X_2$  представлен на рис. 4.6.

Значение функции  $f_2 = 767$ .

Для плана  $X_2$  потенциалы рассчитываем непосредственно на схеме и записываем их около своих вершин (рис. 4.6).

Для небазисных ребер находим оценки:  $\gamma_{3,4} = -2$ ,  $\gamma_{3,7} = -8$ ,  $\gamma_{7,10} = -4$ ,  $\gamma_{5,10} = -3$ ,  $\gamma_{2,6} = 1$ ,  $\gamma_{6,9} = -2$ ,  $\gamma_{9,10} = -8$ .

План  $X_2$ .

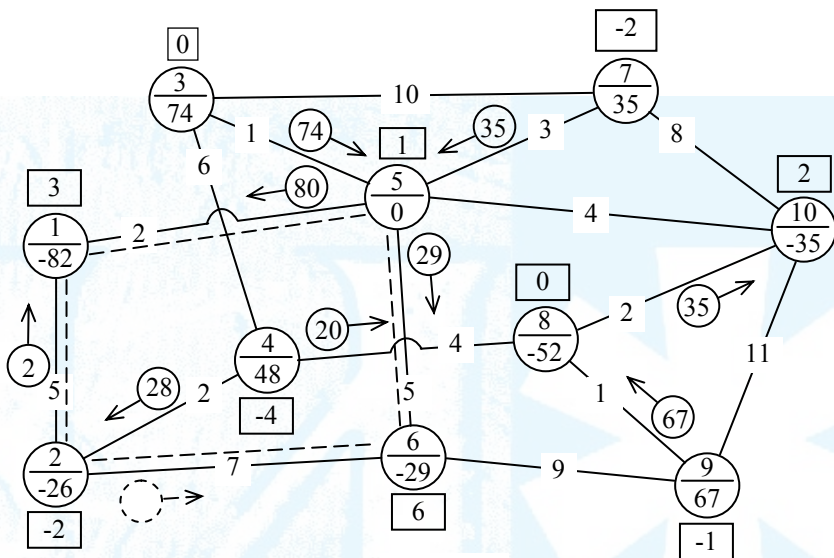


Рис. 4.6

Строим цикл пересчета

$$Ц: \begin{array}{c|c|c|c} \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ (2,6) & (6,5) & (5,1) & (1,2) \\ 29 & 80 & 2 & \\ +\rho & -\rho & +\rho & -\rho \end{array},$$

откуда величина корректировки  $\rho = \min(29, 2) = 2$ . Вносим изменение в план  $X_2$ : перевозки  $x_{5,6}$ ,  $x_{2,1}$  уменьшим на  $\rho = 2$ , а перевозки  $x_{5,1}$  и  $x_{2,6}$  увеличим на эту же величину. После корректировки получим план  $X_3$  (рис. 4.7).

План  $X_3$ .

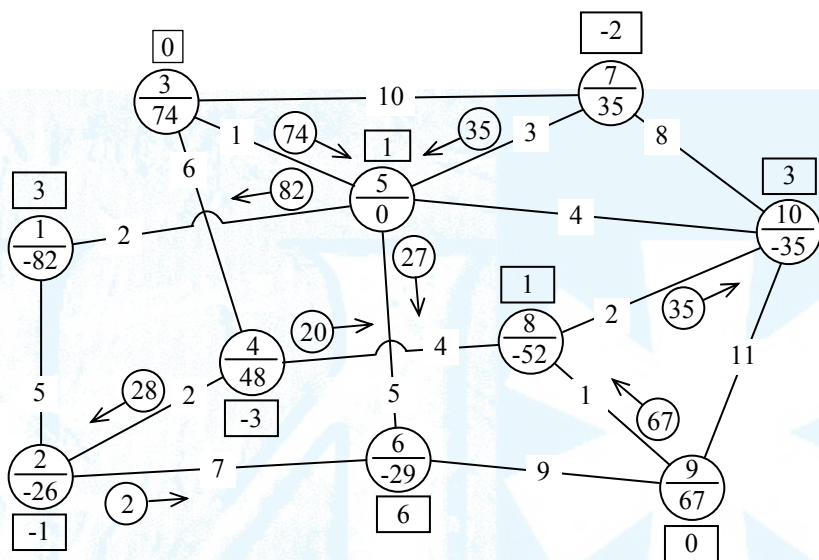


Рис. 4.7

Вычислив потенциалы и оценки:  $\gamma_{3,7} = -8$ ,  $\gamma_{7,10} = -3$ ,  $\gamma_{5,10} = -2$ ,  $\gamma_{3,4} = -3$ ,  $\gamma_{1,2} = -1$ ,  $\gamma_{6,9} = -3$ ,  $\gamma_{9,10} = -8$ , убеждаемся в том, что план  $X_3$  оптимален. Минимальные издержки на перевозку всей продукции составляют величину, равную 765.

Для контроля вычислим значение функции двойственной задачи

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^{10} b_i \alpha_i = & -82 \times 3 - 26 \times (-1) + 74 \times 0 + 48 \times (-3) + \\ & + 0 \times 1 - 29 \times 6 + 35 \times (-2) + 67 \times 0 - 35 \times 3 = -765. \end{aligned}$$

Дерево, соответствующее оптимальному решению транспортной задачи на сети, имеет вид (рис. 4.8):



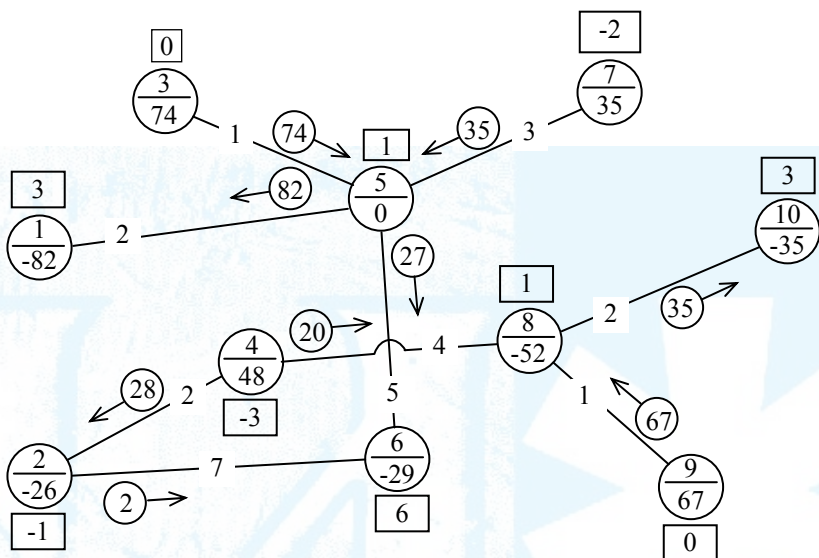


Рис. 4.8

*Примечания.* В процессе решения сетевой задачи могут возникнуть следующие ситуации:

- 1) при построении пробного плана число базисных ребер меньше, чем  $m - 1$ ;
- 2) несколько наибольших положительных оценок;
- 3) величина корректировки достигается на нескольких перевозках;
- 4) в оптимальном плане нулевые оценки соответствуют небазисным ребрам;
- 5) наибольшая положительная оценка находится на ребре, только что вышедшем из базиса.

В первом случае в базис вводятся фиктивные перевозки, получается вырожденный опорный план. Зацикливание при решении сетевой задачи происходит крайне редко, поэтому с базисными нулями можно обращаться так же, как и с положительными перевозками.

Во втором случае выбор разрешающего ребра произволен, но чаще из всех претендентов выбирают то ребро, которому соответствует меньшая удельная стоимость перевозки.

В третьем — из базиса можно исключить только одно ребро, поэтому выводят ребро с большей удельной стоимостью перевозки. Остальным претендентам будут соответствовать базисные нули, при этом направление фиктивных перевозок должно оставаться прежним.

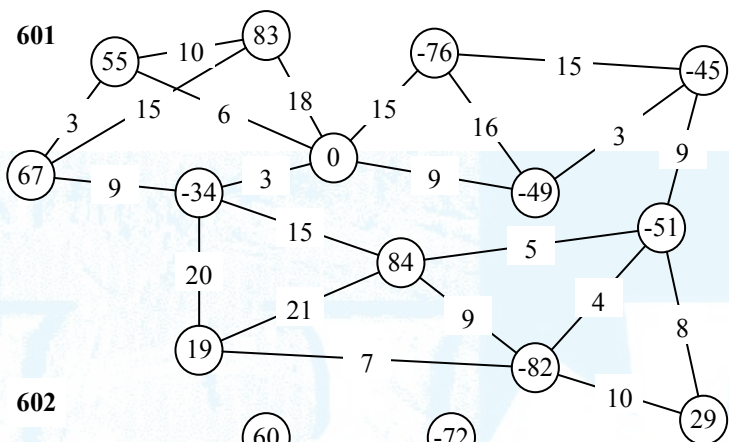
Четвертая ситуация свидетельствует о том, что наряду с полученным оптимальным планом существуют альтернативные оптимальные планы.

В пятом случае говорят, что мы не только не то количество груза везем, но еще и не в ту сторону. Разрешающая стрелка должна быть направлена в противоположную сторону по отношению к перевозке, только что вышедшей из базиса предыдущего опорного плана.

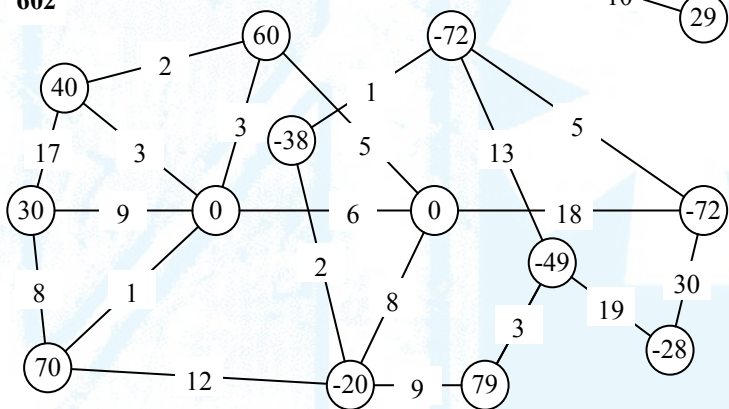
## Задачи 601—700

Ниже приведено 100 вариантов транспортной задачи в сетевой постановке. Каждая задача изображена в виде неориентированного связного графа. На ребрах записаны значения удельных стоимостей  $c_r$ , на вершинах (в кружках) — значения запасов-потребностей  $b_i$ . Построить пробный допустимый план, проверить его на оптимальность. В случае необходимости довести до оптимального плана методом потенциалов.

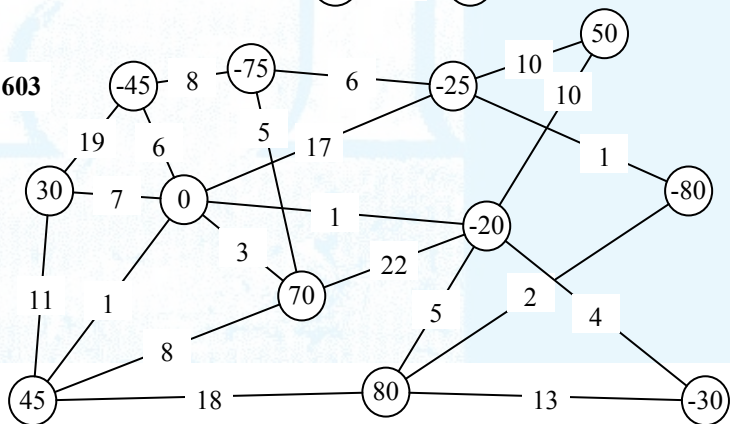
601

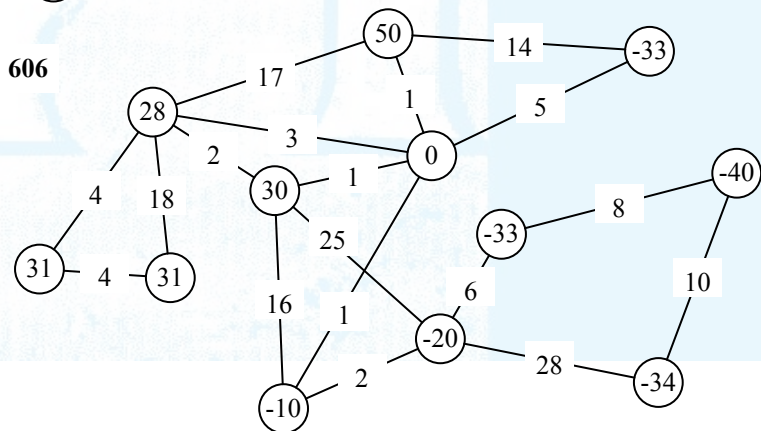
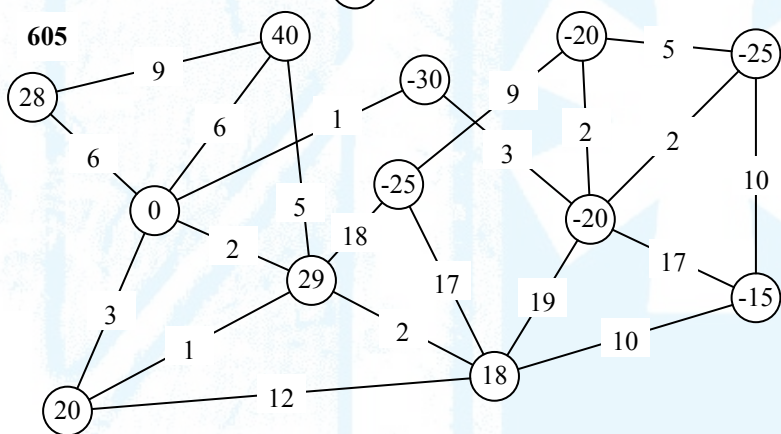
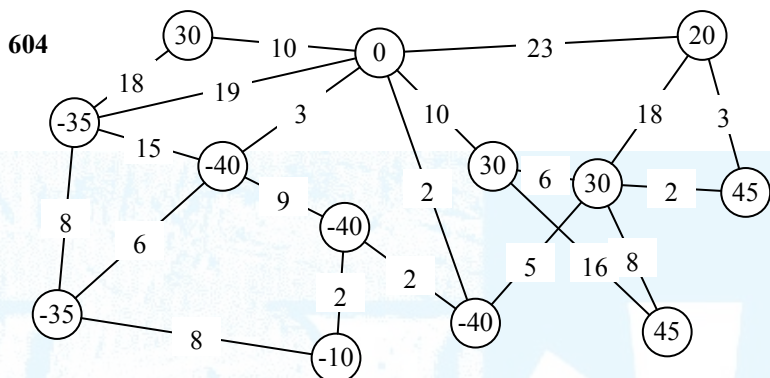


602

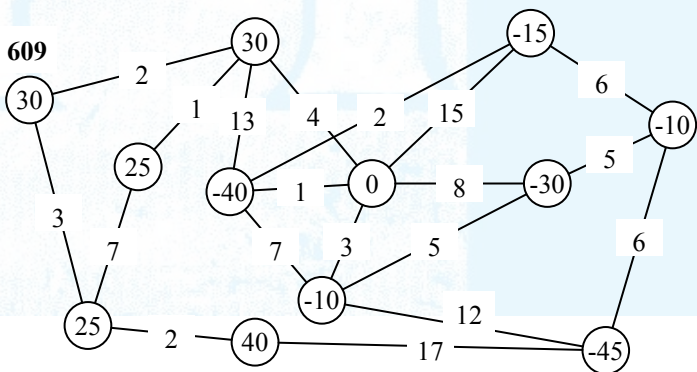
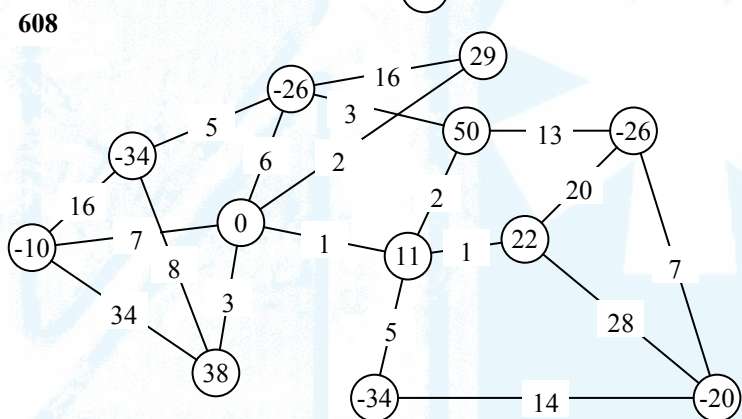
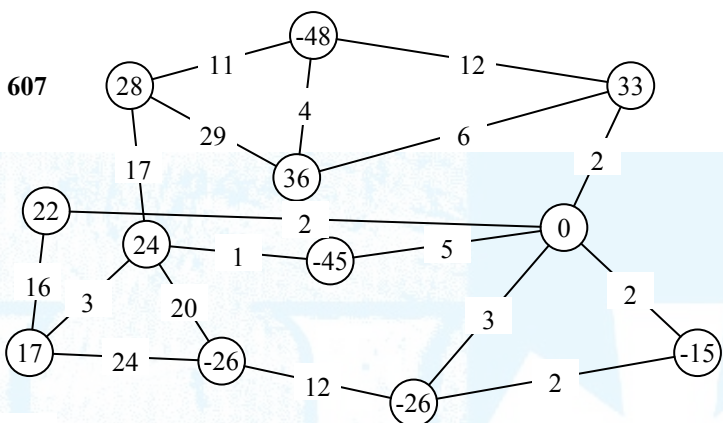


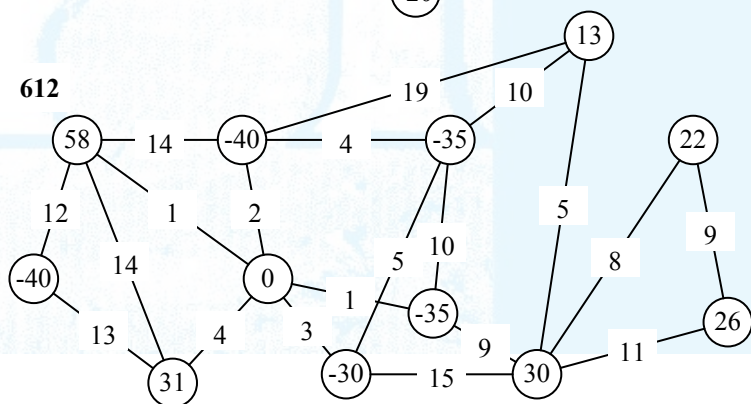
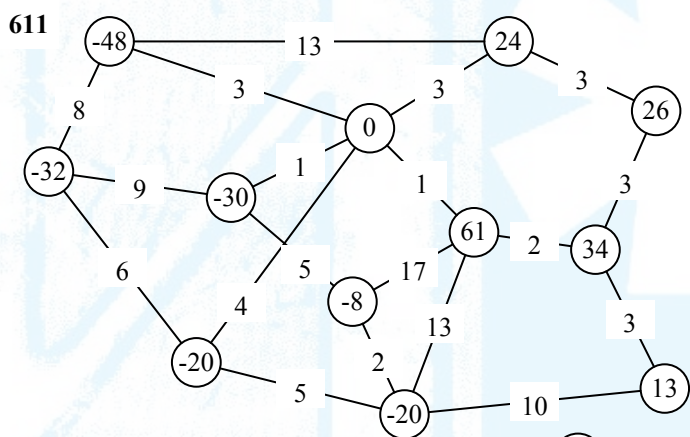
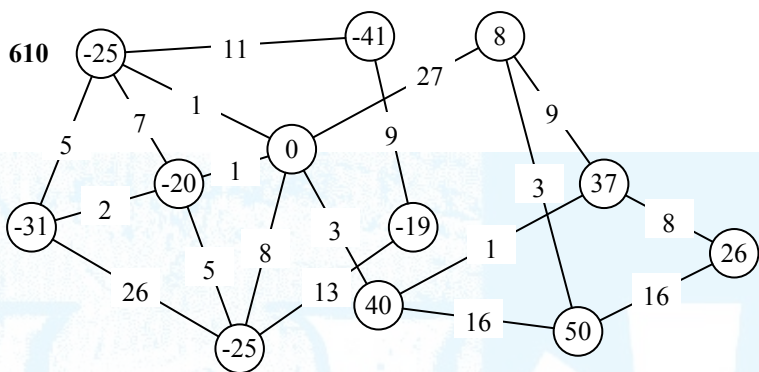
603

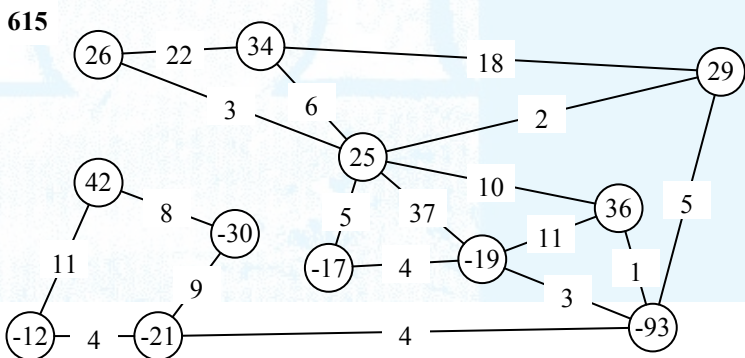
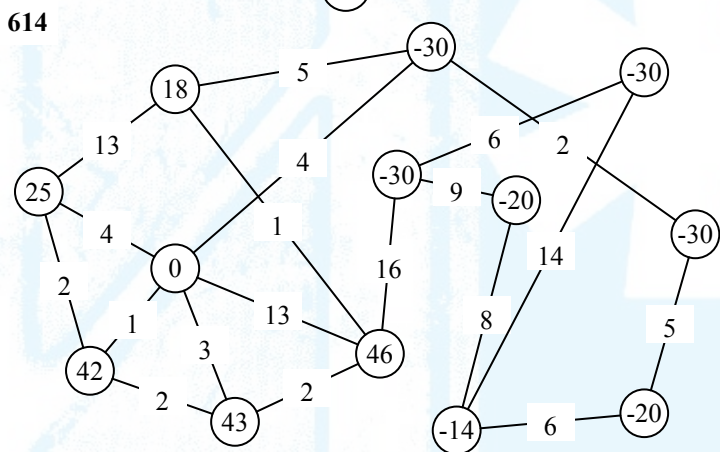
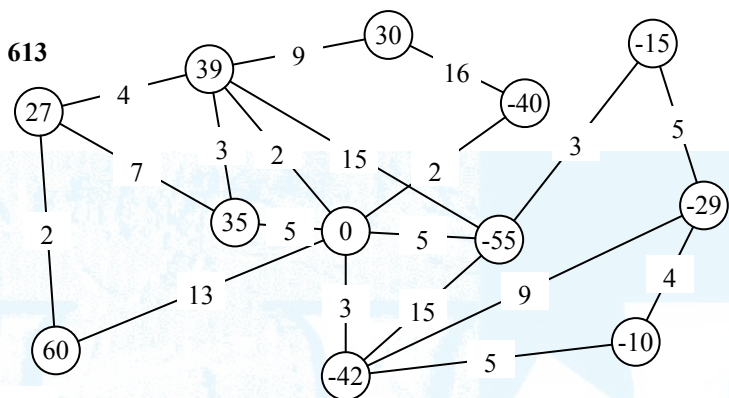


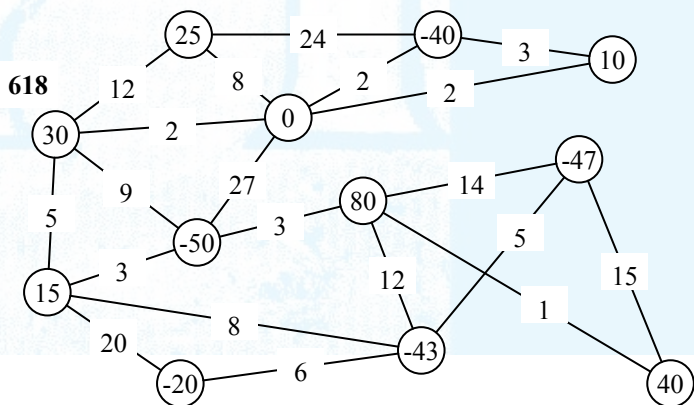
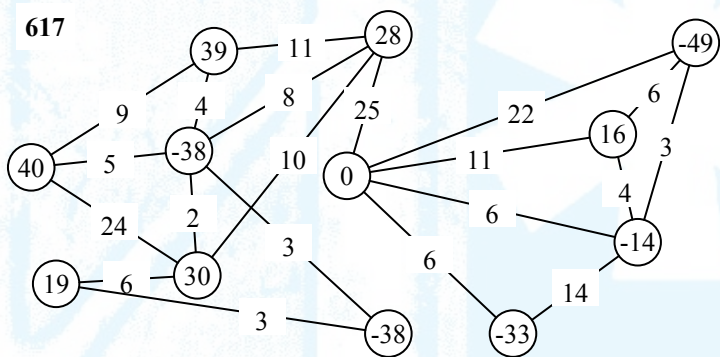
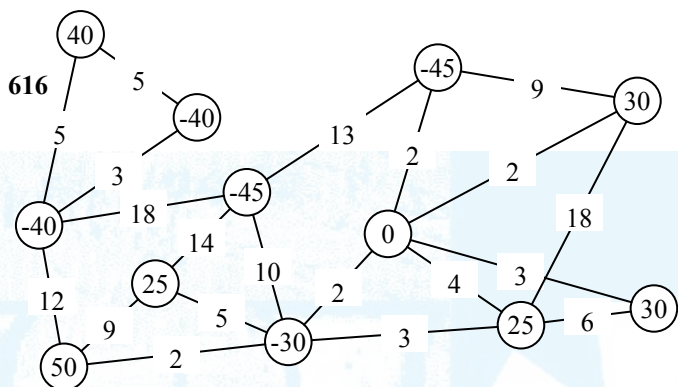






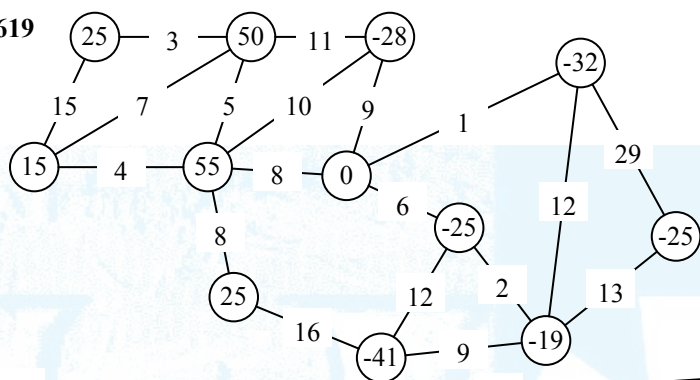




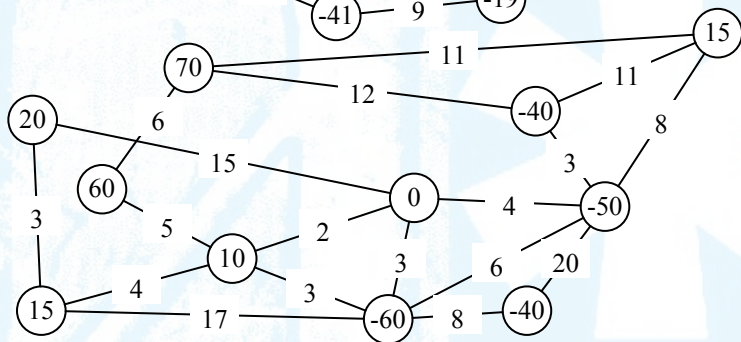




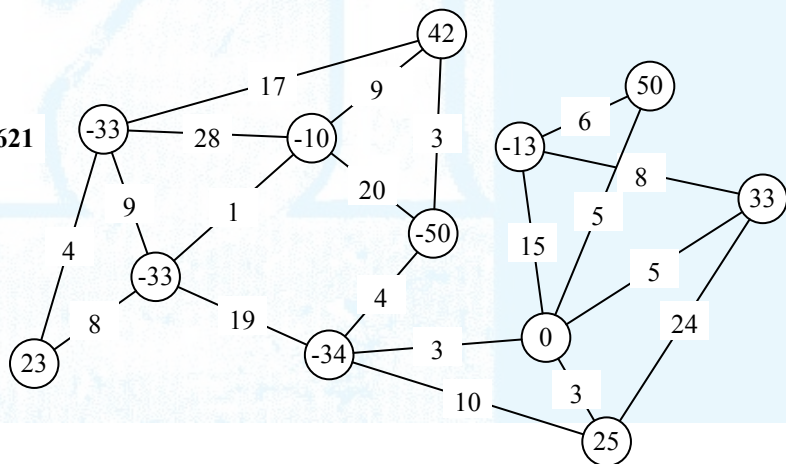
619



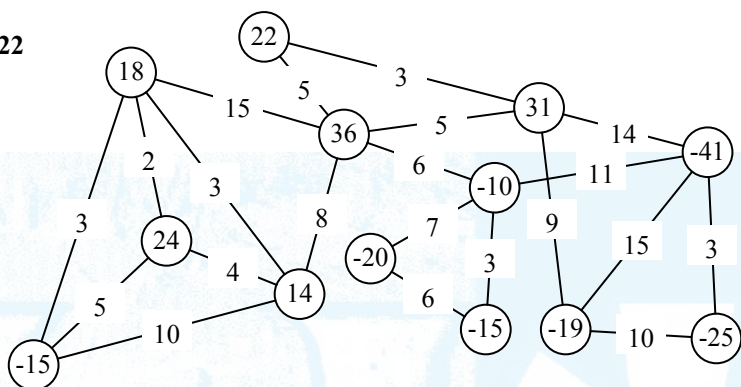
620



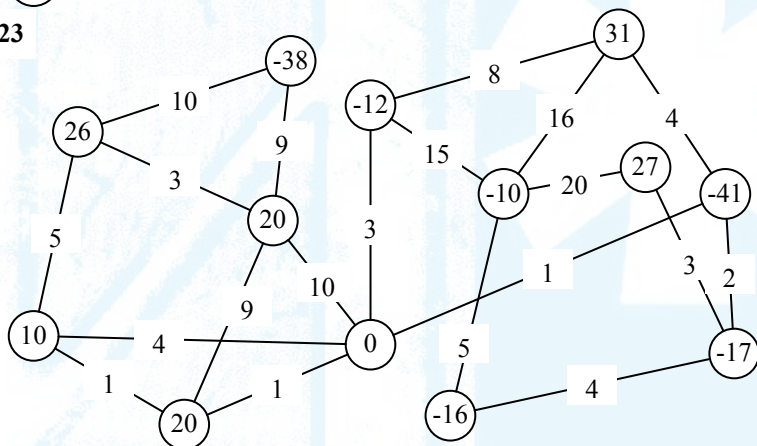
621



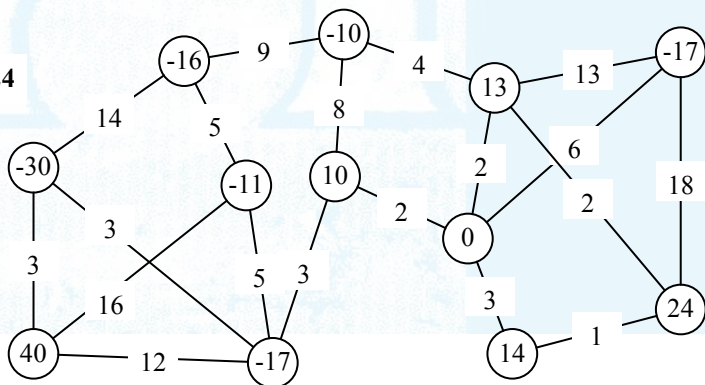
622

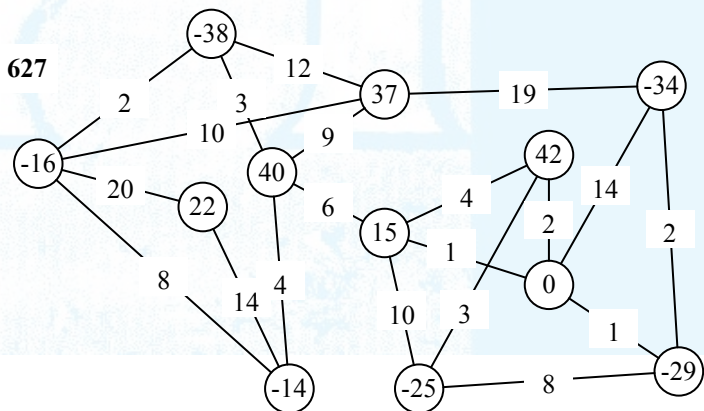
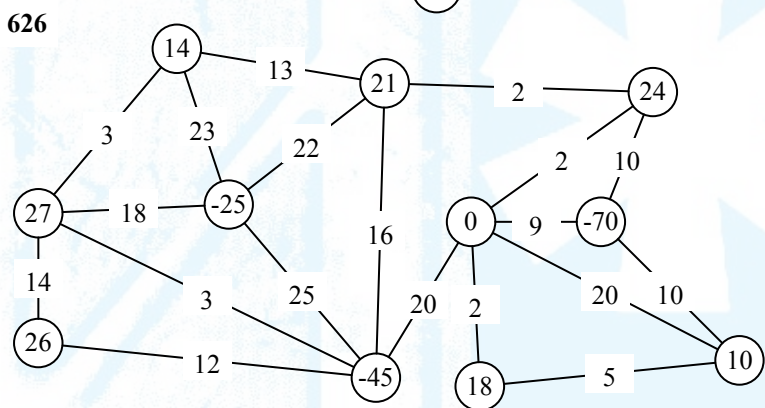
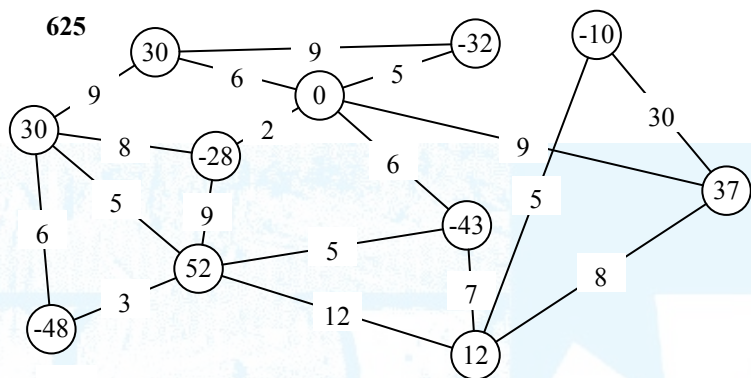


623

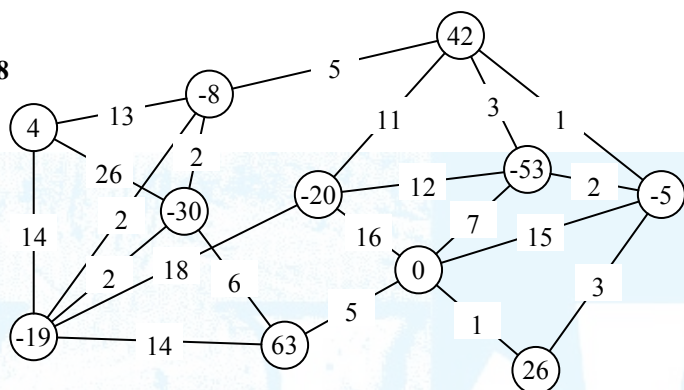


624

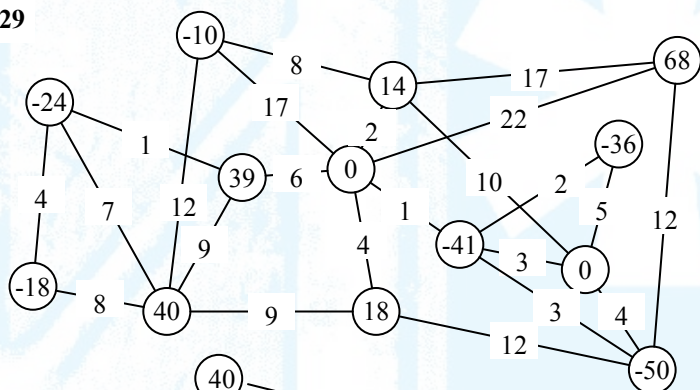




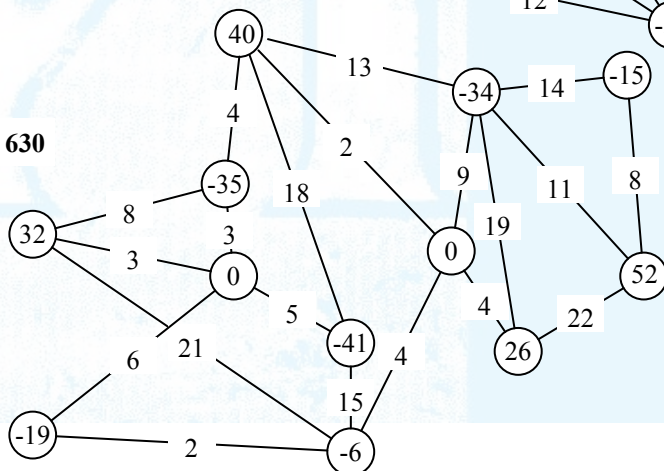
628



629

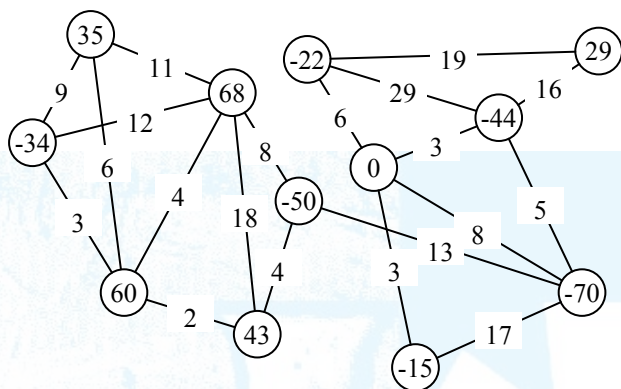


630

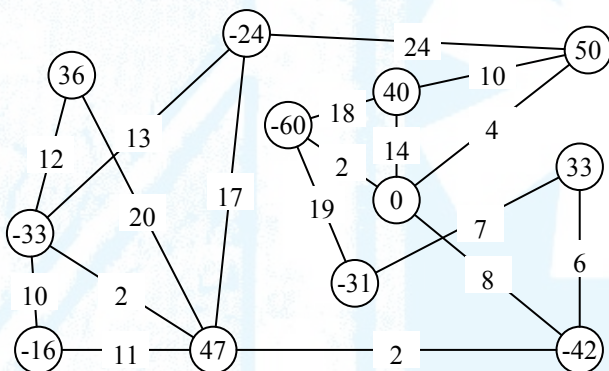




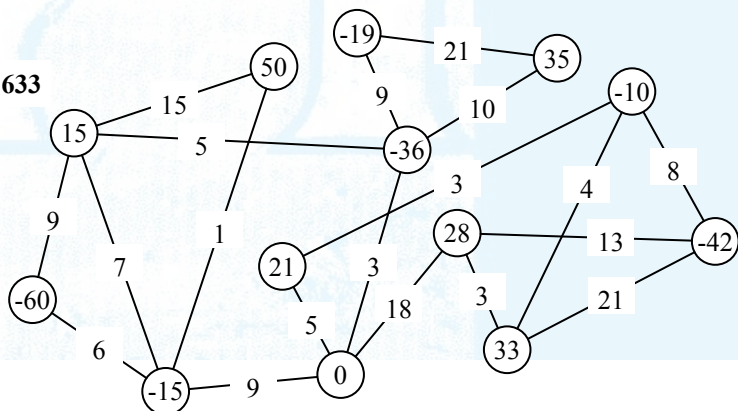
631

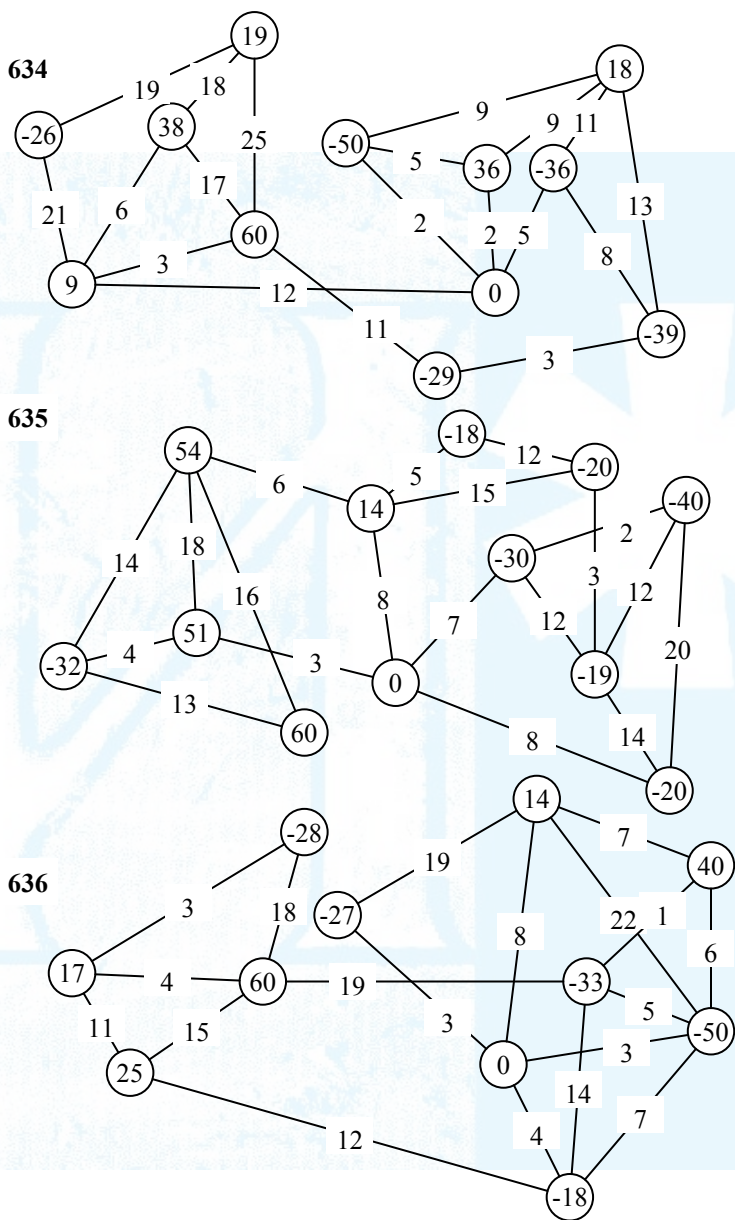


632

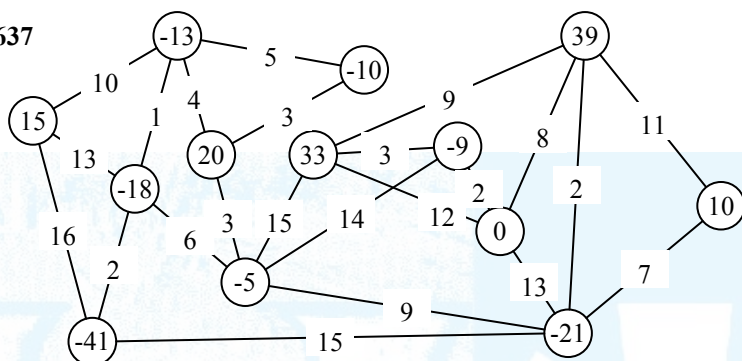


633

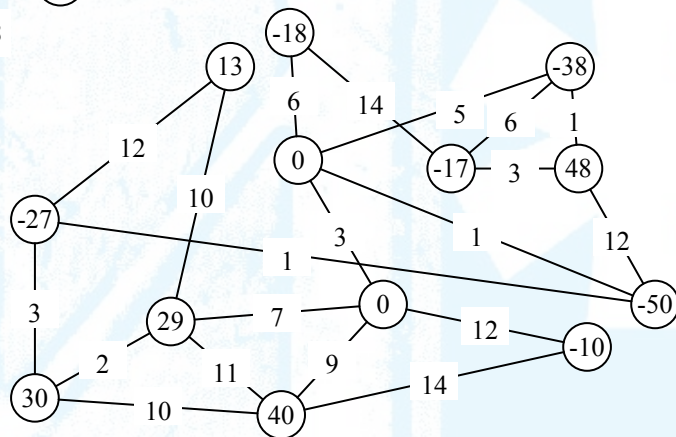




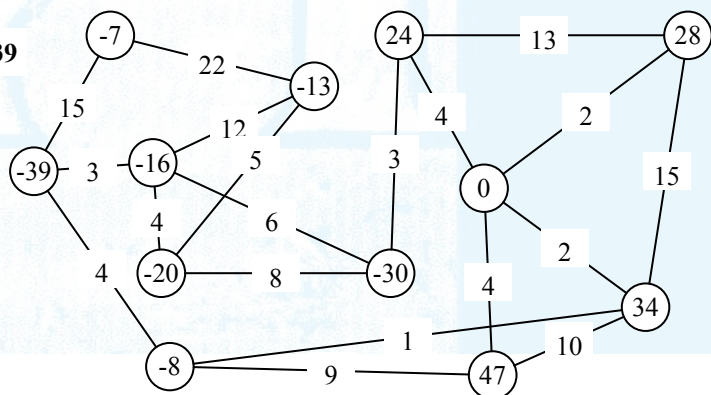
637



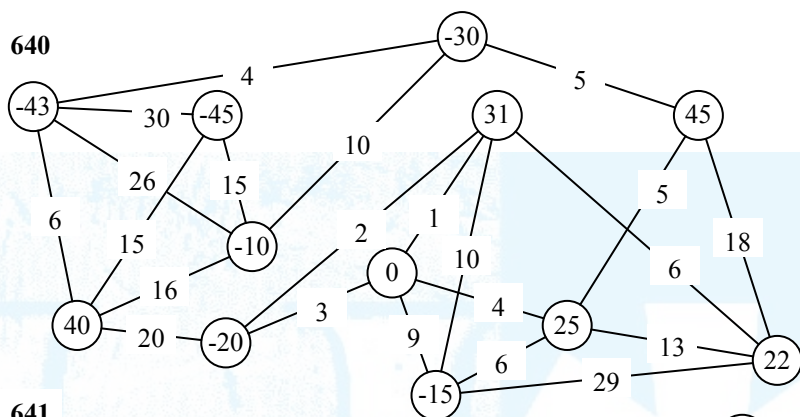
638



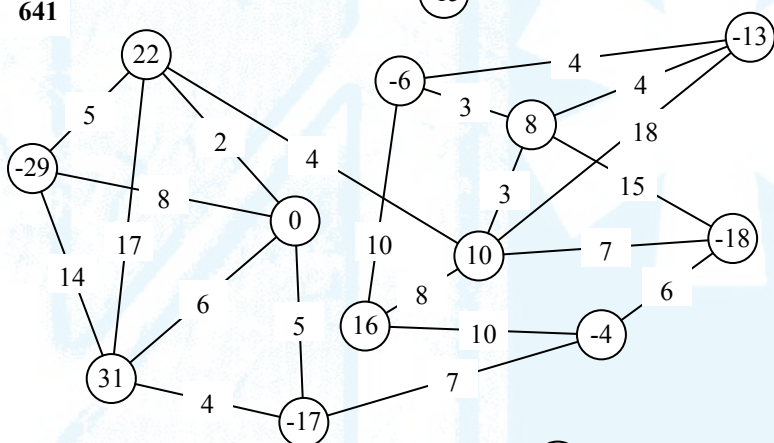
639



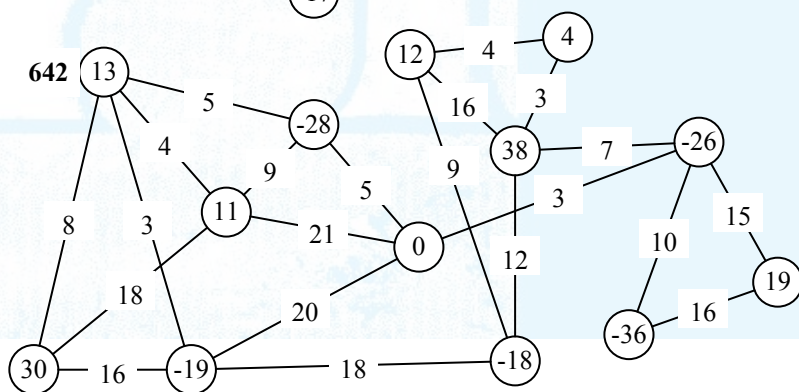
640



641

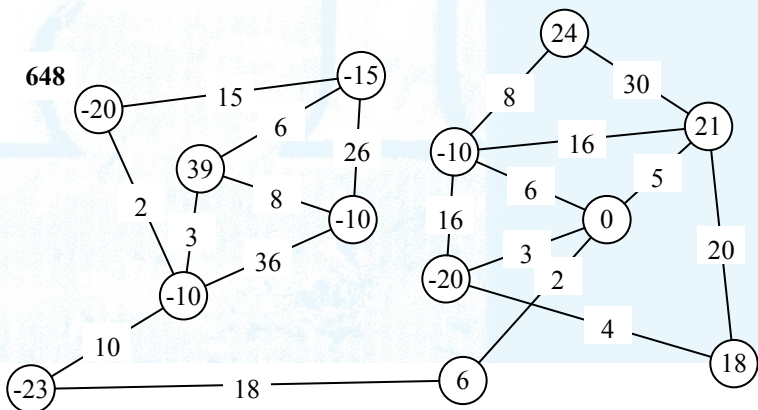
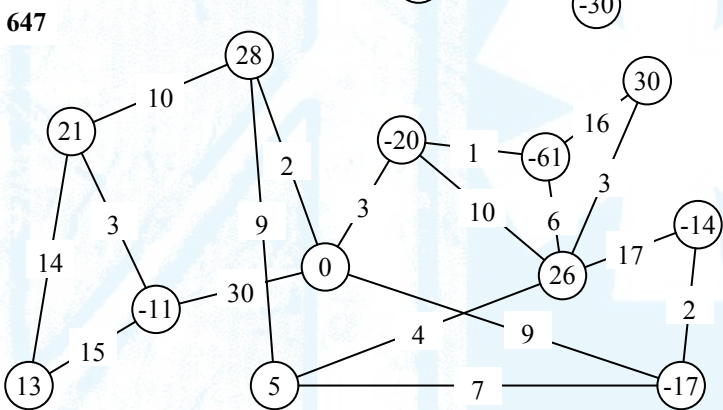
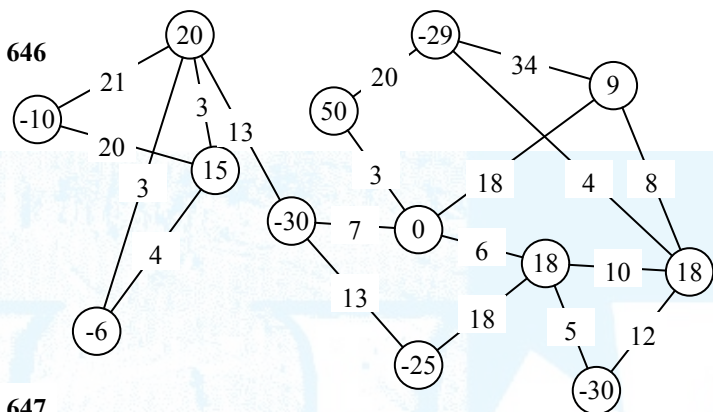


642









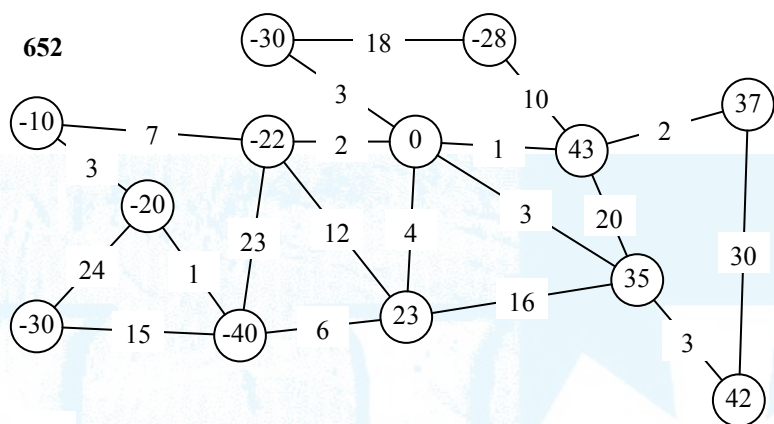
**649**

A network graph with 12 nodes and weighted edges. The nodes are labeled with integers: 24, 42, 30, 38, -39, 0, 20, -18, -25, -27, -21, and -24. The edges are labeled with integers: 6, 20, 3, 14, 5, 13, 4, 12, 14, 3, 1, 28, 16, 2, 18. The graph is connected and contains several cycles.

