Министерство образования и науки РФ
Пермский национальный исследовательский
политехнический университет
Кафедра «Автоматика и телемеханика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения курсовой работы

по дисциплине

«ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ», часть II

для студентов заочной и дистанционной форм обучения
по направлению 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»,
профиль 21070004.62 «Сети связи и системы коммутации»

Пермь, 2013

Задание на курсовую работу и указания к ее выполнению

Целью выполнения курсовой работы является закрепление теоретических знаний и получение практических навыков по проектированию систем передачи дискретной информации, использующей помехоустойчивое кодирование.

1. Постановка задачи

В процессе выполнения курсовой работы необходимо решить следующие задачи:

1. Спроектировать структурную схему тракта передачи дискретной информации, использующей в качестве средства повышения помехоустойчивости групповой систематический код (ГСК).
2. По заданному количеству дискретных сообщений определить длину информационной части неизбыточного кода m.
3. По верхней границе Хэмминга определить длину избыточного кода n, перейти к коду с четным $d_{\min}$ и рассчитать вероятности правильной передачи, трансформации и стирания сообщения.
4. Построить порождающую матрицу G (проверочную матрицу H) и определить операторы кодирования. Рассчитать операторы кодирования для заданного значения информационной части.
5. Построить функциональную схему кодирующего устройства ГСК (кодера ГСК).
6. Записать уравнение для вычисления синдромов. Составить таблицу синдромов, по которой определить кратность и место ошибки.
7. Произвести вычисление синдромов для заданной кодовой комбинации для следующих ситуаций:
   - безошибочная передача,
   - передача с однократной ошибкой,
   - передача с двукратной ошибкой,
   - передача с трехкратной ошибкой.
8. Построить функциональную схему декодирующего устройства ГСК (декодера ГСК).
9. Сделать выводы о проделанной работе.

2. Краткая теория

Основная задача системы электросвязи – обеспечить передачу информации от источника к потребителю с требуемой достоверностью. Поэтому при проектировании системы большое внимание уделяется борьбе с помехами по всему тракту прохождения сигналов, а также использование методов помехоустойчивой передачи информации. Одним из наиболее широко используемых способов повышения помехоустойчивости передаваемых сообщений является избыточное кодирование информации.

2.1. Принципы построения корректирующих кодов

Общий принцип построения корректирующих кодов достаточно прост. Из общего числа $M_0 = 2^m$ возможных m-разрядных двоичных кодовых комбинаций используются для передачи дискретных сообщений не все, а только необходимое количество $M_р$ (естественно, $M_р < M_0$). Используемые кодовые комбинации называются ***разрешенными*** (***рабочими***). Остальные ($M_0 - M_р$) комбинаций считаются ***запрещенными***, т. е. они не могут передаваться по каналу связи, и их появление на приемном конце свидетельствует о наличии ошибок. По определению академика А.А. Харкевича, ***корректирующим*** кодом является код, удовлетворяющий единственному условию: $M_р < M_0$. Действительно, если имеется хотя бы одна запрещенная кодовая комбинация, то возникает принципиальная возможность обнаружения (или даже исправления) ошибок передачи.

Таким образом, любой корректирующий код является ***кодом с избыточностью*** (имеются лишние, неиспользуемые кодовые комбинации). Для описания корректирующего кода вводятся следующие параметры:

Корректирующая способность кода определяется кратностью ***обнаруживаемых*** r и ***исправляемых*** s ошибок, под которыми понимают гарантированное число ошибок в кодовой комбинации, обнаруживаемых или исправляемых заданным кодом. Совершенно ясно, что чем больше кратность r и s, тем совершенней является код.

Расстояние Хэмминга d_{ij} показывает степень различия между i-й и j-и кодовыми комбинациями. Для любых двух двоичных кодовых комбинаций кодовое расстояние равно числу несовпадающих в них разрядов. Так, приведенные ниже комбинации (для удобства различения они написаны друг под другом)

1 _0_ _1_ 1 _0_ 0
⊕
1 _1_ _0_ 1 _1_ 0
----
0 1 1 0 1 0

не совпадают в трех разрядах (помечены наклоном и подчеркиванием) и поэтому расстояние Хэмминга $d_{ij} = 3$. Математически расстояние Хэмминга вычисляется как число единиц ***в сумме по модулю два*** (⊕) этих кодовых комбинаций, что представляет собой ***вес*** кодовой комбинации их суммы W.

