МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

В.Г. КРУПИН, А.Л. ПАВЛОВ, Л.Г. ПОПОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

СБОРНИК ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ

Учебное пособие по курсу «Высшая математика»
для студентов МЭИ, обучающихся по всем направлениям подготовки

Москва Издательский дом МЭИ 2013

УДК 51
К

Утверждено учебным управлением МЭИ в качестве учебного пособия для студентов

Подготовлено на кафедре высшей математики

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук, профессор А.С. Барашков,
докт. физ.-мат. наук, профессор А.А. Туганбаев

Крупин В.Г.

К Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы. Сборник задач с решениями: учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. — М.: Издательский дом МЭИ, 2013. — 368 с.

ISBN

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения, необходимые для понимания и решения задач. Подробно разобраны примеры решения задач и приведены по 30 вариантов каждого типа задач для самостоятельного решения.

Предназначено как для студентов, приступающих к изучению теории вероятностей, так и для студентов старших курсов, изучающих ее специальные разделы. Пособие будет полезно для дистанционного обучения. Представляет интерес для преподавателей, желающих активизировать самостоятельную работу студентов (с помощью типовых расчетов или индивидуальных домашних заданий).

Учебное издание

Крупин Владимир Григорьевич
Павлов Александр Леонидович
Попов Леонид Глебович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
СБОРНИК ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ

Учебное пособие по курсу «Высшая математика»
для студентов МЭИ, обучающихся по всем направлениям подготовки

Редактор издательства

Темплан издания МЭИ 2012, учеб.		Подписано в печать
Печать офсетная	Формат 60×84/16	Физ. печ. л. 23
Тираж экз.	Изд. №	Заказ

ЗАО «Издательский дом МЭИ», 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14

Нельзя выучить математику, только слушая лекции, точно так же как нельзя выучиться игре на пианино, только слушая пианиста.

К. Рунге (1856–1927), немецкий математик.

ПРЕДИСЛОВИЕ

По мнению древнекитайского мыслителя Конфуция (551–479 до н.э.), три пути ведут к знанию: путь размышления — это путь самый благородный, путь подражания — это путь самый легкий и путь опыта — это путь самый горький. Предлагаемая книга позволяет пойти по самому легкому пути. Путь этот состоит в том, чтобы, разобравшись в решении типового примера, воспроизвести рассуждения и вычисления в похожей задаче.

Задачник [1] по спецкурсам высшей математики для типовых расчетов был создан на кафедре Высшей математики Московского энергетического института (ныне Национального исследовательского университета «МЭИ») еще в восьмидесятые годы прошлого столетия.

Лет пятнадцать назад была осознана необходимость значительно расширить этот задачник, т.е. фактически сделать новый задачник. Однако этот замысел удалось воплотить в жизнь лишь в недавнее время. Настоящее издание является третьей книгой в предполагаемой серии задачников. Первые две книги [2] и [3] уже увидели свет в 2011 и 2012 годах.

Предлагаемый задачник с решениями содержит задачи по разделам: комбинаторика, теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов. Каждый тип задач предваряется подробно разобранным стандартным примером. После этого формулируется 30 вариантов задачи. Такая структура задачника позволяет использовать его в первую очередь для типовых расчетов, для индивидуальных домашних заданий, для проведения контрольных мероприятий.

Беда современного учебного процесса в том, что в изобилии информационных потоков студент не всегда может должным образом сориентироваться, а часто просто не имеет времени собрать нужную информацию. Поэтому в целях экономии времени студента в каждом разделе, наряду с разбором типовых задач, приведены необходимые теоретические сведения и формулы. Теоретические факты и формулы даны в рецептурном виде без подробного обсуждения и вывода, что вполне приемлемо при первичном знакомстве с предметом.

В задачнике представлены задачи, входящие в стандартный курс теории вероятностей и математической статистики, и задачи из ряда спецкурсов, читаемых на разных факультетах МЭИ (случайные процессы, теория решающих функций и т.д.). Значительная часть задач по теории вероятностей связана с так называемой «урновой схемой», что позволяет без излишних подробностей, выявить количественные соотношения и особенности тех или иных моделей случайного эксперимента.

Для большинства задач, кроме именных (задача Бюффона, задача Банаха и т.д.), едва ли возможно установление авторства, так как обсуждение стандартных ситуаций кочует из задачника в задачник. Формулировки многих задач заимствованы из разных известных учебных пособий и специальной литературы ([1]–[11]), есть и задачи сформулированные заново.