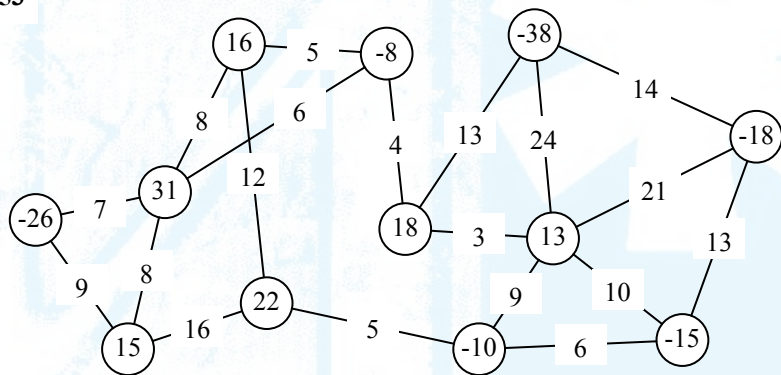
651

```
graph LR; -40 ---|13| -16; -40 ---|20| -38; -40 ---|1| 1; -16 ---|10| -17; -16 ---|12| -25; -17 ---|2| -38; -17 ---|14| 25; -25 ---|3| 50; 10 ---|20| 9; 10 ---|17| 17; 9 ---|5| 15; 50 ---|8| 8; 25 ---|2| 0; 15 ---|5| 0; 15 ---|21| 21; 0 ---|1| 26; 0 ---|5| 5; 10 ---|5| 10;
```

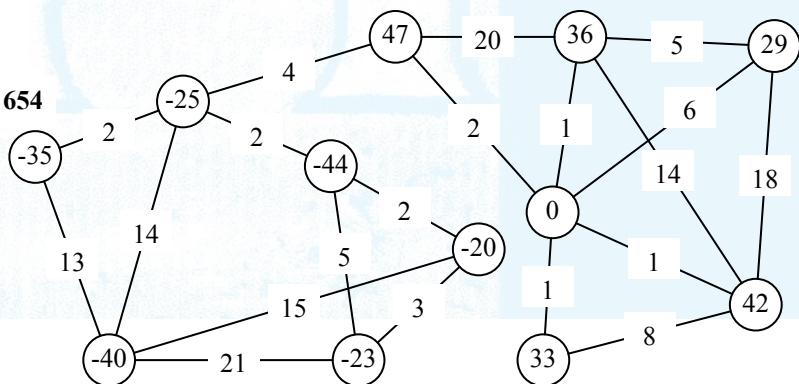
652



653

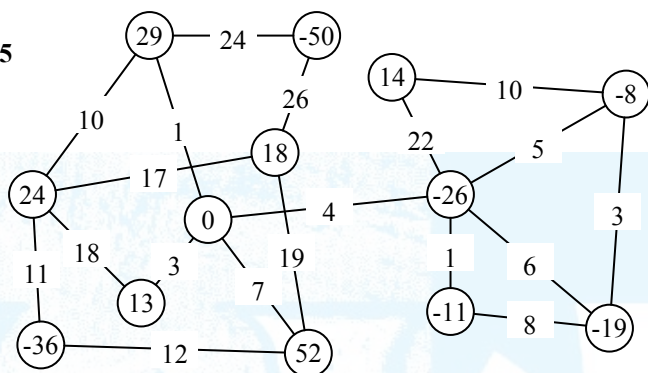


654

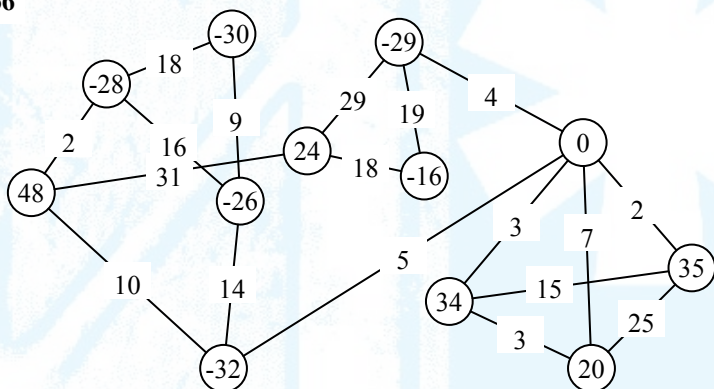




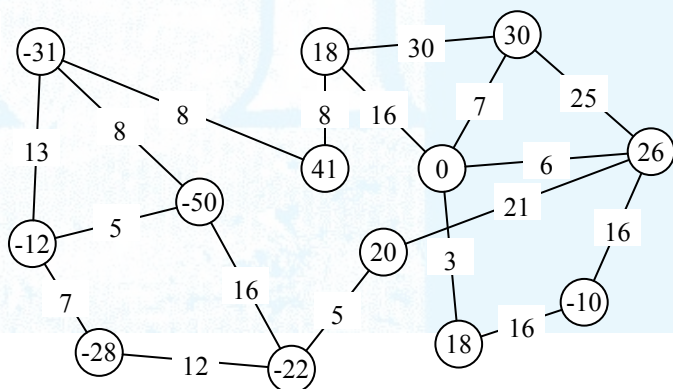
655

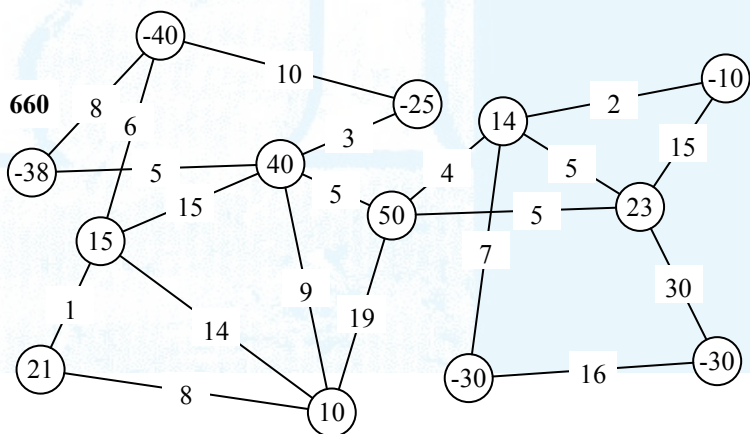
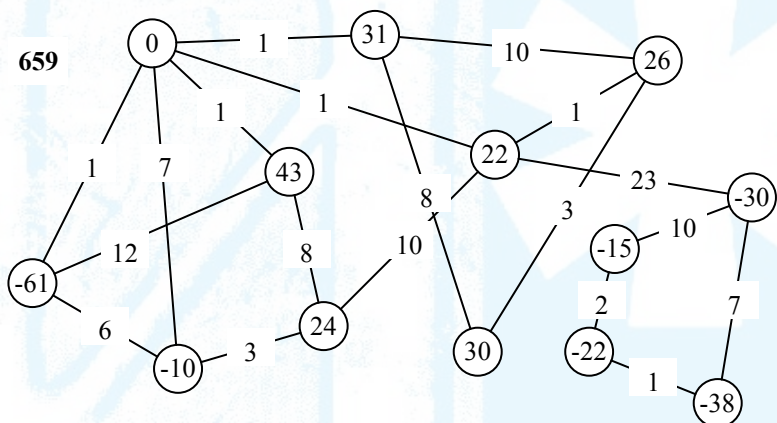
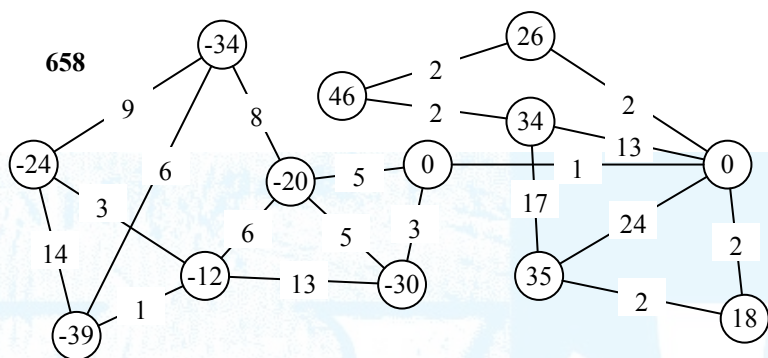


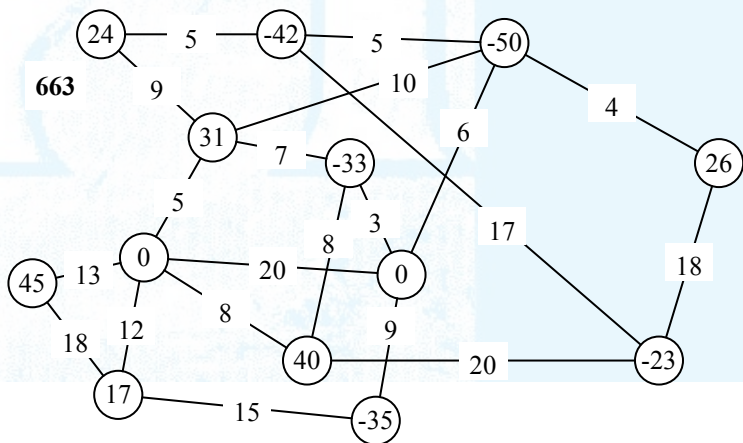
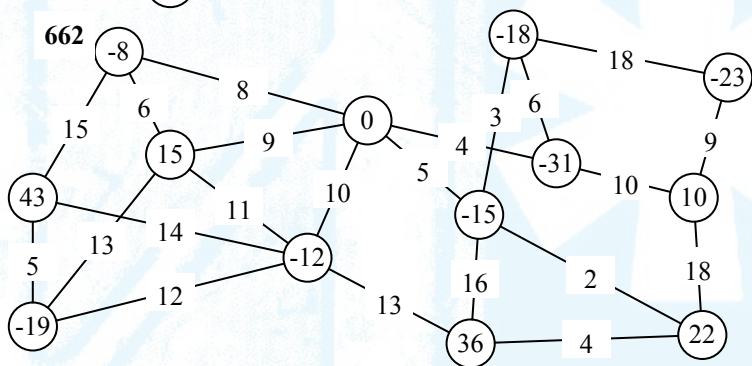
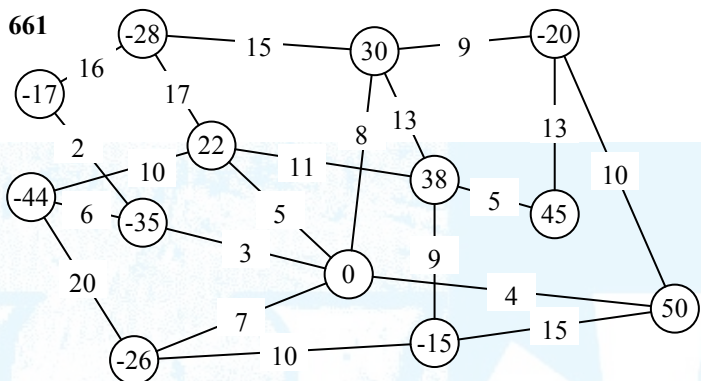
656

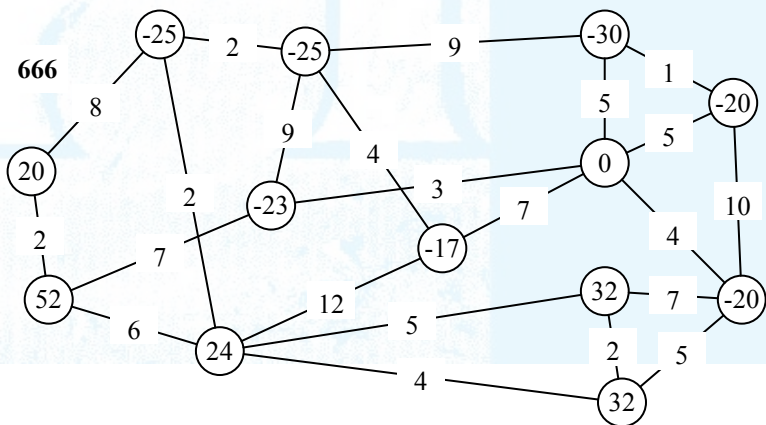
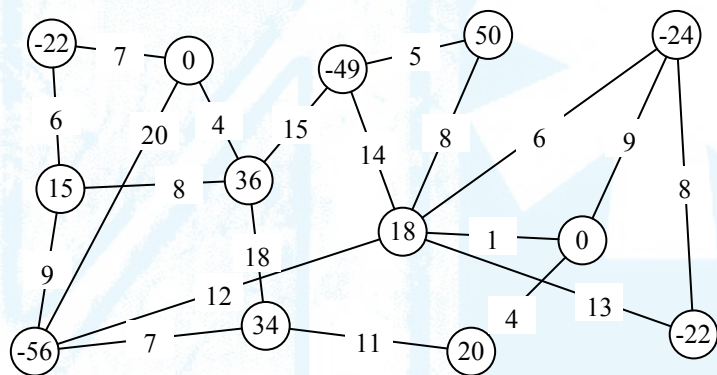
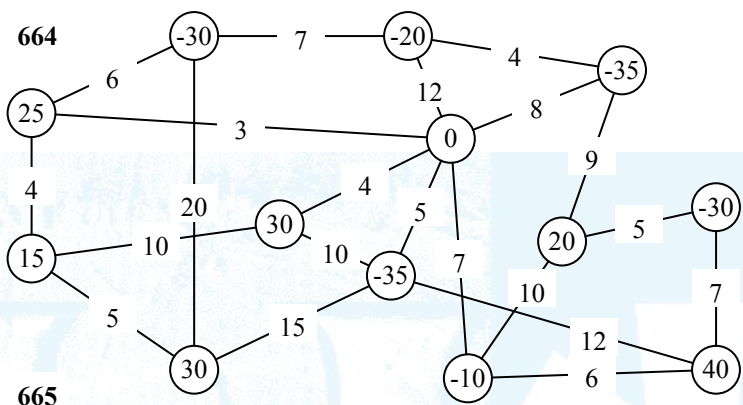


657

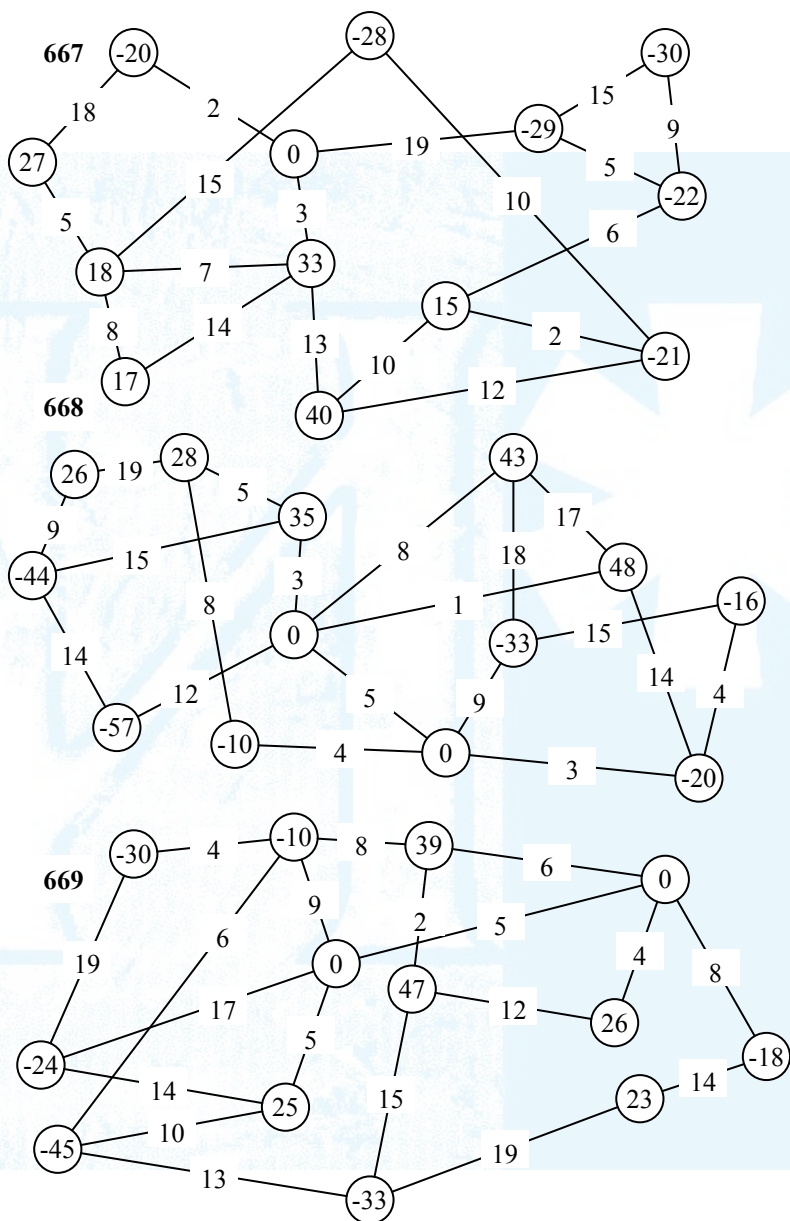


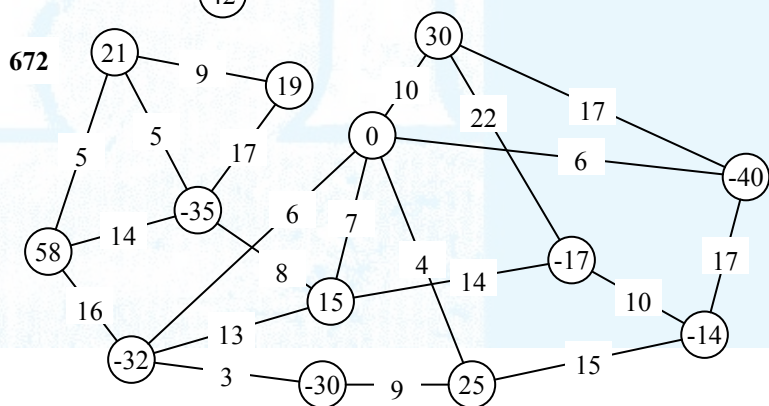
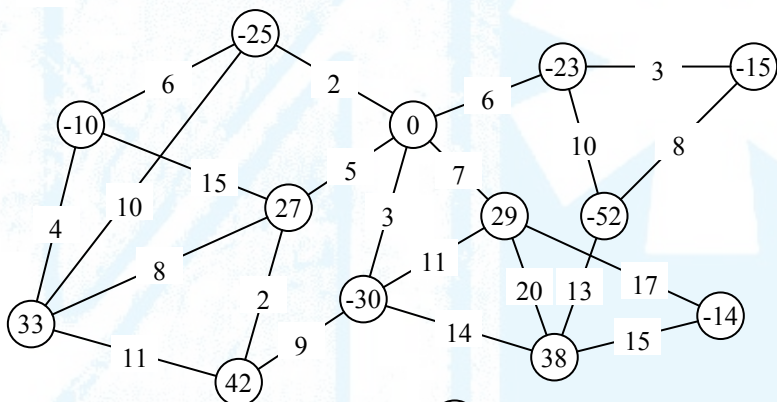
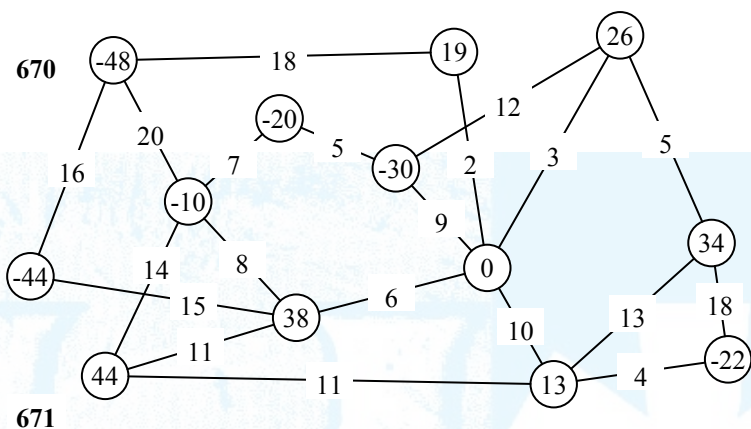


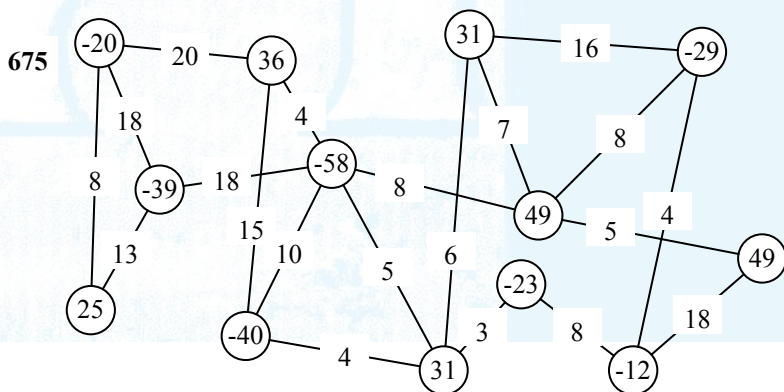
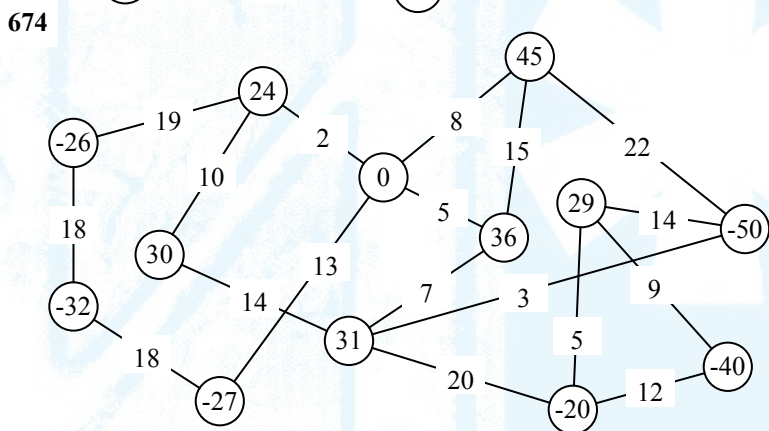
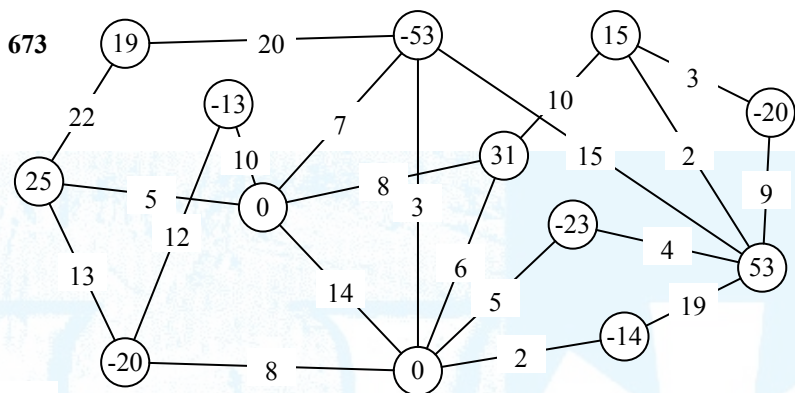


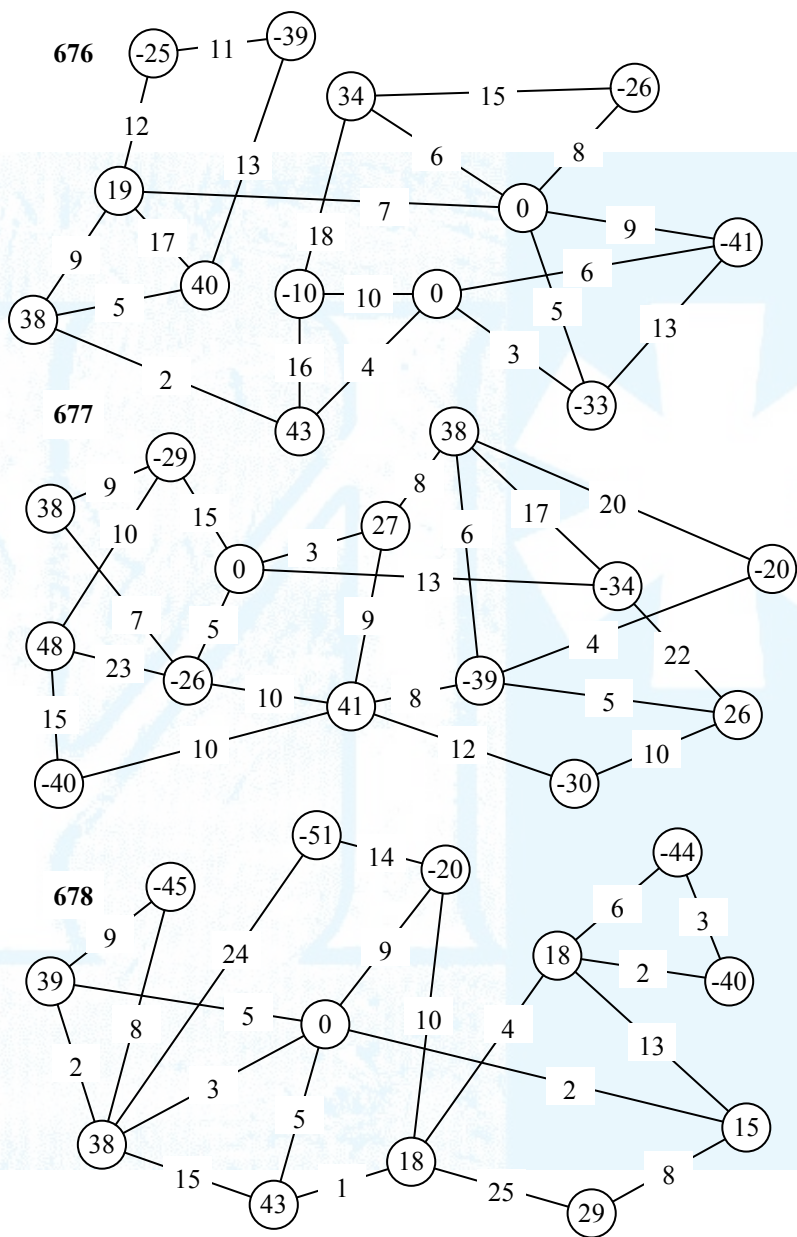








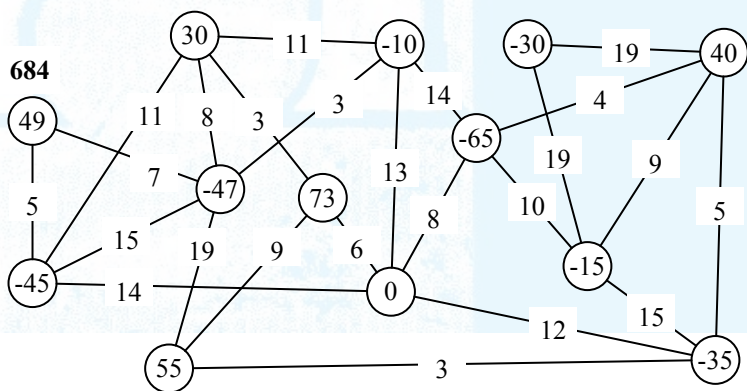
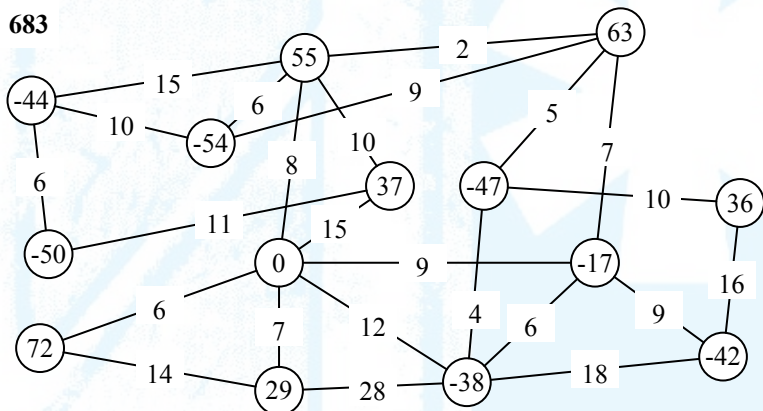
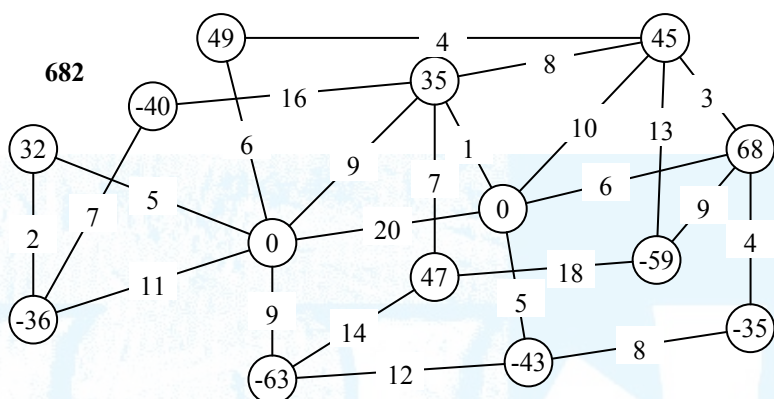




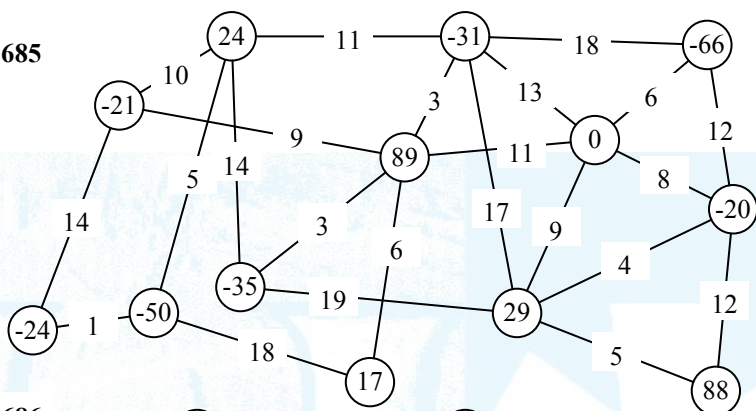


**681**

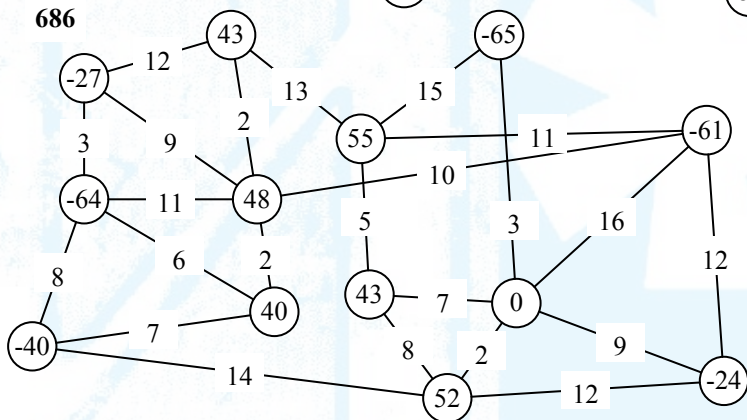
A network graph with 12 nodes and 15 edges. Nodes are labeled with integers: -34, -24, -19, 47, 0, 28, -20, -25, 38, 18, 25, and -34. Edges are labeled with integers: 10, 3, 1, 14, 8, 9, 11, 15, 6, 3, 7, 5, 13, 10, 12, 8, 3, 9. The graph shows a complex interconnection of nodes, with some nodes having multiple connections.



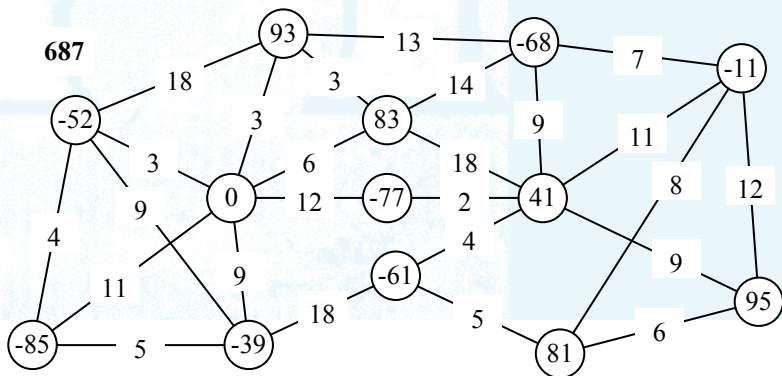
685



686

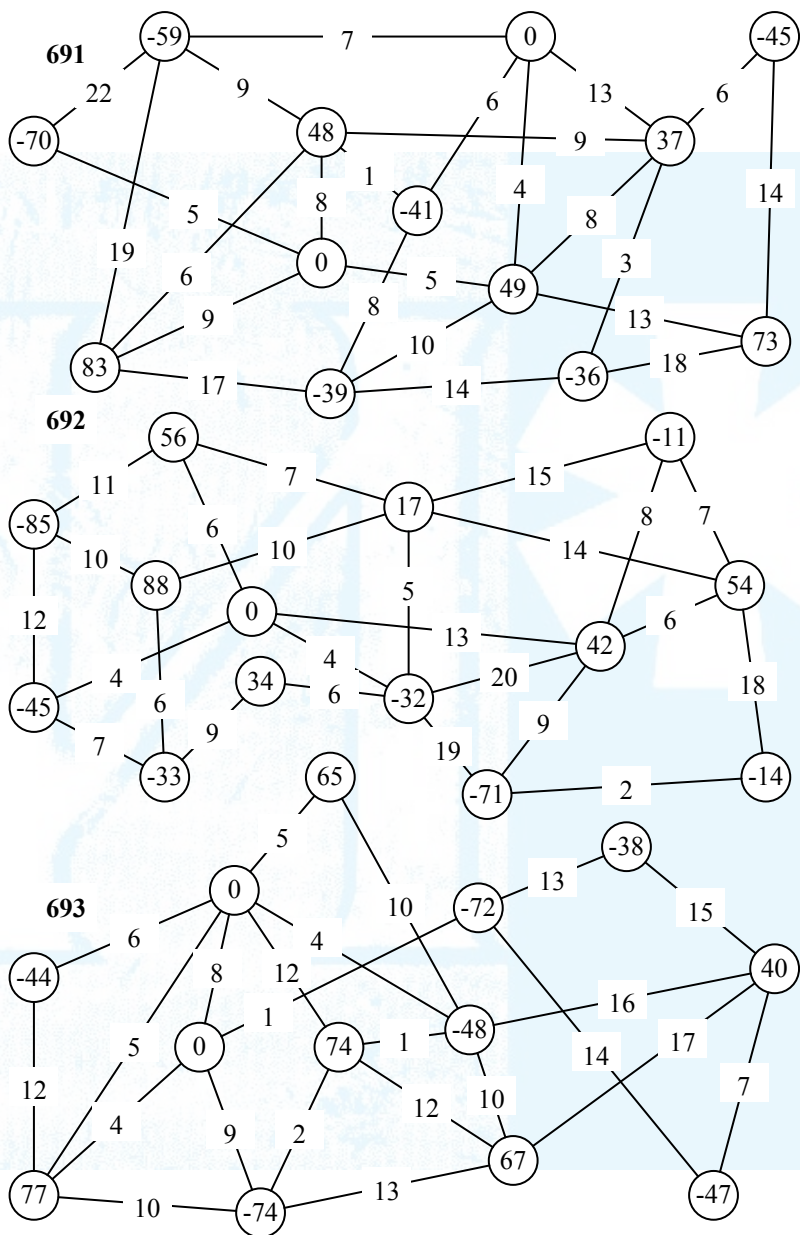


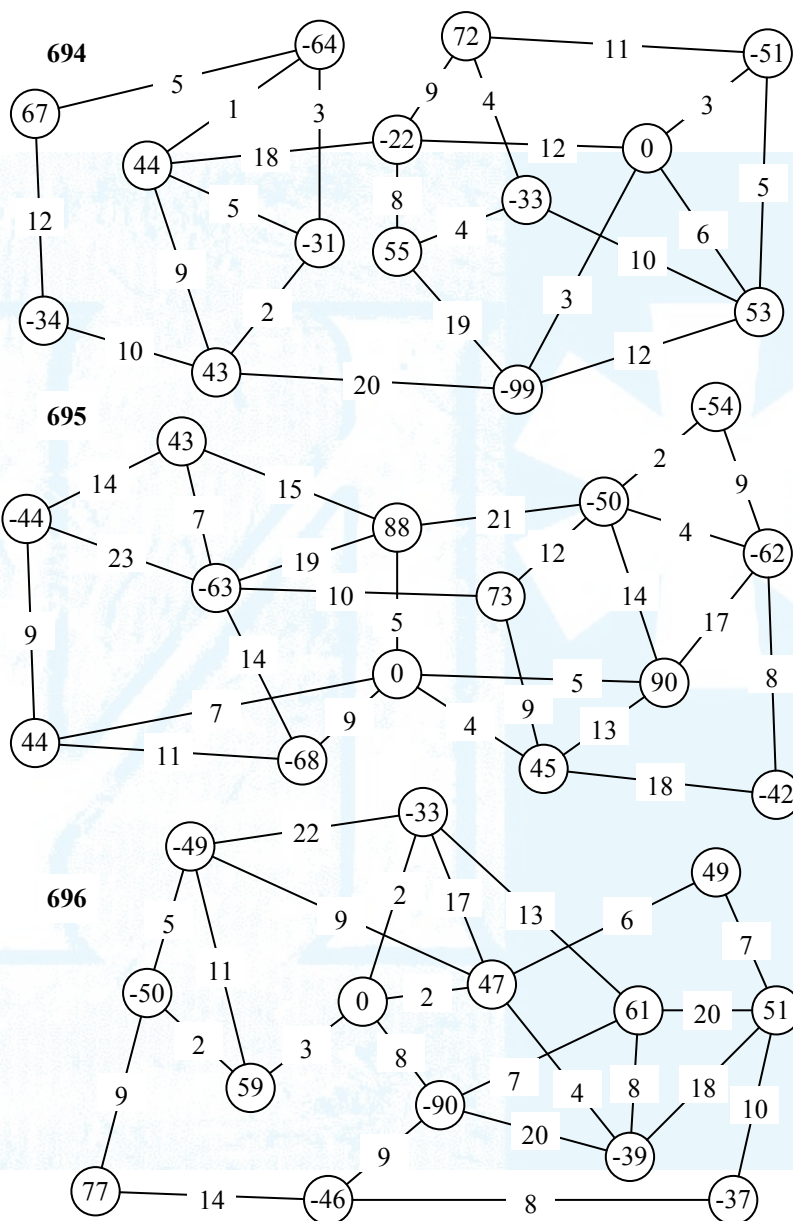
687

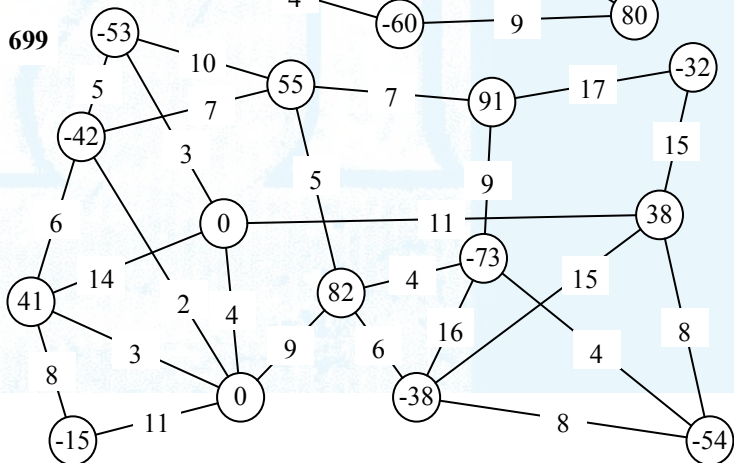
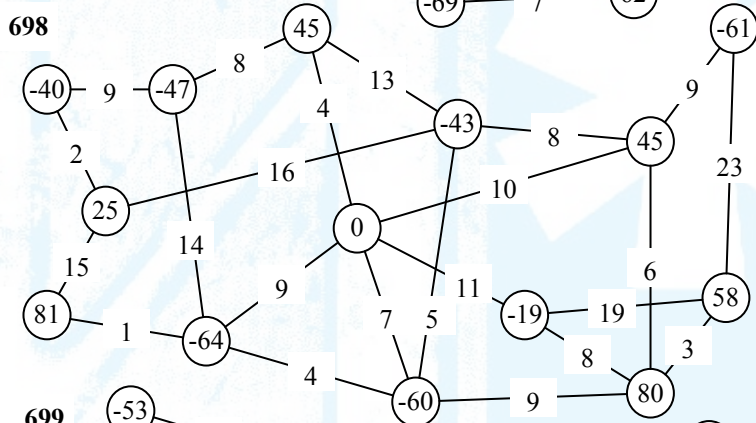
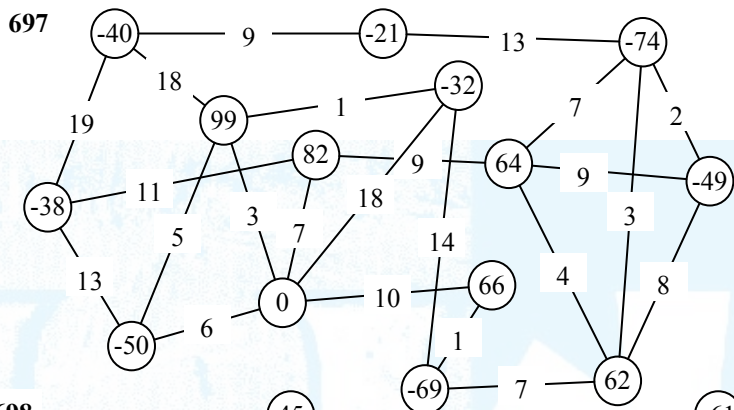


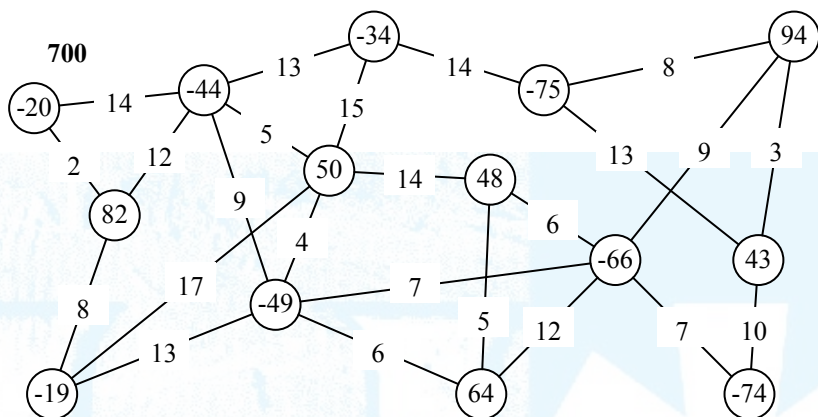












## РЕЗЮМЕ

Теория графов — раздел дискретной математики, имеющий разнообразные практические применения. Недавние исследования показывают, что не менее 70% реальных задач математического программирования можно представить в виде сетевых моделей.