Минимальное кодовое расстояние $d_{\min}$– это минимальное расстояние Хэмминга для заданного кода. Перебрав все возможные пары разрешенных кодовых комбинаций и вычислив для них d_{ij}, необходимо найти среди них минимальное. Это и будет кодовое расстояние $d_{\min} = \min d_{ij}$, которое полностью характеризует корректирующую способность кода.

Относительная скорость кода R_k показывает относительное число разрешенных кодовых комбинаций в коде и вычисляется по формуле

$$R_k = \log_2 M_{\text{р}} / \log_2 M_0$$

Величина $X_k = 1 - R_k$ является ***коэффициентом избыточности кода***.

При введении избыточности в первичный код U, содержащий m ***информационных*** символов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, добавляются k ***избыточных*** символов $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Таким образом, кодовый вектор V, направляемый в линию связи, содержит m информационных и k избыточных символов. Общая длина кодовой комбинации n определяется по формуле

$$n = m + k.$$

Структурная схема системы передачи дискретной информации, использующей избыточный код в качестве средства повышения помехоустойчивости, выглядит следующим образом (рис. 1).

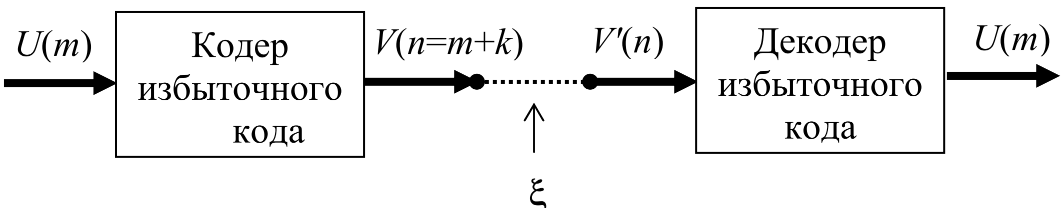

Рис. 1. Структурная схема системы передачи дискретной информации

Введение избыточности позволяет на приемной стороне произвести исправление или обнаружение ошибки. При этом возможны три состояния приема сообщения:

- ***правильная передача*** – отсутствие ошибок или исправление ошибок,
- ***стирание*** – обнаружение ошибки и удаление сообщения,
- ***трансформация*** – искажение информации, выдаваемой пользователю (имеет место при превышении кратности ошибки корректирующей способности кода).

Декодирование с обнаружением ошибок. Методика обнаружения ошибок при декодировании достаточно проста – принятая кодовая комбинация поочередно сравнивается со всеми разрешенными, и если она не совпадает ни с одной из них, то выносится решение о наличии ошибок и стирании сообщения.

Для обнаружения ошибок кодовое расстояние между любыми двумя разрешенными кодовыми комбинациями должно быть достаточным для того, чтобы при изменении одного или нескольких символов в них под воздействием ошибок не возникала снова разрешенная кодовая комбинация. Следовательно, для обнаружения ошибок кратности r кодовое расстояние $d_{\min}$ должно быть хотя бы на единицу больше r

$$d_{\min} \geq r + 1.$$

Декодирование с исправлением ошибок. В кодах с исправлением ошибок предъявляются более жесткие требования к расстоянию между разрешенными кодовыми комбинациями. Исправление ошибок возможно также только в том случае, когда переданная разрешенная кодовая комбинация переходит в запрещенную. Решение о том, какая кодовая комбинация передавалась, производится в декодере на основании сравнения принятой запрещенной комбинации со всеми разрешенными. Принятая кодовая комбинация отождествляется с той из разрешенных, на которую она больше всего похожа, т. е. с той, от которой она отличается меньшим числом элементов. Согласно этому правилу, для исправления ошибок кратностью s необходимо, чтобы запрещенная кодовая комбинация, получаемая при s-кратных ошибках, оставалась ближе к истинной, чем к любой другой разрешенной комбинации. Это выполняется при условии

$$d_{\min} \geq 2s + 1.$$

Декодирование с исправлением и обнаружением ошибок. Для того чтобы избыточный код исправлял ошибки кратностью не более s и обнаруживал ошибки кратностью не более r ($r > s$), минимальное кодовое расстояние должно определиться по формуле:

$$d_{\min} \geq s + r + 1.$$

В таком случае говорят, что корректирующая способность кода направлена и на исправление, и на обнаружение ошибок соответствующей кратности.