Нумерация примеров и задач ведется внутри каждой главы.

Авторы очень благодарны рецензентам Барашкову А.С. и Туганбаеву А.А. за внимательное прочтение рукописи, за многие полезные замечания и пожелания.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A_n^r — число размещений из n элементов по r;

C_n^r — число сочетаний из n элементов по r;

$n!$ — число перестановок из n элементов;

A, B, C, D, … — случайные события;

$\overline{A}$ — событие, противоположное событию A;

Ω — достоверное событие;

$P(A)$ — вероятность события A;

$P(B/A)$ — вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A произошло (условная вероятность события B);

X, Y, Z, … — случайные величины, а x, y, z, … — отдельно взятые значения этих величин;

$N(m;\sigma^2)$ — нормальный закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2;

$X \sim N(m;\sigma^2)$ — случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами m и σ^2;

$F(x)$ — функция распределения случайной величины X (по определению $F(x) = P(X < x)$);

$f(x)$ — функция плотности вероятности случайной величины X;

$M(X)$ — математическое ожидание случайной величины X;

$D(X)$ — дисперсия случайной величины X;

$\operatorname{cov}(X,Y)$ — коэффициент ковариации случайных величин X и Y;

W — выборочное пространство;

W_0 — критическая область в выборочном пространстве;

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\Phi(x)$ — функция Лапласа;

r_{xy} — коэффициент корреляции случайных величин X и Y;

H_0 – нулевая гипотеза;

H_1 – альтернативная гипотеза;

$X(t)$ — случайная функция или случайный процесс;

$K(t_1,t_2)$ — корреляционная (автокорреляционная) функция случайного процесса;

$k(\tau)$ — корреляционная (автокорреляционная) функция стационарного случайного процесса;

1. КОМБИНАТОРИКА

Пусть имеется несколько множеств элементов:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_t\},\ \{b_1, b_2, \ldots, b_s\}, \ldots, \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}, \ldots .$$

Вопрос: сколькими способами можно составить новое множество $\{a_1, b, c, \ldots\}$, взяв из каждого исходного множества по одному элементу? Ответ на этот вопрос дают следующие рассуждения.

Элемент a из первого множества можно выбрать t способами, элемент b из второго — s способами, элемент c можно выбрать k способами и т. д. Пару элементов ab можно составить $t \cdot s$ способами. Это следует из табл. 1.1, в которой перечислены все способы такого выбора.

Таблица 1.1

b \ a	a_1	a_2	$\cdots$	a_t
b_1	a_1b_1	a_2b_1	$\cdots$	a_tb_1
b_2	a_1b_2	a_2b_2	$\cdots$	a_tb_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
b_s	a_1b_s	a_2b_s	$\cdots$	a_tb_s

Способы выбора трех элементов abc перечислены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

c \ ab	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	$\cdots$	a_tb_s
c_1	$a_1b_1c_1$	$a_2b_1c_1$	$a_3b_1c_1$	$\cdots$	$a_tb_sc_1$
c_2	$a_1b_1c_2$	$a_2b_1c_2$	$a_3b_1c_2$	$\cdots$	$a_tb_sc_2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
c_k	$a_1b_1c_k$	$a_2b_1c_k$	$a_3b_1c_k$	$\cdots$	$a_tb_sc_k$

В этой таблице k строк и $t \cdot s$ столбцов. Поэтому искомое число способов выбора трех элементов abc равно $t \cdot s \cdot k$. Продолжая рассуждать подобным образом, получим следующее утверждение.

Основной комбинаторный принцип. *Если некоторый первый выбор можно сделать t способами, для каждого первого выбора некоторый второй можно сделать s способами, для каждой пары первых двух — третий выбор можно сделать k способами и т.д., то число способов для последовательности таких выборов равно* $t \cdot s \cdot k \cdot \ldots$.

Комбинаторные формулы в прикладных задачах теории вероятностей обычно связывают с выбором r элементов («*выборкой объема r*») из совокупности, состоящей из n элементов (элементов «*генеральной совокупности*»). Различают два способа выбора:

а) *повторный выбор*, при котором выбранный элемент возвращается в генеральную совокупность и может быть выбран вновь;

б) *бесповторный выбор*, при котором выбранный элемент в совокупность не возвращается и выборка не содержит повторяющихся элементов.