В данной главе представлена модификация метода потенциалов для решения транспортной задачи в сетевой постановке, которая изображена в виде неориентированного связного графа. Поставщики, потребители и перевалочные пункты соответствуют вершинам графа; коммуникации, соединяющие указанные пункты, — ребрам графа.

Процесс решения начинается с построения покрывающего дерева графа (пробного опорного плана). Затем проводится ряд итераций метода потенциалов. На первом этапе каждой итерации вычисляются потенциалы и оценки. С помощью оценок проверяется план на оптимальность. Если план не удовлетворяет условиям оптимальности, проводят второй этап, на котором после корректировки старого плана строится новый. При этом значение функции уменьшается. После конечного числа итераций метод потенциалов всегда приводит к оптимальному решению.



Для иллюстрации алгоритма приводится численный пример с подробным описанием всех этапов решения задачи.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Приведите общую формулировку линейной сетевой задачи по критерию стоимости. Запишите математическую модель прямой задачи и двойственную к ней.

2. Покажите, что транспортная задача в матричной постановке является частным случаем транспортной задачи в сетевой постановке.

3. Дайте определение понятия «остов сети». Какая связь существует между остовом сети и базисом транспортной задачи в сетевой постановке?

4. Какой план перевозок называют невырожденным?

5. Каким способом можно получить допустимый план в транспортной сети? Назовите требования, предъявляемые к опорному плану.

6. Перечислите основные этапы метода потенциалов для транспортной задачи в сетевой постановке.

7. Как вычисляются потенциалы и оценки?

8. Что называется разрешающей стрелкой? Каково должно быть направление разрешающей стрелки?

9. Что называется циклом пересчета в сетевой задаче?

10. Как определяется величина корректировки плана?

11. Что надо делать, если величина корректировки достигается на нескольких перевозках? Можно ли менять направление нулевых перевозок, появившихся в этом случае?

12. Как в процессе улучшения плана изменяются перевозки в цикле пересчета и перевозки, не вошедшие в цикл пересчета?

13. Назовите способы вычисления целевой функции для начального опорного плана и для последующих планов.

14. В каком случае в сетевой задаче коммуникация, только что вышедшая из базиса, снова имеет наибольшую положительную оценку?

15. В чем состоит задача о кратчайшем пути?

## Глава 5

### ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

*Матрица эффективности. Разборчивая невеста. Условия булевости. Венгерский метод. Эквивалентность матриц. Занятая строка. Занятый столбец. Незанятый элемент. Ноль со звездочкой. Ноль со штрихом. Преобразование матриц. Цепочка. Переход от одного неполного правильного выбора к другому. Оптимальный выбор. Метод потенциалов. Сильно вырожденное решение. Борьба с вырожденностью. Критерий оптимальности.*

Студент должен

*знать:*

- различные постановки задачи о назначениях;
- особенности задачи о назначениях;
- особенности задачи о разборчивой невесте;
- условия о запрете многоженства и многомужества;
- условия булевости;

*уметь:*

- строить математическую модель задачи выбора;
- осуществлять эквивалентные преобразования матрицы эффективности;
- решать задачу венгерским методом;
- строить допустимый вариант назначения методом Фогеля;
- применять метод потенциалов для решения задачи о разборчивой невесте;
- выписывать оптимальный вариант выбора;
- вычислять суммарную эффективность оптимального назначения механизмов на работы;
- вычислять среднюю продолжительность семейной жизни семей, образованных через свадебное агентство.

## § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть требуется выполнить  $n$  различных работ и имеется  $n$  механизмов (машин) для их выполнения, причем каждый механизм может использоваться на любой работе. Производительность каждого механизма на различных работах, вообще говоря, различна. Задача заключается в таком распределении механизмов по работам, при котором суммарная производительность максимальна. Обозначим через  $c_{ij}$  производительность  $i$ -го механизма на  $j$ -й работе.

Для построения математической модели сопоставим каждому из возможных вариантов распределения машин по работам набор значений неизвестных  $x_{ij}$ , относительно которых условимся, что  $x_{ij} = 1$ , если  $i$ -й механизм назначается на  $j$ -ю работу, и  $x_{ij} = 0$ , если  $i$ -й механизм назначается не на  $j$ -ю работу. Для любого варианта среди чисел  $x_{ij}$  должно быть точно  $n$  единиц, причем должны выполняться условия:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{каждый механизм назначается на одну работу});$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n} \quad (\text{на каждую работу назначен один механизм}).$$

Суммарная производительность при данном варианте назначения машин на работы выразится суммой

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи будет следующей:

$$\max \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (5.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n} \quad (5.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n} \quad (5.3)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}. \\ 0, & \end{cases} \quad (5.4)$$

Условия (5.4) выводят задачу о назначениях из класса задач линейного программирования, т. к. они не линейны. Задачи, в которых на переменные налагаются такие условия, называются задачами с булевыми переменными. Известно, что в транспортной задаче при целочисленных исходных данных всегда можно найти целочисленные оптимальные планы, поэтому в задаче о назначениях условия (5.4) можно заменить условиями неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}. \quad (5.5)$$

Тогда задача о назначениях превращается в транспортную задачу на отыскание максимума, имеющую ту особенность, что в ней все запасы  $a_i$  и все потребности  $b_j$  равны единице.

Такую задачу можно решить методом потенциалов. Каждому механизму поставим в соответствие число  $\alpha_i$ , каждой работе поставим в соответствие число  $\beta_j$ . Тогда двойственная задача запишется следующим образом:

$$\min \Rightarrow \varphi(Y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \quad (5.6)$$

$$\alpha_i + \beta_j \geq c_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, \quad (5.7)$$

где неизвестные числа (потенциалы)  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  объединены в  $2n$ -мерный вектор  $Y = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ .



В дальнейшем нам понадобится критерий оптимальности плана задачи о назначениях с целевой функцией на максимум.

**Теорема 5.1.** Для того чтобы вариант назначения был оптимальным, необходимо и достаточно существование чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  таких, что

$$\alpha_i + \beta_j \geq c_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.8)$$

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, \quad \text{для } (i, j) \text{ из базиса.} \quad (5.9)$$

## § 2. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Значения переменных  $x_{ij} = 1$  можно расставить произвольно, например, методом максимального элемента или методом Фогеля. Для вычисления потенциалов необходимо, чтобы число базисных переменных было равно  $2n - 1$ . Поэтому в число базисных переменных введем  $n - 1$  базисных нулей. Последние должны быть расставлены так, чтобы базисные элементы матрицы  $X$  не образовывали циклов.

Вычисляются потенциалы, затем для небазисных пар индексов  $(i, j)$  определяются оценки по формуле

$$\gamma_{ij} = (\alpha_i + \beta_j) - c_{ij}. \quad (5.10)$$

Если все оценки неотрицательны ( $\gamma_{ij} \geq 0$ ), то процесс окончен: совокупность переменных  $x_{ij} = 1$  соответствует оптимальному варианту назначения. Если имеются отрицательные оценки ( $\gamma_{ij} < 0$ ), то вариант выбора не является оптимальным и его следует улучшить. Для этого находим наименьшую отрицательную оценку (пусть это будет  $\gamma_{i_0 j_0} = \min(\gamma_{ij} < 0)$ ) и строим цикл пересчета, который замыкается на разрешающей клетке  $(i_0, j_0)$ . Означим вершины цикла: начиная с вершины в разрешающей клетке, ставим знак «+», следующей вершине присваиваем знак «−» и т. д., попеременно, пока не пройдем все вершины. Определяем величину кор-

ректировки  $\rho$ , которая равна минимальному значению переменной из переменных  $x_{ij}$ , принадлежащих вершинам отрицательного полуцикла. Далее вносим изменения в наш вариант назначения: переменные  $x_{ij}$  из отрицательного полуцикла уменьшаем на  $\rho$ ; переменные  $x_{ij}$  из положительного полуцикла увеличиваем на эту же величину; остальные переменные остаются без изменения. В результате получим новое назначение.

Задача является сильно вырожденной, в которой число базисных нулей равно  $n - 1$ . Критерий оптимальности предъявляет одинаковые требования к положительным переменным и к базисным нулям, поэтому в процессе решения результативные итерации часто чередуются холостыми.

**Пример 5.1.** Для иллюстрации метода потенциалов рассмотрим задачу с матрицей эффективности

$$C = \begin{vmatrix} 15 & 19 & 23 & 27 & 10 & 23 \\ 22 & 15 & 21 & 28 & 14 & 14 \\ 5 & 8 & 5 & 21 & 6 & 14 \\ 13 & 20 & 7 & 24 & 27 & 18 \\ 20 & 23 & 26 & 30 & 22 & 27 \\ 26 & 20 & 26 & 14 & 12 & 22 \end{vmatrix}.$$

Построим начальный вариант методом максимального элемента. Для этого потребуется провести  $2n - 1$  шагов. На каждом шаге будем заполнять одну из клеток в табл. 5.1. Каждая клетка таблицы соответствует  $c_{ij} \in C$ .

Шаг 1. Максимальным элементом является  $c_{5,4} = 30$ . Назначим пятый механизм на четвертую работу  $x_{5,4} = 1$ . Вычеркнем пятую строку.

Шаг 2. Из невычеркнутых элементов матрицы максимальным является  $c_{2,4} = 28$ . В четвертом столбце уже есть 1 (на четвертую работу назначен пятый механизм), поэтому в клетку (2,4) поместим  $x_{2,4} = 0$ . В дальнейшем  $x_{2,4}$  будем считать базисной переменной. Вычеркнем четвертый столбец.

Таблица 5.1

		$1^{(6)}$			$0^{(7)}$
	$1^{(9)}$		$0^{(2)}$		$0^{(10)}$
					$1^{(11)}$
	$0^{(8)}$			$1^{(3)}$	
			$1^{(1)}$		
$1^{(4)}$		$0^{(5)}$			

Шаг 3. Теперь максимальный элемент  $c_{4,5} = 27$ . В позицию (4,5) помещаем  $x_{4,5} = 1$ , вычеркнем пятый столбец и т. д.

После 11 шага получим пробный вариант назначения  $X_0$ :  $x_{1,3} = x_{2,2} = x_{3,6} = x_{4,5} = x_{5,4} = x_{6,1} = 1$ . Это означает, что первый механизм назначен на третью работу, второй — на вторую, третий — на шестую, четвертый — на пятую, пятый — на четвертую и шестой — на первую. Позиции (1,6), (2,4), (2,6), (4,2), (6,3) занимают базисные переменные, равные нулю, которые будем называть базисными нулями и обозначать числом нуль с двумя индексами, определяющими позицию в матрице  $X_0$ . В нашем случае запишем все базисные нули:  $0_{1,6}$ ,  $0_{2,4}$ ,  $0_{2,6}$ ,  $0_{4,3}$ ,  $0_{6,3}$ .

Суммарная эффективность, отвечающая полученному варианту назначения, равна  $23 + 15 + 14 + 27 + 30 + 26 = 135$  условных единиц эффективности.

Числа, стоящие в скобках над базисными переменными  $x_{ij}$ , означают номер шага, на котором они определяются. Например, элемент  $x_{4,2} = 0$  получен на 8-м шаге, ...,  $x_{3,6} = 1$  — на одиннадцатом (табл. 5.1).

Заметим, что указанный метод всегда приводит к допустимому расположению единиц и базисных нулей.

Далее, для пробного варианта назначения определяются потенциалы. Для этого каждой базисной паре индексов ставится в соответствие уравнение (5.9). Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_3 = 23, & \alpha_1 + \beta_6 = 23, & \alpha_2 + \beta_4 = 28, & \alpha_2 + \beta_6 = 14, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 15, & \alpha_3 + \beta_6 = 14, & \alpha_4 + \beta_2 = 20, & \alpha_4 + \beta_5 = 27, \\ \alpha_5 + \beta_4 = 30, & \alpha_6 + \beta_1 = 26, & \alpha_6 + \beta_3 = 26. \end{cases} \quad (5.11)$$

Одному из потенциалов зададим произвольное значение. Пусть  $\alpha_1 = 0$ . Остальные потенциалы определяются однозначно:  
 $\beta_3 = 23 - 0 = 23$ ,  $\beta_6 = 23 - 0 = 23$ ,  $\alpha_2 = 14 - 23 = -9$ ,  
 $\beta_2 = 15 + 9 = 24$ ,  $\beta_4 = 28 + 9 = 37$ ,  $\alpha_3 = 14 - 23 = -9$ ,  
 $\alpha_4 = 20 - 24 = -4$ ,  $\beta_5 = 27 + 4 = 31$ ,  $\alpha_5 = 30 - 37 = -7$ ,  
 $\alpha_6 = 26 - 23 = 3$ ,  $\beta_1 = 26 - 3 = 23$ . По мере вычисления,  $\alpha_i$  будем записывать слева от таблицы, а  $\beta_j$  — сверху (табл. 5.2).

Таблица 5.2

	23	24	23	37	31	23
0	15	19	23 <b>1</b>	27	10	23 <b>0</b>
-9	8	5		10	21	
-9	22	15 <b>1</b>	21	28 <b>0</b> +	14	14 <b>0</b> -
-9	-8		-7		8	
-4	5	8	5	21	6	14
-4	9	7	9	7	16	<b>1</b>
-7	13	20 <b>0</b>	7	24	27 <b>1</b>	18
-7	6		12	9		1
3	20	23	26	30 <b>1</b> -	22	27 +
3	-4	-6	-10		2	-11
3	26 <b>1</b>	20	26 <b>0</b>	14	12	22
3		7		26	22	4



Для всех небазисных пар индексов вычислим оценки по формуле (5.10), которые поместим в левый нижний угол незанятых клеток (табл. 5.2). Среди оценок имеются отрицательные, это означает, что выбранный вариант назначения не является оптимальным. Наименьшая из отрицательных оценок  $\gamma_{5,6} = -11$ . Строим цикл пересчета: (5,6), (2,6), (2,4), (5,4), замыкающийся на разрешающей клетке. Вычислим величину корректировки  $\rho_0 = \min \{0, 1\} = 0$ . Базисный нуль  $0_{2,6}$  перемещается в клетку (5,6), переменная  $x_{5,6} = 0$  включается в базис, а  $x_{2,6}$  выходит из базиса. Получим новую комбинацию расстановки единиц и базисных нулей, в которой все единицы остались на своих местах (табл. 5.3).

Таблица 5.3

	23	13	23	26	20	23
0	15	19	23 <b>1</b>	27	10	23 <b>0</b>
8	8	-6		-1	10	
2	22	15	21	28	14	14
3		<b>1</b> -	4	<b>0</b> +	8	11
5	5	8	5	21	6	14
-9	9	-4	9	-4	5	<b>1</b>
7	13	20	7	24	27	18
17		<b>0</b>	23	9	<b>1</b>	12
4	20	23	26	30	22	27
7				<b>1</b> -		<b>0</b>
4	7	-6	1		2	
3	26 <b>1</b>	20	26 <b>0</b>	14	12	22
		-4		15	11	4

Суммарная эффективность осталась прежней и составляет  $f_1 = 135$  единиц эффективности. Это означает, что в вырожденной задаче возможны холостые итерации, которые приводят к нулево-

му приращению функции. Заново вычисляем потенциалы. Для этого составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_3 = 23, & \alpha_1 + \beta_6 = 23, & \alpha_2 + \beta_2 = 15, & \alpha_2 + \beta_4 = 28, \\ \alpha_3 + \beta_6 = 14, & \alpha_4 + \beta_2 = 20, & \alpha_4 + \beta_5 = 27, & \alpha_5 + \beta_4 = 30, \\ \alpha_5 + \beta_6 = 27, & \alpha_6 + \beta_1 = 26, & \alpha_6 + \beta_3 = 26. \end{cases} \quad (5.12)$$

Одному из потенциалов зададим произвольное значение, например,  $\alpha_1$  положим равным нулю. Остальные потенциалы определяются однозначно из системы уравнений (5.12):  $\beta_3 = 23 - 0 = 23$ ,  $\beta_6 = 23 - 0 = 23$ ,  $\alpha_6 = 26 - 23 = 3$ ,  $\alpha_3 = 14 - 23 = -9$ ,  $\alpha_5 = 27 - 23 = 4$ ,  $\beta_1 = 26 - 3 = 23$ ,  $\beta_4 = 30 - 4 = 26$ ,  $\alpha_2 = 28 - 26 = 2$ ,  $\beta_2 = 15 - 2 = 13$ ,  $\alpha_4 = 20 - 13 = 7$ ,  $\beta_5 = 27 - 7 = 20$ . Потенциалы,  $\alpha_i$  записаны слева от таблицы, а  $\beta_j$  — сверху (табл. 5.3).

Далее вычислим оценки по формуле (5.10) и поместим их в левый нижний угол незанятых клеток (табл. 5.3). Имеются отрицательные оценки:  $\gamma_{1,2} = -6$ ,  $\gamma_{1,4} = -1$ ,  $\gamma_{3,2} = -4$ ,  $\gamma_{3,4} = -4$ ,  $\gamma_{5,2} = -6$ ,  $\gamma_{6,2} = -4$ . Назначение не оптимально. Среди отрицательных оценок наименьшими являются  $\gamma_{1,2} = -6$  и  $\gamma_{5,2} = -6$ . За разрешающую выберем коммуникацию (5,2). Величина корректировки  $\rho_1 = 1$ . Из двух «претендентов» на выход из базиса исключаем  $x_{2,2}$ , переменную  $x_{5,4} = 0$  оставим в базисе, поскольку  $c_{5,4} > c_{2,2}$ . Получим второй вариант назначения  $X_2$  (табл. 5.4).

Текущее значение функции составляет  $f_2 = 141$  ед. эффективности. Итерация результативная, приращение функции составляет 6 единиц. Положив  $\alpha_1 = 0$ , вычислим потенциалы  $\beta_3 = 23$ ,  $\beta_6 = 23$ ,  $\alpha_6 = 3$ ,  $\alpha_3 = -9$ ,  $\alpha_5 = 4$ ,  $\beta_1 = 23$ ,  $\beta_2 = 19$ ,  $\beta_4 = 26$ ,  $\alpha_4 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$  и  $\beta_5 = 26$  (табл. 5.4). Для незанятых клеток вычислим оценки:  $\gamma_{1,1} = 8$ ,  $\gamma_{1,2} = 0$ ,  $\gamma_{1,4} = -1$ ,  $\gamma_{1,5} = 16$ ,  $\gamma_{2,1} = 3$ ,  $\gamma_{2,2} = 6$ ,

$\gamma_{2,3}=4$ ,  $\gamma_{2,5}=14$ ,  $\gamma_{2,6}=11$ ,  $\gamma_{3,1}=9$ ,  $\gamma_{3,2}=2$ ,  $\gamma_{3,3}=9$ ,  $\gamma_{3,4}=-4$ ,  
 $\gamma_{3,5}=11$ ,  $\gamma_{4,1}=11$ ,  $\gamma_{3,3}=17$ ,  $\gamma_{4,4}=3$ ,  $\gamma_{4,6}=6$ ,  $\gamma_{5,1}=7$ ,  $\gamma_{5,3}=1$ ,  
 $\gamma_{5,5}=8$ ,  $\gamma_{6,2}=2$ ,  $\gamma_{6,4}=15$ ,  $\gamma_{6,5}=17$ ,  $\gamma_{6,6}=4$  (табл. 5.4).

Таблица 5.4

	23	19	23	26	26	23
0	15	19	23 <b>1</b>	27	10	23 <b>0</b>
	8	0		-1	16	
2	22	15	21	28 <b>1</b>	14	14
	3	6	4		14	11
-9	5	8	5	21	6	14
	9	2	9	-4	11	<b>1</b> -
1	13	20 <b>0</b>	7	24	27	18
	11		17	3	<b>1</b>	6
4	20	23 <b>1</b>	26	30 <b>0</b> -	22	27 <b>0</b> +
	7		1		8	
3	26 <b>1</b>	20	26 <b>0</b>	14	12	22
		2		15	17	4

Имеются отрицательные оценки — это  $\gamma_{1,4}=-1$ ,  $\gamma_{3,4}=-4$ . На значение не оптимально. Наименьшая из оценок  $\gamma_{3,4}=-4$ , клетку (3,4) объявляем разрешающей, строим цикл пересчета. Базисные переменные цикла образуют цепочку  $x_{3,6}=1$ ,  $x_{5,6}=0$ ,  $x_{5,4}=0$ . Тогда величина  $\rho_2=0$ . Нулевая переменная  $x_{3,4}$  включается в базис, а переменная  $x_{5,4}$  исключается из базиса. Вновь имеем дело с холостой итерацией. В новой базисной комбинации нулей и единиц изменилась комбинация базисных нулей, а единицы остались на своих местах.

Получим следующий вариант назначения  $X_3$  (табл. 5.5).

Таблица 5.5

	23	19	23	30	26	23
0	15	19	23	27	10	23
-2	8	0	21	3	16	14
-9	22	15	5	28	14	14
1	-1	2	0	21	10	7
4	5	8	9	6	14	18
3	9	2	7	11	27	6
	13	20	17	24	7	27
	11	0	26	30	22	27
	20	23	1	4	8	22
	7	1	26	14	12	22
	26	20	19	17	4	

Значение функции не изменилось, и по-прежнему  $f_3 = 141$  единице эффективности. Вычислим потенциалы и оценки (табл. 5.5).

Имеется единственная отрицательная оценка —  $\gamma_{2,1} = -1$ .  
 $\rho_3 = \min\{x_{2,4} = 1, x_{3,6} = 1, x_{1,3} = 1, x_{6,1} = 1\} = 1$ . Из базиса выводим клетку (3,6). Получим новый вариант назначения  $X_4$  (табл. 5.6).

Суммарная эффективность  $f_4 = 142$  единицы. Вычислим потенциалы и оценки (табл. 5.6). Отрицательных оценок нет. Назначение  $X_4$  оптимально, обозначим его через  $X_1^*$ . Оценка  $\gamma_{1,2} = 0$  соответствует небазисной клетке, поэтому  $X_1^*$  является одним из множества оптимальных вариантов назначения.



Таблица 5.6

	23	19	23	29	26	23
0	15	19	23 <b>0</b>	27	10	23 <b>1</b>
-1	8	0		2	16	
	22 <b>1</b>	15	21	28 <b>0</b>	14	14
-8		3	1		11	8
	5	8	5	21 <b>1</b>	6	14
	10	3	10		12	1
1	13	20 <b>0</b>	7	24	27 <b>1</b>	18
	11		17	6		6
4	20	23 <b>1</b>	26	30	22	27 <b>0</b>
	7		1	3	8	
3	26 <b>0</b>	20	26 <b>1</b>	14	12	22
		2		19	17	4

Итак, оптимальный вариант назначения имеет вид:  $x_{1,6}^* = 1$  (первый механизм назначен на шестую работу),  $x_{2,1}^* = 1$  (второй — на первую),  $x_{3,4}^* = 1$  (третий — на четвертую),  $x_{4,5}^* = 1$  (четвертый — на пятую),  $x_{5,2}^* = 1$  (пятый — на вторую),  $x_{6,3}^* = 1$  (шестой — на третью). Остальные переменные  $x_{ij}^* = 0$ . Максимальное значение функции  $f(X_1^*) = f_4 = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 c_{ij} x_{ij}^* = 23 + 22 + 21 + 27 + 23 + 26 = 142$  единицы.

**Пример 5.2.** Для задачи с матрицей эффективностей из примера 5.1 построить начальный вариант назначения методом Фогеля, оптимальный вариант найти методом потенциалов.

Таблица 5.7

15	19 $1^{(11)}$	23 $0^{(10)}$	27	10	23	1	4	4	0	0	0	4	4	4	4	4
22	15	21 $1^{(8)}$	28 $0^{(2)}$	14	14	1	6	6	1	1	1	1	6	6		
5	8	5	21 $1^{(1)}$	6	14	1	7									
13	20	7	24	27 $1^{(3)}$	18	1	3	3	7							
20	23 $0^{(9)}$	26	30	22 $0^{(4)}$	27 $1^{(5)}$	1	3	3	1	1	1	3	3	3	3	
26 $1^{(6)}$	20	26 $0^{(7)}$	14	12	22	1	0	0	0	0	0	0	0	6		
1	1	1	1	1	1											
4	3	0	2	5	4											
4	3	0	2	5	4											
4	3	0		5	4											
4	3	0		8	4											
4	3	0			4											
4	3	0														
	3	0														
	4	3														
	4	3														
	0	0														

**Решение.** Этап 1.

Шаг 1. В каждой строке матрицы эффективностей находим два элемента: максимальный  $c_{ij_1} = \max_{j \in N} c_{ij}$  и следующий по величине

$c_{ij_2} = \max_{j \in N \setminus j_1} c_{ij}$ . Вычислим разность между ними  $p_i = c_{ij_1} - c_{ij_2}$ ,

$i \in M$ :  $p_1 = c_{1,4} - c_{1,3} = 4$ ,  $p_2 = c_{2,4} - c_{2,1} = 6$ ,  $p_3 = c_{3,4} - c_{3,3} = 7$ ,

$p_4 = c_{4,5} - c_{4,4} = 3$ ,  $p_5 = c_{5,4} - c_{5,6} = 3$ ,  $p_6 = c_{6,4} - c_{6,3} = 0$ .

Для столбцов также находим максимальный элемент  $c_{i_1 j} = \max_{i \in M} c_{ij}$  и следующий по величине  $c_{i_2 j} = \max_{i \in M \setminus i_1} c_{ij}$ . Вычислим разность между ними  $q_j = c_{i_1 j} - c_{i_2 j}, j \in N$ :  $q_1 = c_{6,1} - c_{2,1} = 4$ ,  $q_2 = c_{5,2} - c_{6,2} = 3$ ,  $q_3 = c_{6,3} - c_{5,3} = 0$ ,  $q_4 = c_{5,4} - c_{2,4} = 2$ ,  $q_5 = c_{4,5} - c_{5,5} = 5$ ,  $q_6 = c_{5,6} - c_{1,6} = 4$ .

Шаг 2. Из чисел  $p_i$  и  $q_j$  выберем наибольшее:  $\max(p_i, q_j) = p_3 = 7$ . Максимальная эффективность в третьей строке равна  $c_{3,4} = 21$ , переменная  $x_{3,4} = \min(a_3 = 1, b_4 = 1) = 1$ . Вычеркнем третью строку, считая  $b_4^{(1)} = 0$ .

Этап 2. Шаг 1. Для невычеркнутых строк и столбцов пересчитываем разности  $p_i$  и  $q_j$ :  $p_1 = 4$ ,  $p_2 = 6$ ,  $p_4 = 3$ ,  $p_5 = 3$ ,  $p_6 = 0$ ,  $q_1 = c_{6,1} - c_{2,1} = 4$ ,  $q_2 = 3$ ,  $q_3 = 0$ ,  $q_4 = 2$ ,  $q_5 = 5$ ,  $q_6 = 4$ .

Шаг 2. Наибольшая разность равна  $p_2 = 6$ . Максимальная эффективность во второй строке находится в четвертом столбце:  $c_{2,4} = 28$ . Переменная  $x_{2,4} = \min(a_2^{(1)} = 1, b_4^{(1)} = 0) = 0$ ,  $a_2^{(2)} = 1$ ,  $b_4^{(2)} = 0$ . Вычеркнем четвертый столбец.

Шаги 1 и 2 повторяются до тех пор, пока останется не вычеркнутой только одна линия (строка или столбец). В данном случае в оставшейся части таблицы единицы или базисные нули определяются однозначно.

Последовательность построения начального варианта представлена в табл. 5.7. Как обычно, числа, стоящие в скобках над базисными переменными  $x_{ij}$ , означают номер шага, на котором они определяются. Метод Фогеля всегда приводит к допустимому расположению базисных переменных.

Значение функции, отвечающее полученному варианту назначения, равно  $19 + 21 + 21 + 27 + 27 + 26 = 141$  условной единице эффективности. Это ближе к оптимальному варианту назначений, по сравнению с предыдущим.

Таблица 5.8

	23	19	23	30	18	23
0	15	19	23	27	10	23
	8	<b>1</b>	<b>0</b>	3	8	0
-2	22	15	21	28	14	14
	-1	2	<b>1</b>	<b>0</b>	2	7
-9	5	8	5	21	6	14
	9	2	9	<b>1</b>	3	0
9	13	20	7	24	27	18
	19	8	25	15	<b>1</b>	14
4	20	23	26	30	22	27
	7	<b>0</b>	1	4	<b>0</b>	<b>1</b>
3	26	20	26	14	12	22
	<b>1</b>	2	<b>0</b>	19	9	3

Для проверки оптимальности полученного варианта назначения составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 19, & \alpha_1 + \beta_3 = 23, & \alpha_2 + \beta_3 = 21, & \alpha_2 + \beta_4 = 28, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 21, & \alpha_4 + \beta_5 = 27, & \alpha_5 + \beta_2 = 23, & \alpha_5 + \beta_5 = 22, \\ \alpha_5 + \beta_6 = 27, & \alpha_6 + \beta_1 = 26, & \alpha_6 + \beta_3 = 26. \end{cases} \quad (5.13)$$

Пусть  $\alpha_1 = 0$ , тогда последовательно вычислим остальные потенциалы:  $\beta_2 = 19$ ,  $\beta_3 = 23$ ,  $\alpha_2 = -2$ ,  $\alpha_6 = 3$ ,  $\alpha_5 = 4$ ,  $\beta_1 = 23$ ,  $\beta_5 = 18$ ,  $\beta_6 = 23$ ,  $\beta_4 = 30$ ,  $\alpha_3 = -9$  и  $\alpha_4 = 9$ . Найденные потенциалы  $\alpha_i$  поместим слева от таблицы, а  $\beta_j$  — сверху (табл. 5.8).

Для незанятых клеток вычислим оценки:  $\gamma_{1,1} = 8$ ,  $\gamma_{1,4} = 3$ ,  $\gamma_{1,5} = 8$ ,  $\gamma_{1,6} = 0$ ,  $\gamma_{2,1} = -1$ ,  $\gamma_{2,2} = 2$ ,  $\gamma_{2,5} = 2$ ,  $\gamma_{2,6} = 7$ ,  $\gamma_{3,1} = 9$ ,  $\gamma_{3,2} = 2$ ,  $\gamma_{3,3} = 9$ ,  $\gamma_{3,5} = 3$ ,  $\gamma_{3,6} = 0$ ,  $\gamma_{4,1} = 19$ ,  $\gamma_{4,2} = 8$ ,  $\gamma_{4,3} = 25$ ,



$\gamma_{4,4}=15$ ,  $\gamma_{4,6}=16$ ,  $\gamma_{5,1}=7$ ,  $\gamma_{5,3}=1$ ,  $\gamma_{5,4}=4$ ,  $\gamma_{6,2}=2$ ,  $\gamma_{6,4}=19$ ,  
 $\gamma_{6,5}=9$ ,  $\gamma_{6,6}=4$  (табл. 5.8).

Имеется единственная отрицательная оценка —  $\gamma_{2,1}=-1$ , значение не является оптимальным. Строим цикл пересчета, клетка (2,1) должна войти в базис. Величина корректировки  $\rho = \min\{x_{2,3}=1, x_{6,1}=1\}=1$ . Из базиса выводим клетку (2,3). Получим новый вариант назначения  $X_1$  (табл. 5.9).

Таблица 5.9

	23	19	23	29	18	23
0	15	19	23	27	10	23
	8	<b>1</b>	<b>0</b>	2	8	0
-1	22	15	21	28	14	14
		3	1	<b>0</b>	3	8
-8	5	8	5	21	6	14
	10	3	10	<b>1</b>	4	1
9	13	20	7	24	27	18
	19	8	25	14	<b>1</b>	14
4	20	23	26	30	22	27
	7	<b>0</b>	1	3	<b>0</b>	<b>1</b>
3	26	20	26	14	12	22
	<b>0</b>	2	<b>1</b>	18	9	4

Суммарная эффективность  $f_1=142$  единицы. Вычислим потенциалы и оценки (табл. 5.9). Отрицательных оценок нет, выбор  $X_1$  оптимален. Этот оптимальный вариант отличается от предыдущего, обозначим его  $X_2^*$ . Здесь иное расположение базисных переменных повлекло за собой изменение потенциалов и оценок.

Однако оценки остались положительными, что говорит об устойчивости оптимального решения.

### § 3. ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД

Рассмотрим задачу о назначениях с матрицей эффективностей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с постановкой этой задачи, решить ее — значит, иными словами, выбрать в матрице  $C$   $n$  элементов, по одному из каждой строки и каждого столбца так, чтобы сумма выбранных элементов, равная общей эффективности, соответствующей данному выбору, была наибольшей по сравнению с ее значениями при всех других таких выборах. Эту задачу можно свести к выбору  $n$  нулевых элементов, по одному в каждом столбце и каждой строке, в некоторой матрице с неотрицательными элементами, в которой в каждой строке и каждом столбце есть нули.

*Определение.* Две матрицы  $C$  и  $D$  назовем здесь эквивалентными, если одна из них получается из другой прибавлением к элементам каждой строки одного и того же числа (для разных строк эти числа могут быть разными) и прибавлением к элементам каждого столбца одного и того же числа (для разных столбцов эти числа могут быть различны)

$$d_{ij} = c_{ij} + \psi_i + \omega_j. \quad (5.14)$$

**Теорема 5.2.** (Эгервари). Множества оптимальных назначений двух задач выбора с эквивалентными матрицами совпадают.

*Доказательство.* Пусть матрица  $C$  эквивалентна матрице  $D$  и пусть  $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (n, j_n)$  — оптимальное назначение в задаче выбора с матрицей  $C$  (первый механизм назначается на  $j_1$ -ю рабо-

ту, второй — на  $j_2$ -ю и т. д.). Допустим, от противного, что для задачи с матрицей  $D$  это назначение не является оптимальным, т. е. есть такой другой выбор  $(1, j'_1), (2, j'_2), \dots, (n, j'_n)$ , что общая эффективность при этом выборе превышает общую эффективность при первом выборе:

$$d_{1,j'_1} + d_{2,j'_2} + \dots + d_{n,j'_n} > d_{1,j_1} + d_{2,j_2} + \dots + d_{n,j_n}.$$

Так как по условию  $d_{ij} = c_{ij} + \psi_i + \omega_j$ , то получаем отсюда

$$\begin{aligned} c_{1,j'_1} + \psi_1 + \omega_{j'_1} + c_{2,j'_2} + \psi_2 + \omega_{j'_2} + \dots + c_{n,j'_n} + \psi_n + \omega_{j'_n} > \\ c_{1,j_1} + \psi_1 + \omega_{j_1} + c_{2,j_2} + \psi_2 + \omega_{j_2} + \dots + c_{n,j_n} + \psi_n + \omega_{j_n}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\omega_{j'_1} + \omega_{j'_2} + \dots + \omega_{j'_n} = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} + \dots + \omega_{j_n}$ , т. к. и в том и в другом случае это сумма чисел, прибавляемых к различным столбцам матрицы  $C$ , только, может быть, записанных в разном порядке.

Поэтому получаем  $c_{1,j'_1} + c_{2,j'_2} + \dots + c_{n,j'_n} > c_{1,j_1} + c_{2,j_2} + \dots + c_{n,j_n}$ , что противоречит тому, что для задачи с матрицей  $C$  выбор  $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (n, j_n)$  — оптимальный.

Так как свойство эквивалентности матриц взаимное, то так же доказывается, что любой оптимальный выбор для задачи с матрицей  $D$  является и оптимальным выбором для задачи с матрицей  $C$ . Теорема доказана.

Приведенная теорема позволяет, если это требуется, переходить от данной задачи выбора с матрицей  $C$  к задаче выбора с любой другой матрицей  $D$ , при условии, что  $D$  эквивалентна  $C$ .

## Алгоритм венгерского метода

### 1. Предварительный этап

Шаг 1. Переходим от задачи на максимум к задаче на минимум, т. е.  $C \rightarrow -C$ . Теперь перейдем от задачи на минимум с матрицей  $-C$  к задаче на минимум с эквивалентной ей матрицей, которая

имела бы только неотрицательные элементы, и в каждой строке и каждом столбце которой было бы хотя бы по одному нулевому элементу. Для этого сначала из большего элемента каждого столбца матрицы  $C$  вычтем элементы того же столбца матрицы  $C$ , результат поместим на место вычитаемого:  $c_{ij}^{(1)} = \max_{1 \leq i \leq n} c_{ij} - c_{ij}, j = \overline{1, n}$ .

Получится неотрицательная матрица  $C_1$ , в каждом столбце которой есть хотя бы один нуль.

Шаг 2. Теперь вычтем из элементов каждой строки матрицы  $C_1$  минимальный элемент той же строки матрицы  $C_1$ , результат остается на месте уменьшаемых элементов:  $d_{ij} = c_{ij}^{(1)} - \min_{1 \leq j \leq n} c_{ij}^{(1)},$

$i = \overline{1, n}$ . Полученная матрица  $D$  и будет неотрицательной матрицей, в каждом столбце и в каждой строке которой есть хотя бы один нуль.

Наименьшее возможное значение суммы  $n$  элементов неотрицательной матрицы равно, очевидно, нулю. Таким образом, наша задача сводится теперь к выбору в матрице  $D$  или эквивалентной ей матрице с неотрицательными элементами  $n$  нулевых элементов, по одному в каждой строке и каждом столбце. Покажем, как это сделать. Неформальный смысл приводимого ниже алгоритма заключается в последовательных переходах от одного правильного неполного выбора нулей к другому, содержащему на один нуль больше, чем предыдущий, до тех пор, пока не получится полный правильный выбор. При этом на отдельных этапах может потребоваться переход к новой матрице, эквивалентной предыдущей.

Пусть уже проделаны предварительные преобразования матрицы эффективности  $C$  данной задачи и получена неотрицательная матрица  $D$ , содержащая хотя бы по одному нулевому элементу в каждой строке и каждом столбце. Приведем основной этап алгоритма решения задачи о назначениях.

## 2. Основной этап

1. Отмечаем звездочкой ( $0^*$ ) какой-нибудь нуль в первом столбце матрицы  $D$ ; отмечаем звездочкой какой-нибудь нуль во



втором столбце, не лежащий в той строке, в которой находится  $0^*$  из первого столбца (если такой нуль во втором столбце найдется); отмечаем звездочкой один из нулей третьего столбца, лежащий в строке, где нет еще нуля со звездочкой (если такой нуль в третьем столбце найдется) и т. д., пока не пройдем все столбцы матрицы.

Если число отмеченных звездочкой нулей равно  $n$ , то процесс окончен: места, занимаемые нулями со звездочкой, соответствуют  $n$  переменным  $x_{ij}$ , равным 1, в оптимальном варианте назначения.

Если нулей со звездочкой меньше  $n$ , то

2. Помечаем знаком «+» сверху столбцы матрицы, в которых есть  $0^*$ , и считаем эти столбцы занятыми.

В процессе решения будут появляться и занятые строки. Элементы, стоящие на пересечении незанятой строки и незанятого столбца, будем считать незанятыми; остальные элементы — занятыми.

Если в матрице нет незанятых нулей, то переходим к п. 5.

Если незанятые нули есть, то выбираем первый из них (просматривая поочередно строки слева направо), отмечаем его каким-нибудь промежуточным значком (например, штрихом —  $0'$ ). Если в его строке нет нуля со звездочкой, то переходим к п. 4; если в его строке  $0^*$  есть, то

3. Столбец, в котором находится  $0^*$ , лежащий в той же строке, что и только что отмеченный штрихом нуль, считаем снова незанятым и знак «+» сверху снимаем. Строку, в которой находится наш  $0'$ , объявляем занятой и помечаем знаком «+» справа. Возвращаемся к третьему абзацу п. 2.

4. Строим цепочку из нулей: начинаем с только что отмеченного штрихом нуля ( $0'$ ), идем по столбцу до  $0^*$ , от него по строке к  $0'$ , и т. д., пока это возможно. Цепочка оборвется на каком-то  $0'$  (возможно, на первом же  $0'$ ). Звездочки у нулей в цепочке снимаем, а вместо штрихов у нулей в цепочке ставим звездочки. Получим новый набор нулей со звездочкой, который содержит на один нуль больше, чем предыдущий набор.

Снимаем все пометки, кроме звездочек, и возвращаемся ко второму абзацу п. 1.

5. Находим минимальный элемент среди незанятых элементов матрицы (пусть он будет равен  $\varepsilon$ ) и вычитаем его из всех незанятых строк, а затем прибавляем ко всем занятым столбцам. Никакие пометки при этом не снимаются. Получается матрица, эквивалентная предыдущей, и содержащая незанятые нули. Возвращаемся к четвертому абзацу п. 2.

Рассмотрим пример использования алгоритма.

**Пример 5.3.** Найти оптимальный вариант назначений для задачи с матрицей эффективностей из примера 5.1.

**Решение.**

**Предварительный этап.**

Шаг 1. Наибольший элемент первого столбца матрицы  $C$  равен 26. Поэтому для получения элементов первого столбца матрицы  $C_1$  необходимо из 26 вычесть последовательно элементы первого столбца матрицы  $C$  и поместить полученные результаты на место вычитаемых элементов первого столбца исходной матрицы. Аналогично для получения столбцов 2, 3, 4, 5 и 6 матрицы  $C_1$  необходимо элементы соответствующих столбцов матрицы  $C$  вычесть из величин 23, 26, 30, 27 и 27. Получим матрицу:

$$C_1 = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 3 & 3 & 17 & 4 \\ 4 & 8 & 5 & 2 & 13 & 13 \\ 21 & 15 & 21 & 9 & 21 & 13 \\ 13 & 3 & 19 & 6 & 0 & 9 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 16 & 15 & 5 \end{vmatrix}.$$

Шаг 2. Наименьший элемент первой строки матрицы  $C_1$  равен 3. Для получения элементов первой строки матрицы  $D$  необходимо число 3 вычесть последовательно из каждого элемента первой

строки матрицы  $C_1$  и поместить полученные результаты на прежние места. Во второй строке из каждого элемента вычитаем число 2, в третьей — число 9. Строки 4, 5 и 6 не изменятся, т. к. минимальные элементы этих строк равны нулю.

**Основной этап.** После второго шага предварительного этапа получим неотрицательную матрицу  $D$ , эквивалентную матрице эффективности  $C$  :

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} + & \boxed{+} & + & + & + & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 6 & 1 & 0^* & 0 & 14 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 0^* & 11 & 11 \\ 12 & 6 & 12 & 0 & 12 & 4 \\ 13 & 3 & 19 & 6 & 0^* & 9 \\ 6 & 0^* & 0 & 0 & 5 & 0' \\ 0^* & 3 & 0 & 16 & 15 & 5 \end{array} \right\| + \end{array}$$

П. 1. В первом столбце матрицы  $D$  отмечаем звездочкой нуль, расположенный в шестой строке:  $0_{6,1}^*$ . Во втором столбце отмечаем звездочкой нуль, расположенный в пятой строке:  $0_{5,2}^*$ . В 3, 4 и 5 столбцах отмечаем звездочкой нули, расположенные соответственно в первой ( $0_{1,3}^*$ ), второй ( $0_{2,4}^*$ ) и четвертой строках ( $0_{4,5}^*$ ). В шестом столбце единственный нуль расположен в пятой строке, в которой уже есть  $0^*$  и поэтому, не может быть помечен звездочкой.

Число нулей со звездочкой меньше 6, переходим к п. 2.

П. 2. Помечаем знаком «+» сверху столбцы: 1, 2, 3, 4 и 5 и считаем эти столбцы занятыми. Незанятый нуль находится в пятой строке шестого столбца:  $0_{5,6}$ . Помечаем его штрихом  $0'_{5,6}$ . В пятой строке есть нуль со звездочкой — это  $0_{5,2}^*$ , переходим к п. 3.

П. 3. Знак «+» у второго столбца снимаем и вновь считаем его незанятым столбцом, а пятую строку считаем занятой и помечаем

знаком «+» справа. Снятие любого значка в дальнейшем условимся обводить в рамочку. Возвращаемся к третьему абзацу п. 2.

Незаняты нулей нет. Переходим к п. 5.

П. 5. Среди незанятых элементов выбираем минимальный:  $\varepsilon = 1$ . Сначала вычитаем  $\varepsilon$  из всех незанятых строк, а затем прибавляем ко всем занятым столбцам. Получается матрица  $D_1$ , эквивалентная предыдущей матрице, содержащая незанятые нули.

$$D_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boxed{+} & \boxed{+} & + & + \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 6 & 0' & 0^* & 0 & 14 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0^* & 11 & 10 \\ 12 & 5 & 12 & 0 & 12 & 3 \\ 13 & 2 & 19 & 6 & 0^* & 8 \\ 7 & 0^* & 1 & 1 & 6 & 0' \\ 0^* & 2 & 0' & 16 & 15 & 4 \end{array} \right\| \begin{array}{c} + \\ \\ \\ \\ + \\ + \end{array} \end{array}$$

Возвращаемся к четвертому абзацу п. 2.

П. 2. Незанятые нули находятся в первой строке второго и шестого столбцов:  $0_{1,2}$ ,  $0_{1,6}$ . Первый из них помечаем штрихом  $0'_{1,2}$ . В третьем столбце первой строки находится нуль со звездочкой. Третий столбец вновь считаем незанятым и знак «+» сверху снимаем, а первую строку объявляем занятой и помечаем знаком «+» справа. Незанятый нуль находится в освободившемся 3 столбце, в позиции (6,3). Помечаем  $0_{6,3}$  штрихом  $0'_{6,3}$  и считаем незанятым первый столбец, а 6-ю строку объявляем занятой. Незанятых нулей нет. Переходим вновь к пятому пункту.

П. 5. Теперь  $\varepsilon = 2$ . Вычитаем  $\varepsilon$  из незанятых строк: второй, третьей и четвертой, а затем прибавляем к занятым столбцам: четвертому и пятому. Получим матрицу  $D_2$ , в которой образовалось два незанятых нуля:  $0_{2,1}$  и  $0_{4,2}$ . Переходим к п. 2. Помечаем штри-



хом  $0'_{2,1}$ . Имеем два незанятых нуля:  $0_{3,4}$  и  $0_{4,2}$ . Первый из них помечаем штрихом  $0'_{3,4}$ . В третьей строке нет  $0^*$ , следовательно, переходим к п. 4.

