<u>Примерный перечень вопросов для самостоятельной работы</u>

1-й уровень сложности

1) Верно ли, что
   а) общий множитель элементов какой-либо строки матрицы можно выносить за знак матрицы?
   б) понятие «нулевая матрица» относится только к квадратным матрицам?
   в) понятие «единичная матрица» относится только к квадратным матрицам?
   г) любая диагональная матрица является симметричной?
   д) понятие «симметричная матрица» относится только к квадратным матрицам?
   е) любая симметричная матрица является диагональной?
2) Какие матрицы не меняются при транспонировании?
3) Может ли вырожденная матрица быть
   а) симметричной?
   б) диагональной?
   в) размера 3x5?
4) Может ли матрица размера 5x7 быть
   а) симметричной?
   б) диагональной?
   в) вырожденной?
5) Может ли однородная система линейных уравнений
   а) иметь симметричную матрицу коэффициентов?
   б) быть несовместной?
   в) иметь вырожденную матрицу коэффициентов?
   г) иметь единственное решение?
   д) иметь бесконечно много решений?
6) Может ли ступенчатая система
   а) быть несовместной?
   б) иметь симметричную матрицу коэффициентов?
7) Может ли система линейных уравнений, в которой 3 уравнения и 5 неизвестных,
   а) не иметь решения?
   б) иметь единственное решение?
   в) иметь бесконечно много решений?
8) Может ли однородная система линейных уравнений, в которой 4 уравнения и 6 неизвестных,
   а) не иметь решения?
   б) иметь единственное решение?
   в) иметь бесконечно много решений?
9) Верно ли, что
   а) если 2 вектора линейно независимы, то они ортогональны?
   б) если 2 вектора ортогональны, то они линейно независимы?
10) Привести примеры
   а) ортогональных векторов в $\mathbb{R}^n$ (n=2,3,4);
   б) линейно независимого набора из k векторов в $\mathbb{R}^4$ (k=1,2,3,4);
   в) линейно зависимого набора из k векторов в $\mathbb{R}^4$ (k=1,2,3,4).

11) Пусть L является линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^n$, и пусть известно, что $\dim L = 7$. Каким при данных условиях может быть число n?

2-й уровень сложности

12) A – квадратная матрица, такая, что $A^2 = 0$. Докажите, что матрица $E - A$ обратима.
13) Найти все матрицы A второго порядка такие, что $A^2 = E$.
14) Верно ли, что всякую квадратную матрицу с определителем, равным -1, можно элементарными преобразованиями строк привести к матрице $3E$, где E – единичная матрица?
15) A – квадратная матрица. Известно, что сумма её строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами. Найдите определитель матрицы A.
16) A – квадратная матрица. Известно, что строки матрицы A^3 линейно зависимы. Верно ли, что строки матрицы A линейно зависимы?
17) Сумма элементов каждой строки матрицы равна 1. Докажите, что число 1 является её собственным числом.
18) Верно ли, что если векторы A, B, C образуют базис подпространства P, то и векторы A, $A+B$, $A+B+C$ образуют базис подпространства P?
19) Докажите, что любую последовательность линейно независимых векторов подпространства можно дополнить до базиса этого подпространства.
20) Найти систему уравнений, множеством решений которой является линейная оболочка векторов (1,1,1), (1,2,3).
21) Пусть все собственные числа вещественной симметричной матрицы A больше μ. Доказать, что квадратичная форма с матрицей $A - \mu E$ положительно определённая.
22) Пусть даны две вещественные квадратичные формы. Доказать, что одна из них может быть преобразована в другую ортогональным преобразованием переменных тогда и только тогда, когда характеристические многочлены их матриц совпадают.
23) Привести квадратичную форму $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ к диагональному виду ортогональным преобразованием переменных.
24) Существует ли матрица A, для которой $A^2 = -E$? Если существует, найти все такие матрицы; если не существует, доказать это.
25) Доказать утверждение:

    векторы X и Y из пространства $\mathbb{R}^n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $|X \cdot Y| = \|X\| \cdot \|Y\|$.
26) Пусть A и B – матрицы. Верно ли, что если $AB = A + B$, то $BA = B + A$?
27) Существуют ли такие матрицы A и B, что $r(AB) \neq r(BA)$?
28) Существуют ли квадратные матрицы A и B 3-го порядка такие, что $AB = B$, причём $A \neq E$ и $A \neq B$?
29) Квадратная матрица A содержит столбец из единиц. Изменится ли определитель матрицы A, если ко всем элементам последнего столбца прибавить 2?
30) Пусть A и B – матрицы, для которых $AB = A - E$. Верно ли, что тогда

    а) $BA = E - A$? б) $BA = A - E$? в) $BA = AB$?