При повторном выборе каждый по порядку элемент может быть выбран n способами. Согласно комбинаторному принципу, такую выборку можно сделать n^r способами. Например, повторную выборку объема 2 из трех элементов $\{a,b,c\}$ можно сделать $3^2 = 9$ способами: *aa, ab, ba, bb, bc, cb, ac, ca, cc*.

В случае бесповторной выборки первый элемент можно выбрать n способами, для второго остается $n-1$ возможность выбора, третий элемент можно выбрать $n-2$ способами и т.д. Элемент выборки с номером r можно выбрать $n-r+1$ способом. Согласно комбинаторному принципу, общее число бесповторных выборок объема r равно

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-r+1). \qquad (1.1)$$

Число A_n^r называют *числом размещений из n элементов по r*.

Например, существует $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$ размещений из трех элементов $\{a,b,c\}$ по два: *ab; ba; ac; ca; bc; cb.* Отметим, что и в первом случае и во втором выборки отличаются *либо составом элементов, либо порядком выбора элементов.*

Выделим особо случай, когда один за другим выбраны все n элементов. В этом случае выборки имеют один и тот же состав (все n элементов) и отличаются только порядком выбора элементов. Поэтому число

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

называют *числом перестановок из n элементов.*

Например, пять человек могут встать в очередь $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$ способами. Три элемента $\{a,b,c\}$ можно переставить $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ способами: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba.*

Подсчитаем количество бесповторных выборок объема r, которые отличаются друг от друга только составом элементов. Пусть X — число таких выборок. Для каждого набора из r элементов можно выбрать порядок их расположения $r!$ способами. Тогда $X\cdot r!$ равно числу способов выбрать r различных элементов и выбрать порядок их расположения, т.е. равно числу размещений из n элементов по r:

$$X \cdot r! = A_n^r \Rightarrow X = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}. \tag{1.2}$$

Это число называют *числом сочетаний из n элементов по r* и обозначают через C_n^r. Если в формуле (1.2) умножить числитель и знаменатель на $(n-r)!$, то

$$C_n^r = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}\cdot\frac{(n-r)!}{(n-r)!} =$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Например, сочетаний из четырех элементов $\{a,b,c,d\}$ по два существует $C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$. Это *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*.

Так как из *n* элементов выбрать *n* элементов можно единственным образом, то $C_n^n = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$, откуда следует, что $0! = 1$.

Величины C_n^r называют *биномиальными коэффициентами*. Название связано с формулой *бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}. \tag{1.3}$$

Из формулы (1.3) следует, что

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Биномиальные коэффициенты образуют так называемый *треугольник Паскаля*, который имеет вид:

	$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$	$r = 7$	$r = 8$	$r = 9$
$n = 0$	1									
$n = 1$	1	1								
$n = 2$	1	2	1							
$n = 3$	1	3	3	1						
$n = 4$	1	4	6	4	1					
$n = 5$	1	5	10	10	5	1				
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1			
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1		
$n = 8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$n = 9$	1	9	36	85	126	126	85	36	9	1

. . . .

В *n*-й строке треугольника Паскаля располагаются коэффициенты, соответствующие представлению $(a+b)^n$ по формуле (1.3). Треугольником удобно пользоваться для нахождения значений C_n^r. Это значение находится на пересечении n-й строки и r-го наклонного ряда. Например, $C_8^3 = 56$.

Биномиальные коэффициенты обладают свойством симметрии:

$$C_n^r = C_n^{n-r}. \tag{1.4}$$

Это наглядно демонстрирует треугольник Паскаля. Равенство (1.4) подтверждает тот очевидный факт, что выбор r элементов из n равносилен выбору тех $n - r$ элементов из n, которые следует удалить, чтобы остались r элементов.