П. 4. Строим цепочку из нулей. Начиная от только что отмеченного штрихом нуля ( $0'_{3,4}$ ), идем по столбцу до нуля со звездочкой ( $0^*_{2,4}$ ). От  $0^*_{2,4}$  идем по строке к  $0'_{2,1}$ . Затем по столбцу — до  $0^*_{6,1}$ , по строке — к  $0'_{6,3}$ , по столбцу — до  $0^*_{1,3}$ , по строке — к  $0'_{1,2}$ , по столбцу — до  $0^*_{5,2}$  и, наконец, по строке — до  $0'_{5,6}$ . Цепочка имеет вид:  $0'_{3,4}, 0^*_{2,4}, 0'_{2,1}, 0^*_{6,1}, 0'_{6,3}, 0^*_{1,3}, 0'_{1,2}, 0^*_{5,2}, 0'_{5,6}$ .

$$D_2 = \begin{array}{c} \boxed{+} \quad + \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 6 & 0' & 0^* & 2 & 16 & 0 \\ 0' & 3 & 1 & 0^* & 11 & 8 \\ 10 & 3 & 10 & 0' & 12 & 1 \\ 11 & 0 & 17 & 6 & 0^* & 6 \\ 7 & 0^* & 1 & 3 & 8 & 0' \\ 0^* & 2 & 0' & 18 & 17 & 4 \end{array} \right\| \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ + \\ + \end{array} \end{array}$$

Вносим изменения в цепочке: звездочки у нулей в цепочке снимаем, а вместо штрихов у нулей в цепочке ставим звездочки:

$$0^*_{3,4}, 0_{2,4}, 0^*_{2,1}, 0_{6,1}, 0^*_{6,3}, 0_{1,3}, 0^*_{1,2}, 0_{5,2}, 0^*_{5,6}.$$

Все пометки, кроме звездочек, снимаем. Получим новый набор  $0^*$ , который содержит на один  $0^*$  больше, чем предыдущий.

6	0*	0	2	16	0
0*	3	1	0	11	8
10	3	10	0*	12	1
11	0	17	6	0*	6
7	0	1	3	8	0*
0	2	0*	18	17	4

Процесс окончен, т. к. число нулей со звездочкой равно 6, что соответствует размерности матрицы эффективностей ( $n = 6$ ).

Оптимальный вариант назначений имеет вид:

$x_{1,2}^* = x_{2,1}^* = x_{3,4}^* = x_{4,5}^* = x_{5,6}^* = x_{6,3}^* = 1$ . Остальные переменные  $x_{ij}^* = 0$ . Это означает, что первый механизм назначается на вторую работу, второй механизм — на первую, третий — на четвертую, четвертый — на пятую, пятый — на шестую, шестой — на третью. При этом варианте назначений получим максимальную эффективность

$$f_{\max} = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 c_{ij} x_{ij}^* = 19 + 22 + 21 + 27 + 27 + 26 = 142 \text{ единицы.}$$

Заметим, что оптимальный вариант назначений, полученный венгерским методом, не совпадает с оптимальным вариантом назначений, который мы получили методом потенциалов в первом случае. Такое бывает, если существуют альтернативные оптимальные варианты. Значения функции при всех альтернативных вариантах должны совпадать. В нашей задаче во всех случаях суммарная эффективность составляет 142 единицы.

Кроме того, из оптимального варианта, полученного методом потенциалов, можно получить оптимальный вариант, который был получен венгерским методом, если в качестве разрешающей клетки выбрать (1,2).

Недостатком венгерского метода является то, что он позволяет находить только один оптимальный вариант, и для выявления альтернативных вариантов потребуется пройти весь путь решения задачи, возможно, от начала и до конца или прибегнуть к методу потенциалов. В последнем случае к полученным  $n$  единицам следует добавить  $n - 1$  базисных нулей так, чтобы базисные переменные не образовывали циклов. А затем, в случае необходимости, найти все альтернативные варианты назначения.

#### Пример 5.4 (задача о разборчивой невесте)

Ниже приведена матрица эффективности  $C_{n \times n}$ . Элементы этой матрицы представляют собой прогноз продолжительности жизни семей  $(i, j)$ , которые могут быть образованы через свадебное агентство. Необходимо выбрать оптимальную комбинацию, максимизирующую среднюю продолжительность семейной жизни. Задачу решить венгерским методом и методом потенциалов.

$$C = \begin{vmatrix} 24 & 14 & 17 & 10 & 19 \\ 28 & 13 & 26 & 13 & 22 \\ 32 & 23 & 28 & 16 & 25 \\ 21 & 31 & 35 & 26 & 34 \\ 29 & 14 & 25 & 12 & 21 \end{vmatrix}.$$

#### Решение.

1. Венгерский метод. Предварительный этап.

Шаг 1. Обозначим через  $r_j$  наибольший элемент столбца  $j$  матрицы  $C$  ( $r_1 = 32, r_2 = 31, r_3 = 35, r_4 = 26, r_5 = 34$ ). Каждый элемент  $j$ -го столбца вычтем из  $r_j$ , результаты вычислений будем помещать на место вычитаемого. Для 1-го столбца:

$$c'_{11} = r_1 - c_{11} = 32 - 24 = 8, \quad c'_{21} = 32 - 28 = 4, \quad c'_{31} = 32 - 32 = 0,$$

$$c'_{41} = 32 - 21 = 11, \quad c'_{51} = 32 - 29 = 3.$$

Аналогичные преобразования проводим в остальных столбцах. Получим неотрицательную матрицу  $C_1$ , в каждом столбце которой есть хотя бы один нуль.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 8 & 17 & 18 & 16 & 15 \\ 4 & 18 & 9 & 13 & 12 \\ 0 & 8 & 7 & 10 & 9 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & 10 & 14 & 13 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Преобразуем матрицу  $C_1$ . Для этого обозначим через  $s_i$  минимальный элемент строки  $i$ , который последовательно вычтем из элементов той же строки, результаты поместим на место уменьшаемого. Проведем вычисления для элементов первой строки:

$$d_{11} = c'_{11} - s_1 = 8 - 8 = 0, d_{12} = 17 - 8 = 9, d_{13} = 18 - 8 = 10,$$

$$d_{14} = 16 - 8 = 8, d_{15} = 15 - 8 = 7.$$

Такие же вычисления проведем для остальных строк, получим неотрицательную матрицу  $D$ , в каждом столбце и каждой строке которой есть хотя бы один нуль.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 10 & 8 & 7 \\ 0 & 14 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 8 & 7 & 10 & 9 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 7 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Основной этап.

П. 1. В первом столбце матрицы  $D$  отметим звездочкой  $0_{1,1}^*$ , во втором столбце —  $0_{4,2}^*$ . Нули  $0_{4,3}$ ,  $0_{4,4}$ ,  $0_{4,5}$  нельзя отметить звездочкой, т. к. они лежат в четвертой строке, в которой уже есть нуль со звездочкой. Число звездочек равно двум, что меньше размерности матрицы, переходим к п. 2.



П. 2. Столбцы (1 и 2), в которых находятся  $0^*$ , объявляем занятыми и помечаем знаком «+» сверху. Выпишем незанятые нули  $H = \{0_{4,3}, 0_{4,4}, 0_{4,5}\}$ . Первый из них отмечаем промежуточным знаком — штрихом, т. е.  $0'_{4,3}$ . В строке 4, где находится только что отмеченный штрихом нуль, есть  $0^*$  — это  $0^*_{4,2}$ , переходим к п. 3.

П. 3. Столбец 2 вновь считаем незанятым и знак «+» сверху снимаем (обводим в рамку), а четвертую строку объявляем занятой и помечаем знаком «+» справа. Возвращаемся к третьему абзацу п. 2.

П. 2. Незанятых нулей нет, переходим к п. 5.

$$D = \begin{array}{c} + \quad \boxed{+} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0^* & 9 & 10 & 8 & 7 \\ 0 & 14 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 8 & 7 & 10 & 9 \\ 11 & 0^* & 0' & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 7 & 11 & 10 \end{array} \right\| + \end{array} \quad H = \{0'_{4,3}, 0_{4,4}, 0_{4,5}\} \quad \varepsilon = 5 \quad \Rightarrow$$

П. 5. Среди незанятых элементов находим минимальный, который обозначим через  $\varepsilon$ , тогда  $\varepsilon = d_{2,3} = 5$ . Преобразуем матрицу  $D$ : незанятые элементы уменьшим на 5; дважды занятые увеличим на 5; остальные элементы оставим без изменения. Получим матрицу  $D_1$ , в которой имеются незанятые нули, переходим к четвертому абзацу п. 2.

$$D_1 = \begin{array}{c} + \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0^* & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & \textcircled{0'} & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 16 & 0^* & 0' & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 6 & 5 \end{array} \right\| + \end{array} \quad H = \{0'_{2,3}\} \quad C: 0'_{2,3} \rightarrow 0^*_{2,3} \Rightarrow$$

Отметим штрихом  $0'_{2,3}$ . В строке 2 нет  $0^*$ , переходим к п. 4.

П. 4. Строим цепочку из нулей. Начиная от только что отмеченного штрихом нуля ( $0'_{2,3}$ ), идем по столбцу до  $0^*$ . Но в третьем столбце нет  $0^*$ , поэтому в нашем случае цепочка состоит из одного элемента  $\Pi : 0'_{2,3}$ . В матрице такие цепочки обозначают так  $\oplus'$ . После преобразования в цепочке  $0'_{2,3}$  автоматически переходит в  $0^*_{2,3}$ .

Получим новый набор нулей со звездочкой ( $0^*$ ), который содержит на одну звездочку больше, чем предыдущий набор.

$$\begin{array}{c}
 + \quad \boxed{+} \quad + \\
 \left\| \begin{array}{ccccc}
 0^* & 4 & 5 & 3 & 2 \\
 0 & 9 & 0^* & 4 & 3 \\
 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\
 16 & 0^* & 0 & 0' & 0 \\
 0 & 9 & 2 & 6 & 5
 \end{array} \right\| +
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 H = \{0'_{4,4}\} \\
 \varepsilon = 2 \quad \Rightarrow
 \end{array}$$

Дальнейшее решение проводится без пояснений, т. к. все необходимые пояснения были сделаны ранее.

$$\begin{array}{c}
 \boxed{+} \quad \boxed{+} \\
 D_1 = \left\| \begin{array}{ccccc}
 0^* & 2 & 5 & 1 & 0' \\
 0' & 7 & 0^* & 2 & 1 \\
 0' & 1 & 2 & 3 & 2 \\
 18 & 0^* & 2 & 0' & 0 \\
 0 & 7 & 2 & 4 & 3
 \end{array} \right\| +
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 H = \{0'_{1,5}\} \\
 H = \{0'_{2,1}, 0_{3,1}, 0_{5,1}\} \\
 H = \{0'_{3,1}\} \\
 \Rightarrow \\
 \Pi : 0'_{3,1}, 0^*_{1,1}, 0'_{1,5} \Rightarrow 0^*_{3,1}, 0_{1,1}, 0^*_{1,5}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 + & \boxed{+} & + & & + \\
 \left\| \begin{array}{ccccc}
 0 & 2 & 5 & 1 & 0^* \\
 0 & 7 & 0^* & 2 & 1 \\
 0^* & 1 & 2 & 3 & 2 \\
 18 & 0^* & 2 & 0' & 0 \\
 0 & 7 & 2 & 4 & 3
 \end{array} \right\| + & H = \{0'_{4,4}\} \\
 & \varepsilon = 1 \Rightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \boxed{+} & & \boxed{+} & & \boxed{+} \\
 D_2 = \left\| \begin{array}{ccccc}
 0 & 1 & 5 & 0 & 0^* \\
 0' & 6 & 0^* & 1 & 1 \\
 0^* & 0' & 2 & 2 & 2 \\
 19 & 0^* & 3 & 0' & 1 \\
 0' & 6 & 2 & 3 & 3
 \end{array} \right\| + & H = \{0'_{1,4}, 0_{3,2}\}, & H = \{0'_{3,2}\} \\
 & H = \{0'_{2,1}, 0_{5,1}\}, & H = \{0'_{5,1}\} \\
 & \Pi: 0'_{5,1}, 0^*_{3,1}, 0'_{3,2}, 0^*_{4,2}, 0'_{4,4} \Rightarrow \\
 & 0^*_{5,1}, 0_{3,1}, 0^*_{3,2}, 0_{4,2}, 0^*_{4,4}
 \end{array}$$

$$\left\| \begin{array}{ccccc}
 0 & 1 & 5 & 0 & 0^* \\
 0 & 6 & 0^* & 1 & 1 \\
 0 & 0^* & 2 & 2 & 2 \\
 19 & 0 & 3 & 0^* & 1 \\
 0^* & 6 & 2 & 3 & 3
 \end{array} \right\|.$$

Процесс окончен, т. к. число нулей со звездочкой равно размерности матрицы эффективности. Оптимальный вариант выбора (1,5) (2,3) (3,2) (4,4) (5,1). Это значит, что первая невеста выбрала в мужья пятого жениха, вторая — третьего, третья — второго, четвертая — четвертого, пятая — первого. При этом максимальная суммарная эффективность (суммарная продолжительность жизни

всех семей) будет равна  $c_{15} + c_{23} + c_{32} + c_{44} + c_{51} = 19 + 26 + 23 + 26 + 29 = 123$  года (единицы эффективности).

Отсюда следует, что средняя продолжительность жизни каждой семьи составит величину, равную  $\bar{c}_{ij} = 24,6$  года.

## 2. Метод потенциалов.

Начальный вариант выбора  $X_0$  найдем методом Фогеля (табл. 5.10).

$X_0$

Таблица 5.10

24 <b>1</b> <sup>(4)</sup>	14	17	10	19	1	5	5	5	5	—	—	—
28	13	26 <b>1</b> <sup>(7)</sup>	13	22	1	2	2	2	2	2	2	4
32 <b>0</b> <sup>(5)</sup>	23 <b>1</b> <sup>(3)</sup>	28	16	25	1	4	4	4	4	4	—	—
21	31	35	26 <b>1</b> <sup>(1)</sup>	34 <b>0</b> <sup>(2)</sup>	1	1	1	—	—	—	—	—
29 <b>0</b> <sup>(6)</sup>	14	25 <b>0</b> <sup>(8)</sup>	12	21 <b>1</b> <sup>(9)</sup>	1	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1								
Этап 1	3	8	7	10	9							
Этап 2	3	8	7	—	9							
Этап 3	3	9	2	—	3							
Этап 4	3	—	2	—	3							
Этап 5	3	—	2	—	3							
Этап 6	1	—	1	—	1							
Этап 7	—	—	1	—	1							

Этап 1. Шаг 1. Для каждой линии вычислим разность между максимальным элементом и следующим по величине ( $p_i$  для строк и  $q_j$  для столбцов):  $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 2$ ,  $p_3 = 4$ ,  $p_4 = 1$ ,  $p_5 = 4$ ,  $q_1 = 3$ ,



$q_2 = 8$ ,  $q_3 = 7$ ,  $q_4 = 10$ ,  $q_5 = 9$ . Разности  $p_i$  поместим справа от таблицы, а  $q_j$  — снизу под таблицей.

Шаг 2. Наибольшая разность соответствует четвертому столбцу, в котором максимальная эффективность содержится в ячейке (4,4). Четвертая невеста выходит замуж за четвертого жениха, присваиваем переменной  $x_{4,4}$  значение 1 и вычеркиваем четвертый столбец.

Этап 2. Шаг 1. Пересчитываем разности  $p_i$  и  $q_j$ :  $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 2$ ,  $p_3 = 4$ ,  $p_4 = 1$ ,  $p_5 = 4$ ,  $q_1 = 3$ ,  $q_2 = 8$ ,  $q_3 = 7$ ,  $q_5 = 9$ .

Шаг 2. В новом наборе наибольшая разность находится в пятом столбце, а максимальная эффективность этого столбца содержится в ячейке (4,5). Но четвертая невеста уже сыграла свою свадьбу, поэтому присваиваем значение 0 переменной  $x_{4,5}$ . Исключим из рассмотрения четвертую невесту.

Этап 3. Шаг 1. Пересчитываем разности  $p_i$  и  $q_j$ :  $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 2$ ,  $p_3 = 4$ ,  $p_5 = 4$ ,  $q_1 = 3$ ,  $q_2 = 9$ ,  $q_3 = 2$ ,  $q_5 = 3$ .

Шаг 2. В третьем наборе наибольшая разность находится во втором столбце, а максимальная эффективность этого столбца содержится в ячейке (3,2). Третья невеста еще не сыграла свою свадьбу, второй жених свободен, поэтому присваиваем значение 1 переменной  $x_{3,2}$ . Исключим из рассмотрения второго жениха.

На четвертом этапе особенностей нет, присваиваем переменной  $x_{1,1}$  значение 1 и вычеркнем первую невесту.

Этап 5. Шаг 1. Пятый набор разностей  $p_i$  и  $q_j$ :  $p_2 = 2$ ,  $p_3 = 4$ ,  $p_5 = 4$ ,  $q_1 = 3$ ,  $q_3 = 2$ ,  $q_5 = 3$ .

Шаг 2. Наибольшие разности находятся в третьей и пятой строках, максимальная эффективность в пятой строке равна 29, а в третьей — 32, которая соответствует ячейке (3,1). Но третья невеста уже сыграла свою свадьбу, первый жених также сыграл свою свадьбу, поэтому присваиваем значение 0 переменной  $x_{3,1}$ . Исключим из рассмотрения третью невесту.

Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не определим начальный вариант выбора (табл. 5.10). Номер шага, на котором были получены базисные переменные, указаны в скобках. Соответствующее значение целевой функции равно

$$f_0 = 24 + 26 + 23 + 26 + 21 = 120.$$

Вариант выбора  $X_0$  проверим на оптимальность. Для этого вычислим потенциалы и оценки.

Таблица 5.11

	24	15	20	8	16
0	24 - 1	14 1	17 3	10 -2	19 -3 +
6	28 2	13 8	26 1	13 1	22 0
8	32 0	23 1	28 0	16 0	25 -1
18	21 21	31 2	35 3	26 1	34 0
5	29 0 +	14 6	25 0	12 1	21 1 -

Среди оценок имеются отрицательные, выбранный вариант можно улучшить. Наименьшая из отрицательных оценок —  $\gamma_{1,5}^{(0)} = -3$ . Строим цикл пересчета, замыкающийся на разрешающей клетке (1,5). Определяем величину корректировки  $\rho_0 = \min(1, 1) = 1$  и вносим изменение в вариант выбора  $X_0$ : переменную  $x_{1,5}$  вводим в базис, а  $x_{5,5}$  исключаем из базиса. Получаем новый вариант выбора  $X_1$  (табл. 5.12).

$X_1$ 

Таблица 5.12

	24	15	20	11	19
0	24 <b>0</b>	14 1	17 3	10 1	19 <b>1</b>
6	28 2	13 8	26 <b>1</b>	13 4	22 3
8	32 <b>0</b>	23 <b>1</b>	28 0	16 3	25 2
15	21 18	31 -1	35 0	26 <b>1</b>	34 <b>0</b>
5	29 <b>1</b>	14 6	25 <b>0</b>	12 4	21 3

Значение функции  $f_1 = 123$ . Вновь вычисляем потенциалы и оценки. Имеется отрицательная оценка:  $\gamma_{4,2}^{(1)} = -1$ , вариант выбора не оптимален. Строим цикл пересчета: (4,2) (3,2) (3,1) (1,1) (1,5) (4,5). Определяем величину корректировки  $\rho_1 = \min(1, 0, 0) = 0$  и вносим изменение в вариант выбора  $X_1$ : переменную  $x_{4,2}$  вводим в базис с нулевым значением, а из двух претендентов на выход из базиса исключаем  $x_{1,1}$ .

Получим новый вариант выбора  $X_2$  (табл. 5.13). Очередная корректировка оказалась не результативной, значение функции  $f_2 = 123$  осталось прежним. Вычислив потенциалы и оценки, убеждаемся в том, что  $X_2$  является оптимальным вариантом выбора. Оптимальный набор положительных базисных переменных имеет вид:  $x_{1,5} = x_{2,3} = x_{3,2} = x_{4,4} = x_{5,1} = 1$ . Это означает, что первая невеста выбрала в мужья пятого жениха, вторая вышла замуж за третье-

го, третья — за второго, четвертая — за четвертого, пятая — за первого. При этом максимальная суммарная продолжительность жизни всех семей будет равна  $c_{1,5} + c_{2,3} + c_{3,2} + c_{4,4} + c_{5,1} = 123$  года (единицы эффективности). Прогноз средней продолжительности жизни каждой семьи, образованной через свадебное агентство, составит величину, равную  $\bar{c}_{ij} = 24,6$  года. Результат совпадает с результатом, который был получен венгерским методом.

$X_2$

Таблица 5.13

	25	16	21	11	19
0	24 1	14 2	17 4	10 1	19 <b>1</b>
5	28 2	13 8	26 <b>1</b>	13 3	22 2
7	32 <b>0</b>	23 <b>1</b>	28 0	16 2	25 1
15	21 19	31 <b>0</b>	35 1	26 <b>1</b>	34 <b>0</b>
4	29 <b>1</b>	14 6	25 <b>0</b>	12 3	21 2

На одной учебной задаче невозможно определить преимущество того или иного метода. Задача выбора является частной моделью транспортной задачи, в которой  $m = n$  и  $a_i = b_j = 1$ . Существуют разные постановки задачи целераспределения, сводящиеся к задаче выбора и к транспортной задаче.



## Задачи 701–800

Ниже приведены таблицы, в которых проставлены элементы матрицы эффективностей  $c_{ij}$ , задачи о разборчивой невесте. Необходимо найти оптимальный вариант выбора, при котором средняя продолжительность семейной жизни каждой семьи будет наибольшей. Решить задачу методом потенциалов и венгерским методом.

**701**

28	40	27	33	29	25	9
39	26	5	37	30	24	38
17	49	37	39	38	31	13
16	35	1	29	32	14	30
41	43	32	38	23	28	33
44	22	20	35	47	34	46
17	40	19	36	40	11	35

**702**

27	45	27	38	45	36	38
31	42	22	29	39	29	31
33	39	26	41	43	34	28
46	53	12	49	30	33	44
36	43	25	31	44	36	26
35	38	19	40	41	25	32
40	14	32	43	48	41	42

**703**

51	44	48	9	6	52	7
12	37	18	46	24	8	29
20	30	23	42	32	10	41
34	21	11	46	34	44	16
49	14	40	50	43	36	53
25	17	28	45	33	22	31
13	31	35	39	27	15	46

**704**

22	28	43	33	37	39	35
35	20	53	40	36	46	44
25	19	42	23	34	31	31
30	36	49	47	42	28	43
23	25	38	26	35	37	14
15	19	34	32	33	33	21
31	21	44	39	39	41	34

**705**

26	31	3	15	32	23	10
28	12	7	47	44	48	50
51	43	45	20	38	37	32
22	41	14	9	3	6	18
16	38	25	31	36	30	41
29	39	5	24	16	35	39
11	40	13	8	21	28	17

**706**

10	21	42	25	33	17	7
34	14	50	40	53	30	19
28	38	48	11	27	36	23
47	51	45	6	15	49	43
13	24	38	32	52	8	12
41	26	44	29	37	46	35
8	39	40	16	31	22	9

707

35	40	41	31	6	35	42
23	45	43	22	30	36	39
49	47	45	30	31	40	47
38	43	42	35	15	41	43
53	52	48	21	30	47	41
39	13	40	26	25	39	29
47	50	43	45	37	50	51

708

2	43	41	24	34	9	41
31	35	28	27	24	29	31
40	45	40	37	33	38	46
33	38	35	28	20	35	33
25	39	36	26	25	32	41
46	21	49	13	40	30	51
43	47	32	45	31	48	49

709

18	20	9	22	15	1	20
24	3	16	33	39	6	31
22	21	28	13	40	32	19
19	2	11	27	21	37	35
25	12	5	37	32	41	28
10	30	38	43	7	46	45
4	26	14	35	53	48	47

710

39	31	12	44	49	48	9
11	27	31	22	21	20	49
35	26	13	23	47	19	50
5	6	25	24	34	8	49
26	29	30	33	17	18	53
27	28	14	15	16	45	52
40	38	43	32	43	46	51

711

14	44	18	31	9	35	12
27	41	29	40	21	38	23
47	39	49	33	51	45	53
5	43	38	8	19	41	24
38	48	42	50	44	52	25
28	46	17	42	20	46	22
15	40	7	32	10	39	13

712

40	47	53	13	38	23	18
9	20	35	21	28	24	22
11	32	6	17	30	12	19
27	31	15	39	38	3	25
14	40	30	48	42	45	39
25	40	16	42	40	27	32
30	31	44	37	38	16	24

713

43	25	39	46	41	39	40
41	19	29	45	23	37	39
30	21	25	42	42	36	27
45	27	41	47	40	38	39
37	26	40	44	22	26	41
33	27	42	52	54	49	52
53	37	50	30	40	38	42

714

32	29	20	36	41	22	44
31	28	21	24	32	27	36
34	16	28	29	30	25	42
32	27	24	26	35	30	37
48	47	39	44	51	47	16
25	31	19	26	37	23	39
46	34	27	28	49	29	50

715

32	22	30	40	21	2	17
40	32	41	30	26	17	43
24	20	31	35	30	21	27
25	27	36	45	37	31	34
35	30	40	46	30	25	36
40	33	46	53	37	41	43
44	25	44	27	47	38	49

716

24	3	32	11	29	4	13
4	40	17	37	5	19	21
14	31	25	26	20	9	8
19	35	30	31	23	15	10
6	26	24	15	18	2	5
22	37	31	34	25	16	17
16	33	28	31	24	13	12

717

48	41	32	29	37	42	48
44	15	24	37	32	44	51
43	40	28	29	26	37	42
40	27	18	28	20	30	36
42	38	25	29	24	36	39
46	49	35	10	39	43	28
45	32	22	31	33	20	37

718

30	11	33	41	17	32	28
23	20	35	7	24	5	25
40	37	47	10	42	18	32
4	26	38	49	46	43	35
27	19	6	40	21	15	30
20	13	26	31	22	31	28
16	14	30	9	29	32	26

719

33	27	3	14	38	47	13
8	32	22	31	5	48	41
21	7	2	21	33	44	20
4	16	36	15	12	49	28
10	24	34	17	36	46	19
33	40	11	41	6	42	48
18	23	43	29	46	53	9

720

34	40	41	43	27	37	25
25	34	31	38	16	28	23
43	51	49	53	29	18	38
30	42	35	41	25	35	22
34	44	45	48	30	40	35
29	36	27	37	19	33	24
40	45	40	38	36	42	39

721

6	9	31	20	11	30	53
15	23	46	39	38	13	37
5	8	26	49	47	35	43
52	16	12	35	7	51	50
34	44	21	27	22	45	29
40	19	23	33	25	36	42
24	25	31	41	28	26	32

722

19	21	25	17	25	44	35
30	31	26	28	25	38	36
43	27	27	13	22	41	29
14	6	17	8	5	33	21
10	38	41	10	18	26	20
51	16	26	43	36	50	14
23	19	24	34	18	33	32

723

8	26	18	31	16	24	12
14	20	9	10	34	29	15
5	30	27	42	47	19	39
28	19	37	13	40	21	46
33	50	23	32	45	51	53
44	11	41	52	25	48	6
7	38	36	17	43	35	22

724

46	41	39	48	41	45	49
44	42	40	38	34	37	46
28	8	33	30	25	18	39
26	29	31	25	16	21	28
51	52	53	46	35	34	21
31	27	31	28	20	15	31
30	34	20	31	18	26	35



725

6	9	13	5	21	18	9
7	8	7	41	5	9	5
11	7	9	27	11	14	45
51	48	31	34	28	14	7
17	27	8	29	36	39	44
48	33	31	9	10	13	48
12	7	24	21	29	7	19

726

31	23	27	24	28	40	51
38	22	36	36	29	48	41
30	20	25	28	28	39	32
36	18	25	15	27	45	35
19	21	20	29	18	35	27
47	38	41	49	43	50	45
28	14	15	24	23	37	30

727

37	35	31	33	25	46	38
40	48	50	46	53	41	43
44	32	47	51	44	49	33
25	28	33	35	33	35	13
19	40	42	29	30	43	31
21	36	24	37	42	40	29
30	37	38	39	38	39	26

728

13	45	3	7	18	43	14
8	49	17	27	38	37	42
21	53	6	49	44	50	48
10	48	9	30	19	41	40
41	11	45	47	51	23	52
16	46	24	40	31	33	49
34	50	20	37	32	38	25

729

41	43	46	40	48	37	45
33	38	30	34	50	29	49
34	24	29	38	41	30	36
42	52	36	36	49	46	54
14	12	43	40	47	27	41
36	31	32	38	42	29	15
50	33	53	51	52	43	39

730

6	38	11	20	29	31	17
15	41	33	34	5	21	12
27	39	20	16	25	11	15
38	36	37	7	39	30	12
52	47	50	22	28	19	46
13	40	22	31	9	15	21
23	44	39	51	53	43	5

731

5	7	6	8	16	25	13
44	45	40	41	43	33	29
21	11	15	42	28	50	47
36	35	39	12	20	10	44
14	26	22	19	32	18	48
37	34	23	46	52	53	49
27	17	38	51	9	31	30

732

30	36	11	42	49	48	51
13	26	10	32	38	33	43
15	12	31	29	36	17	40
18	23	35	6	20	5	46
27	8	44	24	43	14	48
28	33	29	5	29	13	34
50	52	53	28	25	39	21

733

7	18	23	9	25	6	11
3	27	5	12	17	28	5
5	43	8	53	1	45	16
15	32	15	14	18	9	8
6	26	36	23	36	14	17
48	8	51	29	50	41	46
4	21	37	42	35	19	13

734

11	16	22	23	19	39	17
35	28	35	42	25	27	12
27	21	38	15	22	20	21
38	33	48	45	29	15	41
37	31	22	44	24	46	12
29	19	34	24	16	42	23
26	17	36	18	53	50	47

735

6	12	29	24	44	11	17
30	27	31	21	45	26	43
8	34	38	36	40	21	9
12	45	27	29	42	31	9
28	19	53	47	50	10	46
50	52	19	13	48	42	49
4	13	20	7	28	41	5

736

7	9	43	34	9	5	41
16	28	40	42	22	38	20
23	29	42	30	12	15	27
46	50	35	42	33	52	53
14	13	38	44	33	47	25
17	22	37	25	10	20	17
11	37	45	53	48	19	26

737

44	52	29	25	49	38	35
23	47	4	22	34	39	40
50	40	43	38	26	51	48
33	37	14	6	16	27	20
15	35	18	20	8	28	19
32	42	11	13	20	5	27
24	6	14	17	29	25	10

738

5	10	6	19	40	21	35
42	43	28	50	51	49	29
7	24	23	5	47	33	30
35	6	39	36	43	8	22
9	20	34	14	41	15	36
49	53	52	17	38	18	45
22	12	26	29	46	41	13

739

36	33	32	42	38	29	39
33	13	16	21	37	34	42
29	6	10	11	40	42	14
35	24	23	7	8	12	4
27	11	41	52	19	51	49
37	51	18	35	50	53	36
34	36	25	46	9	39	34

740

40	42	29	39	42	38	38
46	53	45	48	39	51	31
42	46	36	23	19	37	42
35	26	18	30	31	18	22
44	48	40	33	37	34	46
43	37	42	39	22	20	47
47	22	49	21	50	6	52

741

38	25	12	37	40	19	30
41	16	39	11	42	35	18
14	49	15	38	40	53	10
50	43	51	44	45	21	41
27	13	33	18	38	19	8
18	36	23	5	43	17	21
41	15	10	8	39	28	9

742

5	47	15	42	7	13	17
37	49	38	18	35	27	26
48	22	6	14	45	39	34
50	24	41	46	11	40	20
21	25	23	10	12	29	44
8	51	31	43	33	9	30
52	19	53	16	32	36	28

743

10	15	18	51	52	36	50
53	47	43	42	35	48	24
24	25	18	44	16	15	49
21	22	23	17	7	6	45
37	26	13	27	10	28	41
4	12	25	32	33	9	34
11	7	30	39	18	33	44

744

53	10	13	42	48	41	39
28	37	47	27	14	19	23
49	4	31	40	20	30	43
52	10	7	15	33	48	12
22	50	9	5	32	46	32
51	17	46	11	21	34	37
18	16	38	18	25	38	24

745

27	16	21	5	42	23	18
14	25	35	17	50	40	9
19	30	9	30	47	18	14
11	7	20	31	41	36	22
17	21	22	15	40	8	17
29	35	39	42	18	46	34
15	20	24	29	39	19	10

746

33	32	34	44	23	44	34
28	30	14	37	3	36	11
39	45	43	45	30	41	38
30	30	27	38	23	37	26
29	29	22	32	22	39	30
37	36	32	44	21	46	36
35	41	40	51	37	52	44

747

16	50	10	23	27	15	8
47	7	39	13	36	28	22
24	35	43	45	20	6	34
38	19	44	5	12	31	49
21	33	9	41	48	25	11
29	18	32	53	46	3	26
30	40	37	14	42	17	4

748

40	44	47	35	33	17	23
39	13	13	7	24	38	5
34	19	25	4	15	32	42
38	28	10	21	35	43	22
32	14	30	36	31	16	46
28	6	20	29	12	38	37
26	29	11	41	45	49	50



749

19	21	25	17	31	44	35
30	31	26	28	25	50	26
43	27	17	13	22	41	18
14	6	27	8	5	43	15
10	38	41	10	18	26	50
9	13	20	33	51	53	29
35	25	16	24	27	38	30

751

17	23	7	51	45	29	9
20	38	49	41	33	24	13
35	16	11	4	5	22	44
19	43	18	47	30	53	6
27	14	31	28	42	50	32
15	8	36	52	25	21	48
3	39	40	12	46	34	37

753

18	25	7	19	23	28	35
3	24	29	21	24	17	15
14	26	11	2	12	31	44
49	6	31	10	5	45	51
14	23	2	40	25	27	40
18	25	29	37	28	32	42
39	28	36	48	37	30	20

750

14	18	46	22	51	38	9
21	23	8	44	33	2	40
10	6	35	46	42	15	27
25	3	22	31	19	17	15
36	17	29	49	1	29	5
7	43	53	11	20	45	48
50	38	4	32	37	12	47

752

40	25	41	44	21	31	35
33	20	37	52	46	48	42
46	36	38	37	29	40	37
48	28	33	48	26	35	40
36	35	37	40	37	33	36
53	45	51	49	24	37	31
37	26	30	35	22	31	32

754

4	18	26	11	29	19	5
35	21	39	43	8	38	22
9	24	15	34	47	30	14
12	33	41	3	25	20	45
27	51	23	31	17	42	10
37	6	50	46	40	36	49
16	44	32	13	48	28	7

755

35	46	38	35	45	47	37
44	53	45	32	21	40	50
27	22	16	34	34	39	29
14	36	31	30	28	38	33
31	27	32	40	37	43	39
18	5	35	47	51	49	42
33	46	23	17	41	45	24

756

7	14	13	32	2	26	9
36	3	37	33	27	38	25
28	42	8	41	20	40	19
35	21	34	1	11	39	17
10	44	15	22	8	30	6
45	5	43	12	46	23	29
18	47	16	48	31	4	24

757

2	32	53	25	44	45	49
42	47	33	6	16	14	50
31	4	21	46	7	39	26
10	24	11	38	12	13	19
29	37	14	23	40	3	41
9	22	48	34	8	27	18
30	20	17	28	36	35	46

758

15	39	28	11	41	18	5
36	37	48	38	17	50	42
16	51	19	42	46	25	52
33	9	39	26	8	39	47
6	27	29	22	35	3	14
20	30	40	4	44	21	35
23	10	35	13	43	34	12

759

4	2	27	15	37	23	9
19	30	43	46	10	44	45
42	49	1	22	52	18	33
3	39	11	36	45	8	24
21	28	28	16	47	26	14
24	31	21	29	13	28	6
12	29	20	17	7	40	25

760

51	47	10	30	44	22	38
29	21	22	27	10	43	3
6	42	35	39	34	45	26
25	14	18	21	23	47	15
4	36	21	36	31	13	41
40	11	33	7	35	37	19
9	20	50	45	46	48	53

761

37	21	3	39	11	27	40
30	10	1	34	10	7	34
42	47	35	43	44	33	38
44	49	37	38	16	15	45
24	2	14	41	46	36	48
23	33	26	40	4	22	38
8	39	13	42	26	18	37

762

31	38	16	28	11	33	32
33	40	2	35	20	28	37
23	49	53	48	46	40	45
29	48	18	45	51	42	46
38	44	30	42	49	39	38
35	42	29	17	12	6	31
36	26	30	28	40	36	7

763

13	1	7	38	27	41	2
3	14	39	17	8	29	13
12	37	4	18	21	31	10
34	23	28	22	35	34	39
43	16	22	12	5	36	19
26	33	31	25	40	41	36
44	53	46	39	20	49	39

764

24	39	26	22	33	38	45
25	32	20	15	28	34	40
38	41	30	37	39	45	19
18	35	26	13	22	17	52
24	29	15	10	7	3	37
17	31	12	9	23	30	33
35	40	19	15	8	16	25

765

12	19	27	42	8	40	39
6	41	7	30	38	45	11
17	5	31	35	2	43	14
1	32	30	22	35	36	33
29	31	43	12	10	46	9
10	53	27	49	16	48	20
34	4	47	15	50	18	52

766

23	4	35	6	22	8	9
15	25	39	12	16	26	31
38	49	47	51	53	19	23
28	34	41	37	5	10	11
13	17	44	22	27	32	35
16	26	31	42	52	50	43
20	30	46	37	48	34	40

767

29	44	51	20	52	43	50
44	42	33	37	34	39	40
39	32	38	40	19	13	29
40	33	35	28	26	32	10
45	22	28	30	34	36	43
47	48	53	49	17	25	49
37	21	35	14	33	30	25

768

24	7	29	22	2	33	11
12	34	18	39	15	33	26
4	44	43	8	51	5	17
27	13	6	32	42	28	48
19	31	21	14	37	20	10
36	1	30	45	3	46	53
25	35	9	30	41	16	47

769

45	18	44	33	36	32	21
27	38	28	32	22	29	4
35	32	16	31	8	39	42
52	10	51	9	49	47	17
26	19	33	34	30	1	33
43	25	41	35	2	44	46
34	48	14	37	45	23	53

770

4	37	26	4	36	19	16
31	46	2	13	40	52	38
17	24	14	9	33	17	30
28	7	13	2	39	5	10
5	41	24	16	37	27	22
3	25	18	36	38	11	32
53	21	34	49	33	15	36

771

13	15	41	39	34	17	45
24	2	27	15	5	28	44
1	18	4	11	26	15	38
9	20	31	34	40	12	43
28	29	43	33	42	37	48
10	14	9	53	50	52	37
39	53	50	39	2	30	42

772

6	18	39	49	43	52	38
35	32	50	42	4	27	44
31	34	3	13	48	37	30
46	24	32	53	41	22	11
14	33	36	21	26	23	13
10	16	19	51	20	17	12
15	5	28	49	25	7	8



773

49	37	35	36	38	39	33
13	23	50	48	47	32	21
35	26	32	28	30	31	23
3	28	33	6	15	32	20
12	30	25	41	20	36	29
29	7	41	40	14	35	25
24	23	28	4	33	29	20

774

43	35	42	39	37	11	19
2	26	23	10	47	49	41
30	12	31	46	33	25	8
3	25	9	41	34	40	29
38	27	5	45	17	37	31
28	7	29	40	36	8	13
38	8	14	43	4	19	29

775

7	40	43	50	52	48	37
51	42	49	32	46	37	7
36	19	36	9	37	39	45
44	32	36	39	44	12	42
36	30	39	32	38	39	38
34	36	19	26	25	16	40
30	4	31	31	44	35	39

776

11	48	28	53	47	51	26
52	49	45	26	24	16	19
15	6	37	44	34	42	40
14	19	4	41	2	37	30
44	36	23	46	13	5	39
38	20	9	37	7	29	32
35	41	33	45	20	39	36

777

38	53	44	14	30	26	19
20	13	12	45	50	46	16
35	40	41	38	49	44	43
15	26	23	25	45	38	39
6	32	11	17	13	39	40
17	19	5	22	33	10	37
34	25	7	15	23	36	41

778

39	21	14	30	15	24	6
37	40	13	33	32	28	19
43	8	20	7	16	30	36
42	15	27	35	29	17	11
45	8	13	23	5	41	5
46	52	39	47	49	25	40
38	43	53	10	17	44	50

779

23	26	40	31	32	42	39
17	37	39	37	31	44	39
33	42	43	39	20	36	25
27	36	38	38	35	37	30
38	49	46	35	51	47	44
30	46	34	48	50	53	52
29	37	42	39	44	48	41

780

40	43	39	38	32	27	42
29	27	35	30	31	25	35
11	32	36	32	22	12	36
34	41	30	36	40	31	17
38	50	41	42	48	45	51
25	47	26	40	44	27	28
47	53	49	31	29	42	45

781

16	12	25	21	3	11	15
36	40	31	37	43	45	41
5	9	30	37	18	4	39
24	32	26	5	29	37	38
6	8	28	30	41	7	23
19	36	27	44	52	47	48
42	43	20	45	46	22	35

782

52	49	44	38	28	17	29
48	43	37	27	16	6	18
42	36	26	15	7	19	5
35	25	14	8	20	31	34
24	13	9	21	32	41	47
12	10	22	31	40	46	51
11	23	30	39	45	50	53

783

6	15	46	9	22	5	17
28	10	47	16	13	27	29
43	53	52	50	24	44	51
37	16	44	11	39	19	37
47	17	46	33	25	39	31
12	21	39	10	20	8	45
33	10	40	31	23	18	25

784

42	26	38	14	35	34	13
43	2	28	15	31	12	40
40	23	3	16	11	39	38
39	21	22	4	23	24	25
45	30	40	48	41	38	48
32	9	33	53	42	6	49
8	31	46	19	36	47	44

785

7	9	13	27	34	45	43
28	18	15	37	5	39	6
10	12	38	50	51	49	8
7	6	11	39	19	30	41
53	47	46	35	9	17	53
14	19	25	31	19	28	33
10	16	18	36	27	30	38

786

6	10	23	45	48	39	52
13	11	17	35	28	36	41
15	19	5	38	9	8	20
48	42	39	36	32	24	22
8	7	12	34	15	21	25
38	12	13	28	15	25	42
19	8	22	29	6	13	26

787

21	35	26	24	29	33	40
40	37	27	17	20	37	41
34	7	18	13	34	15	39
53	52	16	25	46	51	24
44	31	29	24	22	35	46
33	11	19	20	27	42	43
42	33	47	35	48	37	50

788

25	14	3	42	17	12	6
27	19	37	35	2	18	21
20	1	26	32	22	4	24
26	11	34	44	24	9	7
14	19	40	49	30	5	38
22	16	30	39	31	15	13
28	24	8	17	43	29	10

789

45	40	35	50	28	42	33
41	36	31	46	43	39	29
40	28	32	49	42	37	44
43	44	31	53	52	49	51
50	48	41	40	34	25	39
40	26	33	48	37	30	37
31	33	29	45	40	24	31

790

40	43	36	39	35	37	52
41	37	29	31	30	27	38
36	33	25	22	26	20	33
48	45	40	22	28	5	19
44	36	35	32	34	22	49
38	34	21	17	29	10	25
19	16	24	9	25	8	40

791

39	41	37	36	20	36	25
49	53	15	10	17	45	38
30	50	48	44	25	32	37
43	42	43	40	23	38	29
39	44	35	25	19	24	23
45	47	40	26	24	31	35
29	18	37	18	22	36	28

792

39	41	37	37	26	22	27
35	39	34	35	33	31	40
45	40	32	45	53	41	29
43	16	39	21	47	28	32
47	48	42	43	38	30	50
37	34	34	32	36	20	38
35	39	38	38	43	25	32

793

18	32	43	28	43	31	37
28	35	51	47	53	25	47
13	39	45	39	39	40	20
41	14	22	32	31	26	31
33	27	46	34	15	28	39
34	33	42	36	37	38	18
52	48	23	24	36	50	49

794

10	15	35	31	40	27	31
20	21	34	37	22	34	29
19	16	29	32	28	31	25
32	21	38	43	39	41	33
35	29	9	36	17	48	39
18	25	37	30	33	44	29
16	24	40	47	46	27	37

795

20	23	35	39	35	21	42
40	1	39	30	49	29	48
28	30	37	35	14	22	44
35	25	36	41	42	23	46
32	20	32	37	34	18	43
26	23	16	33	31	13	37
24	36	45	47	27	24	33

796

23	27	25	14	21	28	22
19	26	27	11	17	29	24
23	28	20	17	19	33	18
18	30	31	21	16	37	28
28	26	33	20	25	32	29
20	25	27	13	18	27	20
16	23	22	11	12	28	15



797

53	52	40	50	37	31	28
38	25	24	38	36	29	23
20	38	29	33	38	26	37
50	45	32	36	47	46	49
30	33	29	25	40	36	25
43	21	16	42	41	35	26
35	35	28	37	44	41	42

798

21	15	24	3	7	18	19
45	4	30	39	49	44	14
16	36	6	18	1	31	29
5	30	20	0	42	13	23
25	17	8	32	12	28	35
31	47	48	11	33	22	36
9	10	33	21	26	2	27

799

6	35	34	41	29	36	11
10	28	14	43	9	19	24
51	46	30	4	35	45	5
20	15	27	38	24	33	2
31	26	3	31	12	1	17
7	18	44	48	49	47	38
40	23	8	39	13	22	5

800

24	3	20	27	30	45	1
13	6	30	5	11	43	38
7	17	25	23	36	22	31
23	36	10	16	15	48	32
4	8	21	28	33	45	9
35	50	42	18	37	26	49
41	29	12	38	47	52	39

## РЕЗЮМЕ

Задача о назначениях — задача о наилучшем распределении некоторого числа работ между таким же числом исполнителей при условии взаимно однозначного соответствия между множествами работ и исполнителей. При ее решении ищут оптимальное назначение из условия максимума суммарной производительности всех исполнителей. Производительность каждого исполнителя при выполнении каждой из имеющихся работ задается в виде квадратной таблицы, которая называется матрицей эффективности.

Задача о назначениях представляет собой частный случай транспортной задачи, в которой число пунктов производства равно числу пунктов назначения. Кроме того, в каждом пункте назначения объем потребностей равен 1, и величина предложения каждого пункта производства равна 1.

Любая задача о назначениях может быть решена методом потенциалов. Наиболее эффективным методом ее решения является венгерский метод. Оба метода изложены в данной главе.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте задачу о назначениях как частный случай транспортной задачи и запишите математическую модель.
2. Какие значения могут принимать переменные в задаче о назначениях?
3. Какие матрицы называются эквивалентными?
4. Сформулируйте предписания предварительного этапа венгерского метода решения задачи.
5. Сколько звездочек может быть в каждой строке и столбце матрицы эффективности?
6. Что надо делать, если нет незанятых нулей?
7. Сколько нулей со штрихом может быть в одной строке?
8. Сколько нулей со штрихом может быть в одном столбце?
9. Что надо делать, если в строке, где находится только что отмеченный штрихом нуль, нет нуля со звездочкой?
10. Как преобразуется цепочка?
11. Сформулируйте задачу о разборчивой невесте.
12. Запишите оптимальный вариант выбора.
13. Как применяется метод Фогеля в задаче о разборчивой невесте?
14. Каковы особенности метода потенциалов для задачи о разборчивой невесте?
15. Какие значения может принимать величина корректировки в задаче с булевыми переменными?

### ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ

*Пропускные способности коммуникаций. Необходимые условия разрешимости задачи. Классификация переменных. Критерий оптимальности плана. Множества оценок, соответствующие нулевым небазисным и предельным небазисным переменным. Классический метод построения начального плана и метод минимального резерва пропускной способности. Расширение задачи. Признак неразрешимости. Пример неразрешимой задачи. Особенности корректировки планов.*

Студент должен

знать:

- постановку задачи в общем виде;
- классификацию переменных;
- критерий оптимальности плана;
- алгоритм построения первоначального опорного плана с помощью расширенной задачи;
- метод минимального резерва пропускной способности;
- особенности метода потенциалов для решения задачи;
- признак неразрешимости задачи;

уметь:

- строить математическую модель задачи;
- определять первоначальный план классическим способом;
- строить систему потенциалов для расширенной задачи;
- определять первоначальный план методом минимального резерва пропускной способности;
- проверять план на оптимальность;
- строить цикл пересчета;
- определять величину корректировки плана и переходить от одного плана к другому;
- выписывать оптимальное решение задачи.

## § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Целью задачи является полное удовлетворение потребностей всех потребителей за счет продукции, имеющейся у поставщиков, при минимальных транспортных затратах. Однако планируемые перевозки следует выбирать так, чтобы они не превышали пропускных способностей коммуникаций.

Математическая модель задачи такова:

$$\min \Rightarrow f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (6.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6.3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6.4)$$

где  $d_{ij}$  — предельное число единиц продукции, которое может быть перевезено от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю за время, оговоренное в условиях задачи. Задача (6.1)–(6.4) называется транспортной задачей с ограниченными пропускными способностями по критерию стоимости. Для краткости в дальнейшем будем называть ее задачей  $Td$ . Заметим, что сформулированная задача не всегда разрешима, поскольку величины пропускных способностей коммуникаций могут оказаться недостаточными для транспортировки всей имеющейся продукции. В самом деле, если задача  $Td$  имеет план, то должны соблюдаться условия

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} \geq a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6.5)$$



$$\sum_{i=1}^m d_{ij} \geq b_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (6.6)$$

Неравенства (6.5) означают, что суммарная пропускная способность коммуникаций, исходящих от  $i$ -го поставщика, не меньше, чем объем его запасов; неравенства (6.6) указывают, что суммарная пропускная способность коммуникаций, заканчивающихся у  $j$ -го потребителя, не меньше, чем потребность данного потребителя.

Однако условия (6.5)–(6.6) не являются достаточными для совместности системы ограничений задачи  $Td$ . Для выяснения совместности системы условий задачи  $Td$  в общем случае следует попытаться найти план задачи. Если план удастся построить, то система (6.2)–(6.4) совместна; в противном случае задача  $Td$  не имеет ни одного плана. Совместность системы условий задачи  $Td$  гарантирует ее разрешимость, т. к. функция цели (6.1) заведомо ограничена на множестве планов задачи.

В дальнейшем нам понадобится критерий оптимальности плана транспортной задачи с ограничениями на пропускные способности.

**Теорема 6.1.** Для оптимальности плана  $X = (x_{ij})_{m \times n}$  задачи  $Td$  необходимо и достаточно существование чисел  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  таких, что

$$\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}, \text{ если } x_{ij} = 0, \quad (6.7)$$

$$\alpha_i + \beta_j \geq c_{ij}, \text{ если } x_{ij} = d_{ij}, \quad (6.8)$$

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, \text{ если } 0 < x_{ij} < d_{ij}. \quad (6.9)$$

## § 2. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Процесс решения произвольной задачи  $Td$  методом потенциалов состоит из серии однотипных итераций (предполагается, что исходный план задачи задан). Каждая итерация распадается на два этапа. На первом этапе проверяется на оптимальность опорный

план, полученный в конце предыдущей итерации. В случае неоптимальности этого плана проводится второй этап, на котором строится новый опорный план, приводящий к меньшим транспортным издержкам.

Для задачи типа  $Td$  роль положительных перевозок играют перевозки, заключенные строго между нулем и значением пропускной способности соответствующей коммуникации, т. е. такие перевозки, для которых выполняются неравенства:

$$0 < x_{ij} < d_{ij}. \quad (6.10)$$

Перейдем к описанию отдельной итерации метода потенциалов, ограничив себя случаем невырожденной задачи. Пусть проведено  $k$  итераций, причем последняя из них привела к опорному плану  $X_k = (x_{ij}^{(k)})_{m \times n}$ .

На первом этапе  $(k+1)$ -й итерации вычисляются потенциалы и с их помощью производится проверка плана  $X_k$  на оптимальность. Потенциалы  $\alpha_i^{(k)}, i = \overline{1, m}, \beta_j^{(k)}, j = \overline{1, n}$  определяются из системы уравнений:

$$\alpha_i^{(k)} + \beta_j^{(k)} = c_{ij} \quad (6.11)$$

для всех  $c_{ij}$ , которые соответствуют базисным коммуникациям плана  $X_k$ .

Далее составляется матрица

$$\Gamma_k = (\gamma_{ij}^{(k)} = (\alpha_i^{(k)} + \beta_j^{(k)}) - c_{ij})_{m \times n}$$

и просматриваются знаки ее ненулевых элементов.

Пусть  $\Gamma_k^{(0)}$  — множество элементов  $\Gamma_k$ , соответствующих значению  $x_{ij}^{(k)} = 0$ , а  $\Gamma_k^{(d)}$  — множество элементов  $\Gamma_k$ , соответствующих значению  $x_{ij}^{(k)} = d_{ij}$ . Если

$$\gamma_{ij}^{(k)} \leq 0 \quad \text{для всех} \quad \gamma_{ij}^{(k)} \in \Gamma_k^{(0)} \quad (6.12)$$

$$\text{и } \gamma_{ij}^{(k)} \geq 0 \text{ для всех } \gamma_{ij}^{(k)} \in \Gamma_k^{(d)}, \quad (6.13)$$

то  $X_k$  является оптимальным планом исследуемой задачи. Этот вывод непосредственно следует из критерия оптимальности плана задачи  $Td$  (соотношения (6.7)–(6.9)).

Если же одно из неравенств системы (6.12)–(6.13) оказывается нарушенным, то план  $X_k$  может быть улучшен. Процесс улучшения плана  $X_k$  составляет второй этап итерации.

Допустим, что имеются положительные среди чисел  $\gamma_{ij}^{(k)} \in \Gamma_k^{(0)}$  и отрицательные среди чисел  $\gamma_{ij}^{(k)} \in \Gamma_k^{(d)}$ , и пусть

$$\gamma_{i_0 j_0}^{(k)} = \max \left\{ \gamma_{ij}^{(k)} \in \Gamma_k^{(0)}, \left| \gamma_{ij}^{(k)} \in \Gamma_k^{(d)} \right| \right\}$$

(или одно из них). Построим цикл пересчета, замыкающийся на перевозке  $x_{i_0 j_0}^{(k)}$ . Из базисных перевозок цикла образуем цепочку

$$x_{i_0 j_1}^{(k)}, x_{i_1 j_1}^{(k)}, \dots, x_{i_\lambda j_\lambda}^{(k)}, x_{i_\lambda j_{\lambda+1}}^{(k)}, \dots, x_{i_s j_s}^{(k)}, x_{i_s j_0}^{(k)}. \quad (6.14)$$

Возможны два случая: а)  $\gamma_{i_0 j_0}^{(k)} \in \Gamma_k^{(0)}$ , б)  $\gamma_{i_0 j_0}^{(k)} \in \Gamma_k^{(d)}$ .

Дальнейшее течение второго этапа определяется тем, какой из этих случаев имеет место:

а) Если  $\gamma_{i_0 j_0}^{(k)} \in \Gamma_k^{(0)}$  (т. е.  $x_{i_0 j_0}^{(k)} = 0$ ), то улучшение плана  $X_k$  производится за счет увеличения объема перевозки между пунктами  $A_{i_0}$  и  $B_{j_0}$ .

Определим

$$\rho'_k = \min_{0 \leq \lambda \leq s} \left\{ x_{i_\lambda j_{\lambda+1}}^{(k)} \right\} \quad (j_{s+1} = j_0), \quad (6.15)$$

$$\rho''_k = \min_{1 \leq \lambda \leq s} \left\{ d_{i_\lambda j_\lambda} - x_{i_\lambda j_\lambda}^{(k)} \right\} \quad (6.16)$$

и положим

$$\rho_k = \min \left\{ \rho'_k, \rho''_k, d_{i_0 j_0} \right\}. \quad (6.17)$$

Для получения более экономного плана нужно внести следующие изменения в план  $X_k$ : нечетные перевозки цепочки (6.14) уменьшить на  $\rho_k$ , четные перевозки цепочки и перевозку между пунктами  $A_{i_0}$  и  $B_{j_0}$  увеличить на  $\rho_k$ . Нетрудно проверить, что в результате будет получен опорный план задачи  $Td$ , который мы и обозначим через  $X_{k+1}$ .

б) Если  $\gamma_{i_0 j_0}^{(k)} \in \Gamma_k^{(d)}$  (другими словами,  $x_{i_0 j_0}^{(k)} = d_{i_0 j_0}$ ), то улучшение плана  $X_k$  производится за счет сокращения перевозки между пунктами  $A_{i_0}$  и  $B_{j_0}$ .

Определим

$$\rho'_k = \min_{0 \leq \lambda \leq s} \{d_{i_\lambda j_{\lambda+1}} - x_{i_\lambda j_{\lambda+1}}^{(k)}\} \quad (j_{s+1} = j_0), \quad (6.18)$$

$$\rho''_k = \min_{1 \leq \lambda \leq s} \{x_{i_\lambda j_\lambda}^{(k)}\} \quad (6.19)$$

и положим, как и в предыдущем случае,

$$\rho_k = \min\{\rho'_k, \rho''_k, d_{i_0 j_0}\}. \quad (6.20)$$

Увеличим нечетные перевозки цепочки (6.14) на величину  $\rho_k$ , а четные перевозки цепочки и перевозку между пунктами  $A_{i_0}$  и  $B_{j_0}$  сократим на эту же величину. В результате образуется новый опорный план  $X_{k+1}$ . Можно проверить, что

$$f_{k+1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(k+1)} = f_k - \rho_k (-1)^v \gamma_{i_0 j_0}^{(k)}. \quad (6.21)$$

Здесь величина  $\rho_k$  вычисляется по формулам (6.15)–(6.17) или (6.18)–(6.20),  $v$  равно 0 или 1 в зависимости от того, имеет место случай а) или б).

Поскольку в невырожденной задаче  $Td$   $\rho_k > 0$ , то из соотношения (6.21) вытекает, что  $f_{k+1} < f_k$ .



Итак, результатом  $(k + 1)$ -й итерации является либо установление оптимальности плана  $X_k$ , либо построение нового опорного плана  $X_{k+1}$ , связанного с меньшим значением суммарных транспортных издержек. Если исходный опорный план задачи  $Td$  найден, то через конечное число итераций метод приводит к ее решению (последнее заключение следует из монотонного убывания транспортных расходов и конечного числа опорных планов задачи).

Для того чтобы начать процесс решения задачи  $Td$  методом потенциалов, необходимо предварительно найти один из ее опорных планов. Как известно, задача  $Td$  может не иметь ни одного плана: ограниченные пропускные способности коммуникаций в некоторых случаях препятствуют полному удовлетворению всех потребителей за счет возможностей пунктов производства.

Излагаемый способ дает возможность либо построить достаточно экономный опорный план задачи  $Td$ , либо убедиться в ее неразрешимости.

Процесс построения исходного опорного плана складывается из предварительного этапа, напоминающего метод минимального элемента, и ряда итераций метода потенциалов, применяемого к так называемой расширенной задаче. Предварительный этап разбивается на несколько однотипных шагов. Содержание первого шага состоит в следующем.

Среди элементов матрицы транспортных издержек  $C$  выбираем минимальный. Если их несколько, то среди минимальных выбираем такой элемент матрицы  $C$ , который соответствует наибольшей пропускной способности. Если этим элементом является  $c_{i_1 j_1}$ , то находим

$$x_{i_1 j_1} = \min \{ a_{i_1}, b_{j_1}, d_{i_1 j_1} \}.$$

Возможны три случая:

$$1) x_{i_1 j_1} = a_{i_1}, \quad 2) x_{i_1 j_1} = b_{j_1}, \quad 3) x_{i_1 j_1} = d_{i_1 j_1}.$$

В первом случае определяем элементы  $i_1$ -й строки матрицы  $X = (x_{ij})_{m \times n}$ , полагая  $x_{i_1 j} = 0$  для всех  $j \neq j_1$ . Во втором случае фиксируем элементы  $j_1$ -го столбца этой матрицы:  $x_{ij_1} = 0$  для всех  $i \neq i_1$ . В последнем случае на данном шаге определяется только один элемент матрицы  $X = (x_{ij})_{m \times n}$ , (элемент  $x_{i_1 j_1}$ ). Далее вычеркиваем из матрицы  $C = (c_{ij})_{m \times n}$  либо  $i_1$ -ю строку (случай 1), либо  $j_1$ -й столбец (случай 2), либо элемент  $c_{i_1 j_1}$  (случай 3) и преобразуем величины  $a_i, b_j$  в

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} a_i, & i \neq i_1 \\ a_{i_1} - x_{i_1 j_1}, & i = i_1; \end{cases} \quad b_j^{(1)} = \begin{cases} b_j, & j \neq j_1 \\ b_{j_1} - x_{i_1 j_1}, & j = j_1. \end{cases}$$

Второй шаг состоит в проведении тех же операций применительно к невычеркнутым элементам матрицы  $C$ , незаполненным позициям матрицы  $X$  и величинам  $a_i^{(1)}$  и  $b_j^{(1)}$ . Согласно процессу образования матрицы  $X$ , ее элементы удовлетворяют условиям:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6.22)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6.23)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (6.24)$$

Положим,

$$x_{i, n+1} = a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_{m+1,j} = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}, \quad j = \overline{1, n}$$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^m x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^n x_{m+1,j}.$$

Если  $\varepsilon = 0$ , то матрица  $X$ , очевидно, является планом задачи  $Td$ . Однако в общем случае  $\varepsilon > 0$ , и для получения искомого опорного плана задачи  $Td$  необходимо провести еще несколько итераций метода потенциалов.

Введем в рассмотрение расширенную задачу  $Td(M)$ , которая образуется из  $Td$  следующим образом. Присоединим к пунктам производства задачи  $Td$  фиктивный пункт  $A_{m+1}$  с объемом производства  $a_{m+1} = \varepsilon$ , а к ее пунктам потребления — фиктивный пункт  $B_{n+1}$  с объемом потребления  $b_{n+1} = \varepsilon$ .

Пусть стоимость перевозки единичного груза между пунктами  $A_i$  и  $B_{n+1}$ ,  $A_{m+1}$  и  $B_j$  равна  $M$ , а между пунктами  $A_{m+1}$  и  $B_{n+1}$  — нулю, т. е.  $c_{i,n+1} = M$ ,  $i = \overline{1, m}$  и  $c_{m+1,j} = M$ ,  $j = \overline{1, n}$ , а  $c_{m+1,n+1} = 0$ . Предположим также, что пропускные способности новых коммуникаций ничем не ограничены, т. е.  $d_{i,n+1} = \infty$ ,  $d_{m+1,j} = \infty$ ,  $d_{m+1,n+1} = \infty$ , где  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Из матрицы  $X$ , полученной в результате проведения предварительного этапа, легко образовать опорный план  $\tilde{X}$  задачи  $Td(M)$ . Для этого достаточно из каждого пункта  $A_i$  направить  $x_{i,n+1}$  единиц продукта в фиктивный пункт  $B_{n+1}$ , а из фиктивного пункта  $A_{m+1}$  направить  $x_{m+1,j}$  единиц продукта в пункт потребления  $B_j$ . Очевидно, перевозка  $x_{m+1,n+1}$  плана  $\tilde{X}$  равна нулю.

Применим к расширенной задаче  $Td(M)$  метод потенциалов, отправляясь от исходного плана  $\tilde{X}$  и считая число  $M$  сколь угод-

но большим. Последнее условие означает, что число  $M$  предполагается больше любой фиксированной величины, с которой его приходится сравнивать в процессе решения задачи. Могут представиться следующие два случая.

1. После ряда итераций строится опорный план  $\tilde{X}$  задачи  $Td(M)$ , согласно которому перевозка между пунктами  $A_{m+1}$  и  $B_{n+1}$  равна  $\varepsilon$ .

2. В оптимальном плане задачи  $Td(M)$ , который определяется за несколько итераций метода потенциалов, перевозка между пунктами  $A_{m+1}$  и  $B_{n+1}$  меньше  $\varepsilon$ .

В первом случае множество перевозок плана  $\tilde{X}_1$  между пунктами  $A_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) и  $B_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) образует опорный план задачи  $Td$ , во втором — задача  $Td$  не имеет ни одного плана и, следовательно, неразрешима.

Таким образом, общая схема решения задачи  $Td$  методом потенциалов состоит в следующем.

Вначале после нескольких шагов предварительного этапа определяется исходный опорный план задачи  $Td(M)$ . Затем в результате нескольких итераций метода потенциалов либо строится достаточно экономный план задачи  $Td$ , либо устанавливается ее неразрешимость. Если исходный опорный план задачи  $Td$  определен, то для получения ее решения необходимо провести ряд итераций метода потенциалов.

Теперь осталось освободиться от предположения о невырожденности задачи, на котором базируется вывод о конечности метода. В вырожденном случае среди базисных перевозок некоторых опорных планов имеются нулевые и равные  $d_{ij}$ . Поэтому отдельные итерации метода потенциалов сохраняют значение суммарных транспортных издержек ( $\rho = 0$ ), что создает предпосылки для заикливания.

Для предотвращения опасности заикливания используют переход от данной задачи  $Td$  к связанному с ней семейству задач



$Td(\varepsilon)$  или переходят к обобщенным объемам производства и потребления, обобщенным перевозкам и обобщенным транспортным расходам. Читатель, знакомый с содержанием этих подходов, легко составит схему решения задачи  $Td$  и проведет необходимые обоснования.

В вырожденном случае при решении практических задач обычно используются более простые рекомендации для выбора перевозки, подлежащей исключению из базиса. Одно из таких правил состоит в следующем. Среди перевозок, на которых достигается число  $\rho$ , выбираются перевозки с минимальным первым индексом. Их может быть одна или две. В первом случае выбранная перевозка считается небазисной для нового плана; во втором небазисной считается та из выбранных перевозок, которая имеет наименьший второй индекс.

Заикливание в процессе решения задачи — явление хотя и возможное, однако крайне редкое. Поэтому на начальной стадии изучения задачи  $Td$  можно не обращать внимания на вырожденность.

Классифицируем переменные по их принадлежности к базису:

- а) нулевая небазисная  $x_{ij} = 0$ ;  $\gamma_{ij} = (\alpha_i + \beta_j) - c_{ij} \leq 0, \gamma_{ij} \in \Gamma^{(0)}$ ;
  - б) нулевая базисная  $x_{ij} = 0$ ;
  - в) базисная  $0 < x_{ij} < d_{ij}$ ;
  - г) предельная базисная  $x_{ij} = d_{ij}$
- $$\left. \begin{array}{l} \text{б) нулевая базисная } x_{ij} = 0; \\ \text{в) базисная } 0 < x_{ij} < d_{ij}; \\ \text{г) предельная базисная } x_{ij} = d_{ij} \end{array} \right\} \alpha_i + \beta_j = c_{ij};$$
- д) предельная небазисная  $x_{ij} = d_{ij}; \gamma_{ij} = (\alpha_i + \beta_j) - c_{ij} \geq 0, \gamma_{ij} \in \Gamma^{(d)}$ .

Для того чтобы отличать перевозки друг от друга, введем вспомогательные обозначения. Клетки транспортной таблицы, соответствующие нулевым небазисным перевозкам, оставим пустыми. В число базисных могут быть включены нулевые или предельные перевозки (или те и другие одновременно), при этом предполагается, что базисные перевозки не образуют циклов в транспортной таблице. Значения базисных перевозок (б, в, г) будем записывать крупным шрифтом в центре соответствующей клетки. Предельные

небазисные перевозки будем обводить кружком. Множество оценок, соответствующих нулевым небазисным перевозкам, обозначим через  $\Gamma^{(0)}$ , а предельным небазисным —  $\Gamma^{(d)}$ . При этом оценки  $\gamma_{ij} \in \Gamma^{(d)}$  будем обводить кружком (овалом). Ясно, что  $\Gamma^{(0)} \& \Gamma^{(d)} = \emptyset$ ,  $\Gamma^{(0)} \oplus \Gamma^{(d)} = \Gamma$ .

**Пример 6.1.** Требуется решить задачу с ограниченными пропускными способностями, численные данные которой заданы транспортной таблицей 6.1. В левом верхнем углу каждой клетки этой таблицы записаны транспортные расходы  $c_{ij}$ , а в правом нижнем углу — пропускные способности  $d_{ij}$ . Справа от таблицы проставлены объемы производства  $a_i$ , внизу под таблицей — объемы потребления  $b_j$ , где  $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n}$ .

Таблица 6.1

15	3	5	11	38
10	18	4	8	
9	7	1	6	42
17	10	15	9	
20	28	4	25	20
14	12	3	1	
37	33	15	15	

**Решение.** Рассмотрим два метода построения начального плана задачи.

### Построение исходного опорного плана с помощью расширения задачи (классический метод)

Процесс решения начинается с предварительного этапа. Перевозки  $x_{ij}$  будем помещать в клетки табл. 6.2 с указанием номера шага в скобках. Объем невывезенного груза  $x_{i,n+1}$  будем записывать

справа от таблицы, а объем неудовлетворенного спроса  $x_{m+1,j}$  — снизу таблицы.

Таблица 6.2

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$		Объем не вывезенного груза								
						1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A_1$	15 10 <sup>(7)</sup> 10	3 18 <sup>(2)</sup> 18	5  4	11 6 <sup>(6)</sup> 8	38	38	20	20	20	20	14	4	4	4
$A_2$	9 8 <sup>(5)</sup> 17	7 10 <sup>(4)</sup> 10	1 15 <sup>(1)</sup> 15	6 9 <sup>(3)</sup> 9	42	27	27	18	8	—	—	—	—	—
$A_3$	20 14 <sup>(8)</sup> 14	28 5 <sup>(9)</sup> 12	4  3	25  1	20	20	20	20	20	20	20	6	1	
	37	33	15	15										
Объем не удовлетворенного спроса	37	33	—	15										
	37	15	—	15										
	37	15	—	6										
	37	5	—	6										
	29	5	—	6										
	29	5	—	—										
	19	5	—	—										
	5	5	—	—										
	5	—	—	—										

Шаг 1.  $\min c_{ij} = c_{23} = 1$ ,  $x_{23} = \min(42, 15, 15) = 15$ . Потребность потребителя  $B_3$  удовлетворена, вычеркнем третий столбец.

Шаг 2.  $\min c_{ij} = c_{12} = 3$ ,  $x_{12} = \min(38, 33, 18) = 18$ . Перевозка предельная, вычеркнем коммуникацию (1,2).

Шаг 3.  $\min c_{ij} = c_{24} = 6$ ,  $x_{24} = \min(27, 15, 9) = 9$ . Перевозка предельная, вычеркнем (2,4).

Шаг 4.  $\min c_{ij} = c_{22} = 7, x_{22} = \min(18, 15, 10) = 10$ . Перевозка предельная, вычеркнем (2,2).

Шаг 5.  $\min c_{ij} = c_{21} = 9, x_{21} = \min(8, 37, 17) = 8$ . Запасы поставщика  $A_2$  исчерпаны, вычеркнем вторую строку.

Шаг 6.  $\min c_{ij} = c_{14} = 11, x_{14} = \min(20, 6, 8) = 6$ . Потребность потребителя  $B_4$  удовлетворена, вычеркнем четвертый столбец.

Шаг 7.  $\min c_{ij} = c_{11} = 15, x_{11} = \min(14, 29, 10) = 10$ . Перевозка предельная, вычеркнем (1,1).

Шаг 8.  $\min c_{ij} = c_{31} = 20, x_{31} = \min(20, 19, 14) = 14$ . Перевозка предельная, вычеркнем (3,1).

Шаг 9.  $\min c_{ij} = c_{32} = 28, x_{32} = \min(6, 5, 12) = 5$ . Потребность потребителя  $B_2$  удовлетворена, вычеркнем второй столбец.

Предварительный этап в данном случае содержит девять шагов. Построенное множество перевозок  $X_0$  не является допустимым планом задачи, т. к. суммарный объем невывезенного груза и объем неудовлетворенного спроса  $\varepsilon = x_{15} + x_{35} = x_{41} = 6 > 0$ .

Поэтому необходимо ввести в рассмотрение фиктивного поставщика  $A_4$ , запасы которого  $a_4 = 5$ , и фиктивного потребителя  $B_5$ , потребности которого  $b_5 = 5$ . Затем перейти к решению расширенной задачи  $Td(M)$  с матрицей транспортных расходов

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 15 & 3 & 5 & 11 & M \\ 9 & 7 & 1 & 6 & M \\ 20 & 28 & 4 & 25 & M \\ M & M & M & M & 0 \end{array} \right\|,$$

где  $M$  — достаточно большое положительное число.

Исходный опорный план  $\widetilde{X}_0$  расширенной задачи имеет вид:



План  $\widetilde{X}_0$ 

Таблица 6.3

	2М	28	2М-8	11	М
0	15 <b>(10)</b> 10	3 <b>(18)</b> 18	5  4	11 <b>6</b> 8	М <b>4</b> ∞
9-2М	9 <b>8<sup>+</sup></b> 17	7 <b>(10)</b> 10	1 <b>-15<sup>-</sup></b> 15	6 <b>(9)</b> 9	М  ∞
0	20 <b>(14)</b> 14	28 <b>5</b> 12	4 + 3	25  1	М  <b>1<sup>+</sup></b> ∞
-М	М <b>5<sup>-</sup></b> ∞	М  ∞	М  ∞	М  ∞	0 <b>0<sup>+</sup></b> ∞

Значение функции  $\widetilde{f}_0 = 901 + 10M$ .

План  $\widetilde{X}_0$  является вырожденным, т. к. содержит только шесть элементов, удовлетворяющих условию  $0 < x_{ij} < d_{ij}$ . Перечислим эти перевозки:  $x_{14} = 6$ ,  $x_{15} = 4$ ,  $x_{21} = 8$ ,  $x_{32} = 5$ ,  $x_{35} = 1$ ,  $x_{41} = 5$ . Поэтому в число базисных должно быть включено еще две перевозки, равные 0 или  $d_{ij}$  (базисных перевозок должно быть  $m + n - 1$ ). Выбор этих перевозок ограничен только одним условием: они не должны допускать образования цикла. В данном случае необходимо включить в число базисных перевозок предельную перевозку  $x_{23} = 15$  и фиктивную перевозку  $x_{45} = 0$ . Выбранная система базисных перевозок плана  $\widetilde{X}_0$  в табл. 6.3 выделена жирным шрифтом, а предельные небазисные перевозки обведены кружком.

**Итерация 1.** Определим потенциалы задачи  $Td(M)$ , отвечающие исходному плану  $\widetilde{X}_0$ . Для этого составим систему уравнений. Согласно формуле (6.11), каждой базисной переменной соответствует одно уравнение, в котором сумма потенциалов равна тарифу.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_4 = 11, \alpha_1 + \beta_5 = M, \alpha_2 + \beta_1 = 9, \alpha_2 + \beta_3 = 1, \\ \alpha_3 + \beta_2 = 28, \alpha_3 + \beta_5 = M, \alpha_4 + \beta_1 = M, \alpha_4 + \beta_5 = 0. \end{cases}$$

Полагая  $\alpha_1 = 0$ , последовательно вычисляем  $\beta_4 = 11$ ,  $\beta_5 = M$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $\beta_2 = 28$ ,  $\alpha_4 = -M$ ,  $\beta_1 = 2M$ ,  $\alpha_2 = 9 - 2M$ ,  $\beta_3 = 2M - 8$ .

Как обычно, потенциалы  $\alpha_i$  поместим слева от таблицы, а потенциалы  $\beta_j$  — сверху (табл. 6.3). Далее, для небазисных переменных вычислим оценки по формуле  $\gamma_{ij} = (\alpha_i + \beta_j) - c_{ij}$ . Из оценок формируем матрицу  $\Gamma_0(M)$ , в которой вычеркнем базисные коммуникации, т. е. соответствующие им оценки по определению равны нулю (табл. 6.4).

Оценки  $\Gamma_0(M)$

Таблица 6.4

$2M-15$	$25$	$2M-13$		
	$30-2M$		$14-2M$	$9-2M$
$2M-20$		$2M-12$	$-14$	
	$28-2M$	$-8$	$11-2M$	

Множество  $\Gamma_0^{(0)}$  состоит из элементов  $\gamma_{13} = 2M - 13$ ,  $\gamma_{25} = 9 - 2M$ ,  $\gamma_{33} = 2M - 12$ ,  $\gamma_{34} = -14$ ,  $\gamma_{42} = 28 - 2M$ ,  $\gamma_{43} = -8$ ,  $\gamma_{44} = 11 - 2M$ .

Множество  $\Gamma_0^{(d)}$  включает элементы:  $\gamma_{11} = 2M - 15$ ,  $\gamma_{12} = 25$ ,  $\gamma_{22} = 30 - 2M$ ,  $\gamma_{24} = 14 - 2M$ ,  $\gamma_{31} = 2M - 20$ .

При достаточно больших значениях параметра  $M$  среди элементов множества  $\Gamma_0^{(0)}$  положительными являются  $\gamma_{13}, \gamma_{33}$ . Кроме того, среди элементов множества  $\Gamma_0^{(d)}$  имеются отрицательные — это  $\gamma_{22}$  и  $\gamma_{24}$ . Следовательно, план  $\tilde{X}_0$  не оптимален и его улучшение будем осуществлять за счет планирования перевозки по коммуникации (3,3), поскольку оценка  $\gamma_{33}$  является наибольшей по абсолютной величине из оценок, не удовлетворяющих условиям оптимальности. Начиная с разрешающей коммуникации (3,3), строим цикл пересчета, который в табл. 6.3 намечен пунктирной линией. Определим величину корректировки  $\rho_0$ , отвечающей плану  $\tilde{X}_0$ :

$$\begin{aligned}\rho'_0 &= \min(15, 5, 1) = 1, \\ \rho''_0 &= \min(17 - 8, \infty - 0) = 9, \\ d_{33} &= 3, \\ \Rightarrow \rho_0 &= \min(\rho'_0, \rho''_0, d_{33}) = \min(1, 9, 3) = 1.\end{aligned}$$

Вносим следующие изменения в план  $\tilde{X}_0$ : перевозки отрицательного полуцикла  $x_{23} = 15, x_{41} = 5, x_{35} = 1$  уменьшим на величину корректировки  $\rho_0 = 1$ ; а перевозки положительного полуцикла  $x_{21} = 8, x_{45} = 0$  и перевозку на разрешающей коммуникации (3,3) увеличим на эту же величину. После корректировки получим новый план  $\tilde{X}_1$  (табл. 6.5).

Значение функции  $\tilde{f}_1 = 901 + 10M - 1 \times (2M - 12) = 913 + 8M$ .

**Итерация 2.** Определим потенциалы, отвечающие опорному плану  $\tilde{X}_1$ . Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_4 = 11, \alpha_1 + \beta_5 = M, \alpha_2 + \beta_1 = 9, \alpha_2 + \beta_3 = 1, \\ \alpha_3 + \beta_2 = 28, \alpha_3 + \beta_3 = 4, \alpha_4 + \beta_1 = M, \alpha_4 + \beta_5 = 0. \end{cases}$$

Пусть  $\alpha_1 = 0$ , тогда получим

$$\beta_4 = 11, \beta_5 = M, \alpha_4 = -M, \beta_1 = 2M,$$

$$\alpha_2 = 9 - 2M, \beta_3 = 2M - 8, \alpha_3 = 12 - 2M, \beta_2 = 2M + 16.$$

Для небазисных переменных вычислим оценки (табл. 6.6).

План  $\tilde{X}_1$

Таблица 6.5

	2M	2M+16	2M-8	11	M
0	15 (10) 10	3 (18) 18	5 + 4	11 -6 8	M -4 $\infty$
9-2M	9 9 <sup>+</sup> 17	7 (10) 10	1 -14 <sup>+</sup> 15	6 (9) 9	M $\infty$
12-2M	20 (14) 14	28 5 12	4 1 3	25  1	M $\infty$
-M	M 4 $\infty$	M $\infty$	M $\infty$	M $\infty$	0 1 <sup>+</sup> $\infty$

Оценки  $\Gamma_1(M)$

Таблица 6.6

(2M-15)	(2M+13)	2M-13		
	(18)		(14-2M)	9-2M
(-8)			-2-2M	12-2M
	16	-8	11-2M	



Множество  $\Gamma_1^{(0)}$  состоит из элементов  $\gamma_{13} = 2M - 13$ ,  $\gamma_{25} = 9 - 2M$ ,  $\gamma_{34} = -2 - 2M$ ,  $\gamma_{35} = 12 - 2M$ ,  $\gamma_{42} = 16$ ,  $\gamma_{43} = -8$ ,  $\gamma_{44} = 11 - 2M$ .

Множество  $\Gamma_1^{(d)}$  включает элементы:  $\gamma_{11} = 2M - 15$ ,  $\gamma_{12} = 2M + 13$ ,  $\gamma_{22} = 18$ ,  $\gamma_{24} = 14 - 2M$ ,  $\gamma_{31} = -8$ .

Среди элементов множества  $\Gamma_1^{(0)}$  положительными являются  $\gamma_{13}, \gamma_{42}$ . Кроме того, среди элементов множества  $\Gamma_1^{(d)}$  имеются отрицательные — это  $\gamma_{24}$  и  $\gamma_{31}$ . План  $\widetilde{X}_1$  не оптимален, и его улучшение будем осуществлять за счет планирования перевозки по коммуникации (1,3). Строим цикл пересчета (табл. 6.5).

Определим величину  $\rho_1$ :

$$\rho'_1 = \min(4, 4, 14) = 4,$$

$$\rho''_1 = \min(17 - 9, \infty - 1) = 8,$$

$$d_{13} = 4,$$

$$\rho_1 = \min(\rho'_1, \rho''_1, d_{13}) = \min(4, 8, 4) = 4.$$

Вносим изменение в план  $\widetilde{X}_1$ : перевозки отрицательного полуцикла  $x_{23} = 14, x_{41} = 4, x_{15} = 4$  уменьшим на  $\rho_1 = 4$ , а перевозки положительного полуцикла  $x_{21} = 9, x_{45} = 1$  и перевозку на коммуникации (1,3) увеличим на эту же величину. Получим новый план  $\widetilde{X}_2$  (табл. 6.7).

Значение функции  $\widetilde{f}_2 = 965$ .

Как видим, согласно плану  $\widetilde{X}_2$  между фиктивным поставщиком  $A_4$  и фиктивным потребителем  $B_5$  перевозится  $x_{45} = 5$  единиц продукции, что равно величине  $\varepsilon$ . Теперь можно исключить из рассмотрения фиктивного поставщика и фиктивного потребителя,

тогда перевозки плана  $\widetilde{X}_2$  по основным коммуникациям ( $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3, 4$ ) составляют опорный план  $X_2$  исходной задачи  $Td$ . Последующие преобразования будут относиться к исходной задаче (табл. 6.8).

План  $\widetilde{X}_2$

Таблица 6.7

15 (10) 10	3 (18) 18	5 4 4	11 6 8	M 0 $\infty$
9 13 17	7 (10) 10	1 10 15	6 (9) 9	M $\infty$
20 (14) 14	28 5 12	4 1 3	25  1	M $\infty$
M $\infty$	M $\infty$	M $\infty$	M $\infty$	0 5 $\infty$

План  $X_2$

Таблица 6.8

Оценки  $\Gamma_2$

Таблица 6.9

	13	29	5	11	
0	15 (10) 10	3 (18) 18	5 4 4	11 6 8	38
-4	9 13 17	7 (10) 10	1 10 15	6 (9) 9	42
-1	20 (14) 14	28 5 12	4 1 3	25  1	20
	37	33	15	15	

(-2)	(26)		
	(18)		(1)
(-8)			-15

Значение функции  $f_2 = 965$ .

**Итерация 3.** Для плана  $X_2$  определяем потенциалы из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_3 = 5, & \alpha_1 + \beta_4 = 11, & \alpha_2 + \beta_1 = 9, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 1, & \alpha_3 + \beta_2 = 28, & \alpha_3 + \beta_3 = 4. \end{cases}$$

Полагая  $\alpha_1 = 0$ , последовательно вычисляем  $\beta_3 = 5$ ,  $\beta_4 = 11$ ,  $\alpha_2 = -4$ ,  $\beta_1 = 13$ ,  $\alpha_3 = -1$ ,  $\beta_2 = 29$ . Для небазисных переменных вычислим оценки, которые поместим в табл. 6.9.

Множество  $\Gamma_2^{(0)}$  состоит из единственного элемента  $\gamma_{34} = -15$ .

Множество  $\Gamma_2^{(d)}$  включает элементы:

$$\gamma_{11} = -2, \gamma_{12} = 26, \gamma_{22} = 18, \gamma_{24} = 1, \gamma_{31} = -8.$$

Среди элементов множества  $\Gamma_2^{(d)}$  имеются отрицательные — это  $\gamma_{11} = -2$  и  $\gamma_{31} = -8$ , следовательно, план  $X_2$  не является оптимальным. Коммуникацию (3,1) объявляем разрешающей. Улучшение плана  $X_2$  будем производить за счет уменьшения предельной небазисной перевозки  $x_{31} = 14$ . Строим цикл пересчета, замыкающийся на разрешающей коммуникации (табл. 6.8).

Определяем  $\rho_2$  для плана  $X_2$ :

$$\rho'_2 = \min(3 - 1, 17 - 13) = 2,$$

$$\rho''_2 = 10,$$

$$d_{31} = 14,$$

$$\rho_2 = \min(\rho'_2, \rho''_2, d_{31}) = \min(2, 10, 14) = 2.$$

Вносим изменения в план  $X_2$ : переменные  $x_{21}, x_{33}$  увеличим на 2, а  $x_{23}, x_{31}$  уменьшим на эту же величину. Тем самым перевозку  $x_{31}$  включаем в базис, а перевозку  $x_{33}$ , на которой достигается ве-

личина корректировки, исключаем из базиса. Получим новый план  $X_3$  (табл. 6.10).

План  $X_3$

Таблица 6.10

Оценки  $\Gamma_3$

Таблица 6.11

	13	21	5	11	
0	15 (10) 10	3 (18) 18	5 -4 <sup>+</sup> 4	11 6 8	38
-4	9 15 <sup>+</sup> 17	7 (10) 10	1 -8 <sup>-</sup> 15	6 (9) 9	42
7	20 12 14	28 5 12	4 (3) 3	25 1 1	20
	37	33	15	15	

(-2)	(18)		
	(10)		(1)
		(8)	-7

Значение функции  $f_3 = 965 - 8 \times 2 = 949$ .

**Итерация 4.** Для плана  $X_3$  определяем потенциалы непосредственно в табл. 6.10. Пусть  $\alpha_1 = 0$ , тогда  $\beta_3 = 5$ ,  $\beta_4 = 11$ ,  $\alpha_2 = -4$ ,  $\beta_1 = 13$ ,  $\alpha_3 = 7$ ,  $\beta_2 = 21$ . Затем вычислим оценки  $\Gamma_3$  (табл. 6.11). Множество оценок  $\Gamma_3^{(0)} = \{\gamma_{34} = -7\}$  соответствует нулевым небазисным перевозкам, а предельным небазисным перевозкам соответствует  $\Gamma_3^{(d)} = \{\gamma_{11} = -2, \gamma_{12} = 18, \gamma_{22} = 10, \gamma_{24} = 1, \gamma_{33} = 8\}$ .

Среди элементов множества  $\Gamma_3^{(d)}$  имеется отрицательный — это  $\gamma_{11} = -2$ , следовательно, план  $X_3$  не оптимален. Улучшение плана  $X_3$  будем производить за счет уменьшения предельной небазисной перевозки  $x_{11} = 10$ . Цикл имеет вид (табл. 6.10). Определяем величину корректировки  $\rho_3$ :  $\rho'_3 = \min(4 - 4, 17 - 15) = 0$ ,  $\rho''_3 = 8$ ,  $d_{11} = 10$ ,  $\rho_3 = \min(0, 8, 10) = 0$ .



Вносим изменения в план  $X_3$ . Теперь предельная перевозка  $x_{11} = 10$  становится базисной, а предельная перевозка  $x_{13} = 4$ , на которой величина корректировки обратилась в ноль, исключается из базиса. Получим следующий план  $X_4$  (табл. 6.12).

План  $X_4$

Таблица 6.12

Оценки  $\Gamma_4$

Таблица 6.13

	15	23	7	11	
0	15 10 <sup>-</sup> 10	3 (18) 18	5 (4) 4	11 (6 <sup>+</sup> ) 8	38
-6	9 15 <sup>+</sup> 17	7 (10) 10	1 (8) 15	6 (9) 9	42
5	20 12 14	28 5 12	4 (3) 3	25 1 1	20
	37	33	15	15	

	(20)	(2)		
	(10)			(-1)
			(8)	-9

Значение функции  $f_4 = 949 - 2 \times 0 = 949$ .

**Итерация 5.** Для плана  $X_4$  определяем потенциалы (табл. 6.12) и оценки (табл. 6.13), где  $\Gamma_4^{(0)} = \{-9\}$  и  $\Gamma_4^{(d)} = \{\gamma_{12} = 20, \gamma_{13} = 2, \gamma_{22} = 10, \gamma_{24} = -1, \gamma_{33} = 8\}$ . Отрицательная оценка  $\gamma_{24} = -1$  принадлежит множеству  $\Gamma_4^{(d)}$ , следовательно, план  $X_4$  не оптимален и его улучшение будем производить за счет уменьшения предельной небазисной перевозки  $x_{24} = 9$ . Определяем величину  $\rho_4$ :

$$\rho'_4 = \min(8 - 6, 17 - 15) = 2, \quad \rho''_4 = 10, \quad d_{11} = 9,$$

$$\rho_4 = \min(\rho'_4, \rho''_4, d_{11}) = \min(2, 10, 9) = 2.$$

Вносим изменения в план  $X_4$ : перевозку  $x_{24}$  включаем в базис, а на выход из базиса претендуют две перевозки —  $x_{14} = 8$  и

$x_{21}=17$ , исключаем из базиса  $x_{21}$ . Получим очередной план  $X_5$  (табл. 6.14).

План  $X_5$

Таблица 6.14

Оценки  $\Gamma_5$

Таблица 6.15

	15	23	6	11	
0	15 8 10	3 (18) 18	5 (4) 4	11 8 8	38
-5	9 (17) 17	7 (10) 10	1 8 15	6 7 9	42
5	20 12 14	28 5 12	4 (3) 3	25 1 1	20
	37	33	15	15	

	(20)	(1)		
(1)	(11)			
		(7)		-9

Значение функции  $f_5 = 949 - 2 \times 1 = 947$ .

**Итерация 6.** Для опорного плана  $X_5$  определяем потенциалы из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 15, \alpha_1 + \beta_4 = 11, \alpha_2 + \beta_3 = 1, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 6, \alpha_3 + \beta_1 = 20, \alpha_3 + \beta_2 = 28. \end{cases}$$

Полагая  $\alpha_1 = 0$ , последовательно вычисляем  $\beta_1 = 15, \beta_4 = 11, \alpha_2 = -5, \beta_3 = 6, \alpha_3 = 5, \beta_2 = 23$  (табл. 6.14).

Для небазисных переменных вычислим оценки  $\Gamma_5$  (табл. 6.15).

$$\Gamma_5^{(0)} = \{\gamma_{34} = -9\},$$

$$\Gamma_5^{(d)} = \{\gamma_{12} = 20, \gamma_{13} = 1, \gamma_{21} = 1, \gamma_{22} = 11, \gamma_{33} = 7\}.$$

Как видим, оценки, соответствующие нулевым небазисным перевозкам, отрицательны, а оценки, соответствующие предельным небазисным перевозкам, положительны. Получен оптимальный

план исходной задачи  $X^* = X_5$ , суммарные транспортные расходы составляют величину  $f^* = \min f(X) = 947$ .

Процесс решения задачи состоит из предварительного этапа и шести итераций. Первые две итерации относятся к расширенной задаче, где строится начальный опорный план задачи  $Td$ . С третьей по пятую итерацию строится оптимальный план задачи  $Td$ , а шестая итерация служит для выяснения оптимальности полученного ранее плана.

### Построение исходного опорного плана методом минимального резерва пропускной способности

Резерв пропускной способности поставщика  $A_i$  обозначим

$$ra_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} - a_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (6.25)$$

и потребителя  $B_j$

$$rb_j = \sum_{i=1}^m d_{ij} - b_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (6.26)$$

**Предварительный этап.** Вычислим резервы пропускной способности всех поставщиков и потребителей

$$ra_1 = (10 + 18 + 4 + 8) - 38 = 2, \quad ra_2 = (17 + 10 + 15 + 9) - 42 = 9,$$

$$ra_3 = (14 + 12 + 3 + 1) - 20 = 10,$$

$$rb_1 = (10 + 17 + 14) - 37 = 4, \quad rb_2 = (18 + 10 + 12) - 33 = 7,$$

$$rb_3 = (4 + 15 + 3) - 15 = 7, \quad rb_4 = (8 + 9 + 1) - 15 = 3.$$

Резервы запишем в табл. 6.16. Для поставщиков — справа от таблицы, для потребителей — снизу.

Шаг 1. Найдем минимальный резерв пропускной способности:

1) для поставщиков:

$$\min(ra_1 = 2, ra_2 = 9, ra_3 = 10) = ra_1 = 2;$$

2) для потребителей:

$$\min(rb_1 = 4, rb_2 = 7, rb_3 = 7, rb_4 = 3) = rb_4 = 3.$$

Таблица 6.16

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$		Резервы пропускных способностей поставщиков										
						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$A_1$	15 10 <sup>(2)</sup> 10	3 18 <sup>(3)</sup> 18	5 2 <sup>(4)</sup> 4	11 8 <sup>(1)</sup> 8	38	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
$A_2$	9 17 <sup>(6)</sup> 17	7 8 <sup>(10)</sup> 10	1 10 <sup>(9)</sup> 15	6 7 <sup>(5)</sup> 9	42	9	9	9	9	9	7	7	7	7	2	1
$A_3$	20 10 <sup>(7)</sup> 14	28 7 <sup>(11)</sup> 12	4 3 <sup>(8)</sup> 3	25 1	20	10	10	10	10	10	9	9	5	5	5	5
	37	33	15	15												
Резервы пропускных способностей потребителей	4	7	7	3												
	4	7	7	3												
	4	7	7	3												
	4	7	7	3												
	4	7	5	3												
	4	7	5	—												
	4	7	5	—												
	—	7	5	—												
	—	7	5	—												
	—	7	—	—												
	—	5	—	—												

Это означает, что наименьшим резервом пропускной способности является резерв первого поставщика  $ra_1 = 2$ , поэтому будем



определять объем перевозки в первой строке, на пересечении с минимальным резервом потребителей  $rb_4 = 3$ . Перевозку  $x_{14} = \min(38, 15, 8) = 8$ , равную пропускной способности коммуникации  $d_{14} = 8$ , помещаем в соответствующую клетку табл. 6.16. Вычеркнем коммуникацию (1,4). Номер шага запишем в скобках над перевозкой, как показано в клетке (1,4) табл. 6.16. Поскольку перевозка предельная, то резервы пропускных способностей не меняются. На этом завершается первый шаг предварительного этапа.

Шаг 2. Резерв пропускной способности первой строки остается минимальным, поэтому продолжаем заполнять первую строку таблицы. Для этого находим следующий по величине резерв потребителей — это  $rb_1 = 4$ . Определяем перевозку на пересечении первой строки и первого столбца  $x_{11} = \min(30, 37, 10) = 10$ . Перевозка предельная, поэтому вычеркнем коммуникацию (1,1), резервы пропускных способностей остаются прежними.

Шаг 3. Можно определить одну из перевозок  $x_{12}$  или  $x_{13}$ , т. к.  $rb_2 = rb_3 = 7$ . Отдадим предпочтение  $x_{12}$ , поскольку  $c_{12} < c_{13}$ . Итак,  $x_{12} = \min(20, 33, 18) = 18$ , вычеркиваем (1,2).