Корректирующая способность кода должна способствовать удовлетворению требований по достоверности передачи. Поэтому рассчитываются вероятностные характеристики правильной передачи, трансформации сообщения и стирания сообщения (если вся или часть корректирующей способности кода направлена на обнаружение ошибок).

Для кода, исправляющего ошибки кратности не более s:

$$P_{\text{пр}} = \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i} \cdot P^{i} \cdot (1-P)^{n-i},$$

$$P_{\text{тр}} = 1 - P_{\text{пр}}. \tag{1}$$

Для кода, исправляющего ошибки кратности не более s и обнаруживающего ошибки кратностью не более r ($r > s$):

$$P_{\text{пр}} = \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i} \cdot P^i \cdot (1-P)^{n-i},$$

$$P_{\text{ст}} = \sum_{i=s+1}^{r} \binom{n}{i} \cdot P^i \cdot (1-P)^{n-i},$$

$$P_{\text{тр}} = 1 - P_{\text{пр}} - P_{\text{ст}}. \tag{2}$$

Примечания.

1. P – вероятность ошибки в одном символе.
2. Используется математическая модель биноминального распределения ошибок в канале связи.

Корректирующая способность кода должна обеспечивать вероятность трансформации сообщения не больше допустимой : $P_{\text{тр}} <= P_{\text{тр.доп.}}$

2.2. Построение групповых систематических кодов

Одним из наиболее популярных реализаций корректирующих кодов является групповой систематический код (ГСК). Он относится к систематическим вследствие того, что имеет явно выраженные информационные и избыточные части. ГСК представляется в форме (n,m,d), где

- n – общая длина кодового вектора,
- m – длина информационной части,
- d – минимальное кодовое расстояние.

Исходные данные для расчета параметров кода:

- m – длина информационной части,
- P – вероятность ошибки в одном символе кода
- $P_{\text{тр.доп.}}$ – допустимое значение вероятности трансформации.

Для расчета ГСК необходимо определить k – количество избыточных символов (длину избыточной части), а также убедиться, что вероятность трансформации сообщения при применении рассчитанного кода не больше допустимого значения.

Для определения параметров кода применятся формула «Верхней границы Хемминга»:

$$\boxed{2^m \le \frac{2^n}{1+E}}, \text{ где } E = \sum_{i=1}^{s} \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{s} \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

В данное выражение подставляются заданное значение m и расчетное значение s, и неравенство решается относительно n.

Ниже представлен алгоритм выбора параметров группового систематического кода (рис. 2).