При повторном выборе из n элементов число выборок объема r, которые отличаются только составом равно C_{n+r-1}^r. Еще раз подчеркнем, что речь идет о выборках, которые отличаются хотя бы одним элементом, а порядок выбора этих элементов во внимание не принимается. Число таких выборок можно подсчитать следующим образом. Между элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ поставим разграничительные знаки, например, нули: $a_1 0 a_2 0 \ldots 0 a_n$. Таких знаков (нулей) понадобится $n-1$. На месте каждого элемента поставим столько единиц, сколько раз предполагается выбрать этот элемент. Например, комбинация 111101001110 … 011 означает, что элемент a_1 выбран четыре раза, элемент a_2 выбран один раз, элемент a_3 не выбран, ..., элемент a_n выбран два раза. Заметим, что в такой записи число единиц равно объему выборки r. Для перебора всех возможных комбинаций нужно из $r + n - 1$ мест выбрать $n - 1$ место и поставить на них нули, а на остальных местах разместить единицы. Это можно сделать

$$C_{n+r-1}^{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\ r!} = C_{n+r-1}^r. \tag{1.5}$$

способами.

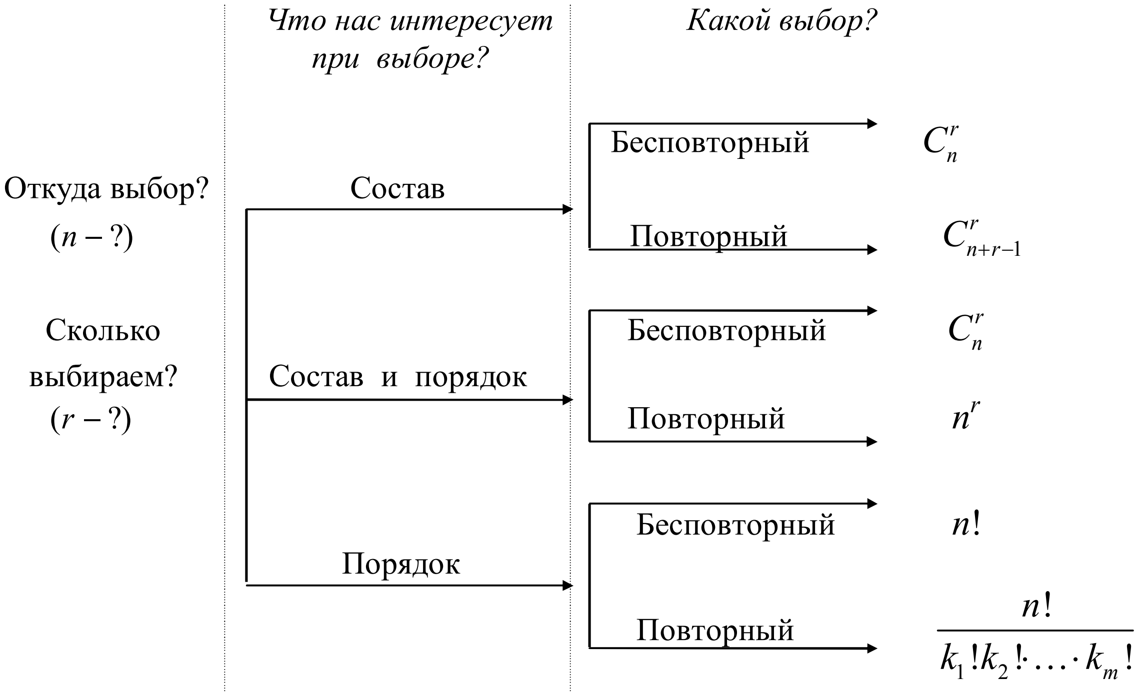
Совокупность из n элементов *разделить* на m групп по $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов соответственно $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$ можно $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdot \ldots \cdot k_m!}$ способами. Порядок элементов внутри каждой из этих m групп не имеет значения.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – множества, число элементов в каждом из которых равно соответственно $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$. Составить множество B из m_1 элементов множества A_1, m_2 элементов множества A_2, …, m_k элементов множества A_k, можно, согласно основному комбинаторному принципу,

$$C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_k}^{m_k} \tag{1.6}$$

способами.

Для безошибочного выбора комбинаторной формулы достаточно последовательно ответить на вопросы в следующей схеме:



Например, число словарей, необходимых для непосредственного перевода с одного на другой, для пяти языков определяется из следующих рассуждений. Для составления словаря выбираем из пяти языков ($n=5$) любые два ($r=2$). Выбор бесповторный, причем при выборе важен и состав выбора и порядок выбора. Поэтому искомое число словарей равно $A_5^2 = 5\cdot 4 = 20$.