Шаг 4. Перевозка  $x_{13} = \min(2, 15, 4) = 2$ . Запасы поставщика  $A_1$  исчерпаны, вычеркнем первую строку. При этом резервы поставщиков  $ra_2, ra_3$  сохраняются. Не трудно видеть, что  $rb_1, rb_2, rb_4$  остаются без изменения, а  $rb_3 = 7 - 2 = 5$ .

Шаг 5. Минимальный резерв пропускной способности соответствует четвертому потребителю. Определим перевозку в 4 столбце на пересечении минимальных резервов  $x_{24} = \min(42, 7, 9) = 7$ . Потребность потребителя  $B_4$  удовлетворена, вычеркнем четвертый столбец. Пересчитаем резервы невычеркнутых строк  $ra_2 = 9 - 2 = 7$ ,  $ra_3 = 10 - 1 = 9$ .

Шаг 6.  $x_{21} = \min(35, 27, 17) = 17$ . Перевозка предельная, вычеркнем коммуникацию (2,1), резервы не меняются.

Шаг 7.  $x_{31} = \min(20, 10, 14) = 10$ . Потребность удовлетворена, вычеркнем потребителя  $B_1$ ,  $ra_3 = 9 - 4 = 5$ .

Шаг 8.  $x_{33} = \min(10, 13, 3) = 3$ . Перевозка предельная, вычеркнем коммуникацию (3,3), резервы не меняются.

Шаг 9.  $x_{23} = \min(18, 10, 15) = 10$ . Потребность удовлетворена, вычеркнем  $B_3$ ,  $ra_2 = 7 - 5 = 2$ .

Шаг 10.  $x_{22} = \min(8, 15, 10) = 8$ . Запасы исчерпаны, вычеркнем  $A_2$ ,  $rb_2 = 7 - 2 = 5$ .

Шаг 11.  $x_{32} = \min(7, 7, 12) = 7$ .

Вся продукция вывезена, потребности удовлетворены, при этом перевозки не превышают пропускных способностей коммуникаций. Построенное множество перевозок является допустимым планом исходной задачи.

Суммарные издержки на перевозку составляют величину

$$f_0 = 150 + 54 + 10 + 88 + 153 + 56 + 10 + 42 + 200 + 196 + 12 = 971.$$

Для проверки плана на оптимальность нам потребуется классифицировать перевозки. Базисными будем считать переменные  $x_{13} = 2$ ,  $x_{22} = 8$ ,  $x_{23} = 10$ ,  $x_{24} = 7$ ,  $x_{31} = 10$ ,  $x_{32} = 7$ . Предельными небазисными переменными являются:  $x_{11} = 10$ ,  $x_{12} = 18$ ,  $x_{14} = 8$ ,  $x_{21} = 17$ ,  $x_{33} = 3$ . Нулевая небазисная переменная  $x_{34} = 0$ . Перевозки поместим в табл. 6.17 и, как отмечалось ранее, предельные небазисные перевозки обведем кружком, а клетку с нулевой небазисной переменной (3,4) оставим пустой.

**Итерация 1.** Определим потенциалы, отвечающие исходному плану  $X_0$ . Для этого составим систему уравнений, следуя условию — каждой базисной переменной соответствует одно уравнение, в котором сумма потенциалов равна тарифу.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_3 = 5, \alpha_2 + \beta_2 = 7, \alpha_2 + \beta_3 = 1, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 6, \alpha_3 + \beta_1 = 20, \alpha_3 + \beta_2 = 28. \end{cases}$$

Полагая  $\alpha_1 = 0$ , последовательно вычисляем  $\beta_3 = 5, \alpha_2 = -4, \beta_2 = 11, \beta_4 = 10, \alpha_3 = 17, \beta_1 = 3$ . Потенциалы  $\alpha_i$  поместим слева от таблицы, а потенциалы  $\beta_j$  — сверху табл. 6.17. Имея в виду найденные потенциалы, вычислим оценки для небазисных переменных:

$$\gamma_{11} = (0 + 3) - 15 = -12, \quad \gamma_{12} = (0 + 11) - 3 = 8,$$

$$\gamma_{14} = (0 + 10) - 11 = -1, \quad \gamma_{21} = (-4 + 3) - 9 = -1,$$

$$\gamma_{33} = (17 + 5) - 4 = 18, \quad \gamma_{34} = (17 + 10) - 25 = 2.$$

План  $X_0$

Таблица 6.17

Оценки  $\Gamma_0$

Таблица 6.18

	3	11	5	10	
0	15 (10) 10	3 (18) 18	5 — 2 <sup>+</sup> 4	11 (8) 8	38
-4	9 (17) 17	7 8 <sup>+</sup> 10	1 — 10 <sup>-</sup> 15	6 7 9	42
17	20 10 <sup>+</sup> 14	28 — 7 <sup>-</sup> 12	4 (3) 3	25 1	20
	37	33	15	15	

(-12)	(8)		(-1)
(-10)			
		(18)	2

Далее из оценок формируем матрицу  $\Gamma_0$ , в которой вычеркнем базисные коммуникации, т. к. соответствующие им оценки по определению равны нулю (табл. 6.18).

Множество  $\Gamma_0^{(0)}$  состоит из единственного элемента  $\gamma_{34} = 2$ .

Множество  $\Gamma_0^{(d)}$  включает элементы:  $\gamma_{11} = -12, \gamma_{12} = 8, \gamma_{14} = -1, \gamma_{21} = -10, \gamma_{33} = 18$ .

Среди элементов множества  $\Gamma_0^{(d)}$  имеются отрицательные — это  $\gamma_{11} = -12, \gamma_{14} = -1, \gamma_{21} = -10$ , а положительный элемент  $\gamma_{34} = 2$  принадлежит множеству  $\Gamma_0^{(0)}$ . Следовательно, план  $X_0$  не оптимален. В качестве разрешающей выберем коммуникацию (1,1), т. к. оценка  $\gamma_{11} = -12$  является наибольшей по абсолютной величине среди оценок, не удовлетворяющих критерию оптимальности. Улучшение плана  $X_0$  будем производить за счет уменьшения предельной небазисной перевозки  $x_{11} = 10$  (имеет место случай б). Начиная с разрешающей коммуникации (1,1), строим цикл пересчета, который в табл. 6.17 намечен пунктирной линией.

Далее определим величину корректировки  $\rho_0$  плана  $X_0$ :

$$\rho'_0 = \min(4 - 2, 10 - 8, 14 - 10) = 2,$$

$$\rho''_0 = \min(10, 7) = 7,$$

$$d_{11} = 10,$$

$$\rho_0 = \min(\rho'_0, \rho''_0, d_{11}) = \min(2, 7, 10) = 2.$$

Вносим следующие изменения в план  $X_0$ : нечетные перевозки цикла пересчета  $x_{13} = 2, x_{22} = 8, x_{31} = 10$  увеличим на величину корректировки  $\rho_0 = 2$ , четные перевозки  $x_{23} = 10, x_{32} = 7$  и перевозку  $x_{11} = 10$  на разрешающей коммуникации (1,1) уменьшим на эту же величину. Получим новый план  $X_1$  (табл. 6.19).

Значение функции  $f_1 = 947$ .

**Итерация 2.** Для плана  $X_1$  заново определяем потенциалы из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 15, \alpha_1 + \beta_3 = 5, \alpha_2 + \beta_3 = 1, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 6, \alpha_3 + \beta_1 = 20, \alpha_3 + \beta_2 = 28. \end{cases}$$

Полагая  $\alpha_1 = 0$ , последовательно вычисляем  $\beta_1 = 15, \beta_3 = 5, \alpha_2 = -4, \beta_4 = 10, \alpha_3 = 5, \beta_2 = 23$ . Для небазисных переменных вычислим оценки, которые поместим в табл. 6.20.



План  $X_1$ 

Таблица 6.19

Оценки  $\Gamma_1$ 

Таблица 6.20

	15	23	5	10	
0	15 8 10	3 (18) 18	5 4 <sup>+</sup> 4	11 (8) <sup>-</sup> 8	38
-4	9 (17) 17	7 (10) 10	1 8 <sup>-</sup> 15	6 7 <sup>+</sup> 9	42
5	20 12 14	28 5 12	4 (3) 3	25 1 1	20
	37	33	15	15	

	(20)		(-1)	
(2)	(12)			
		(6)	-10	

Множество  $\Gamma_1^{(0)}$  состоит из единственного элемента  $\gamma_{34} = -10$ .

Множество  $\Gamma_1^{(d)}$  включает элементы:  $\gamma_{12} = 20, \gamma_{14} = -1, \gamma_{21} = 2, \gamma_{22} = 12, \gamma_{33} = 6$ .

Среди элементов множества  $\Gamma_1^{(d)}$  имеется отрицательный — это  $\gamma_{14} = -1$ , следовательно, план  $X_1$  не является оптимальным. В качестве разрешающей коммуникации выберем коммуникацию (1,4). Улучшение плана  $X_1$  будем производить за счет уменьшения предельной небазисной перевозки  $x_{14} = 8$  (случай б). Строим цикл пересчета, намечаем его пунктирной линией (табл. 6.19).

Определяем величину корректировки  $\rho_1$  плана  $X_1$ :

$$\rho'_1 = \min(4 - 4, 9 - 7) = 0,$$

$$\rho''_1 = \min(8) = 8,$$

$$d_{14} = 8,$$

$$\rho_1 = \min(0, 8, 8) = 0.$$

Вносим следующие изменения в план  $X_1$ : предельную перевозку  $x_{14} = 8$  включаем в базис, а перевозку  $x_{13} = 4$ , на которой величина корректировки обратилась в ноль, исключаем из базиса. Получим новый план  $X_2$  (табл. 6.21).

План  $X_2$

Таблица 6.21

Оценки  $\Gamma_2$

Таблица 6.22

	15	23	6	11	
0	15 8 10	3 (18) 18	5 (4) 4	11 8 8	38
-5	9 (17) 17	7 (10) 10	1 8 15	6 7 9	42
5	20 12 14	28 5 12	4 (3) 3	25 1 1	20
	37	33	15	15	

	(20)	(1)		
(1)	(11)			
		(7)	-9	

План  $X_2$  отличается от предыдущего плана только тем, что изменилась система базисных перевозок. Предельная перевозка  $x_{14} = 8$  вошла в базис, а предельная перевозка  $x_{13} = 4$  вышла из базиса, при этом численное значение всех перевозок осталось прежним. В связи с этим значение функции также не изменилось  $f_2 = f_1 = 947$ .

**Итерация 3.** Для опорного плана  $X_2$  определяем потенциалы из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 15, \alpha_1 + \beta_4 = 11, \alpha_2 + \beta_3 = 1, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 6, \alpha_3 + \beta_1 = 20, \alpha_3 + \beta_2 = 28. \end{cases}$$

Полагая  $\alpha_1 = 0$ , последовательно вычисляем  $\beta_1 = 15$ ,  $\beta_4 = 11$ ,  $\alpha_2 = -5$ ,  $\beta_3 = 6$ ,  $\alpha_3 = 5$ ,  $\beta_2 = 23$  (табл. 6.21).

Для небазисных переменных вычислим оценки  $\Gamma_2$  (табл. 6.22):

$$\Gamma_2^{(0)} = \{\gamma_{34} = -9\},$$

$$\Gamma_2^{(d)} = \{\gamma_{12} = 20, \gamma_{13} = 1, \gamma_{21} = 1, \gamma_{22} = 11, \gamma_{33} = 7\}.$$

Оценка, соответствующая нулевой небазисной перевозке, отрицательна, а оценки, соответствующие предельным небазисным перевозкам, положительны. План  $X_2$  оптимален, суммарные транспортные расходы составляют величину  $f^* = \min f(X) = 947$ .

Сравнительный анализ двух методов решения транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями позволяет сделать вывод, что применение метода минимального резерва в большинстве случаев удастся построить опорный план без расширения задачи и требует меньшего объема вычислений по сравнению с классическим методом. Однако такой оптимистичный прогноз в пользу эвристического метода минимального резерва для некоторых задач может не подтвердиться. Поэтому сравнение можно проводить весьма усредненно.

### § 3. НЕРАЗРЕШИМАЯ ЗАДАЧА

Как уже отмечалось ранее, транспортная задача с ограничениями на пропускные способности не всегда разрешима. Это может случиться из-за недостаточности пропускных способностей для транспортировки продукции либо из-за несовместности системы ограничений. В первом случае неразрешимость очевидна, т. к. резервы пропускных способностей некоторых потребителей (поставщиков) оказываются отрицательными. Во втором случае для выяснения неразрешимости требуется провести несколько итераций метода потенциалов для расширенной задачи.

**Пример 6.2 (неразрешимая задача)**  
 Установить неразрешимость задачи  $Td$ .

Таблица 6.23

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	15 9	5 12	4 19	3 24	62
$A_2$	10 5	9 24	8 20	2 3	49
$A_3$	1 8	10 39	12 1	1 2	26
Потребности	21	73	25	18	

**Решение.** Вычислим резервы пропускных способностей поставщиков  $A_i$  и потребителей  $B_j$ :

$$ra_1 = (9 + 12 + 19 + 24) - 62 = 2$$

$$ra_2 = (5 + 24 + 20 + 3) - 49 = 3$$

$$ra_3 = (8 + 39 + 1 + 2) - 26 = 24$$

$$rb_1 = (9 + 5 + 8) - 21 = 1$$

$$rb_2 = (12 + 24 + 39) - 73 = 2$$

$$rb_3 = (19 + 20 + 1) - 25 = 15$$

$$rb_4 = (24 + 3 + 2) - 18 = 11.$$

Положительные значения резервов пропускных способностей свидетельствуют о том, что сумма пропускных способностей всех коммуникаций, ведущих к  $j$ -му потребителю, не меньше, чем потребность данного потребителя и суммарная пропускная способность коммуникаций, исходящих от  $i$ -го поставщика, не меньше,



чем объем его запасов. Это означает, что все необходимые условия разрешимости задачи выполнены.

Однако вопрос о разрешимости остается открытым, может оказаться так, что этих условий будет недостаточно для разрешимости задачи. Попробуем построить исходный опорный план классическим методом. Номер шага определения объема перевозок покажем в табл. 6.24 с помощью чисел, заключенных в скобках над этими перевозками.

Таблица 6.24

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	15 8 <sup>(11)</sup> 9	5 12 <sup>(6)</sup> 12	4 19 <sup>(5)</sup> 19	3 13 <sup>(4)</sup> 24	62
$A_2$	10 5 <sup>(10)</sup> 5	9 24 <sup>(8)</sup> 24	8 6 <sup>(7)</sup> 20	2 3 <sup>(3)</sup> 3	49
$A_3$	1 8 <sup>(1)</sup> 8	10 16 <sup>(9)</sup> 39	12  1	1 2 <sup>(2)</sup> 2	26
Потребности	21	73	25	18	

Первый поставщик не вывез 10 единиц груза, второй — 11, потребитель  $B_2$  недополучил 21 единицу груза. Суммарный объем нераспределенной продукции (неудовлетворенных потребностей в этой продукции)  $\varepsilon = x_{15} + x_{25} = x_{42} = 21$ , поэтому найденное множество перевозок не является планом исходной задачи. Необходимо перейти к решению расширенной задачи.

Введем в рассмотрение фиктивного поставщика  $A_4$ , запасы которого  $a_4 = 21$  (суммарному объему невывезенного груза) и фиктивного потребителя  $B_5$ , потребности которого  $b_5 = 21$  (суммарному объему неудовлетворенных потребностей).

Включив в базис перевозки  $x_{15}=10, x_{25}=11, x_{42}=21, x_{45}=0$ , получим исходный опорный план расширенной задачи (табл. 6.25).

План  $\tilde{X}_0$

Таблица 6.25

	15	2M	8	3	M
0	15 8	5 (12)	4 (19)	3 13 <sup>+</sup>	M 10 <sup>-</sup>
0	10 (5)	9 (24)	8 6	2 (3)	M 11
10-2M	1 (8)	10 16 <sup>+</sup>	12 1	1 (2)	M ∞
-M	M ∞	M 21 <sup>-</sup>	M ∞	M ∞	0 0 <sup>+</sup>

Значение функции  $\tilde{f}_0 = 785 + 42M$ .

**Итерация 1.** Для исходного плана  $\tilde{X}_0$  расширенной задачи определим потенциалы непосредственно в транспортной таблице. Поместим  $\alpha_i$  слева от таблицы, а  $\beta_j$  — сверху табл. 6.25. Вычислим значения оценок  $\gamma_{ij} = (\alpha_i + \beta_j) - c_{ij}$  для небазисных переменных (табл. 6.26).

План  $\tilde{X}_0$  не оптимален, строим цикл пересчета, замыкающийся на коммуникации (3,4). Определим  $\rho_0$ :

$$\rho'_0 = \min(24 - 13, \infty - 0, 39 - 16) = 11,$$

$$\rho''_0 = \min(10, 21) = 10,$$

$$d_{34} = 2,$$

$$\rho_0 = \min(11, 10, 2) = 2.$$

Оценки  $\Gamma_0(M)$ 

Таблица 6.26

	2M-5	4		
5	2M-9		1	
24-2M		6-2M	12-2M	10-2M
15-2M		8-2M	3-2M	

Перевозки положительного полуцикла увеличим на 2 единицы, а отрицательного — уменьшим на эту же величину, получим план  $\widetilde{X}_1$  (табл. 6.27).

План  $\widetilde{X}_1$ 

Таблица 6.27

	15	2M	8	3	M
0	15 8 <sup>+</sup> 9	5 12 <sup>+</sup> 12	4 19 <sup>+</sup> 19	3 15 <sup>+</sup> 24	M 8 <sup>+</sup> $\infty$
0	10 5 <sup>+</sup> 5	9 24 <sup>+</sup> 24	8 6 20	2 3 <sup>+</sup> 3	M 11 <sup>+</sup> $\infty$
10-2M	1 8 <sup>+</sup> 8	10 18 <sup>+</sup> 39	12 1 1	1 2 2	M $\infty$
-M	M $\infty$	M 19 <sup>+</sup> $\infty$	M $\infty$	M $\infty$	0 2 <sup>+</sup> $\infty$

Значение функции  $\tilde{f}_1 = 809 + 38M$ . Коммуникация (3,4) так и не вошла в базис, т. к. перевозка  $x_{34}$  в старом плане была пре-

дельной небазисной, а в новом плане оказалась нулевой небазисной.

**Итерация 2.** Поскольку множества базисных перевозок планов  $\widetilde{X}_0$  и  $\widetilde{X}_1$  совпадают, то численные значения потенциалов и оценок также будут совпадать. Изменится только статус оценки  $\gamma_{34}^{(0)}$ : в плане  $\widetilde{X}_0$  оценка  $\gamma_{34}^{(0)} \in \Gamma_0^{(d)}$ , а в плане  $\widetilde{X}_1$  —  $\gamma_{34}^{(1)} \in \Gamma_1^{(0)}$ , т. е. она перешла из множества  $\Gamma^{(d)}$  в множество  $\Gamma^{(0)}$ . В связи с этим сразу можно записать матрицу оценок, соответствующую новому плану  $\widetilde{X}_1$  (табл. 6.28).

Оценки  $\Gamma_1(M)$

Таблица 6.28

	$\textcircled{2M-5}$	$\textcircled{4}$		
$\textcircled{5}$	$\textcircled{2M-9}$		$\textcircled{1}$	
$\textcircled{24-2M}$		6-2M	12-2M	10-2M
15-2M		8-2M	3-2M	

Отрицательная оценка  $\gamma_{31}^{(1)} = 24 - 2M$  соответствует предельной небазисной перевозке  $x_{31}^{(1)} = d_{31}$ , план  $\widetilde{X}_1$  не оптимален. Имеет место случай б). Определим величину корректировки  $\rho_1$  для плана  $\widetilde{X}_1$  по формулам (6.18)–(6.20):  $\rho'_1 = \min(9 - 8, \infty - 2, 39 - 18) = 1$ ,  $\rho''_1 = \min(8, 19) = 8$ ,  $d_{31} = 8$ ,  $\rho_1 = \min(1, 8, 8) = 1$ . После корректировки получим план  $\widetilde{X}_2$  задачи  $Td(M)$  (табл. 6.29).

Значение функции  $\tilde{f}_1 = 833 + 36M$ .

**Итерация 3.** Вычислим потенциалы (табл. 6.29) и значения оценок для небазисных переменных (табл. 6.30).



План  $\tilde{X}_2$

Таблица 6.29

	2M-9	2M	8	3	M
0	15 (9) 9	5 (12) 12	4 (19) 19	3 15 24	M 7 $\infty$
0	10 (5) 5	9 (24) 24	8 6 20	2 (3) 3	M 11 $\infty$
10-2M	1 7 8	10 19 39	12 1	1 2	M $\infty$
-M	M $\infty$	M 18 $\infty$	M $\infty$	M $\infty$	0 3 $\infty$

Условия оптимальности опорного плана  $\tilde{X}_2$  расширенной задачи выполнены, но часть продукции оказалась нераспределенной: первый поставщик не отправил 7 единиц, а второй — 11. При этом второй потребитель недополучил 18 единиц. Задача неразрешима из-за несовместности ограничений.

Оценки  $\Gamma_2(M)$

Таблица 6.30

2M-24	2M-5	(4)		
2M-19	2M-9		(1)	
		6-2M	12-2M	10-2M
-9		8-2M	3-2M	

## § 4. УПРАЖНЕНИЯ

Ниже приведены таблицы транспортных задач с ограниченными пропускными способностями. В правом столбце указаны запасы поставщиков, в нижней строке — потребности потребителей. В остальных клетках записаны два числа: в левом верхнем углу — стоимость перевозки единицы продукции, а в правом нижнем — пропускные способности.

Доказать, что в задачах AV1–AV31 не существует опорных планов, условия противоречивы.

При исследовании задачи рекомендуется проверить необходимые условия разрешимости, затем применить метод потенциалов для расширенной задачи.

AV1

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	18 6	4 39	14 10	1 25	78
$A_2$	10 27	15 5	8 18	7 11	48
$A_3$	12 5	19 3	3 9	16 30	38
Потребности	36	28	36	64	

AV2

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	7 35	9 9	14 8	6 5	36
$A_2$	15 16	19 12	7 37	16 8	71
$A_3$	6 4	5 20	3 8	13 3	32
$A_4$	18 5	14 21	8 2	2 15	33
Потребности	54	55	33	30	

AV3

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	16 17	20 9	50 11	27 3	43 13	49
$A_2$	24 25	37 5	13 20	4 18	18 24	86
$A_3$	1 27	5 5	8 3	29 4	15 2	18
$A_4$	44 2	38 13	22 6	1 33	13 17	69
Потребности	65	31	27	54	45	

AV4

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	8 3	10 30	14 15	7 20	65
$A_2$	15 14	3 2	2 8	1 27	48
$A_3$	3 24	12 10	4 30	3 8	50
$A_4$	13 22	5 19	8 13	13 4	23
Потребности	60	50	56	20	

AV5

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	7 38	16 12	19 29	24 5	5 10	88
$A_2$	6 3	10 13	2 5	17 37	13 7	23
$A_3$	20 8	26 17	29 14	19 4	10 38	71
$A_4$	15 18	31 13	31 11	24 19	14 25	79
Потребности	55	38	33	64	71	

AV6

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	5 23	8 17	24 8	13 28	14 30	98
$A_2$	18 26	23 15	4 35	19 7	10 9	42
$A_3$	20 6	21 22	24 4	9 40	30 13	68
$A_4$	16 5	14 8	29 19	18 4	5 38	69
Потребности	58	57	64	45	53	

AV7

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	5 23	8 17	24 8	13 22	14 30	98
$A_2$	24 25	37 5	13 20	4 18	18 24	86
$A_3$	1 27	5 1	8 3	29 4	15 25	18
$A_4$	44 2	38 13	22 6	1 33	13 17	69
Потребности	65	31	27	54	94	

AV8

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	17 13	27 5	23 4	8 36	34
$A_2$	24 7	20 19	24 6	9 4	32
$A_3$	15 30	22 7	30 3	28 15	38
$A_4$	19 8	23 34	17 35	15 3	78
Потребности	54	44	28	56	



AV9

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	18 4	23 2	9 41	16 9	55
$A_2$	26 15	29 30	11 5	25 3	36
$A_3$	12 23	5 14	19 8	14 39	68
Потребности	39	44	27	49	

AV10

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	9 34	17 8	13 17	18 13	26 22	87
$A_2$	27 3	9 25	16 5	19 4	15 33	39
$A_3$	10 20	20 24	1 15	5 7	11 24	86
$A_4$	9 7	21 10	4 33	13 27	18 19	94
Потребности	50	65	58	38	95	

AV11

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	17 30	30 3	27 8	25 13	37
$A_2$	23 21	12 9	6 19	28 20	51
$A_3$	29 14	9 30	15 4	24 14	59
$A_4$	7 26	18 10	16 11	10 13	48
Потребности	86	20	34	55	

AV12	Поставщики	Потребители					Запасы
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
	$A_1$	17 13	15 18	10 24	8 12	24 9	54
	$A_2$	6 4	20 17	23 15	3 30	5 27	90
	$A_3$	19 22	27 25	25 18	26 5	32 8	53
	$A_4$	5 26	18 7	24 15	23 11	13 30	87
	Потребности	63	61	70	51	39	

AV13	Поставщики	Потребители					Запасы
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
	$A_1$	30 18	17 24	13 15	18 7	9 24	86
	$A_2$	14 1	9 33	16 5	19 4	24 25	39
	$A_3$	20 5	21 20	4 33	13 27	9 10	92
	$A_4$	15 32	20 23	1 17	5 14	10 9	87
	Потребности	50	94	58	37	65	

AV14	Поставщики	Потребители				Запасы
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
	$A_1$	8 33	8 8	13 9	9 6	36
	$A_2$	13 16	12 12	11 37	14 7	71
	$A_3$	16 12	13 21	13 8	11 4	32
	$A_4$	8 13	11 23	18 13	4 14	33
	Потребности	54	55	33	30	

AV15

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	20 5	26 13	30 28	13 6	35
$A_2$	16 10	16 5	40 3	10 40	56
$A_3$	13 38	12 23	6 15	19 9	67
Потребности	50	34	44	30	

AV16

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	11 7	13 34	21 17	2 15	69
$A_2$	23 8	7 6	5 12	3 27	52
$A_3$	7 28	1 4	8 28	7 2	54
$A_4$	3 26	9 17	11 7	17 3	27
Потребности	64	54	60	24	

AV17

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	9 4	11 31	15 16	8 21	66
$A_2$	16 15	4 3	3 9	2 23	49
$A_3$	4 25	13 11	5 31	14 5	51
$A_4$	14 19	6 17	9 6	2 5	24
Потребности	61	51	57	21	

AV18	Поставщики	Потребители					Запасы
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
	$A_1$	10 30	26 2	14 39	7 5	8 4	58
	$A_2$	22 5	18 35	35 8	21 22	10 33	96
	$A_3$	36 26	11 17	29 10	23 29	15 18	93
	$A_4$	19 28	6 6	27 15	5 10	3 9	37
Потребности		86	42	69	41	46	

AV19	Поставщики	Потребители					Запасы
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
	$A_1$	16 15	14 8	29 17	18 5	5 29	70
	$A_2$	20 7	21 32	24 3	9 38	30 4	69
	$A_3$	18 15	23 3	4 35	19 8	10 9	43
	$A_4$	5 24	8 18	24 11	13 28	14 29	99
Потребности		59	58	65	46	53	

AV20	Поставщики	Потребители					Запасы
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
	$A_1$	40 20	20 11	20 30	6 9	42 30	99
	$A_2$	2 10	8 35	7 4	9 12	1 3	34
	$A_3$	11 8	30 4	23 5	28 18	18 16	50
	$A_4$	15 6	28 23	31 1	36 4	11 10	33
Потребности		30	70	19	42	55	



AV21

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	3 17	20 41	8 22	6 2	70
$A_2$	14 25	23 3	4 8	15 14	49
$A_3$	29 11	17 9	27 13	13 24	49
$A_4$	16 4	5 16	29 21	10 27	32
Потребности	30	55	53	62	

AV22

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	6 22	20 17	16 10	5 18	7 10	76
$A_2$	5 20	3 19	28 20	8 7	13 5	68
$A_3$	27 15	24 35	18 4	19 6	14 3	32
$A_4$	13 10	15 8	20 19	10 20	12 28	74
Потребности	64	77	26	43	40	

AV23

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	16 25	20 6	3 30	14 7	8 34	92
$A_2$	23 27	18 24	7 10	13 11	30 5	49
$A_3$	15 32	26 20	17 4	10 42	25 13	72
$A_4$	19 16	27 15	2 28	6 4	9 30	90
Потребности	95	48	53	59	48	

AV24

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	8 10	11 16	19 7	27 35	64
$A_2$	15 25	17 24	24 18	13 21	84
$A_3$	5 6	3 18	9 30	7 20	38
$A_4$	10 17	20 19	32 5	16 25	63
Потребности	36	55	59	99	

AV25

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	9 7	15 4	11 34	15 9	8 24	62
$A_2$	5 19	3 2	8 15	6 13	7 7	47
$A_3$	10 31	19 20	6 17	3 24	16 9	99
$A_4$	14 18	20 26	12 29	18 5	20 7	84
Потребности	71	32	93	50	46	

AV26

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	6 5	8 18	15 7	7 22	2 5	52
$A_2$	4 19	5 15	10 14	6 4	5 20	70
$A_3$	13 5	19 7	13 20	10 23	7 14	62
$A_4$	9 4	7 19	18 6	14 2	5 26	34
Потребности	20	57	31	47	63	

AV27

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	10 24	8 5	13 4	1 16	12 18	64
$A_2$	8 2	6 19	10 13	7 5	14 26	62
$A_3$	11 25	4 2	9 15	16 20	15 9	69
$A_4$	3 16	7 3	1 3	5 25	2 1	31
Потребности	65	24	23	64	50	

AV28

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	9 30	17 5	25 14	4 25	20 25	97
$A_2$	11 20	23 7	16 18	7 10	20 15	68
$A_3$	4 2	10 28	18 13	2 3	6 8	32
$A_4$	13 8	15 18	16 19	5 9	19 16	65
Потребности	55	57	61	25	64	

AV29

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	18 15	5 7	31 8	10 24	7 22	71
$A_2$	3 15	26 24	29 28	2 3	1 6	41
$A_3$	20 23	25 14	5 9	15 27	19 19	88
$A_4$	29 17	2 25	6 18	18 22	12 11	90
Потребности	63	65	62	54	46	

AV30

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	30 16	23 7	11 24	16 17	5 15	75
$A_2$	23 5	8 18	25 8	20 35	19 2	46
$A_3$	16 29	27 10	22 13	24 19	4 28	92
$A_4$	17 13	3 24	23 4	14 13	15 8	45
Потребности	60	56	33	81	28	

AV31

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	32 12	15 23	10 29	23 17	27 24	96
$A_2$	28 10	17 10	35 9	39 4	20 15	30
$A_3$	28 11	32 14	14 20	19 45	31 10	95
$A_4$	24 10	25 35	23 5	15 7	13 15	41
Потребности	38	78	47	37	62	

### Задачи 801–900

Ниже приведены транспортные задачи с ограниченными пропускными способностями. Стоимость перевозки единицы продукции и предельные пропускные способности коммуникаций записаны через косую черту в клетках таблиц. Запасы указаны справа от таблиц, а потребности — снизу.

Найти оптимальное решение методом потенциалов или доказать неразрешимость задачи.



Для построения исходного опорного плана рекомендуется применить два метода: 1) минимального резерва пропускной способности; 2) метод расширенной задачи (классический). На каждом шаге следует вычислять значение целевой функции. Провести сравнительный анализ указанных методов по объему вычислительной работы.

### 801

6/20	7/24	18/14	16/16	56
19/7	21/14	22/7	24/28	48
19/28	16/5	24/27	26/25	73
3/40	5/23	10/2	5/10	65
15/17	18/28	13/18	26/3	50
84	90	50	68	

### 802

12/39	5/38	16/7	15/18	81
21/15	41/9	6/26	51/10	43
42/8	40/17	17/7	30/25	49
7/4	39/11	24/20	29/26	48
7/8	28/30	38/6	44/18	47
60	79	57	72	

### 803

9/38	28/8	29/5	38/16	59
4/15	31/41	20/8	3/4	56
3/7	4/11	24/16	27/9	36
2/40	9/12	5/21	10/10	73
4/14	16/3	47/40	21/42	82
93	64	82	67	

### 804

9/19	21/5	5/35	18/7	53
13/30	20/29	11/14	25/2	59
4/13	4/44	3/8	9/30	69
27/30	8/18	10/38	29/10	74
14/15	19/18	20/5	11/40	54
78	84	72	75	

### 805

13/13	15/5	17/28	19/17	50
18/9	20/19	30/29	18/7	50
10/33	19/4	24/10	21/32	62
26/2	31/14	23/20	28/19	45
16/30	38/35	25/25	33/13	87
72	63	94	65	

### 806

36/16	28/19	26/10	29/20	58
24/21	40/20	17/24	30/18	69
31/23	24/22	24/41	34/4	81
9/14	13/15	20/8	21/19	51
17/24	25/13	10/3	12/30	57
80	74	77	85	

## 807

5/27	18/6	4/14	9/34	61
17/8	15/33	5/29	16/7	59
9/18	14/5	8/40	14/38	95
7/10	13/43	11/15	8/22	69
6/20	23/2	10/37	20/12	54
69	78	98	93	

## 808

19/6	25/33	22/38	29/9	76
16/29	27/20	24/12	20/42	88
24/18	36/5	31/20	33/4	38
22/35	31/5	30/26	33/17	66
21/7	25/26	25/8	20/48	74
82	81	84	95	

## 809

13/9	19/24	24/5	20/45	69
18/24	33/14	30/7	28/37	68
30/13	29/15	34/43	38/4	58
23/18	32/47	38/10	30/12	77
15/50	28/9	26/29	27/21	79
92	86	79	94	

## 810

8/17	9/3	13/33	19/18	68
23/5	13/27	25/7	28/40	66
26/47	24/12	27/8	38/4	55
18/37	14/42	15/3	21/16	91
26/15	19/31	24/30	30/7	55
99	97	66	73	

## 811

18/13	21/5	15/47	13/9	65
34/25	25/7	17/4	38/32	64
22/15	35/39	40/24	19/8	63
21/50	15/10	28/20	30/46	96
5/17	4/38	7/20	8/21	79
88	89	91	99	

## 812

19/2	9/51	24/17	21/8	51
30/40	21/2	27/25	30/21	86
26/42	17/13	35/15	34/7	68
26/20	20/3	38/8	25/33	48
37/15	23/6	36/27	38/37	65
95	72	65	86	

## 813

26/20	28/12	15/12	39/3	35
23/23	31/19	20/5	41/17	48
33/25	21/8	10/11	6/30	64
4/23	5/20	4/9	14/12	46
26/18	19/6	10/26	35/5	49
88	54	42	58	

## 814

30/44	25/9	13/20	31/3	71
27/14	31/24	9/50	41/10	81
25/37	23/4	24/6	35/38	67
26/13	40/36	6/4	32/10	49
1/12	9/5	19/19	32/30	47
90	71	84	70	

## 815

21/32	23/15	20/3	24/4	45
14/7	7/35	3/17	10/10	58
19/42	25/5	13/9	20/23	73
28/6	9/44	6/30	14/8	78
36/20	40/7	19/39	34/40	97
92	90	88	81	

## 816

26/6	18/50	14/7	2/48	97
51/13	40/21	35/35	33/5	65
35/49	36/8	15/21	17/11	84
30/31	42/12	23/3	23/19	48
50/3	48/20	26/40	32/10	62
88	92	93	83	

## 817

20/23	16/5	20/23	15/15	49
25/17	23/44	21/16	19/13	86
35/2	27/12	33/25	25/9	44
24/38	24/6	22/27	13/27	95
38/8	32/30	38/4	30/19	47
78	92	87	64	

## 818

36/16	28/19	7/10	19/20	58
24/21	40/20	17/24	30/18	69
31/15	24/22	24/42	37/4	81
9/14	13/15	20/8	21/19	51
17/24	25/13	14/3	22/30	57
80	74	77	85	

## 819

22/5	14/25	25/33	24/18	75
13/15	10/4	24/32	28/4	47
30/7	12/8	21/25	23/7	37
26/45	20/10	37/4	32/8	53
28/12	23/6	39/3	31/45	62
70	45	87	72	

## 820

12/22	25/12	30/37	27/4	65
11/12	24/36	34/3	30/32	77
7/15	17/14	23/45	25/39	84
10/47	28/5	44/20	28/8	68
15/13	16/33	15/10	20/7	42
89	70	98	79	

## 821

38/3	28/10	20/48	15/27	78
18/32	7/38	9/15	5/30	93
16/14	6/15	6/25	1/8	58
26/17	4/21	13/5	2/30	37
19/40	7/29	8/14	20/16	83
88	84	93	84	

## 822

21/15	18/42	23/3	14/27	83
9/30	4/18	15/34	8/2	60
36/10	26/33	19/40	11/36	88
19/13	13/26	8/38	3/15	79
38/27	30/21	33/8	25/26	57
76	97	97	97	

**823**

27/3	12/5	18/20	14/50	71
25/15	23/27	30/40	32/2	74
17/24	20/7	15/41	17/8	66
29/10	19/40	27/8	22/10	48
21/40	25/21	30/4	29/7	65
69	91	93	71	

**824**

20/8	25/3	23/10	19/43	59
27/50	15/2	28/26	30/20	92
22/41	16/13	36/5	24/33	83
40/9	15/40	29/13	35/12	42
26/7	18/21	32/25	39/6	42
97	68	62	91	

**825**

8/26	7/45	33/8	26/6	59
24/7	10/18	25/32	25/44	88
17/13	13/4	30/25	24/30	63
20/46	22/5	29/20	35/17	65
18/17	15/45	38/21	32/13	74
98	93	72	86	

**826**

22/48	30/1	13/15	15/5	58
37/8	21/44	20/20	23/6	62
26/23	25/16	15/18	17/43	98
29/24	33/10	14/3	13/15	34
41/14	34/21	25/39	19/36	88
89	82	75	94	

**827**

27/5	15/23	23/14	24/10	32
22/20	20/7	29/3	20/49	74
17/32	17/29	15/37	33/4	91
7/40	17/6	8/20	10/15	68
38/14	25/20	31/49	30/20	79
90	68	95	91	

**828**

15/9	21/33	34/8	17/8	43
9/50	12/46	25/14	13/3	96
29/7	26/14	35/31	20/23	66
17/4	30/6	21/44	17/15	57
28/37	40/13	44/5	26/39	72
90	90	74	80	

**829**

3/20	12/3	15/9	4/43	70
6/8	2/38	8/40	14/6	76
15/21	31/13	37/10	28/48	80
18/30	24/7	29/15	16/5	45
11/15	14/46	27/3	16/4	64
83	92	66	94	

**830**

25/40	19/7	8/20	16/7	62
32/4	20/26	21/20	24/13	57
24/43	20/24	11/22	18/26	89
40/11	28/13	18/33	30/7	40
33/9	25/17	10/32	25/38	68
82	57	98	79	



## 831

16/8	11/24	18/46	17/6	53
26/11	20/22	36/4	34/10	34
12/51	27/10	40/13	25/25	71
33/27	30/40	30/10	39/3	74
35/2	16/30	43/7	31/45	72
86	92	58	68	

## 832

16/3	27/40	25/25	7/15	66
20/50	40/5	36/10	19/28	76
18/50	33/33	38/13	17/23	75
12/6	25/4	17/42	5/24	68
33/10	48/13	44/10	28/44	41
95	69	64	98	

## 833

10/30	4/41	3/17	1/29	78
47/8	27/14	5/20	21/22	41
25/38	26/18	7/33	27/14	83
50/27	33/5	8/30	20/28	58
26/25	10/2	2/4	19/14	37
68	70	72	87	

## 834

12/17	11/8	3/24	10/38	63
34/5	27/43	13/32	39/8	74
15/35	16/4	11/5	18/27	63
23/4	14/28	5/40	24/5	67
22/34	20/15	17/10	14/29	66
86	80	77	90	

## 835

7/48	10/34	7/20	26/9	74
40/7	35/26	30/6	35/13	34
24/17	16/38	10/12	34/25	70
5/9	2/32	18/7	17/44	81
17/24	14/10	6/37	29/3	52
81	91	68	71	

## 836

45/3	25/19	19/39	23/30	84
22/17	6/39	29/19	3/20	71
35/28	30/8	18/37	6/14	58
49/45	35/21	24/9	19/3	62
35/29	13/29	20/15	17/50	76
83	98	72	98	

## 837

35/9	35/21	19/30	23/20	54
17/17	19/17	13/32	8/38	73
25/15	16/45	3/35	13/3	67
47/5	46/8	38/4	29/47	50
26/52	41/9	24/12	26/10	64
75	65	84	84	

## 838

30/8	5/19	27/33	6/41	88
16/36	26/24	9/15	15/8	69
37/14	6/24	47/46	45/10	59
15/24	40/11	37/10	30/46	78
17/13	22/37	33/13	10/22	55
81	83	99	86	

## 839

5/45	7/6	10/33	11/10	78
4/17	21/5	16/10	7/50	58
30/2	18/48	11/10	15/15	48
34/5	39/35	11/9	49/17	52
50/7	39/10	15/51	38/10	51
61	82	76	68	

## 840

39/19	14/38	14/5	19/15	67
3/33	19/7	5/40	11/14	63
22/6	3/47	49/11	22/12	56
47/30	13/12	50/20	10/33	47
37/13	10/13	46/25	12/30	68
77	94	76	54	

## 841

33/9	13/29	4/17	22/30	57
31/41	40/11	26/23	49/6	61
27/39	15/35	2/16	29/5	75
20/5	7/12	15/26	26/6	40
25/8	19/7	17/24	39/46	65
81	73	68	76	

## 842

45/4	47/12	27/30	13/42	73
23/2	44/10	46/1	35/36	37
29/13	23/10	34/40	9/4	57
8/5	47/24	42/3	5/20	19
12/19	13/28	18/9	13/14	68
32	81	57	84	

## 843

13/11	20/13	43/5	23/42	58
35/47	7/18	28/8	13/11	55
22/3	2/11	20/26	3/31	41
45/41	35/16	49/33	45/10	84
49/9	25/38	38/6	31/26	63
93	62	55	91	

## 844

27/40	39/5	27/45	11/10	87
24/26	38/38	33/4	13/24	86
35/7	41/38	37/40	14/28	65
15/5	27/14	11/32	3/8	35
29/2	36/16	35/6	6/33	47
67	89	76	88	

## 845

9/38	6/7	9/13	10/5	45
41/3	21/43	24/10	18/39	82
19/42	39/6	24/20	30/8	61
17/4	3/9	4/15	5/40	46
26/1	16/45	12/27	30/13	70
75	94	56	79	

## 846

45/8	2/20	22/17	49/10	51
29/20	33/17	36/5	44/6	48
43/9	9/30	22/18	14/12	67
7/41	12/25	30/18	39/15	77
35/10	49/18	35/2	39/14	21
86	77	47	54	

## 847

15/20	18/27	19/23	36/3	65
18/9	21/24	18/5	32/40	64
21/20	30/10	22/36	44/3	63
21/4	25/18	22/2	30/50	67
17/51	28/10	17/20	40/7	70
85	76	78	90	

## 848

38/2	25/35	17/15	30/18	64
24/20	16/7	7/50	27/5	59
28/4	10/45	8/8	31/6	51
32/12	20/3	10/11	30/45	50
27/48	30/17	18/14	40/8	62
68	78	80	60	

## 849

20/5	15/34	5/18	3/35	65
11/50	31/9	21/4	14/24	71
10/7	33/12	10/37	19/5	43
15/2	30/42	16/5	15/44	82
27/38	48/13	34/43	36/6	76
89	70	79	99	

## 850

5/44	7/25	14/41	21/5	83
34/13	25/17	33/5	31/30	53
20/17	23/10	17/40	19/26	71
25/24	21/25	22/8	23/15	49
40/7	37/10	35/7	42/15	37
92	35	85	81	

## 851

24/10	14/14	34/8	15/48	69
30/38	44/2	33/28	10/4	68
5/28	7/32	3/18	21/10	66
19/10	2/16	22/27	30/3	49
6/24	28/29	19/4	26/28	71
82	83	69	89	

## 852

18/8	24/22	18/45	26/5	70
10/45	11/27	20/10	25/4	77
14/30	10/1	33/2	21/43	72
6/21	4/50	8/4	7/8	57
10/14	33/9	30/43	38/45	88
83	97	93	91	

## 853

31/23	28/31	13/15	24/17	55
25/33	13/14	21/5	19/40	73
27/9	40/18	18/45	34/13	80
3/20	5/5	10/18	8/30	26
14/13	25/15	17/36	39/7	49
64	52	85	82	

## 854

10/20	13/35	21/18	15/32	71
17/4	24/51	33/21	8/10	67
20/33	29/17	29/26	6/5	64
14/35	39/3	37/5	4/45	83
26/5	40/16	30/25	3/2	40
79	94	70	82	

## 855

5/47	32/18	19/35	46/9	52
8/10	20/45	23/15	2/8	72
3/40	16/23	26/5	28/41	61
10/34	21/4	13/40	18/22	72
15/5	37/18	31/7	25/30	43
90	80	54	76	

## 856

10/4	3/40	5/20	14/5	67
5/5	10/27	6/40	10/18	66
17/26	15/2	24/30	20/41	94
33/7	24/8	38/2	30/23	31
14/35	48/10	47/9	15/13	38
64	75	85	72	

## 857

29/5	21/40	31/8	13/18	57
19/15	16/9	15/22	10/9	36
20/29	23/2	31/7	15/43	71
22/13	18/45	25/3	14/4	51
33/12	34/20	31/30	26/1	39
63	81	51	59	

## 858

9/16	9/28	29/5	24/8	48
7/40	30/10	8/20	20/14	60
19/10	30/26	33/16	27/3	45
13/12	38/2	25/50	36/4	55
17/9	32/5	29/3	21/27	37
68	59	69	49	

## 859

18/3	3/42	8/15	12/5	56
9/50	7/26	13/3	16/10	77
11/16	24/2	18/10	15/38	52
12/6	13/8	27/17	21/38	45
10/4	18/7	15/30	21/2	30
62	48	72	78	

## 860

10/28	13/10	7/8	14/23	60
8/3	15/14	35/38	18/2	43
38/7	37/49	49/3	38/41	90
5/50	38/4	42/19	40/8	68
19/8	32/3	36/30	10/7	47
76	61	98	73	

## 861

20/21	18/32	15/7	14/27	80
24/34	19/13	15/20	29/9	52
40/2	43/7	28/46	26/24	69
36/10	33/36	31/5	37/10	47
21/17	30/10	25/9	30/23	49
72	77	74	74	

## 862

9/35	1/8	14/28	8/16	74
39/7	18/30	12/6	6/34	64
28/26	7/35	8/15	31/8	83
47/13	2/14	15/34	7/2	47
30/18	31/17	4/9	9/6	28
79	79	83	55	



## 863

23/10	36/13	40/5	4/25	39
33/14	27/5	38/39	31/4	51
12/8	4/43	38/7	2/39	80
17/45	14/2	34/29	46/13	73
6/20	1/35	4/14	32/34	67
65	81	68	96	

## 864

31/35	9/10	37/7	13/10	49
10/11	15/25	49/3	5/48	81
5/25	10/14	32/20	4/9	33
31/18	41/6	25/3	19/37	54
48/5	21/11	14/40	45/4	50
60	56	67	84	