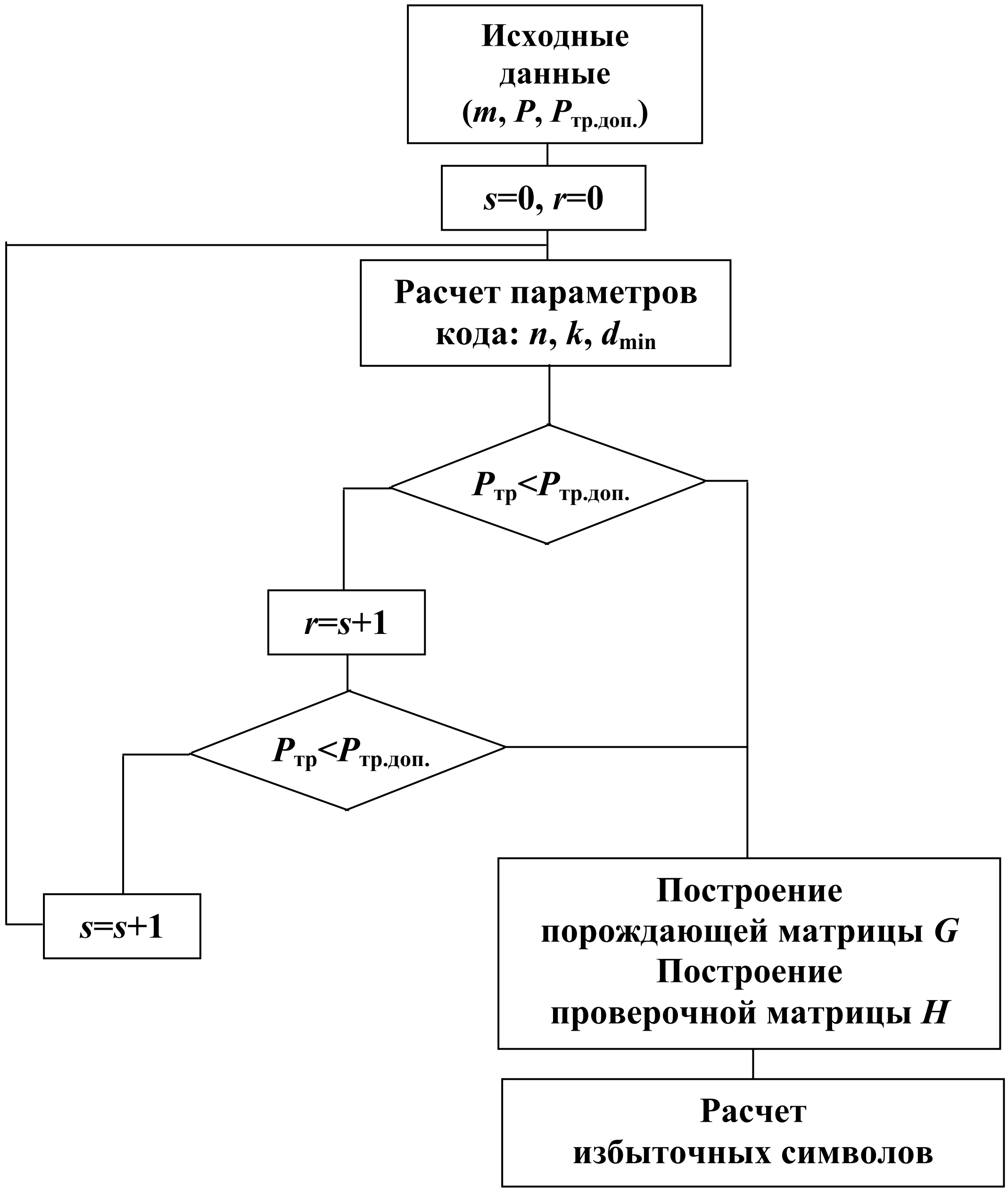

Рис. 2. Алгоритм выбора параметров группового систематического кода

После выбора параметров кода, удовлетворяющих требования по вероятности трансформации сообщения, необходимо определить операторы кодирования, при помощи которых вычисляются значения избыточных символов. Для этого строятся порождающая матрица G или проверочная матрица H. **Матрицы строятся для кодов с нечетным d_{min}.**

Порождающая матрица G имеет размерность [m x n] и в каноническом виде может быть определена следующим образом:

$$G = [I_m\, P],$$

где I_m – единичная матрица размерности [m х m], в которой по главной диагонали находятся 1, а остальные элементы 0, P – матрица размерности [m х k], состоящая из m k-разрядных ненулевых и несовпадающих друг с другом *строк*, вес которых не менее $d_{\min}$–1:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots 0 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ 0 & 1 & \dots 0 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 1 & p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mk} \end{bmatrix}$$

Таким образом, порождающая матрица G представляет собой m n-разрядных линейно независимых нетривиальных векторов V_i.

$$G = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_m \end{bmatrix}.$$

Проверочная матрица H имеет размерность [k х n] и в каноническом виде может быть определена следующим образом:

$$H = [P^{\mathrm{T}}\, I_k],$$

где I_k – единичная матрица размерности [k х k], в которой по главной диагонали находятся 1, а остальные элементы 0, P^{T} – транспонированная матрица P размерности [k х m], состоящая из m k-разрядных ненулевых и несовпадающих друг с другом *столбцов*, вес которых не менее $d_{\min}$–1:

$$H = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{m1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{m2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1k} & p_{2k} & \cdots & p_{mk} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Допустим, что необходимо закодировать в групповом систематическом коде m-разрядный информационный вектор $U = (a_1, a_2, \dots, a_m)$. Тогда n-разрядный вектор V ГСК, соответствующий данному информационному вектору, будет иметь следующий вид:

$$V = (a_1, a_2, \ldots, a_m, c_1, c_2, \ldots, c_k)$$

Для ГСК выполняется проверочное условие:

$$G \cdot H^{\mathrm{T}} = 0, \text{ следовательно, и } V \cdot H^{\mathrm{T}} = 0.$$

Указанные соотношения используются для вычисления избыточных символов.

$$V = U \cdot G = (a_1, a_2, \ldots, a_m, c_1, c_2, \ldots, c_k), \text{ следовательно,}$$

$$c_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \bullet p_{ij}, где\ j = \overline{1,k}\,. \quad (3)$$