Пример 1.1. Сколькими способами можно выбрать путь из начала координат $O(0,0)$ в точку $B(6,4)$, если каждый шаг равен единице, но его можно совершать только вправо или вверх? Сколько таких путей проходит через точку $A(2,3)$?

Решение. Весь путь занимает 10 шагов (четыре вверх и шесть вправо). Для планирования пути следует решить, какие именно по счету четыре шага следует сделать вверх, а остальные шесть — вправо. Выбор бесповторный и нас интересует только состав выбора. Поэтому в описанных условиях всего путей из точки O в точку B будет $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!\,6!} = 210.$

Рассуждая подобным образом легко видеть, что путей из точки O в точку A существует $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$, а путь из точки A в точку B можно выбрать $C_5^1 = 5$ способами. По комбинаторному принципу всего путей через точку A существует $10\cdot 5 = 50$.

Ответ. 210; 50.

Задача 1.1. Сколькими способами можно выбрать путь из начала координат $O(0,0)$ в точку $B(n_1,n_2)$, если каждый шаг равен 1, но его можно совершать только вправо или вверх? Сколько таких путей проходит через точку $A(k_1,k_2)$? (См. пример 1.1 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 1.1.

№	n_1	n_2	k_1	k_2	№	n_1	n_2	k_1	k_2	№	n_1	n_2	k_1	k_2
1	4	8	3	2	**11**	6	9	2	2	**21**	6	8	4	5
2	8	4	3	2	**12**	9	6	4	2	**22**	8	6	5	2
3	4	8	2	4	**13**	9	5	4	3	**23**	5	8	2	3
4	5	8	3	2	**14**	9	6	3	4	**24**	5	8	3	2
5	8	3	2	3	**15**	6	10	2	4	**25**	8	6	5	3
6	8	6	3	4	**16**	6	9	3	2	**26**	8	6	2	4
7	8	5	4	3	**17**	10	6	4	2	**27**	6	7	2	3
8	4	8	2	3	**18**	10	4	4	3	**28**	7	6	2	3
9	6	8	2	3	**19**	5	6	2	3	**29**	8	7	3	4
10	6	7	3	2	**20**	6	5	3	2	**30**	8	7	3	5

Пример 1.2. В городе с идеальной прямоугольной планировкой (сеть улиц в этом городе изображена на рис. 1.1) из пункта A выходят 2^N человек. Половина из них идет по направлению a, половина — по направлению b. Дойдя до первого перекрестка, каждая группа разделяется так, что половина ее идет по направлению a, половина — по направлению b. Такое же разделение происходит на каждом перекрестке. Требуется перечислить перекрестки, на которых окажутся люди после прохождения N улиц (отрезков на рис. 1.1), и сколько людей окажется на каждом из этих перекрестков.

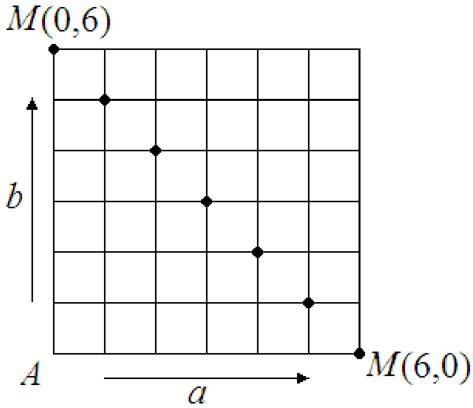


Рис. 1.1

Решение. Каждый человек пройдет N улиц и окажется на одном из перекрестков $M(0,N)$, $M(1,N-1)$, $M(2,N-2)$, … , $M(N,0)$. Координаты перекрестков указаны в предположении, что точка A служит началом координат.

На каждом перекрестке для каждого человека производится выбор из двух возможностей: идти в направлении a или в направлении b. Поэтому всего возможных путей будет 2^N . Из этого следует, что каждый путь пройдет только один человек.

В пункте $M(k, N-k)$, окажется столько человек, сколько различных путей ведет в этот пункт из точки A . Чтобы попасть в пункт $M(k, N-k)$, необходимо из N улиц выбрать бесповторным способом k улиц в направлении a. Это можно сделать $C_N^k = \dfrac{N!}{k!(N-k)!}$ способами.