## 865

17/26	47/2	34/25	1/30	70
13/11	18/45	14/4	13/5	53
40/21	27/8	39/27	5/5	35
31/13	38/20	7/15	39/6	32
44/13	40/14	16/10	4/37	68
70	66	71	51	

## 866

21/5	11/44	12/20	3/20	74
24/12	14/7	32/30	24/2	36
31/50	41/3	11/4	12/3	51
48/10	7/20	24/29	12/31	59
50/18	8/14	1/39	47/5	43
52	56	97	58	

## 867

24/9	30/24	31/5	37/33	62
16/22	7/13	12/40	36/3	60
40/4	9/7	17/29	45/19	50
25/28	11/45	24/8	20/10	68
3/39	4/9	6/3	2/45	77
91	65	67	94	

## 868

16/40	16/20	10/15	44/3	68
5/18	11/5	8/35	18/9	36
24/13	43/13	23/14	20/37	67
47/5	28/27	41/7	37/12	37
6/21	5/30	20/24	33/8	53
60	76	72	53	

## 869

28/8	12/7	42/12	6/40	58
15/42	5/24	14/41	43/5	89
30/40	48/46	32/7	30/13	84
19/3	22/50	12/46	50/9	94
8/19	5/10	11/3	37/22	28
81	95	93	84	

## 870

12/47	18/14	42/12	5/20	54
11/18	24/50	34/20	49/3	88
40/6	39/12	21/12	51/8	22
8/3	7/30	10/46	2/38	84
21/21	34/11	35/3	22/43	67
87	60	79	89	

## 871

13/37	20/2	5/50	36/3	89
8/5	37/20	7/11	30/22	34
38/23	20/30	13/6	5/40	70
18/4	48/17	20/5	20/34	59
38/5	35/9	25/10	8/29	33
69	70	63	83	

## 872

24/25	28/11	27/5	24/7	33
38/8	5/43	10/13	19/9	59
30/4	3/25	26/33	47/8	61
16/20	34/3	2/19	29/42	60
16/23	25/5	22/49	3/39	77
73	45	83	89	

## 873

3/8	9/44	34/5	2/32	80
13/39	28/17	24/37	39/8	87
47/5	40/7	24/38	27/20	47
23/44	10/29	4/13	36/3	83
14/2	7/3	16/4	15/40	45
86	91	85	80	

## 874

38/5	9/41	12/20	26/14	59
10/13	39/10	20/38	46/7	52
15/32	50/4	21/29	18/13	71
51/10	34/5	46/8	22/33	38
8/33	31/6	50/4	34/12	43
68	56	72	67	

## 875

3/40	13/28	9/30	49/5	78
44/8	32/6	5/49	32/4	48
10/41	19/5	18/9	21/16	57
26/10	5/44	37/24	41/6	64
30/7	3/22	50/3	19/50	61
76	74	92	66	

## 876

11/34	1/28	49/5	26/17	61
43/2	20/25	43/7	3/30	31
15/8	29/3	26/44	9/10	61
6/45	28/3	40/5	4/10	57
3/18	39/6	6/27	44/5	42
94	55	70	33	

## 877

13/12	4/33	21/17	11/15	59
24/37	12/25	9/14	49/5	50
11/20	16/4	16/9	13/50	70
35/6	41/3	9/20	38/9	34
12/13	49/9	31/35	28/10	52
59	54	81	71	

## 878

40/9	10/24	31/6	21/17	41
34/24	41/7	11/31	37/4	58
46/4	30/21	24/5	4/9	30
31/28	13/14	9/9	33/38	50
28/20	29/7	5/30	6/8	58
51	70	42	74	

## 879

3/20	7/10	46/8	12/13	41
44/14	27/44	16/37	44/7	79
32/6	43/9	32/18	25/28	45
46/10	28/14	19/10	37/12	22
11/50	47/2	7/25	15/16	65
69	53	63	67	

## 880

34/32	46/8	44/4	30/7	38
25/15	5/18	10/9	36/10	41
2/12	32/44	33/3	28/14	68
48/2	23/7	6/40	48/6	44
47/5	11/20	23/35	14/36	81
59	73	84	56	

## 881

11/15	17/20	34/17	9/13	47
28/17	8/13	40/30	10/36	76
7/28	13/23	38/10	13/7	60
3/26	19/6	28/27	4/20	52
16/10	17/42	32/7	13/33	72
65	82	83	77	

## 882

3/41	12/7	18/48	17/8	86
7/15	10/42	28/2	8/20	49
23/13	11/17	17/43	7/22	54
5/14	25/3	27/18	20/45	48
13/42	18/13	28/9	3/37	78
95	45	87	88	

## 883

12/46	28/17	24/3	15/15	61
16/30	31/46	33/2	21/7	69
27/9	40/7	24/51	28/10	59
22/5	36/32	27/5	20/47	83
30/23	49/10	33/30	40/6	48
87	78	79	76	

## 884

19/34	9/10	14/38	16/15	93
20/2	30/24	7/10	10/4	27
30/21	7/26	5/13	21/14	54
17/24	30/4	12/6	21/37	54
15/5	18/42	6/18	19/8	52
82	89	61	48	

## 885

17/30	23/5	3/28	24/35	91
10/31	22/4	1/15	25/3	33
30/10	40/8	16/40	30/6	45
18/28	29/39	9/15	35/5	67
23/12	26/31	15/4	25/29	53
85	73	68	63	

## 886

24/10	12/38	13/14	20/30	62
20/7	25/10	24/22	36/8	27
30/49	27/25	33/15	33/20	92
27/10	16/10	17/19	29/40	61
7/12	24/7	10/39	25/8	49
67	70	76	78	

# 887

17/33	4/16	13/20	30/25	71
48/4	5/24	38/39	30/6	58
29/17	17/3	15/50	35/30	77
21/12	14/35	15/5	43/12	48
30/19	21/10	24/6	36/13	33
63	68	90	66	

# 888

4/12	1/32	1/50	2/8	90
10/7	17/4	5/9	18/34	39
25/40	17/40	24/5	33/4	75
25/3	13/6	5/10	20/50	59
16/26	3/18	4/13	27/9	56
74	86	78	81	

# 889

20/17	33/10	11/37	15/45	92
17/30	25/50	22/8	29/7	79
36/4	38/3	24/29	31/12	42
15/7	23/8	5/30	13/38	43
21/30	26/14	10/21	12/6	51
82	53	96	76	

# 890

4/36	1/27	9/7	27/3	67
10/18	30/4	14/40	11/49	87
13/15	5/10	8/4	7/17	28
30/13	33/43	33/5	32/29	70
15/35	11/22	15/8	25/18	54
81	98	55	72	

# 891

24/38	11/28	19/7	21/1	64
31/4	18/7	20/48	25/12	58
21/27	22/43	25/10	36/12	78
27/9	14/5	21/6	28/34	32
17/29	3/25	4/20	15/51	78
90	69	57	94	

# 892

2046	14/50	19/8	21/5	94
26/5	29/4	25/17	18/10	26
32/7	21/18	30/38	33/4	53
23/13	19/6	21/28	16/35	72
32/4	31/8	30/2	28/45	46
59	68	78	86	

# 893

21/41	26/10	27/25	27/8	72
13/16	22/50	3/23	5/28	75
34/5	40/4	19/49	28/33	76
30/45	45/6	15/14	31/14	58
26/8	30/7	10/16	15/39	40
84	59	82	96	

# 894

8/14	6/40	19/29	8/13	90
20/8	24/38	26/1	19/10	47
20/2	8/9	21/44	19/5	46
23/10	14/6	29/5	25/44	49
24/42	12/3	31/6	27/19	40
53	82	67	70	



**895**

8/15	3/11	27/39	40/7	64
3/8	2/12	13/33	29/23	65
24/40	37/14	22/3	44/50	86
35/2	33/36	49/9	47/5	40
1/4	7/9	22/15	40/16	30
59	58	85	83	

**896**

13/50	26/9	33/25	29/13	79
25/10	35/31	34/30	37/28	95
13/5	36/5	31/6	28/45	48
10/15	20/45	15/11	33/8	53
18/10	37/10	34/9	29/25	33
73	81	61	93	

**897**

15/44	4/19	17/38	8/4	83
33/10	16/35	38/8	23/29	61
20/44	17/11	20/34	22/8	92
31/7	13/2	30/9	19/30	35
25/10	10/42	37/3	19/9	40
87	73	71	80	

**898**

24/7	6/44	27/11	13/4	44
5/28	2/25	2/44	4/17	71
13/16	8/16	25/11	11/45	86
27/7	13/29	37/9	10/7	33
12/35	9/2	23/29	8/40	97
78	85	83	85	

**899**

2/23	12/10	5/40	27/4	70
19/3	10/38	8/3	25/38	69
1/7	9/13	1/6	18/43	48
17/5	18/30	17/3	38/15	35
14/48	32/6	15/42	32/5	94
70	78	87	81	

**900**

13/3	8/30	21/33	2/20	63
37/36	39/7	45/27	27/40	92
16/11	13/8	25/16	15/8	33
20/42	16/38	29/4	8/39	93
28/3	22/10	32/19	13/9	31
70	74	83	85	

**РЕЗЮМЕ**

В данной главе рассмотрена обобщенная модель классической транспортной задачи, в которой для каждой коммуникации наложено ограничение на пропускную способность. Это означает, что существует некоторое предельное число единиц продукции, которое можно перевезти за время, оговоренное в условиях задачи. Та-

кая задача не всегда разрешима, поскольку система ограничений может оказаться противоречивой.

Изложено два метода построения начального опорного плана — классический и эвристический метод минимального резерва пропускной способности, разработанный автором. Подробно описан метод потенциалов, даны рекомендации для решения вырожденных задач. Приведены численные примеры, иллюстрирующие методы построения начального опорного плана, метод потенциалов и доказательство неразрешимости задачи.

Следует отметить, что в практических задачах проблема определения пропускной способности оказывается очень сложной.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте транспортную задачу с ограничениями на пропускные способности коммуникаций (задачи  $Td$ ).
2. Каковы особенности задачи  $Td$ ?
3. Классифицируйте переменные, учитывающие особенности задачи.
4. Назовите необходимые условия разрешимости задачи  $Td$ .
5. Сформулируйте критерий оптимальности плана задачи  $Td$ .
6. Опишите классический метод построения допустимого плана транспортной задачи с ограничениями на пропускные способности (введение фиктивного поставщика и потребителя — расширение задачи).
7. Что является признаком неразрешимости задачи с ограничениями на пропускные способности?
8. Приведите примеры задач с противоречивыми условиями.
9. Опишите метод минимального резерва пропускной способности для построения допустимого плана транспортной задачи с ограничениями на пропускные способности.
10. Как определяется резерв пропускной способности поставщика (потребителя)?

11. Как изменяются резервы пропускной способности коммуникаций поставщиков, если при определении объема очередной перевозки исчерпаны запасы одного из них?

12. Как изменяются резервы пропускной способности коммуникаций потребителей, если при определении объема очередной перевозки удовлетворены потребности одного из них?

13. В каком случае в задаче  $Td$  коммуникация просится, но не может войти в базис?

14. Что положено в основу метода потенциалов?

15. Перечислите основные этапы метода потенциалов.

16. Как определяется величина корректировки плана, если разрешающая коммуникация соответствует нулевой небазисной переменной?

17. Как следует корректировать текущий опорный план, если разрешающая коммуникация соответствует нулевой небазисной переменной?

18. Как определяется величина корректировки плана, если разрешающая коммуникация соответствует предельной небазисной переменной?

19. Как следует корректировать текущий опорный план, если разрешающая коммуникация соответствует предельной небазисной переменной?

20. Что следует делать при возникновении вырожденности текущего плана в транспортной задаче с ограничениями на пропускные способности?

21. Назовите способы вычисления суммарных транспортных расходов для текущего опорного плана задачи  $Td$ .

22. Проведите сравнительный анализ метода минимального резерва пропускной способности коммуникаций и метода Фогеля.

23. Можно ли, не решая задачу  $Td$ , определить количество итераций метода потенциалов?

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

*Игрок. Чистые стратегии. Ситуация. Природа. Выигрыш. Платежная матрица. Нижняя и верхняя цена игры. Седловая точка. Цена игры. Математическое ожидание выигрыша. Планируемый объем производства продукции.*

## ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО АССОРТИМЕНТА ПРОДУКЦИИ

**Пример 7.1.** Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию двух видов  $N_1$  и  $N_2$ , реализация которой сильно зависит от состояния погоды. Отделом сбыта установлено, что в условиях теплой погоды можно продать  $S_1(N_1)$  единиц продукции  $N_1$  и  $S_1(N_2)$  единиц продукции  $N_2$ , а в условиях холодной погоды можно продать  $S_2(N_1)$  единиц продукции  $N_1$  и  $S_2(N_2)$  единиц продукции  $N_2$ . Изготовление одного изделия  $N_1$  предприятию обходится в  $c(N_1)$  рублей, а цена реализации в день изготовления составляет  $d(N_1)$  рублей. Если продукция не продана в тот же день, ее можно распродать к концу дня по сниженной цене  $u(N_1)$ . Для изделий  $N_2$  себестоимость равна  $c(N_2)$ , цена реализации —  $d(N_2)$ , сниженная цена —  $u(N_2)$  рублей (возможно равная нулю).

Определить ежедневный объем производства продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль. Все данные сведем в табл. 7.1.

**Решение.** В качестве первого игрока будем рассматривать руководство предприятия, у которого в распоряжении имеется две чистые стратегии: стратегия  $a_1$  — производить продукцию в рас-



чете на теплую погоду в объеме  $V_1(N_1, N_2) = S_1(N_1) + S_1(N_2)$ , стратегия  $a_2$  — производить продукцию в расчете на холодную погоду в объеме  $V_2(N_1, N_2) = S_2(N_1) + S_2(N_2)$ . Вторым игроком будем считать природу, которая может находиться в одном из двух состояний:  $b_1$  — теплая погода,  $b_2$  — холодная погода. Выигрыш предприятия линейно зависит от объема производства, поэтому будем строить платежную матрицу отдельно для каждого вида продукции, а затем, сложив их, получим общую платежную матрицу. Если объем произведенной продукции не превышает спроса ( $V_i \leq S_j$ ), то выигрыш будет равен произведению объема произведенной продукции  $V_i$  на величину прибыли  $(d - c)$ .

$$h_{ij} = V_i(d - c).$$

Таблица 7.1

Вид продукции	Себестоимость единицы продукции, руб.	Отпускная цена, руб.		Объем реализации усл. единиц	
		в день изготавл.	позже	в теплую погоду	в холодную погоду
$N_k$	$c(N_k)$	$d(N_k)$	$u(N_k)$	$S_1(N_k)$	$S_2(N_k)$
$N_1$	$c(N_1)$	$d(N_1)$	$u(N_1)$	$S_1(N_1)$	$S_2(N_1)$
$N_2$	$c(N_2)$	$d(N_2)$	$u(N_2)$	$S_1(N_2)$	$S_2(N_2)$

Если предложение превышает спрос ( $V_i > S_j$ ), то для определения выигрыша надо из произведения спроса на величину прибыли вычесть произведение объема нереализованной продукции на величину убытков

$$h_{ij} = S_j(d - c) - (V_i - S_j)(c - u).$$

В результате получим кусочно-линейную функцию для определения элементов платежной матрицы по каждому виду продукции:

$$h_{ij} = \begin{cases} V_i(d-c), & \text{если } V_i \leq S_j \\ S_j(d-c) - (V_i - S_j)(c-u), & \text{если } V_i > S_j. \end{cases}$$

**Пример 7.2.** Решить задачу выбора оптимального ассортимента продукции, заданную табл. 7.2.

Таблица 7.2

$N_k$	$c(N_k)$	$d(N_k)$	$u(N_k)$	$S_1(N_k)$	$S_2(N_k)$
$N_1$	7	13	0	4500	1200
$N_2$	9	20	4	900	2600

Вычислим элементы платежной матрицы для продукции  $N_1$ .

Объем производства	Спрос при различных состояниях природы	
	4500	1200
4500	27000	-15900
1200	7200	7200

Так, в ситуации  $(a_1, b_1)$  элемент  $h_{11}^{(1)}$  вычисляется следующим образом. Предприятие выпускает продукцию  $N_1$  в объеме  $V_1 = 4500$  единиц, что в условиях теплой погоды соответствует спросу  $S_1 = 4500$  единиц. Выигрыш предприятия составит

$$h_{11}^{(1)} = 4500(13 - 7) = 27000 \text{ руб.}$$

Выигрыш  $h_{12}^{(1)}$  в ситуации  $(a_1, b_2)$  рассчитываем так. Предприятие производит 4500 единиц продукции, а в условиях холодной погоды может реализовать только 1200 единиц. Прибыльная часть выигрыша составит величину  $1200(13 - 7) = 7200$  руб. Объем не-реализованной продукции равен  $4500 - 1200 = 3300$  единиц. Предприятие будет терпеть убытки, сумма которых составит величину  $3300(7 - 0) = 23100$  руб.

$$h_{12}^{(1)} = 1200(13 - 7) - (4500 - 1200)(7 - 0) = -15900 \text{ руб.}$$

$$h_{21}^{(1)} = 1200(13 - 7) = 7200 \text{ руб.} \quad h_{22}^{(1)} = 1200(13 - 7) = 7200 \text{ руб.}$$

Аналогично вычисляются элементы платежной матрицы для продукции  $N_2$ .

Объем производства	Спрос при различных состояниях природы	
	900	2600
900	9900	9900
2600	1400	28600

$$h_{11}^{(2)} = 900(20 - 9) = 9900 \text{ руб.} \quad h_{12}^{(2)} = 900(20 - 9) = 9900 \text{ руб.}$$

$$h_{21}^{(2)} = 900(20 - 9) - (2600 - 900)(9 - 4) = 1400 \text{ руб.}$$

$$h_{22}^{(2)} = 2600(20 - 9) = 28600 \text{ руб.}$$

Сложив матрицы  $H^{(1)}$  и  $H^{(2)}$ , получим платежную матрицу  $H$ , элементы которой  $h_{ij} = h_{ij}^{(1)} + h_{ij}^{(2)}$  являются суммарным выигрышем в каждой ситуации  $(a_i, b_j)$ :

$$H = \begin{vmatrix} 36900 & -6000 \\ 8600 & 35800 \end{vmatrix}.$$

Строки матрицы соответствуют стратегиям предприятия  $a_1$  и  $a_2$ , столбцы соответствуют состояниям природы  $b_1$  и  $b_2$ .

Множитель 100 можно вынести за знак матрицы, тогда

$$H' = \frac{1}{100} H = \begin{vmatrix} 369 & -60 \\ 86 & 358 \end{vmatrix}.$$

Определим нижнюю цену игры  $\underline{v}' = \max_i \min_j h'_{ij} = \max_i \{-60, 86\} = 86$  и верхнюю цену игры  $\bar{v}' = \min_j \max_i h'_{ij} = \min_j \{369, 358\} = 358$ .

Матрица не содержит седлового элемента. Цена игры  $v$  принадлежит интервалу  $(8600; 35800)$ . Решение будем искать в смешанных стратегиях.

Пусть  $x$  — вероятность выбора предприятием стратегии  $a_1$ , тогда вероятность выбора стратегии  $a_2$  составит  $1-x$ , где  $0 \leq x \leq 1$ . Вероятность того, что погода будет теплой, обозначим буквой  $y$ , тогда вероятность того, что природа будет находиться в состоянии холодной погоды, составит  $1-y$ , где  $0 \leq y \leq 1$ .

Математическое ожидание выигрыша предприятия определяется функцией от двух переменных

$$H(x, y) = 701xy - 418x - 272y + 358.$$

Рассмотрим неравенство

$$\max_x H(x, y^*) \leq H(x^*, y^*) \leq \min_y H(x^*, y).$$

Найдем частные производные, приравняем их к нулю.

$$\left. \frac{\partial H(x, y^*)}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 701y^* - 418 = 0,$$

$$\left. \frac{\partial H(x^*, y)}{\partial y} \right|_{y=y^*} = 701x^* - 272 = 0.$$

Решив систему, получим оптимальные стратегии

$$X^* = \left( \frac{272}{701}; \frac{429}{701} \right); \quad Y^* = \left( \frac{418}{701}; \frac{283}{701} \right).$$

Найдем цену игры

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{100} v = 701x^*y^* - 418x^* - 272y^* + 358 = \\ &= 701 \times \frac{272}{701} \times \frac{418}{701} - 418 \times \frac{272}{701} - 272 \times \frac{418}{701} + 358 = \frac{137262}{701}. \end{aligned}$$



Откуда получим  $v = \frac{13726200}{701} = 19580,88$  руб.

Это значит, что при любой погоде предприятие получит максимальный средний доход, равный цене игры, если будет придерживаться оптимальной смешанной стратегии, т. е. если произведет продукции  $N_1$  в количестве

$$V(N_1) = 4500 \times \frac{272}{701} + 1200 \times \frac{429}{701} = \frac{1738800}{701} = 2480 \text{ единиц,}$$

а продукции  $N_2$  — в количестве:

$$V(N_2) = 900 \times \frac{272}{701} + 2600 \times \frac{429}{701} = \frac{1360200}{701} = 1940 \text{ единиц.}$$

Проверим результат.

Ожидаемый выигрыш предприятия при теплой погоде составляет величину

$$H(x^*, b_1) = \frac{272}{701} \times 36900 + \frac{429}{701} \times 8600 = 19580,88 \text{ руб.,}$$

а при холодной —

$$H(x^*, b_2) = \frac{272}{701} \times (-6000) + \frac{429}{701} \times 35800 = 19580,88 \text{ руб.}$$

Действительно, при любой погоде предприятию рекомендуется выпускать продукцию  $N_1$  в количестве 2480 единиц, а продукцию  $N_2$  — в количестве 1940 единиц. Доход при этом составит 19580,88 руб.

### ЗАДАЧИ 901—1000

Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию А и В. Данные о ее себестоимости, отпускных ценах и объемах реализации приведены в таблице. На реализацию всей произведенной продукции расходуется  $300 - 2\kappa$  руб. ( $\kappa$  — число, составленное из двух последних цифр номера зачетки). Определить ежедневный объем

производства продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

Номер варианта	Вид продукции	Себестои- мость еди- ницы про- дукции	Отпускная цена, ден. ед.		Объем реализа- ции, ед.	
			в день изго- товления	позже	в теп- лую погоду	в холод- ную погоду
1	2	3	4	5	6	7
901	A	5,3	7	4,5	800	5200
	B	3,8	4,9	2,9	4300	1000
902	A	4	5,2	2,8	5500	1300
	B	2,3	3	1,4	960	3900
903	A	7,9	13,7	2,1	3500	400
	B	8,6	12,9	3,2	900	2000
904	A	13,5	16,3	10,1	1850	9000
	B	14,7	19	11,4	3700	785
905	A	15,1	28,3	10,6	3830	4205
	B	31,3	48,1	25,5	3637	1732
906	A	13,2	18,41	6,63	166	442
	B	9,48	14,82	4,28	928	383
907	A	13,49	19,3	9,36	4231	3247
	B	46,33	47,51	40,39	2952	3513
908	A	32,3	34,12	22,8	3827	4142
	B	18,39	22,31	16,31	8145	1846
909	A	30,34	47,5	24,2	740	4247
	B	51,2	61,13	43,6	3524	2713
910	A	27,38	37,4	22,21	1811	841
	B	39,16	44,75	31,24	1349	2413
911	A	24,29	31,53	15,28	5024	2450
	B	39,28	45,21	37,17	3833	4743
912	A	3,2	5,48	2,53	5225	614
	B	1,99	2,62	1,02	2323	4244

1	2	3	4	5	6	7
913	A	5,42	9,69	3,31	282	381
	B	3,42	5,37	1,15	631	243
914	A	41,14	51,26	36,48	231	349
	B	15,24	18,34	12,3	946	507
915	A	2,02	3,03	1,7	4648	1248
	B	4,25	4,51	3,9	3614	8352
916	A	20,44	25,38	17,13	2127	451
	B	32,43	50,14	28,4	735	3849
917	A	5,35	12,23	4,2	656	3526
	B	4,61	7,3	2,72	3848	743
918	A	8,16	11,3	6,4	234	1700
	B	4,1	7,7	2,3	1123	320
919	A	42,21	46,4	32,32	1928	4719
	B	24,44	31,4	22,35	2539	933
920	A	9,24	12,31	7,17	832	2312
	B	6,42	9,72	4,95	5329	3500
921	A	42,3	48,11	39,1	4018	914
	B	13,7	21,36	9,82	1316	3817
922	A	6,49	10,54	4,32	3204	1727
	B	23,36	62,3	18,35	449	9334
923	A	22,7	32,3	13,31	544	2229
	B	13,17	30,49	5,47	2337	948
924	A	18,12	24,19	9,67	1153	5225
	B	4,19	9,93	3,29	8222	1481
925	A	29,36	34,24	15,46	832	2948
	B	13,13	19,15	7,13	4350	1151
926	A	15,41	25,43	12,15	5045	1404
	B	4,34	7,21	1,26	1583	9378
927	A	4,24	8,41	2,64	428	3134
	B	9,45	13,25	3,91	5039	887

1	2	3	4	5	6	7
928	A	6,38	11,35	4,61	5445	811
	B	9,23	12,24	3,81	202	6242
929	A	3,14	4,39	2,19	824	1551
	B	1,91	4,47	0,93	2820	412
930	A	6,11	8,24	3,41	1769	432
	B	2,11	6,25	0,36	244	2822
931	A	22,12	36,4	4,64	771	4141
	B	3,43	9,48	2,28	3838	443
932	A	31,15	52,5	23,23	5131	2360
	B	6,32	10,37	4,28	864	4331
933	A	18,62	44,34	8,47	393	4503
	B	2,44	8,99	0,55	3423	535
934	A	11,49	29,4	3,44	5143	357
	B	6,37	14,45	0	817	9300
935	A	3,34	8,22	0,53	6081	815
	B	28,22	38,21	12,28	1148	9468
936	A	3,2	5,2	0,6	9271	362
	B	2,8	4,1	1,7	148	2714
937	A	39,1	51,3	36,3	291	938
	B	24,3	43,4	14,9	433	183
938	A	6,3	7,7	4,1	3211	7132
	B	3,1	4,32	0,91	6471	4314
939	A	10,1	19,61	4,04	1344	942
	B	29,4	35,4	12,81	1408	5124
940	A	5,12	9,23	3,53	4143	833
	B	1,93	4,12	0,82	738	1940
941	A	46,3	7,39	3,39	3052	733
	B	15,18	22,16	10,42	953	2030
942	A	25,14	39,7	12,42	962	1342
	B	9,17	19,1	8,22	3526	845



1	2	3	4	5	6	7
943	A	2,72	9,43	1,53	6846	4210
	B	7,19	12,5	2,26	911	3422
944	A	6,13	12,14	3,25	3225	812
	B	23,41	35,11	10,42	453	4120
945	A	18,47	38,43	8,42	924	2416
	B	9,2	12,43	3,2	2025	1624
946	A	4,65	6,17	1,38	2549	832
	B	2,48	4,3	0,76	4620	8649
947	A	6,3	9,23	3,22	7243	1433
	B	9,94	13,29	4,3	2874	8271
948	A	9,32	11,14	4,12	828	4344
	B	2,17	4,15	1,3	1538	641
949	A	8,5	10,83	7,25	3319	1034
	B	13,94	17,11	4,72	624	2847
950	A	3,62	9,29	1,04	1322	941
	B	12,33	21,93	4,33	425	3243
951	A	7,45	9,4	4,23	849	2333
	B	2,34	2,69	0,3	2441	935
952	A	17,46	30,35	11,33	1247	6230
	B	11,12	27,36	4,32	3313	961
953	A	8,33	10,27	3,61	4324	745
	B	22,18	37,34	9,21	930	3450
954	A	2,4	3,48	0,8	4828	836
	B	4,15	8,22	3,44	1355	6740
955	A	5,14	10,46	4,12	432	1624
	B	9,21	13,2	5,4	2535	644
956	A	7,44	11,37	3,63	2410	449
	B	9,29	16,45	4,34	923	3427
957	A	39,4	58,42	24,3	1043	438
	B	6,11	11,24	4,72	472	3018

1	2	3	4	5	6	7
<b>958</b>	A	8,22	13,54	3,71	1223	453
	B	4,12	7,18	2,21	977	6123
<b>959</b>	A	9,33	14,31	5,23	824	1611
	B	12,44	18,2	8,42	3320	1032
<b>960</b>	A	20,03	33,49	10,12	621	1550
	B	8,83	12,43	3,62	7354	1048
<b>961</b>	A	1,7	26,1	4,92	3727	621
	B	8,38	13,82	4,44	422	1950
<b>962</b>	A	7,34	13,6	3,12	849	1610
	B	18,4	30,5	6,16	1932	463
<b>963</b>	A	9,23	10,44	4,1	3243	962
	B	14,82	27,21	8,27	1092	4840
<b>964</b>	A	19,5	31,1	7,14	4019	653
	B	8,11	13,29	3,83	414	2641
<b>965</b>	A	6,52	10,23	2,67	1441	520
	B	3,31	7,43	1,5	1542	4261
<b>966</b>	A	33,5	47,3	24	129	1015
	B	8,32	14,2	3,44	6330	2100
<b>967</b>	A	8,42	11,63	5,02	739	1318
	B	18,5	29,4	13,1	840	115
<b>968</b>	A	36,1	39,9	22,1	417	1116
	B	11,2	15,1	8,3	810	351
<b>969</b>	A	22,42	34,2	11,2	536	2893
	B	6,42	12,8	4,37	953	538
<b>970</b>	A	9,4	14,3	4,44	1536	411
	B	4,72	9,72	2,35	1963	4839
<b>971</b>	A	2,21	3,83	1,22	522	1842
	B	4	7,2	1,3	8732	1725
<b>972</b>	A	5,21	9,34	1,83	1550	872
	B	19,51	27,4	10,4	624	2763

1	2	3	4	5	6	7
<b>973</b>	A	15	23,3	6,2	950	164
	B	9,2	14,2	3,43	1320	5641
<b>974</b>	A	7,4	11,5	3,24	3503	917
	B	12,31	15,3	8,51	942	2125
<b>975</b>	A	3,96	7,15	1,84	5431	1815
	B	7,4	10,35	2,57	1326	3445
<b>976</b>	A	7,3	9,32	5,19	983	6444
	B	5,2	7,2	2,5	4638	625
<b>977</b>	A	3,9	4,18	1,04	848	3241
	B	7,41	11,2	6,2	1546	421
<b>978</b>	A	7,4	9,1	4,3	1033	4620
	B	11,9	19,1	9,2	3414	843
<b>979</b>	A	3,15	5,24	0,9	4340	1823
	B	2,1	4,6	1,31	1031	3135
<b>980</b>	A	3,3	5,47	2,71	3214	822
	B	2,2	4,2	1,6	832	4616
<b>981</b>	A	4,34	5,43	3,81	2524	940
	B	9,64	11,33	5,45	1351	4810
<b>982</b>	A	2,62	4,9	0	4027	983
	B	4,4	5,17	3,11	1013	2193
<b>983</b>	A	2,34	9,28	1,62	1441	622
	B	14,42	21,17	9,46	1620	1827
<b>984</b>	A	4,43	6,53	1,57	4074	727
	B	12,3	19,21	7,3	1833	9221
<b>985</b>	A	1,21	4,6	0,4	2048	742
	B	6,12	9,4	4	1419	4112
<b>986</b>	A	19,8	28,4	6,25	961	4127
	B	4,8	8,3	1,1	3012	1232
<b>987</b>	A	6,16	10,38	5,04	3371	1300
	B	10,25	15,37	3,24	183	840

1	2	3	4	5	6	7
<b>988</b>	A	10,12	14,23	7,49	2143	964
	B	13,31	14,46	3,71	2000	5512
<b>989</b>	A	19,4	23,1	4,32	3103	749
	B	2,13	4,74	1,43	1000	3722
<b>990</b>	A	5,13	7,41	2,7	7136	1674
	B	9,93	18,7	3,3	2126	3231
<b>991</b>	A	7,22	12,3	4,11	4342	914
	B	3,13	5,17	1,6	440	1014
<b>992</b>	A	4,42	9,21	1,8	4436	1024
	B	5,17	10,21	1,4	946	1943
<b>993</b>	A	7,3	15,1	4,43	2134	631
	B	9,38	7,3	4,32	2143	9423
<b>994</b>	A	4,84	9,47	1,02	7415	1173
	B	6,26	9,57	2,82	451	1251
<b>995</b>	A	20,2	38,9	7,97	334	850
	B	14,02	20,32	7,32	1040	260
<b>996</b>	A	8,21	12,3	5,49	821	3105
	B	6,1	8,18	1,42	1641	735
<b>997</b>	A	7,4	17,25	2,49	5500	1200
	B	2,91	4,19	1,73	940	4300
<b>998</b>	A	20,1	31,4	11,4	5063	1113
	B	3,3	8,1	3	689	4942
<b>999</b>	A	5,9	8,5	4,44	9901	2014
	B	15,21	21,29	9,3	1128	8300
<b>1000</b>	A	2,12	4,37	0	2739	811
	B	9,72	13,73	5,08	1545	3827



## РЕЗЮМЕ

В практической деятельности имеется множество задач, в которых приходится находить оптимальное решение, приемлемое для всех лиц, интересы которых могут не совпадать. Возникает социально-экономическое явление, в котором участвуют несколько сторон, заинтересованных в получении наибольшей индивидуальной выгоды. Такие явления называются конфликтами, а теория и методы математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта называют теорией игр. Математическая модель конфликта называется игрой. Цель теории игр — выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта.

Среди типичных примеров такого поведения могут быть названы действия конкурирующих фирм на одном рынке или планирование военных операций.

В главе рассмотрен аналитический метод решения матричной игры на примере задачи, в которой требуется определить оптимальный ассортимент двух видов продукции.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется конфликтом?
2. Кратко сформулируйте предмет теории игр как научной дисциплины.
3. Что называется игрой?
4. По каким основным признакам проводится классификация игр?
5. Для описания каких экономических ситуаций может быть применен аппарат теории игр?
6. Какая игра называется бескоалиционной?
7. Что называется приемлемой ситуацией и ситуацией равновесия?
8. Какая игра называется антагонистической?

9. Чем однозначно определяются матричные игры?
10. В чем заключаются принципы максимина и минимакса? Нижняя и верхняя цена игры.
11. При каких условиях можно говорить о том, что игра имеет седловую точку?
12. Приведите примеры игр, которые имеют седловую точку и в которых она отсутствует.
13. Какие подходы существуют к определению оптимальных стратегий?
14. Что называют «ценой игры»?
15. Дайте определение понятию «смешанная стратегия». Геометрическая интерпретация множества смешанных стратегий.
16. Каков содержательный смысл дополняющей нежесткости в матричных играх?
17. Дайте определение статистической игры.
18. Какой смысл вкладывается в понятие «Природа»?
19. Как проводится упрощение платежной матрицы с помощью доминирования в статистической игре?
20. Что такое риск? Как вычисляется матрица рисков?
21. Сформулируйте критерии выбора оптимальных стратегий в статистических играх.

### ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

*Задачи с неделимостями. Антье. Дробная часть. Конгруэнтность чисел. Правильное отсечение. Метод Гомори. Признак неразрешимости задачи.*

Студент должен

*знать:*

- определение конгруэнтности чисел;
- метод отсечения Гомори;
- двойственный симплекс-метод;

*уметь:*

- формулировать задачу целочисленного программирования;
- строить правильное отсечение в методе Гомори;
- выбирать разрешающий элемент по правилу двойственного симплекс-метода;
- применять правило прямоугольника с отрицательным разрешающим элементом;
- определять неразрешимость целочисленной задачи.

#### § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При рассмотрении некоторых экономических задач следует учитывать требование целочисленности используемых переменных.

Такие задачи называются задачами целочисленного программирования. В математической модели задачи как целевая функция, так и ограничения могут быть линейными, нелинейными и смешанными.

Чтобы понять, насколько важны с практической точки зрения задачи целочисленного программирования, достаточно обратиться к задаче распределения ограниченных ресурсов. В такой задаче некоторые ресурсы могут использоваться лишь в количествах, крат-

ных соответствующей единице измерения. Эти ресурсы характеризуются переменными модели, удовлетворяющими требованию целочисленности. Примерами подобных ресурсов являются штучные изделия: станки, грузовики, партии товаров, самолеты, компьютеры и т. д.

Ограничимся случаем, когда целевая функция и система ограничений задачи являются линейными.

Задача целочисленного программирования может быть сформулирована следующим образом: требуется найти максимум функции

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (8.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (8.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (8.3)$$

при дополнительном условии  $x_j$  — целые числа. (8.4)

В некоторых случаях условие (8.4) налагается только на часть переменных, такие задачи называются частично целочисленными.

## § 2. МЕТОД ГОМОРИ

Наиболее известным методом решения целочисленных задач с линейными ограничениями является метод отсекающих плоскостей Гомори, состоящий из следующих этапов.

*Первый этап.*

Задача решается симплекс-методом до получения оптимального плана.

*Второй этап.*

В финальную симплекс-таблицу добавляют ограничение  $-q_{i1}x_1 - q_{i2}x_2 \cdots - q_{im}x_m \leq -q_i$ , составленное для  $i$ -й строки следую-



щим образом:  $q_i = \tilde{b}_i - [\tilde{b}_i]$ ,  $q_{ij} = \tilde{a}_{ij} - [\tilde{a}_{ij}]$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , где  $0 < q_i < 1$ ,  $0 \leq q_{ij} < 1$ .

Обычно для реализации симплекс-метода в левую часть отсе-  
чения Гомори вводят дополнительную переменную  $x_{n+1} \geq 0$   
и записывают новое ограничение в каноническом виде  
 $-q_{i1}x_1 - q_{i2}x_2 \dots - q_{in}x_n + x_{n+1} = -q_i$ . Символ  $[a]$  обозначает целую  
часть числа  $a$ , т. е. наибольшее целое, не превосходящее  $a$ .

### *Третий этап.*

В финальной симплекс-таблице коэффициенты отсекающего  
ограничения помещают в дополнительную строку, которую выби-  
рают разрешающей. Разрешающий столбец выбирают по правилу  
двойственного симплекс-метода. Преобразуют таблицу по правилу  
прямоугольника. Если при этом полученное решение окажется не  
целочисленным, то процедуру построения дополнительного огра-  
ничения повторяют.

Из изложенного выше следует, что для решения задачи мето-  
дом Гомори необходимо выполнить в указанном порядке следующие  
предписания:

1. Исходную задачу решают симплекс-методом до получения  
оптимального решения без учета требования целочисленности пе-  
ременных.

2. Просматривают строки, в которых в столбце свободных чле-  
нов находятся дробные числа. Если хотя бы в одной из них все ко-  
эффициенты разложения — целые числа, то исходная задача не  
имеет целочисленного оптимального решения. Процесс окончен.  
Если таких строк нет, то переходят к п. 3.

3. Составляют дополнительное ограничение для строки, содер-  
жащей наибольшую дробную часть в столбце свободных членов.

4. Коэффициенты нового ограничения вносят в дополнитель-  
ную строку последней симплекс-таблицы.

5. Введенную строку объявляют разрешающей.

6. Разрешающий элемент выбирают по правилу двойственного  
симплекс-метода.

7. С выбранным разрешающим элементом осуществляют переход к следующей симплекс-таблице, используя преобразования Жордана–Гаусса.

8. В случае необходимости составляют еще одно дополнительное ограничение, и процесс повторяют до получения целочисленного оптимального плана или установления неразрешимости задачи.

**Примечание.** Дополнительное ограничение можно составлять несколько иначе, т. е. в качестве коэффициентов при неизвестных выбрать единицы. Тем самым получим ограничение в виде  $-x_1 - x_2 - \dots - x_n \leq -1$ .

**Пример 8.1.** Задана целочисленная задача линейного программирования

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 4x_1 - 3x_2 \leq 9 \\ (2) \quad 8x_1 + 5x_2 \leq 39 \\ (3) \quad -6x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ (4) \quad x_1 + 4x_2 \geq 6 \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$x_1, x_2$  — целые.

Найти оптимальное целочисленное решение методом Гомори. Сравнить значения оптимумов исходной и целочисленной задач.

**Решение.** Оптимальный план исходной задачи без учета целочисленности представлен в табл. 8.1.

Таблица 8.1

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	2	–3	0	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
1	$A_1$	2	54/19	1	0	4/19	0	0	–3/19
2	$A_4$	0	234/19	0	0	–27/19	1	0	44/19
3	$A_5$	0	649/19	0	0	34/19	0	1	22/19
4	$A_2$	–3	15/19	0	1	–1/19	0	0	–4/19
$m+1$			63/19	0	0	11/19	0	0	6/19

Проведем анализ указанной таблицы, отвечающий оптимальному плану исходной задачи. Как видно из табл. 8.1, оптимальный план  $X^* = (x_1^* = 54/19, x_2^* = 15/19)$  не является целочисленным, при этом в первой строке столбца  $B$  содержится наибольшая дробная часть. Для первой строки составим дополнительное ограничение (отсечение Гомори)

$$-0x_1 - 0x_2 - \frac{4}{19}x_3 - 0x_4 - 0x_5 - \frac{16}{19}x_6 \leq -\frac{16}{19},$$

для которого коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$q_{11} = \frac{54}{19} - \left[ \frac{54}{19} \right] = \frac{16}{19}; \quad q_{11} = 1 - [1] = 0; \quad q_{12} = 0 - [0] = 0;$$

$$q_{13} = \frac{4}{19} - \left[ \frac{4}{19} \right] = \frac{4}{19}; \quad q_{14} = 0 - [0] = 0; \quad q_{15} = 0 - [0] = 0;$$

$$q_{16} = -\frac{3}{19} - \left[ -\frac{3}{19} \right] = \frac{16}{19}.$$

Построенное ограничение приведем к каноническому виду и поместим в строку 5 табл. 8.1, получим табл. 8.2.

Таблица 8.2

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	2	-3	0	0	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$S_I$
1	$A_1$	2	54/19	1	0	4/19	0	0	-3/19	0
2	$A_4$	0	234/19	0	0	-27/19	1	0	44/19	0
3	$A_5$	0	649/19	0	0	34/19	0	1	22/19	0
4	$A_2$	-3	15/19	0	1	-1/19	0	0	-4/19	0
5	$S_I$	0	-16/19	0	0	-4/19	0	0	<b>-16/19</b>	1
$m+1$			63/19	0	0	11/19	0	0	6/19	0

Строка 5 — разрешающая, а разрешающим столбцом будет вектор  $A_6$ . Далее с полученным разрешающим элементом  $-q_{16} = -16/19$  перейдем к следующей симплекс-таблице (табл. 8.3).

Таблица 8.3

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	2	-3	0	0	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$S_I$
1	$A_1$	2	3	1	0	1/4	0	0	0	-3/16
2	$A_4$	0	10	0	0	-2	1	0	0	11/4
3	$A_5$	0	33	0	0	3/2	0	1	0	11/8
4	$A_2$	-3	1	0	1	0	0	0	0	-1/4
5	$A_6$	0	1	0	0	1/4	0	0	1	-19/16
m+1			3	0	0	1/2	0	0	0	3/8

В столбце  $B$  дробных чисел нет, оптимальный план является целочисленным.

Ответ:  $X_{II}^* = (x_1 = 3, x_2 = 1)$ ,  $\max f_{II} = 3$ , дополнительные переменные в ответе не участвуют. Целочисленное максимальное значение целевой функции меньше ее нецелочисленного значения. Геометрически это объясняется тем, что в результате построения отсечений Гомори целочисленная оптимальная угловая точка смещается назад против нормального вектора.

Из рис. 8.1 видно, что целочисленной областью задачи является многоугольник  $LMNPQ$ , а максимальное значение целевая функция принимает в точке  $L = (3; 1)$ .

Приведенный выше метод отсекающих плоскостей далек от совершенства. Уровень развития методов решения целочисленных задач не удовлетворяет требованиям, которые диктуются их практической важностью.



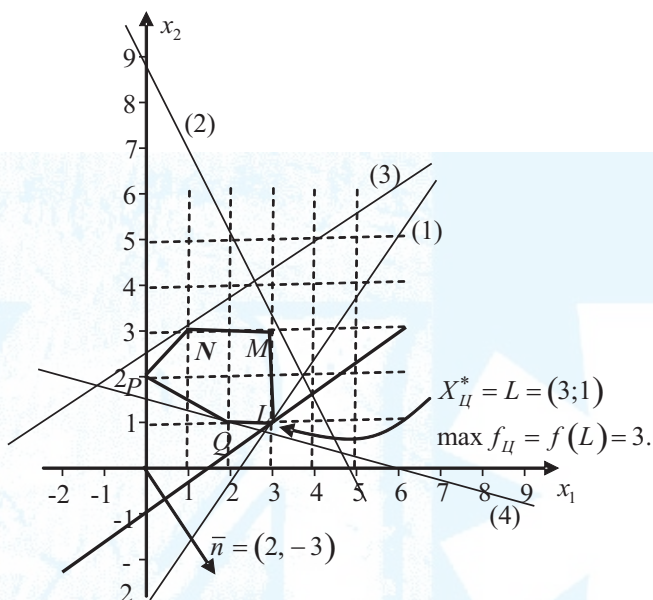


Рис. 8.1

### ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти оптимальное целочисленное решение задач 401–500:  
а) графическим методом; б) Методом Гомори. Сравнить значения функций целочисленного и нецелочисленного оптимальных решений.

### РЕЗЮМЕ

В главе изложен основной алгоритм Гомори для решения задачи целочисленного программирования. Приведен численный пример с подробным описанием всех шагов алгоритма и дана геометрическая иллюстрация построения отсечений Гомори.

Уровень развития методов решения целочисленных задач не удовлетворяют требованиям, которые диктуются их практической важностью. Хочется надеяться, что технологические достижения в области компьютерной техники помогут предложить новые пути, которые повысят эффективность алгоритмов решения задач целочисленного программирования.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие экономические задачи относятся к задачам целочисленного программирования?
2. Сформулируйте задачу целочисленного программирования.
3. Какой принцип используется для построения правильного отсечения в методе Гомори?
4. Перечислите основные этапы, входящие в «большую» итерацию метода Гомори.
5. Как составить дополнительное ограничение, если компоненты оптимального плана задачи являются дробными?
6. В каком случае поставленная задача не имеет целочисленного оптимального решения?
7. Какой геометрический смысл имеет введение дополнительного ограничения?
8. Какую роль играет алгоритм двойственного симплекс-метода при решении целочисленной линейной задачи методом Гомори?
9. Сформулируйте задачу оптимального раскроя материалов и составьте ее математическую модель.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии приведен обзор математических методов решения некоторых экономических задач.

Для систем линейных уравнений основное внимание уделено выводу формул пересчета коэффициентов и целочисленному контролю. В линейном программировании рассмотрены практические аспекты особых случаев реализации симплекс-метода: вырожденность, альтернативные оптимальные решения, неограниченность и отсутствие допустимых решений.

Транспортная задача представляет собой частный случай общей задачи линейного программирования, специфическая структура которой позволяет разработать эффективные вычислительные методы, основанные на теории двойственности. Транспортная модель используется для описания проблем, не связанных с транспортировкой, например в задачах управления запасами и задачах производственного планирования.

Сетевые модели широко применяются в практических задачах: проектирование газопровода; нахождение кратчайшего маршрута между двумя городами по существующей сети дорог; определение схемы транспортировки нефти от пунктов нефтедобычи к нефтеперерабатывающим заводам с минимальной стоимостью транспортировки и др. Учитывая структуру сетевых моделей, для них разработаны эффективные специальные методы решения, отличные от методов решения задач линейного программирования.