Для перехода к коду с четным $d_{\min}$ (к коду, исправляющему ошибку кратности s и обнаруживающему ошибку кратности $r = s + 1$) используются следующие формулы перехода:

$$d_{\min\ чет} = d_{\min\ нечет} + 1$$
$$k_{чет} = k_{нечет} + 1$$
$$n_{чет} = n_{нечет} + 1$$
$$m = \mathrm{const}$$

К кодовой комбинации добавляется дополнительный избыточный символ, который вычисляется как сумма по модулю два всех элементов информационной и избыточной части:

$$c_{k+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i \oplus \sum_{j=1}^{k} c_j\,. \quad (4)$$

Вычисление данного символа вводит обобщенную проверку на четность, ибо его значение всегда добавляет вес кодового вектора до четного значения. Поэтому ошибки, не нарушающие четность кодового вектора, будут обнаружены. Указанная процедура формирования кода выполняется только для т.н. ***кодов Хэмминга*** ($s = 1$, $d_{\min} = 3$ или $s = 1$, $r = 2$, $d_{\min} = 4$).

Кодирующие устройства (кодеры) ГСК

Обобщенная функциональная схема кодера ГСК подробно рассмотрена в рекомендованных методических материалах и учебных пособиях. Поэтому здесь укажем лишь, что в состав кодирующего устройства входят:

- ***буферный регистр информационных символов*** (БРИС), осуществляющий прием и промежуточное хранение информационных символов a_i,
- ***комбинатор проверочных символов*** (КМПС), выполняющий функцию вычисления избыточных символов c_j,
- ***выходной буферный регистр*** (БР), формирующий вектор V.

2.3. Декодирование групповых систематических кодов

Для декодирования ГСК применяется принцип ***синдромного декодирования***. Синдром группового кода ($\overline{S}$) вычисляется декодером, как решение уравнения

$$\overline{V}' \cdot H^T = \overline{S} = (s_1, s_2, ..., s_j, ..., s_k),$$

где $\overline{V}' = \overline{V} \oplus \overline{e} = (a'_1, a'_2, ..., a'_i, ..., a'_n)$ – искаженный вектор на входе декодера.

Таким образом

$$\overline{S} = \overline{e} \cdot H^T = (e'_1, e'_2, ..., e'_i, ..., e'_n) \cdot \left| h^T_{ij} \right|,$$

т.е. между k-разрядным синдромом и исправляемым вектором ошибки существует однозначная зависимость. Поэтому в правильно построенном коде, исправляющем ошибки, декодер по конкретному значению синдрома однозначно вычисляет величину и место ошибки. Для двоичного канала достаточно указать только место ошибки, а затем указанный разряд проинвертировать. Из уравнений следует выражение для вычисления значения j-го разряда синдрома:

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} a'_i \cdot h^T_{ij} = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot h^T_{ij}, \ (j = \overline{1,k}), \ \ s_j = 0{,}1.$$

Синдром может принимать 2^k значений, включая нулевое. Тогда если код исправляет ошибки кратности s и меньше, то с учетом требования однозначного соответствия между множеством различных значений синдрома и множеством исправляемых ошибок $E = \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{s} \frac{n!}{i!(n-i)!}$, справедливо следующее соотношение: $2^k \geq E = \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i}$. Таким образом, мы получим верхнюю границу Хемминга.

Синдромное декодирование состоит из следующих этапов:

1. По принятому кодовому вектору $\overline{V'} = \overline{V} \oplus \overline{e}$ находим синдром $\overline{S} = (s_1, s_2, ..., s_j, ..., s_k)$.

2. По вычисленному значению синдрома однозначно отыскиваем вектор ошибок $\overline{e} = (e_1, e_2, ..., e_j, ..., e_n)$.

3. Производим исправление ошибок и выдачу скорректированного кодового слова (сообщения) получателю: $\overline{V} = \overline{V'} \oplus \overline{e}$, либо стирание полученного кодового слова, если кратность ошибок в кодовом слове s' удовлетворяет соотношению $s < s' \le r$, где r – кратность обнаруживаемых ошибок.

Общая структура синдрома кода (n + 1, m, $d_{Ч}$ = $d_{Н}$ + 1) такова: $\overline{S} = (s_1, ..., s_j, ..., s_k, s_{k+1})$. При этом первые k-разрядов вычисляются по формуле, а последний (k+1)-й разряд (для кодов с четным $d_{\min}$) – согласно общей проверке на четность:

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i' + \sum_{j=1}^{k+1} c_j' .$$

При этом минимизация выражения данного выражения недопустима.