Частными случаями транспортной задачи являются задача о назначениях и о разборчивой невесте, для которых рассмотрены два метода решения: метод потенциалов и венгерский метод.

В настоящем учебном пособии представлен оригинальный эвристический метод минимального резерва пропускной способности для построения допустимого множества перевозок в транспортной задаче с ограниченными пропускными способностями коммуникаций.

Многие практические задачи сводятся к задачам целочисленного линейного программирования: распределение капиталовложе-

ний; задача с постоянными затратами; задача коммивояжера; задача о покрытии. В настоящем пособии рассмотрен метод отсекающих плоскостей (метод Гомори), который далек от совершенства. Уровень развития методов решения целочисленных задач не удовлетворяет требованиям, которые диктуются их практической важностью. Остается надеяться на компьютерные технологии, которые помогут найти новые эффективные алгоритмы решения целочисленных задач.

Кратко описан аналитический метод решения матричной игры  $2 \times 2$  на примере прикладной задачи, в которой требуется определить оптимальный объем производства продукции двух видов, максимизирующий суточный доход.

Большое количество числовых задач включает все особенности предложенных математических моделей и алгоритмов. Из них можно составить множество комплектов контрольных работ, при решении которых у студента возникнет необходимость думать, помня, что «главная цель расчетов — не цифры, а понимание» (Хемминг).



# ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ

## РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ЗАДАЧИ

Для успешного освоения предмета рекомендуется выполнить самостоятельно задания, перечисленные ниже. Если попытка окажется неудачной, следует вернуться к описанию алгоритма.

### Глава 1

Пример 1.1, с. 16.

### Глава 2

1. Пример 2.1, с. 44.
2. Пример 2.2, с. 46.
3. Пример 2.4, с. 51.
4. Пример 2.7, с. 57.
5. Пример 2.8, с. 67.
6. Пример 2.9, с. 74.
7. Пример 2.10, с. 82.
8. Пример 2.11, с. 84.
9. Пример 2.12, с. 86.
10. Пример 2.13, с. 91.
11. Пример 2.14, с. 96.
12. Пример 2.15 (комплексная задача 1), с. 97.
13. Пример 2.17 (комплексная задача 2), с. 107.
14. Пример 2.18 (задача о ресурсах), с. 113.

### Глава 3

1. Пример 3.2, с. 172.
2. Пример 3.3, с. 175.
3. Пример 3.4, с. 178.
4. Пример 3.6, с. 190.
5. Пример 3.7, с. 208.

## **Глава 4**

Пример 4.1, с. 231.

## **Глава 5**

1. Пример 5.2, с. 289.
2. Пример 5.3, с. 298.
3. Пример 5.4, с. 303.

## **Глава 6**

1. Пример 6.1 (классический метод), с. 342.
2. Пример 6.1 (метод минимального резерва), с. 355.
3. Пример 6.2 (доказательство неразрешимости), с. 364.

## **Глава 7**

1. Пример 7.1, с. 396.
2. Пример 7.2, с. 398.

## **Глава 8**

1. Пример 8.1, с. 414.
2. В задачах 401–500 на переменные налагаются условия целочисленности. Решить две задачи из указанного диапазона методом Гомори.

## КЛЮЧИ К ЗАДАЧАМ

101	108	102	63	103	12	104	86	105	-159/29
106	61	107	15	108	-680/31	109	2	110	75/8
111	108	112	10	113	-48	114	31	115	-5
116	-27	117	59	118	24	119	82/59	120	39
121	26	122	30	123	194/19	124	525/79	125	660/15
126	42/3	127	-3	128	-27/9	129	54	130	15
131	26	132	16	133	117/78	134	331/13	135	820/81
136	42	137	23	138	399/13	139	40	140	17
141	110/13	142	7/3	143	409/50	144	1150/177	145	378/7
146	30	147	172/3	148	23	149	122/29	150	29/4
151	15	152	285/7	153	20	154	101/7	155	3142/79
156	69	157	38	158	19	159	345/23	160	502/31
161	1028/191	162	-11	163	836/125	164	8/41	165	121/16
166	-10	167	115/3	168	26	169	43/5	170	-37/13
171	6	172	3022/19	173	62/10	174	7	175	-135/4
176	38/3	177	927/82	178	250/7	179	11	180	205/26
181	82/5	182	9	183	52/7	184	1	185	30
186	5/2	187	92/5	188	62/13	189	597/31	190	40/13
191	7	192	35/3	193	37/5	194	224/5	195	458/17
196	-2694/197	197	-21/5	198	34	199	30	200	113/2
201	258/41	202	2663/97	203	890/221	204	64/55	205	299/43
206	839/384	207	1186/245	208	2826/133	209	1716/258	210	-3430/149
211	332/31	212	-1273/68	213	281/158	214	743/65	215	7115/166
216	-349/71	217	11/6	218	91/15	219	-682/163	220	496/33

221	1292/25	222	831/8	223	-423/11	224	-515/154	225	9765/307
226	9911/310	227	1727/54	228	-349/283	229	1496/43	230	-321/286
231	185/8	232	35/11	233	-1273/68	234	3569/477	235	1306/125
236	-90/19	237	1463/60	238	9047/377	239	-1489/62	240	253
241	289/549	242	-1679/83	243	1036/31	244	202/5	245	3971/829
246	-988/217	247	-426/127	248	-457/226	249	2277/50	250	74/9
251	277/17	252	439/57	253	19	254	13/2	255	8/7
256	1192/19	257	1565/39	258	276/25	259	664/37	260	226/7
261	95/4	262	-27/4	263	1037/43	264	61/2	265	432/31
266	4820/49	267	113/12	268	812/53	269	35/3	270	-468/11
271	499/23	272	561/19	273	22	274	67/8	275	-19/7
276	2348/85	277	1383/10	278	856/37	279	1967/31	280	-70/39
281	-132/73	282	-78	283	-80/11	284	251/21	285	52/5
286	16/17	287	43/7	288	875/53	289	285/14	290	195/53
291	438/61	292	-19/59	293	287/23	294	727/81	295	799/22
296	15	297	75/2	298	2661/182	299	165/16	300	783/34
301	2950/29	302	2979/14	303	1432/5	304	10018/21	305	4701/14
306	705/2	307	4368/11	308	1830/7	309	1793/3	310	17463/14
311	80961/94	312	7565/19	313	9218/5	314	5374/7	315	28020/47
316	6854/11	317	447	318	22863/73	319	5634/43	320	6980/39
321	24507/73	322	7061/74	323	1550/27	324	22290/61	325	6060/137
326	8081/57	327	1096/3	328	527/7	329	5207/12	330	9563/50
331	5884/27	332	6039/8	333	981/4	334	1816/5	335	6969/86
336	13205/49	337	22993/81	338	33951/127	339	14776/43	340	12925/49
341	6485/17	342	33215/206	343	4375/23	344	15767/80	345	20483/98
346	10237/64	347	9953/40	348	22431/61	349	4532/19	350	16835/41



351	92728/665	352	35750/73	353	27970/67	354	22072/51	355	9696/25
356	1619/3	357	3584/11	358	27032/67	359	6362/15	360	288
361	35829/55	362	28447/160	363	16069/48	364	6550/23	365	73955/249
366	5268/19	367	54989/146	368	8660/13	369	37064/105	370	1359/4
371	10350/41	372	8862/29	373	3588/17	374	12095/31	375	5160/19
376	3724/15	377	3618/13	378	9589/28	379	7425/32	380	4675/13
381	5260/11	382	1067/3	383	7100/49	384	10241/45	385	8343/11
386	10125/44	387	7728/17	388	6719/17	389	10640/41	390	12910/41
391	17846/29	392	5141/16	393	2743/16	394	11170/17	395	27420/83
396	6633/23	397	355/2	398	30848/139	399	5848/47	400	2579/28
401	661/13	402	970/7	403	-2488/39	404	-312/19	405	-285/14
406	-184/11	407	141/7	408	102/19	409	15	410	249/5
411	64/37	412	17/2	413	27	414	65/2	415	-494/5
416	-25/3	417	430/3	418	3543/32	419	-162/11	420	666/5
421	1408/43	422	3848/115	423	159/128	424	2518/15	425	141/4
426	-2339/113	427	423/38	428	143/3	429	960/11	430	567/10
431	9941/71	432	441/13	433	618/43	434	-70	435	234/29
436	71/16	437	12	438	187/39	439	-137/25	440	-47
441	29/8	442	82/5	443	83	444	579/17	445	489/34
446	179/64	447	855/13	448	303/8	449	1072/13	450	48/61
451	75/19	452	189/11	453	4/17	454	10	455	171/16
456	61	457	28	458	14/5	459	28/5	460	121/2
461	1303/13	462	444/23	463	29/2	464	576/31	465	-224/9
466	472/45	467	153/73	468	87/2	469	217/3	470	762/73
471	-168/37	472	156/53	473	41/47	474	387/53	475	532/89
476	16/3	477	2269/23	478	431/8	479	23/21	480	497/19

<b>481</b>	47/2	<b>482</b>	871/8	<b>483</b>	589/34	<b>484</b>	3847/141	<b>485</b>	40/7
<b>486</b>	4707/70	<b>487</b>	13	<b>488</b>	749/58	<b>489</b>	651/131	<b>490</b>	23
<b>491</b>	60	<b>492</b>	668/31	<b>493</b>	13/8	<b>494</b>	46/3	<b>495</b>	24
<b>496</b>	219/79	<b>497</b>	733/58	<b>498</b>	80	<b>499</b>	62/67	<b>500</b>	135/7
<b>501</b>	3248	<b>502</b>	2538	<b>503</b>	1936	<b>504</b>	3694	<b>505</b>	6457
<b>506</b>	4870	<b>507</b>	7177	<b>508</b>	5493	<b>509</b>	5070	<b>510</b>	6872
<b>511</b>	7675	<b>512</b>	4168	<b>513</b>	4207	<b>514</b>	4575	<b>515</b>	6640
<b>516</b>	5715	<b>517</b>	8206	<b>518</b>	5783	<b>519</b>	7098	<b>520</b>	6861
<b>521</b>	4948	<b>522</b>	6318	<b>523</b>	5444	<b>524</b>	8403	<b>525</b>	6384
<b>526</b>	2730	<b>527</b>	3374	<b>528</b>	1242	<b>529</b>	3329	<b>530</b>	2297
<b>531</b>	4474	<b>532</b>	4805	<b>533</b>	5143	<b>534</b>	2182	<b>535</b>	2490
<b>536</b>	5726	<b>537</b>	6726	<b>538</b>	1816	<b>539</b>	4507	<b>540</b>	5987
<b>541</b>	3478	<b>542</b>	3805	<b>543</b>	5510	<b>544</b>	4404	<b>545</b>	4944
<b>546</b>	3596	<b>547</b>	5542	<b>548</b>	3729	<b>549</b>	5328	<b>550</b>	6542
<b>551</b>	4544	<b>552</b>	6272	<b>553</b>	4435	<b>554</b>	3047	<b>555</b>	6046
<b>556</b>	4362	<b>557</b>	5081	<b>558</b>	5146	<b>559</b>	5562	<b>560</b>	6707
<b>561</b>	4219	<b>562</b>	6150	<b>563</b>	2380	<b>564</b>	4813	<b>565</b>	4080
<b>566</b>	4876	<b>567</b>	1435	<b>568</b>	3790	<b>569</b>	2347	<b>570</b>	1376
<b>571</b>	2668	<b>572</b>	2375	<b>573</b>	4796	<b>574</b>	2182	<b>575</b>	3603
<b>576</b>	4788	<b>577</b>	5621	<b>578</b>	7764	<b>579</b>	7699	<b>580</b>	6635
<b>581</b>	3897	<b>582</b>	6032	<b>583</b>	6841	<b>584</b>	5845	<b>585</b>	4572
<b>586</b>	5782	<b>587</b>	5844	<b>588</b>	6320	<b>589</b>	5185	<b>590</b>	6041
<b>591</b>	5922	<b>592</b>	4908	<b>593</b>	6577	<b>594</b>	5571	<b>595</b>	7210
<b>596</b>	4955	<b>597</b>	4479	<b>598</b>	6289	<b>599</b>	5654	<b>600</b>	6642
<b>601</b>	5381	<b>602</b>	4469	<b>603</b>	1715	<b>604</b>	2830	<b>605</b>	1437
<b>606</b>	2482	<b>607</b>	1228	<b>608</b>	1487	<b>609</b>	1825	<b>610</b>	2625

<b>611</b>	1199	<b>612</b>	2177	<b>613</b>	2254	<b>614</b>	2628	<b>615</b>	1518
<b>616</b>	1595	<b>617</b>	3582	<b>618</b>	1989	<b>619</b>	3129	<b>620</b>	2200
<b>621</b>	1747	<b>622</b>	2265	<b>623</b>	909	<b>624</b>	737	<b>625</b>	1179
<b>626</b>	1627	<b>627</b>	1275	<b>628</b>	932	<b>629</b>	1623	<b>630</b>	1308
<b>631</b>	3860	<b>632</b>	2310	<b>633</b>	1829	<b>634</b>	2469	<b>635</b>	3003
<b>636</b>	1918	<b>637</b>	1327	<b>638</b>	1166	<b>639</b>	1428	<b>640</b>	2049
<b>641</b>	611	<b>642</b>	1482	<b>643</b>	2141	<b>644</b>	2736	<b>645</b>	1628
<b>646</b>	1633	<b>647</b>	1328	<b>648</b>	1639	<b>649</b>	1050	<b>650</b>	2951
<b>651</b>	2680	<b>652</b>	2265	<b>653</b>	1632	<b>654</b>	2272	<b>655</b>	2413
<b>656</b>	2270	<b>657</b>	3894	<b>658</b>	2343	<b>659</b>	3457	<b>660</b>	1868
<b>661</b>	2522	<b>662</b>	1471	<b>663</b>	2759	<b>664</b>	1655	<b>665</b>	1643
<b>666</b>	1529	<b>667</b>	2963	<b>668</b>	2519	<b>669</b>	2643	<b>670</b>	3008
<b>671</b>	2097	<b>672</b>	2487	<b>673</b>	1498	<b>674</b>	3902	<b>675</b>	2318
<b>676</b>	2107	<b>677</b>	2308	<b>678</b>	2741	<b>679</b>	2832	<b>680</b>	1923
<b>681</b>	1552	<b>682</b>	2929	<b>683</b>	4203	<b>684</b>	2506	<b>685</b>	3408
<b>686</b>	2596	<b>687</b>	3947	<b>688</b>	2155	<b>689</b>	3789	<b>690</b>	3788
<b>691</b>	3205	<b>692</b>	2869	<b>693</b>	2961	<b>694</b>	2895	<b>695</b>	5275
<b>696</b>	3132	<b>697</b>	3017	<b>698</b>	2872	<b>699</b>	2711	<b>700</b>	3466
<b>701</b>	261	<b>702</b>	277	<b>703</b>	301	<b>704</b>	262	<b>705</b>	263
<b>706</b>	293	<b>707</b>	299	<b>708</b>	280	<b>709</b>	244	<b>710</b>	285
<b>711</b>	286	<b>712</b>	263	<b>713</b>	300	<b>714</b>	260	<b>715</b>	269
<b>716</b>	173	<b>717</b>	274	<b>718</b>	248	<b>719</b>	265	<b>720</b>	268
<b>721</b>	322	<b>722</b>	253	<b>723</b>	283	<b>724</b>	263	<b>725</b>	266
<b>726</b>	258	<b>727</b>	289	<b>728</b>	306	<b>729</b>	312	<b>730</b>	271
<b>731</b>	291	<b>732</b>	289	<b>733</b>	245	<b>734</b>	273	<b>735</b>	312
<b>736</b>	290	<b>737</b>	252	<b>738</b>	295	<b>739</b>	297	<b>740</b>	309

<b>741</b>	285	<b>742</b>	314	<b>743</b>	283	<b>744</b>	312	<b>745</b>	231
<b>746</b>	260	<b>747</b>	309	<b>748</b>	275	<b>749</b>	270	<b>750</b>	287
<b>751</b>	322	<b>752</b>	297	<b>753</b>	256	<b>754</b>	285	<b>755</b>	292
<b>756</b>	272	<b>757</b>	295	<b>758</b>	279	<b>759</b>	269	<b>760</b>	293
<b>761</b>	268	<b>762</b>	295	<b>763</b>	285	<b>764</b>	228	<b>765</b>	287
<b>766</b>	282	<b>767</b>	300	<b>768</b>	272	<b>769</b>	300	<b>770</b>	264
<b>771</b>	289	<b>772</b>	302	<b>773</b>	260	<b>774</b>	270	<b>775</b>	307
<b>776</b>	294	<b>777</b>	294	<b>778</b>	293	<b>779</b>	300	<b>780</b>	289
<b>781</b>	270	<b>782</b>	286	<b>783</b>	288	<b>784</b>	285	<b>785</b>	273
<b>786</b>	250	<b>787</b>	285	<b>788</b>	213	<b>789</b>	307	<b>790</b>	254
<b>791</b>	274	<b>792</b>	290	<b>793</b>	303	<b>794</b>	252	<b>795</b>	256
<b>796</b>	177	<b>797</b>	292	<b>798</b>	250	<b>799</b>	262	<b>800</b>	266
<b>801</b>	4252	<b>802</b>	5348	<b>803</b>	5527	<b>804</b>	3371	<b>805</b>	6409
<b>806</b>	7450	<b>807</b>	3289	<b>808</b>	7932	<b>809</b>	8713	<b>810</b>	6474
<b>811</b>	7844	<b>812</b>	8255	<b>813</b>	4423	<b>814</b>	7715	<b>815</b>	6116
<b>816</b>	9170	<b>817</b>	7603	<b>818</b>	7064	<b>819</b>	6448	<b>820</b>	7122
<b>821</b>	4056	<b>822</b>	5965	<b>823</b>	6483	<b>824</b>	7294	<b>825</b>	6833
<b>826</b>	7360	<b>827</b>	6407	<b>828</b>	6774	<b>829</b>	4580	<b>830</b>	6321
<b>831</b>	6902	<b>832</b>	6908	<b>833</b>	4190	<b>834</b>	4996	<b>835</b>	4406
<b>836</b>	7549	<b>837</b>	6064	<b>838</b>	7356	<b>839</b>	4330	<b>840</b>	5282
<b>841</b>	6656	<b>842</b>	нераз	<b>843</b>	8685	<b>844</b>	7631	<b>845</b>	4478
<b>846</b>	5983	<b>847</b>	7474	<b>848</b>	5725	<b>849</b>	5988	<b>850</b>	6164
<b>851</b>	5740	<b>852</b>	6492	<b>853</b>	5726	<b>854</b>	5938	<b>855</b>	4596
<b>856</b>	4108	<b>857</b>	5054	<b>858</b>	4421	<b>859</b>	3284	<b>860</b>	7925
<b>861</b>	7141	<b>862</b>	3813	<b>863</b>	4994	<b>864</b>	4648	<b>865</b>	5515
<b>866</b>	4036	<b>867</b>	5299	<b>868</b>	4413	<b>869</b>	7394	<b>870</b>	5329



871	5097	872	4800	873	5281	874	4647	875	3369
876	2851	877	4140	878	нераз	879	4621	880	5296
881	5256	882	3572	883	7753	884	4569	885	5534
886	6185	887	6154	888	3750	889	5449	890	4418
891	6175	892	6250	893	6670	894	4951	895	7250
896	7926	897	5447	898	3318	899	4400	900	6776
901	3408,75 V1=2450 V2=3063	902	2031,55 V1=2636 V2=2965	903	5723,44 V1=1109 V2=1748	904	8812,56 V1=4233 V2=2729	905	82466,50 V1=4155 V2=1986
906	2804,02 V1=342 V1=580	907	21640,07 V1=3532 V2=3350	908	13595,76 V1=4115 V2=2389	909	43307,04 V1=1260 V2=3404	910	16501,89 V1=1320 V2=1888
911	41607,89 V1=2833 V2=4608	912	3281,17 V1=1464 V2=3890	913	1731,87 V1=353 V2=351	914	4117,68 V1=302 V2=681	915	2527,43 V1=2574 V2=6505
916	19991,58 V1=1843 V2=1263	917	10417,69 V1=1751 V2=2663	918	2717,19 V1=786 V2=821	919	15279,12 V1=2682 V2=2105	920	15553,59 V1=1807 V2=4551
921	19774,38 V1=2490 V2=2547	922	29299,59 V1=3170 V2=653	923	24936,56 V1=1421 V2=1614	924	22696,34 V1=2907 V2=5318	925	6312,37 V1=1873 V2=2777
926	24218,72 V1=3187 V2=5562	927	6597,54 V1=2357 V2=2079	928	6467,04 V1=3683 V2=2498	929	2477,08 V1=1436 V2=792	930	2582,21 V1=1370 V2=1013
931	19458,85 V1=1398 V2=3207	932	60493,21 V1=2932 V2=3615	933	23926,13 V1=976 V2=3013	934	28364,08 V1=2734 V2=5087	935	16122,80 V1=5249 V2=2463
936	790,31 V1=1526 V2=2379	937	9032,06 V1=565 V2=327	938	8533,43 V1=4554 V2=5732	939	16686,44 V1=1316 V2=1666	940	6300,68 V1=1408 V2=1731
941	10197,53 V1=2071 V2=1409	942	25811,83 V1=1242 V2=1548	943	37319,78 V1=5666 V2=2035	944	12780,15 V1=2763 V2=1155	945	23740,04 V1=1038 V2=1994

<b>946</b>	8793,82 V1=1921 V2=6094	<b>947</b>	10987,08 V1=4812 V2=5133	<b>948</b>	2669,57 V1=1158 V2=1454	<b>949</b>	3798,78 V1=2796 V2=1133	<b>950</b>	10103,39 V1=1299 V2=593
<b>951</b>	815,68 V1=1323 V2=1960	<b>952</b>	44870,37 V1=3060 V2=2457	<b>953</b>	12515,52 V1=3423 V2=1564	<b>954</b>	8340,71 V1=3656 V2=2936	<b>955</b>	6620,02 V1=1220 V2=1285
<b>956</b>	9374,63 V1=1756 V2=1758	<b>957</b>	13919,58 V1=708 V2=1883	<b>958</b>	6315,94 V1=1047 V2=2152	<b>959</b>	10792,12 V1=1421 V2=1586	<b>960</b>	11890,73 V1=1289 V2=2820
<b>961</b>	7942,19 V1=1177 V2=1677	<b>962</b>	11532,95 V1=1471 V2=731	<b>963</b>	12832,00 V1=2857 V2=1726	<b>964</b>	10248,99 V1=1650 V2=2180	<b>965</b>	9184,36 V1=1163 V2=2362
<b>966</b>	16098,66 V1=739 V2=3420	<b>967</b>	4071,88 V1=1176 V2=292	<b>968</b>	2422,04 V1=557 V2=718	<b>969</b>	10630,54 V1=679 V2=928	<b>970</b>	13106,00 V1=1150 V2=2951
<b>971</b>	6884,21 V1=1740 V2=2264	<b>972</b>	8587,48 V1=1467 V2=887	<b>973</b>	7435,94 V1=774 V2=2288	<b>974</b>	6206,90 V1=1624 V2=1802	<b>975</b>	9523,53 V1=3485 V2=2466
<b>976</b>	2358,85 V1=3470 V2=2810	<b>977</b>	1341,40 V1=1872 V2=1064	<b>978</b>	8662,11 V1=3173 V2=1880	<b>979</b>	7410,61 V1=2799 V2=2319	<b>980</b>	5642,26 V1=2253 V2=2352
<b>981</b>	3217,23 V1=2347 V2=1739	<b>982</b>	3060,26 V1=1545 V2=1975	<b>983</b>	16095,18 V1=850 V2=1769	<b>984</b>	14242,62 V1=3543 V2=3006	<b>985</b>	8820,81 V1=1690 V2=2157
<b>986</b>	11215,34 V1=1450 V2=2737	<b>987</b>	7406,53 V1=2167 V2=565	<b>988</b>	4402,71 V1=1938 V2=2611	<b>989</b>	5273,06 V1=1148 V2=3261	<b>990</b>	23010,28 V1=3849 V2=2791
<b>991</b>	5906,82 V1=1147 V2=975	<b>992</b>	11097,18 V1=1904 V2=1686	<b>993</b>	26572,16 V1=1916 V2=3199	<b>994</b>	7111,41 V1=1753 V2=1177	<b>995</b>	8436,93 V1=534 V2=737
<b>996</b>	4483,65 V1=1466 V2=1385	<b>997</b>	14395,66 V1=1695 V2=3913	<b>998</b>	24498,14 V1=1964 V2=4026	<b>999</b>	15535,83 V1=7761 V2=3074	<b>1000</b>	8341,07 V1=2220 V2=2159

## ТЕСТЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

### Глава 1

1. Выражение базисных неизвестных через свободные называется ... решением:

- а) общим;
- б) частным;
- в) базисным;
- г) опорным.

2. Дана совместная система из  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, где  $m < n$ ,  $m \geq 2$ . Ранг матрицы системы равен числу уравнений, тогда число базисных решений равно:

- а)  $m$ ;
- б)  $n$ ;
- в)  $C_n^m$ ;
- г)  $m + n - 1$ .

3. Для получения нового коэффициента необходимо из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов побочной диагонали, затем полученный результат:

- а) умножить на разрешающий элемент;
- б) поделить на разрешающий элемент;
- в) прибавить к разрешающему элементу;
- г) вычесть из разрешающего элемента.

4. Дано общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 = \frac{108}{79} - \left( \frac{43}{79}x_2 + \frac{23}{79}x_5 \right), \\ x_4 = \frac{389}{79} - \left( \frac{2}{79}x_2 - \frac{32}{79}x_5 \right), \\ x_1 = -\frac{169}{79} - \left( \frac{30}{79}x_2 - \frac{6}{79}x_5 \right). \end{cases}$$

Соответствующее ему базисное решение имеет вид:





8. В задаче линейного программирования на минимум искусственная переменная входит в целевую функцию с коэффициентом:

- а) 0;
- б) 1;
- в)  $-M$ ;
- г)  $+M$ .

9. Если в оптимальном плане расширенной задачи не все искусственные переменные равны нулю, то исходная задача имеет:

- а) единственный оптимальный план;
- б) бесконечное множество оптимальных планов;
- в) пустое множество решений;
- г) неограниченную целевую функцию.

10. Дана симплекс-таблица для задачи на максимум

$i$	$A_B$	$C_B$	$B$	-2	1	3	7
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
1	$A_4$	7	19/23	59/23	0	-1/23	1
2	$A_2$	1	51/23	-22/23	1	7/23	0
$m+1$			8	19	0	-3	0

Оптимальный план имеет вид:

- а)  $(19/59, 149/59, 0, 0)$ ;
- б)  $(0, 0, 51/7, 8/7)$ ;
- в)  $(0, 51/23, 0, 19/23)$ ;
- г)  $(8/17, 0, 149/17, 0)$ .

### Глава 3

11. В транспортной задаче  $m$  поставщиков  $n$  потребителей, тогда число переменных равно:

- а)  $m + n$ ;
- б)  $m \times n$ ;
- в)  $m + n - 1$ ;
- г)  $n$ .

12. Для оптимальности плана  $X = (x_{ij})_{m \times n}$  закрытой транспортной задачи необходимо и достаточно существование чисел  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  таких, что:

$$\text{а) } \begin{cases} \alpha_i + \beta_j \leq c_{ij} & \text{для } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \\ \alpha_i + \beta_j = c_{ij}, & \text{если } x_{ij} > 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \alpha_i + \beta_j = c_{ij} & \text{для } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \\ \alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}, & \text{если } x_{ij} > 0. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \alpha_i + \beta_j \leq c_{ij} & \text{для } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \\ \alpha_i + \beta_j \geq c_{ij}, & \text{если } x_{ij} > 0. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \alpha_i + \beta_j \geq c_{ij} & \text{для } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \\ \alpha_i + \beta_j = c_{ij}, & \text{если } x_{ij} > 0. \end{cases}$$

13. Если  $m$  — число поставщиков,  $n$  — число потребителей, то ранг матрицы системы ограничений-уравнений закрытой транспортной задачи равен:

$$\text{а) } m + n - 1;$$

$$\text{б) } m + n;$$

$$\text{в) } m \times n - 1;$$

$$\text{г) } n.$$

14. Метод нахождения оптимального плана закрытой транспортной задачи:

а) Фогеля;

б) северо-западного угла;

в) потенциалов;

г) минимального элемента.

15. Установите соответствие между опорными планами транспортных задач и оценками этих планов:

1)

8	10	14	40
20	15	5	
15	3	2	60
		60	
3	12	4	30
30			
50	15	65	

2)

5	2	3	56
		56	
6	1	8	32
30	2		
12	4	13	23
	19	4	
30	21	60	

3)

11	3	15	30
30			
10	1	2	64
	40	24	
4	7	3	30
10		20	
40	40	44	

4)

23	28	5	28
	28		
19	27	4	41
35	2	4	
3	6	2	10
		10	
35	30	14	

Оценки  $\{\gamma_{ij} = (\alpha_i + \beta_j) - c_{ij}\}$ :

ж

	6	-5
-7		
	-5	

з

25	19	
	-11	-8

и

8	-1	
		3
13		

к

-6	-8	
		2
-3		

л

-3		0
14	19	

м

-19	-5	
	-7	5

а) 1 ~ м, 2 ~ к, 3 ~ ж, 4 ~ л;

б) 1 ~ ж, 2 ~ з, 3 ~ и, 4 ~ к;

в) 1 ~ и, 2 ~ к, 3 ~ л, 4 ~ м;

г) 1 ~ з, 2 ~ и, 3 ~ ж, 4 ~ л;

## Глава 4

16. В транспортной задаче на сети  $m$  вершин и  $n$  ребер. Количество базисных ребер равно:

- а)  $m + n$ ;
- б)  $m + n - 1$ ;
- в)  $(n - 1)(m - 1)$ ;
- г)  $m - 1$ .

17. В транспортной задаче на сети решение оптимально, если оценки  $\gamma_{ij} = |\alpha_i - \alpha_j| - c_{ij}$  небазисных ребер:

- а) больше 0;
- б) не больше 0;
- в) меньше 0;
- г) равны 0.

18. В цикле пересчета транспортной задачи на сети разрешающая стрелка направлена:

- а) от меньшего потенциала к большему;
- б) по часовой стрелке;
- в) против часовой стрелки;
- г) от большего потенциала к меньшему.

19. Величина корректировки плана в сетевой задаче равна:

- а) максимальной перевозке из перевозок, совпадающих по направлению с разрешающей стрелкой;
- б) минимальной перевозке из перевозок текущего плана;
- в) минимальной перевозке из тех перевозок цикла, которые направлены против разрешающей стрелки;
- г) минимальному значению потенциала из вершин цикла пересчета.

20. Переход от одного плана к другому в сетевой задаче осуществляется следующим образом:

- а) перевозки из цикла, направленные против разрешающей стрелки, уменьшаются на величину корректировки; перевозки из цикла, совпадающие с разрешающей стрелкой, и перевозка на раз-



решающем ребре увеличиваются на эту же величину; остальные перевозки остаются без изменения;

б) все перевозки уменьшаются на величину корректировки;

в) все перевозки из цикла увеличиваются на величину корректировки, остальные не меняются;

г) перевозки из цикла, направленные по часовой стрелке, увеличиваются на величину корректировки; перевозки из цикла, направленные против часовой стрелки, уменьшаются на эту же величину; остальные перевозки остаются без изменения.

## Глава 5

### 21. Задача о назначениях. Венгерский метод.

*Если незанятых нулей нет, то:*

а) задача неразрешима;

б) строить цепочку из нулей;

в) поставить штрих на минимальном элементе;

г) перейти к эквивалентной матрице с незанятыми нулями.

### 22. Задача о назначениях. Венгерский метод.

*Количество  $0^*$  в цепочке должно быть:*

а) на единицу меньше, чем  $0'$  ;

б) на единицу больше, чем  $0'$  ;

в) столько же, сколько  $0'$  ;

г) на 2 меньше, чем  $0'$  .

### 23. Задача о назначениях. Венгерский метод.

*Цепочка состоит из одного нуля со штрихом, если в данном столбце:*

а) и строке есть  $0^*$  ;

б) имеется несколько  $0'$  и два  $0^*$  ;

в) нет нулей (кроме исходного  $0'$  );

г) и строке нет  $0^*$  .

*24. Задача о назначениях. Венгерский метод.*

*Цепочка из нулей:*

- а) начинается на  $0'$ , обрывается на  $0'$ ;
- б) начинается на  $0^*$ , обрывается на  $0^*$ ;
- в) начинается на  $0^*$ , обрывается на  $0'$ ;
- г) начинается на  $0'$ , обрывается на  $0^*$ .

*25. Задача о назначениях. Венгерский метод.*

*Переход от одного неполного выбора нулей к другому осуществляется следующим образом:*

- а) все звездочки у нулей снимаются, все штрихи у нулей заменяются новыми звездочками;
- б) среди предложенных ответов нет правильных;
- в) штрихи у нулей из цепочки снимаются, все звездочки заменяются новыми штрихами;
- г) звездочки у нулей из цепочки снимаются, штрихи у нулей из цепочки заменяются звездочками.

## **Глава 6**

*26. Метод нахождения оптимального плана транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями:*

- а) расширения задачи;    б) потенциалов;    в) Фогеля;
- г) минимального резерва пропускной способности.

*27. Для оптимальности плана  $X = (x_{ij})_{m \times n}$  транспортной задачи с ограничениями на пропускные способности необходимо и достаточно существование чисел  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  таких, что выполняются условия:*

- а)  $\alpha_i + \beta_j \geq c_{ij}$ , если  $x_{ij} = 0$ ,  
 $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ , если  $x_{ij} = d_{ij}$ ,  
 $\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}$ , если  $0 < x_{ij} < d_{ij}$ .
- б)  $\alpha_i + \beta_j \geq c_{ij}$ , если  $x_{ij} = 0$ ,  
 $\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}$ , если  $x_{ij} = d_{ij}$ ,  
 $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ , если  $0 < x_{ij} < d_{ij}$ .

- В)  $\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}$ , если  $x_{ij} = 0$ ,  
 $\alpha_i + \beta_j \geq c_{ij}$ , если  $x_{ij} = d_{ij}$ ,  
 $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ , если  $0 < x_{ij} < d_{ij}$ .
- Г)  $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ , если  $x_{ij} = 0$ ,  
 $\alpha_i + \beta_j \geq c_{ij}$ , если  $x_{ij} = d_{ij}$ ,  
 $\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}$ , если  $0 < x_{ij} < d_{ij}$ .

28. Дан произвольный опорный план транспортной задачи с ограничениями на пропускные способности.

5 <b>(3)</b> 3	9	7 7	3 <b>(17)</b> 17
14 <b>17</b> 19	16	1 <b>13</b> 18	19 <b>15</b> 20
17 <b>11</b> 2	12	8	15 <b>28</b> 32
20	11	20	60

При переходе к новому плану издержки на перевозку уменьшатся на \_\_\_\_\_ денежных единиц:

- [illegible]

29. Дана транспортная задача с ограниченными пропускными способностями коммуникаций

7	3	5	24
13	11	4	25
19	17	6	23
7	4		
20	15	8	30
2	24	9	
18	29	32	

Для некоторого плана известны оценки  $\gamma_{ij} = (\alpha_i + \beta_j) - c_{ij}$ .

11		
	-13	
10		9

Минимальные издержки на перевозку всей продукции равны:

- а) 718;
- б) 694;
- в) 739;
- г) 712.

30. Дана транспортная задача с ограничениями на пропускные способности

14	5	25	
4	10	28	37
1	2	3	
20	23	10	48
16	4	15	
35	17	3	49
51	48	35	

Для некоторого плана по формуле  $\gamma_{ij} = (\alpha_i + \beta_j) - c_{ij}$  получены оценки:  $\gamma_{11} = 3, \gamma_{33} = 3, \gamma_{13} = -9, \gamma_{22} = -13$ , где  $\Gamma^{(0)} = \{\gamma_{11}, \gamma_{33}\}$ ,  $\Gamma^{(d)} = \{\gamma_{13}, \gamma_{22}\}$ .

Опорный план имеет вид:

а)

4	8	25
18	23	7
29	17	3

б)

	9	28
18	23	7
33	16	



в)

4	10	23
18	21	9
29	17	3

г)

	10	27
20	23	5
31	15	3

## Глава 7

31. Для платежной матрицы  $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ -1 & 7 & 3 \\ 9 & -4 & 6 \end{vmatrix}$  нижняя цена игры

равна:

- а) -1;
- б) -4;
- в) 6;
- г) 5.

32. Для платежной матрицы  $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 18 \end{vmatrix}$  цена игры равна:

- а) 6;
- б)  $27/4$ ;
- в)  $53/8$ ;
- г)  $55/8$ .

33. Дана матричная игра  $\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$ . Вероятность выбора первой

стратегии первым игроком равна:

- а)  $13/18$ ;
- б)  $5/13$ ;
- в)  $12/17$ ;
- г)  $11/16$ .

34. Дана матричная игра  $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 8 & -2 & -3 \\ 5 & 9 & 6 & 13 & 10 \\ 8 & -3 & 10 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & 9 & 11 \end{vmatrix}$ . После исключения

доминируемых стратегий размерность платежной матрицы будет равна:

- а) 3x3;
- б) 2x2;
- в) 2x3;
- г) 1x1.

35. Дана матричная игра  $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 8 & -2 & -3 \\ 5 & 9 & 6 & 13 & 10 \\ 8 & -3 & 10 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & 9 & 11 \end{vmatrix}$ . Вероятность

выбора четвертой чистой стратегии вторым игроком равна:

- а) 0;
- б) 11/15;
- в) 4/15;
- г) 1.

### КЛЮЧИ К ТЕСТАМ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
а	в	б	г	б	г	а	г	в	б

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
а	а	а	в	а	г	б	а	в	а

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
г	а	г	а	г	б	в	в	г	б

31	32	33	34	35
г	в	а	б	а

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В данном учебном пособии содержится 100 вариантов контрольных работ, состоящих из 6 задач. Необходимо выполнить одну контрольную работу в соответствии с номером варианта, который определяется по двум последним цифрам зачетки. Из каждой сотни задач, указанной в скобках (1–100, 201–300, 401–500, 501–600, 601–700, 701–800), выбирается одна задача. Пусть номер зачетки заканчивается цифрами 09, тогда ваш вариант 09 и контрольная работа будет состоять из задач (9, 209, 409, 509, 609, 709), если номер заканчивается цифрами 00 — из задач (100, 300, 500, 600, 700, 800).

Задания для контрольных работ указаны в таблице

№ задания	Текст задания (страницы)	Задачи (страницы)	Методические указания (страницы)
1	24	24–29	16–24
2	131–132	132–141	57–60, 74–81, 91–94, 96–97
3	153	153–162	107–113
4	210	210–220	172–185, 190–209
5	242	243–276	231–242
6	313	313–329	303–312

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. На титульном листе должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название дисциплины; здесь же следует указать дату отсылки работы в университет и электронный адрес студента. В конце работы следует указать использованную литературу.

2. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи или задачи не своего варианта, не засчитываются.

3. Решения задач необходимо располагать в порядке, указанном в заданиях, сохраняя номера задач.

4. Перед решением каждой задачи необходимо полностью написать ее условие. В том случае, если несколько задач имеют общую формулировку, следует заменить общие данные числовыми из соответствующего номера.

5. Решение следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

6. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации. Если рецензент предлагает внести в решение задач те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок. При высылаемых исправлениях должны обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия к ней. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

7. После доработки выставляется зачет по контрольной работе. Без зачтенной контрольной работы студент к зачету (экзамену) не допускается.



## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Предмет математических методов принятия оптимальных решений в экономике. Этапы решения задач о принятии решений.
2. Примеры конкретных практических задач с экономическим содержанием и их математическая формулировка: задача о раскрое; задача о ресурсах; задача о диете; задача об инвестициях; транспортная задача, задача о загрузке оборудования.
3. Решение систем линейных уравнений методом полного исключения неизвестных (методом Жордана–Гаусса). Вывод формул пересчета коэффициентов системы. Базисные неизвестные. Свободные неизвестные. Общее решение. Частное, базисное решение. Геометрическая интерпретация базисного решения.
4. Разложение векторов по векторам базиса. Теорема о единственности разложения. Переход от одного базиса к другому.
5. Основная задача линейного программирования. План, оптимальный план.
6. Стандартная задача ЛП. Каноническая задача ЛП. Опорный план. Приведение основной задачи ЛП к каноническому виду.
7. Выпуклые множества. Внутренние, граничные, крайние (угловые) точки. Выпуклый многоугольник, многогранник, опорная плоскость.
8. Объединение множеств, пересечение множеств, лемма о пересечении выпуклых множеств.
9. Теорема о представлении выпуклого многогранника через угловые точки.
10. Геометрическая интерпретация задачи ЛП.
11. Теорема о выпуклости планов задачи ЛП.
12. Теорема о достижении оптимума в угловой точке многогранника решений. Альтернативный оптимум.
13. Теорема о соответствии угловой точки многогранника решений линейно независимой системе векторов.
14. Теорема о соответствии линейно независимой системы векторов угловой точке многогранника решений.

15. Графический метод решения стандартной задачи ЛП с двумя переменными.
16. Графический метод решения канонической задачи ЛП, где число переменных больше двух.
17. Идея симплекс-метода. Построение опорных планов. Вывод формулы пересчета коэффициентов.
18. Теорема о возможности улучшения плана для задачи на минимум. Критерий оптимальности.
19. Теорема о возможности улучшения плана для задачи на максимум. Критерий оптимальности.
20. Алгоритм симплекс-метода, алгебра симплекс-метода.
21. Составление первой симплекс-таблицы, переход к последующим, контроль за ведением таблиц.
22. Геометрический и экономический смысл симплекс-метода.
23. Поиск начального опорного плана методом искусственного базиса. Признак неразрешимости задачи ЛП.
24. Задачи со смешанными ограничениями и методы их решения.
25. Понятие о двойственных задачах ЛП. Примеры построения двойственных задач, имеющих экономическое содержание.
26. Основная задача ЛП и двойственная к ней (правила построения двойственных задач).
27. Несимметричные двойственные задачи. Первая теорема двойственности.
28. Вторая теорема двойственности. Условия дополняющей нежесткости.
29. Определение решения двойственной задачи при использовании оптимальной симплекс-таблицы прямой задачи (по первой теореме двойственности).
30. Определение оптимального решения прямой задачи по решению двойственной при использовании условия дополняющей нежесткости.
31. Оценка рентабельности нового вида продукции.
32. Анализ моделей на чувствительность к изменениям коэффициентов целевой функции.

33. Анализ моделей на чувствительность к изменениям правой части ограничений.
34. Общая постановка транспортной задачи по критерию стоимости и ее математическая модель. Допустимый план. Оптимальный план. Вырожденность. Закрытая транспортная задача. Открытая модель.
35. Теорема о допустимости и разрешимости закрытой транспортной задачи.
36. Теорема о ранге системы ограничений-уравнений закрытой транспортной задачи.
37. Определение цикла. Примеры построения циклов. Теорема о четности вершин в цикле. Означенный цикл. Цикл пересчета.
38. Методы построения начального плана транспортной задачи: «северо-западного угла», «минимального элемента», «двойного предпочтения», «метод Фогеля».
39. Критерий оптимальности транспортной задачи. Метод потенциалов (теоретическое обоснование).
40. Сетевая постановка транспортной задачи по критерию стоимости. Опорные планы. Требования, предъявляемые к опорному плану.
41. Метод потенциалов для транспортной задачи на сети. Вычисление потенциалов. Условия оптимальности. Переход от одного плана к другому.
42. Постановка задачи «о разборчивой невесте», ее математическая формулировка (запрет на многомужество, многоженство и однополые браки).
43. Метод потенциалов для задачи «о разборчивой невесте». Решение проблемы вырожденности. Критерий оптимальности.
44. Определение эквивалентности матриц. Теорема Эгервари.
45. Венгерский метод для решения задач о назначениях, «о разборчивой невесте».
46. Двойственный симплекс-метод. Правила выбора ведущего элемента.
47. Целочисленное программирование. Метод Гомори. Вывод формулы отсекающей гиперплоскости.

48. Метод ветвей и границ.
49. Понятие о выпуклом программировании.
50. Вычислительные методы квадратичного программирования.
51. Простейшие задачи динамического программирования. Вывод рекуррентных соотношений.
52. Постановка транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями коммуникаций по критерию стоимости. Математическая модель задачи.
53. Критерий оптимальности задачи Td, метод потенциалов.
54. Классический метод построения опорного плана задачи Td.
55. Метод минимального резерва пропускной способности для построения опорного плана задачи Td.



# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

## Основная

1. Аксентьев В. А. Сборник задач по математическим методам в экономике: учебное пособие. Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2003. 264 с.
2. Аксентьев В. А., Пыткеев Е. Г., Хохлов А. Г. Математические методы в экономике и финансах: учебное пособие для студентов экономических специальностей дистанционной формы обучения. 3-е изд., перераб. Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2011. 376 с.
3. Аксентьев В. А. Математические методы в экономике: учебно-методический комплекс. Решение задач демонстрационного варианта для студентов очной и заочной форм обучения направления «Экономика». Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2007. 86 с.
4. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций. 7-е изд.: пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 902 с.
5. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1986. 318 с.

## Дополнительная

6. Аксентьев В. А. Математические методы в экономике. Оптимизация резервов пропускной способности в транспортной логистике. Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2010. 83 с.
7. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория: пер. с англ. Г. И. Жуковой, Ф. Я. Кельмана. М.: Айрис-пресс, 2002. 576 с.
8. Исследование операций в экономике: учебное пособие для вузов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. 407 с.
9. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: учебное пособие. СПб.: Питер, 2006. 496 с.
10. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник. М.: Финансы и статистика, 2007. 544 с.
11. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. М., Волощенко А. Е. Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1980. 300 с.
12. Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И. Высшая математика: Математическое программирование: учебник. 2-е изд., перераб. и доп. / под ред. А. В. Кузнецова. Минск: Вышэйшая школа, 2001. 351 с.

13. Лопатников Л. И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2003. 520 с.
14. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. В. И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 1999. 656 с.
15. Сборник задач и упражнений по высшей математике: математическое программирование / под ред. проф. А. В. Кузнецова. Минск: Вышэйшая школа, 1995. 382 с.
16. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / под ред. В. И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2001. 575 с.
17. Хачатрян С. Р., Пинегина М. В., Буянов В. П. Методы и модели решения экономических задач: учебное пособие. М.: Экзамен, 2005. 384 с.
18. Шапкин А. С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций. 3-е изд. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К<sup>О</sup>», 2004. 544 с.
19. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебное пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбеков и др.; под ред. В. В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 1999. 391 с.
20. Экономико-математическое моделирование / под ред. И. Н. Дрогобыцкого. 2-е изд., стер. М.: Экзамен, 2006. 798[2] с. (Сер. «Учебник для вузов»).

Учебное издание

Виктор Александрович АКСЕНТЬЕВ

## МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

*Учебное пособие*

Редактор  
Технический редактор  
Компьютерная верстка  
Компьютерный дизайн  
обложки  
Печать трафаретная  
Печать офсетная

*Ю. Ф. Евстигнеева  
Н. Г. Яковенко  
С. Ф. Обрядова*

*Е. Г. Шмакова  
А. В. Ольшанский, О. А. Булашов  
В. В. Торопов, С. Г. Наумов*



Подписано в печать 11.03.2013. Тираж 530 экз.  
Объем 28,25 усл. печ. л. Формат 60×84/16. Заказ 207.

---

Издательство Тюменского государственного университета  
625003, г. Тюмень, ул. Семакова, 10.  
Тел./факс (3452) 45-56-60; 46-27-32  
E-mail: izdatelstvo@utmn.ru