Декодирование вектора синдрома осуществляется по следующей таблице истинности (табл. 1):

Таблица 1

№ п/п	$S_1, S_2, \dots, S_j, \dots, S_k$	S_{k+1}	Кратность ошибок в векторе $\overline{V}'$
1	0	0	Ошибок нет
2	≠0	1	Ошибки нечетной кратности, в частности однократная ошибка
3	0	1	Ошибки в символе c_{k+1}
4	≠0	0	Ошибки четной кратности, в частности двукратная ошибка

В данной таблице символ 0 означает, что все координаты вектора нулевые; символ ≠ 0 показывает, что хотя бы одна координата вектора ненулевая. Для ситуации под номером 2 (однократная ошибка) место ошибки определяется путем нахождения такого разряда, который входит во все координаты синдрома, равные единице, и не входит в координаты синдрома, равные нулю. Каждая комбинация вектора синдрома однозначно определяет кратность и место ошибки.

Декодирующие устройства (декодеры) ГСК

Обобщенная функциональная схема декодера ГСК подробно рассмотрена в рекомендованных методических материалах и учебных пособиях. Поэтому здесь укажем лишь, что в состав кодирующего устройства входят:

- ***буферный регистр*** (БР), осуществляющий промежуточное хранение и выдачу принятого из канала связи вектора V',
- ***устройство вычисления синдрома*** (УВС), которое производит вычисление координат вектора синдрома по принятым символам a_i' и c_j' параллельно либо последовательно во времени,
- ***декомбинатор синдрома*** (ДКМС), вычисляющий кратность и место ошибки и формирующий необходимые управляющие сигналы,
- ***буферный регистр информационных символов*** (БРИС), в котором производится промежуточное хранение, исправление ошибки, стирание либо выдача пользователю принятого информационного вектора (сообщения).

На входы декодера параллельно либо последовательно во времени поступают неискаженные или искаженные кодовые векторы ГСК. В системах передачи информации (системах связи) используются последовательные сигналы на входе декодера, а в системах хранения информации – параллельные сигналы на входе декодера.

3. Порядок выполнения курсовой работы. Требования к отчету

Порядок выполнения расчетно-графической части работы

1. Выбрать вариант задания на курсовую работу (см. **Приложение**). Для этого по своему номеру в списке необходимо определить:

- количество рабочих комбинаций кода (M),
- способ задания кода (с помощью матрицы G или с помощью матрицы H),
- значение информационной части в десятичном виде U,
- вариант реализации кодера ГСК (параллельный или последовательный),
- вариант реализации декодера ГСК (параллельный или последовательный),
- вид матрицы P.

Примечание.

а) Для всех вариантов принять $P = 10^{-3}$, $P_{тр.доп.} = 10^{-6}$.

б) Для формирования матрицы P предлагается упрощенный способ, описанный в Приложении.

2. Для выбранных исходных данных группового систематического кода определить следующие параметры и характеристики кода:

- длину информационной части m,
- количество избыточных символов k,
- минимальное кодовое расстояние $d_{\min}$,
- избыточность R,
- вероятностные характеристики $P_{пр}$, $P_{ст}$, $P_{тр}$.

Расчет производить по алгоритму, приведенному на рис. 2.

3. Для рассчитанных параметров ГСК определить правила вычисления избыточных символов указанным в задании способом. Построить пример кодовой комбинации для двоичного представления информационной части U, определенной в задании.

Пример.

1) U=3, U=(a_1,a_2,a_3,a_4) => a_1=0, a_2=0, a_3=1, a_4=1.

2) U=12, U=(a_1,a_2,a_3,a_4) => a_1=1, a_2=1, a_3=0, a_4=0.

После перевода информационной части из десятичного представление в двоичное необходимо выполнить процедуру вычисления избыточных символов.

4. Построить кодер ГСК указанного типа.

5. Промоделировать возникновение ошибки в кодовой комбинации (кратность ошибки принять 0, 1, 2, 3) и проиллюстрировать, каким образом реализуется корректирующая способность построенного кода. Привести пример работы декодера на приемной стороне (составить таблицу синдромов) в режимах правильной передачи, стирания и трансформации кодовой комбинации, рассчитанной в п. 3.

6. Построить декодер ГСК указанного типа.

Отчет по проделанной работе должен содержать:

1. Титульный лист с указанием темы курсовой работы, номера варианта и исполнителя.
2. Содержание курсовой работы.
3. Техническое задание на курсовую работу.
4. Краткое описание теории (обобщенную структурную схему системы передачи с применением помехоустойчивого кодирования, описание параметров кода, основные расчетные формулы).
5. Результаты выполнения пунктов 1-6 порядка выполнения расчетно-графической части работы.

6. Выводы по проделанной работе.
7. Список использованной литературы.

Курсовую работу выполняют на листах формата А4 или в тетради. Страницы текста, рисунки и формулы нумеруют. Текст пишется разборчиво, без недопустимых сокращений. В конце работы приводится список литературы. Студент подписывает работу с указанием даты. Допускается выполнение работы на ПЭВМ или в рукописном варианте.

4. Пример выполнения расчетной части работы

Необходимо построить групповой систематический код для следующих исходных данных:

$M = 12$ – количество рабочих комбинаций,

$P = 10^{-3}$ – вероятность ошибки на символ,

$P_{\text{тр.доп.}} = 10^{-6}$ – допустимое значение вероятности трансформации.

4.1. Определение длины информационной части m

$$m = [\ \log_2 M] = [\ \log_2 12] = 4.$$

4.2. Расчет параметров избыточного кода

Согласно алгоритму выбора параметров группового систематического кода, вычисляем параметры кода по верхней границе Хэмминга, а затем оцениваем значение вероятности трансформации для полученного кода.

$s = 0$, $r = 0$, $d_{\min} = 1$ => (4,4,1) => $P_{\text{тр}} = 3{,}99\cdot10^{-3} > P_{\text{тр.доп.}} = 10^{-6}$. Расчет производится по формуле (1) (стр. 5).

$s = 0$, $r = 1$, $d_{\min} = 2$ => (5,4,2) => $P_{\text{тр}} = 9{,}98\cdot10^{-6} > P_{\text{тр.доп.}} = 10^{-6}$. Расчет производится по формуле (2) (стр. 6).

$s = 1$, $r = 1$, $d_{\min} = 3$ => (7,4,3) => $P_{\text{тр}} = 2{,}09\cdot10^{-5} > P_{\text{тр.доп.}} = 10^{-6}$. Расчет производится по формуле (1) (стр. 5).

$s = 1$, $r = 2$, $d_{\min} = 4$ => (8,4,4) => $P_{\text{тр}} = 5{,}58\cdot10^{-8} < P_{\text{тр.доп.}} = 10^{-6}$. Расчет производится по формуле (2) (стр. 6).

Примечание. Расчет вероятностей привести полностью.

4.3. Расчет операторов кодирования

Зададим порождающую матрицу G для кода (7,4,3) для строк (3,6,5,7):

$$G = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \end{bmatrix}$$

Выпишем операторы кодирования (формула (3), стр. 9):

$$c_1 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$$
$$c_2 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4$$
$$c_3 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4$$

Построим дополнительный избыточный символ для кода (8,4,4) (формула (4), стр. 9):

$$c_4 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$$

Пусть информационный вектор имеет вид U = (1010), тогда избыточные символы будут вычисляться следующим образом:

$$c_1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$
$$c_2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$
$$c_3 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$
$$c_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

Вектор группового систематического кода будет иметь вид:

$$V = (10101100).$$

4.4. Построение кодера группового систематического кода (8,4,4)

Кодер ГСК строится согласно выбранному варианту в параллельной или последовательной форме. Вид кодера определяется реализацией комбинатора проверочных символов (КМПС). Для построения функциональной схемы кодера необходимо воспользоваться рекомендованным для самостоятельного изучения материалом.

4.5. Декодирование группового систематического кода

Для рассчитываемого кода можно выписать следующие уравнения для определения вектора синдрома:

$s_1 = c'_1 \oplus a'_2 \oplus a'_3 \oplus a'_4,$
$s_2 = c'_2 \oplus a`_1 \oplus a'_2 \oplus a'_4,$
$s_3 = c'_3 \oplus a'_1 \oplus a'_3 \oplus a'_4,$
$s_4 = a'_1 \oplus a'_2 \oplus a'_3 \oplus a'_4 \oplus c'_1 \oplus c'_2 \oplus c'_3 \oplus c'_4.$

Декодирование вектора синдрома кода (8,4,4) осуществляется по следующей таблице истинности (табл. 2):

Таблица 2

№ п/п	S_1 S_2 S_3	S_4	Кратность ошибок в векторе $\overline{V}\,'$
1	0	0	Ошибок нет
2	 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0	 1 1 1 1 1 1 1 1	Однократная ошибка в разряде: c_3 c_2 c_1 a_1 a_2 a_3 a_4 c_4
3	≠0	0	Двукратная ошибка

Проиллюстрируем корректирующую способность кода (8,4,4) для выбранной кодовой комбинации $V = (10101100)$.

$e = 0$ (нет ошибки):
$V' = (10101100)$,
$S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $S_4 = 0$ => правильная передача.

$e = 1$ (однократная ошибка, например в разряде a_1):
$V' = (\underline{\mathbf{0}}0101100)$,
$S_1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 1$, $S_4 = 1$ => исправление ошибки в разряде a_1.

$e = 2$ (двукратная ошибка, например в разрядах a_1 и a_3):
$V' = (\underline{\mathbf{0}}0\underline{\mathbf{1}}01100)$,
$S_1 = 1$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$, $S_4 = 0$ => стирание сообщения.

$e = 3$ (трехкратная ошибка, например в разрядах a_1, a_2 и a_3):
$V' = (\underline{\mathbf{001}}01100)$,
$S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $S_4 = 1$ => трансформация сообщения.

Примечание. Расчет синдромов привести полностью.

4.6. Построение декодера группового систематического кода (8,4,4)

Декодер ГСК строится согласно выбранному варианту в параллельной или последовательной форме. Вид кодера определяется реализацией устройства вычисления синдрома (УВС). Для построения функциональной схемы декодера необходимо воспользоваться рекомендованным для самостоятельного изучения материалом.

Приложение. Варианты заданий

№ п/п	*M*	Матрица	Кодер	Декодер
1	9	*G*	Паралл.	Посл.
2	10	*H*	Посл.	Паралл.
3	11	*G*	Паралл.	Посл.
4	12	*H*	Посл.	Паралл.
5	13	*G*	Паралл.	Посл.
6	14	*H*	Посл.	Паралл.
7	15	*G*	Паралл.	Посл.
8	9	*H*	Посл.	Паралл.
9	10	*G*	Паралл.	Посл.
10	11	*H*	Посл.	Паралл.
11	12	*G*	Паралл.	Посл.
12	13	*H*	Посл.	Паралл.
13	14	*G*	Паралл.	Посл.
14	15	*H*	Посл.	Паралл.
15	9	*G*	Паралл.	Паралл.
16	10	*H*	Посл.	Посл.
17	11	*G*	Паралл.	Паралл.
18	12	*H*	Посл.	Посл.
19	13	*G*	Паралл.	Паралл.
20	14	*H*	Посл.	Посл.
21	15	*G*	Паралл.	Паралл.
22	9	*H*	Посл.	Посл.
23	10	*G*	Паралл.	Паралл.
24	11	*H*	Посл.	Посл.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Матрица *P*	3 5 6 7	3 5 7 6	3 6 5 7	3 6 7 5	3 7 5 6	3 7 6 5	5 3 6 7	5 3 7 6	5 6 3 7	5 6 7 3	5 7 3 6	5 7 6 3

№ варианта	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Матрица *P*	6 3 5 7	6 3 7 5	6 5 3 7	6 5 7 3	6 7 3 5	6 7 5 3	7 3 5 6	7 3 6 5	7 5 3 6	7 5 6 3	7 6 3 5	7 6 5 3

Примечание.

Матрица *P* размерности (m x k) находится в составе порождающей матрицы *G*. Транспонированная матрица P^{T} размерности (k x m) находится в составе порождающей матрицы *H*. Строки матрицы *P* (столбцы матрицы P^{T}) представляют из себя двоичные *k*-разрядные числа, где *k* – количество избыточных символов в коде с нечетным $d_{\min}$. Строки задаются в десятичном представлении индивидуально для каждого варианта.

Пример.
3 - 0 1 1
5 - 1 0 1
6 - 1 1 0
7 - 1 1 1

По виду матрицы P определяются уравнения для вычисления избыточных символов.

Вектор информационной части U для моделирования выбрать следующим образом:

$$(\text{№}_{\text{варианта}} \bmod 7) + 1.$$

Примечание. Операция mod – операция вычисления остатка от деления.

Пример.
№ = 16, $U = (16 \bmod 7) + 1 = 2 + 1 = 3$: $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$.