Ответ. $M(0,N),\ M(1,N-1),\ M(2,N-2),\dots,M(N,0);\ C_N^k.$

Задача 1.2. В начале координат на прямой находится 2^N частиц. Половина этих частиц сдвигается на единицу вправо, другая половина — на единицу влево. Через единицу времени каждая группа делится пополам, и половина сдвигается не единицу вправо, а другая половина — влево. Такое разделение происходит каждую единицу времени. Перечислите точки на оси, в которых будет хотя бы одна частица через N единиц времени. Найдите число частиц в точке с координатой $N-2$ в вариантах с первого по десятый, в точке с координатой $N-4$ в вариантах с одиннадцатого по двадцатый, в точке с координатой $N-6$ в вариантах с двадцать первого по тридцатый. (См. пример 1.2, число N равно последней цифре варианта плюс 5.)

Пример 1.3. Сколькими способами можно n одинаковых предметов распределить между k лицами так, чтобы каждый получил не менее одного предмета?

Решение. Поставим эти предметы в ряд. Между ними будет $n-1$ промежуток. В любые $k-1$ из этих промежутков поставим разделяющие перегородки. Тогда все предметы разделятся на k непустых частей. Первую часть передадим первому лицу, вторую — второму и т.д. Выбрать же $k-1$ промежуток из $n-1$ промежутка можно C_{n-1}^{k-1} способами. Заметим, что вообще n предметов распределить между k лицами можно k^n способами.

Ответ. C_{n-1}^{k-1}.

Задача 1.3. Сколькими способами можно поставить n книг на k полок (на каждую полку могут поместиться все n книг и $n > k$)? Сколькими способами можно поставить книги так, чтобы ни одна полка не осталась пустой? (См. пример 1.3 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 1.3.

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	4	3	**7**	8	3	**13**	7	5	**19**	11	4	**25**	14	3
2	5	3	**8**	8	4	**14**	10	3	**20**	11	5	**26**	14	4

3	6	3	**9**	8	5	**15**	10	4	**21**	12	3	**27**	15	3
4	7	3	**10**	9	3	**16**	10	5	**22**	12	4	**28**	15	4
5	6	4	**11**	9	4	**17**	8	6	**23**	13	3	**29**	16	3
6	7	4	**12**	9	5	**18**	11	3	**24**	13	4	**30**	16	4

Пример 1.4. Сколькими способами можно распределить 6 яблок, 8 груш и 10 слив между тремя детьми? Сколькими способами это можно сделать так, чтобы каждый ребенок получил по меньшей мере одно яблоко, одну сливу и одну грушу?

Решение. Яблоки в соответствии с формулой (1.5) можно распределить $C_{6+3-1}^{3-1} = C_8^2 = 28$ способами, груши — $C_{10}^2 = 45$, а сливы $C_{12}^2 = 66$ способами. По комбинаторному принципу всего способов $28 \cdot 45 \cdot 66 = 83160$. Если необходимо, чтобы каждый ребенок получил по меньшей мере одно яблоко, одну грушу и одну сливу, то в соответствии с формулой предыдущего примера имеем $C_5^2 C_7^2 C_9^2 = 10 \cdot 21 \cdot 36 = 7560$ способов.

Ответ. 83160; 7560.

Задача 1.4. Имеется n_1 красных, n_2 синих, n_3 белых и n_4 черных шаров.

а) Сколькими способами эти шары можно разложить в k ящиков? Сколькими способами это можно сделать, если в каждом ящике должны присутствовать шары всех цветов?

б) Сколькими способами можно выбрать по одному шару каждого цвета?

в) Сколькими способами можно выбрать по k шаров каждого цвета?

(См. пример 1.4 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 1.4.

№	n_1	n_2	n_3	n_4	k	№	n_1	n_2	n_3	n_4	k	№	n_1	n_2	n_3	n_4	k
1	4	5	4	6	4	**11**	4	5	4	5	4	**21**	3	6	5	5	3
2	4	4	5	3	3	**12**	4	3	4	3	3	**22**	6	5	6	4	4
3	3	4	4	5	3	**13**	6	5	4	5	4	**23**	6	3	4	3	3
4	4	5	4	6	4	**14**	5	6	5	4	3	**24**	7	5	4	4	4
5	5	3	4	3	3	**15**	5	4	4	3	3	**25**	5	6	3	4	3
6	5	4	4	6	4	**16**	6	4	6	5	4	**26**	7	6	4	5	4
7	4	5	3	4	3	**17**	6	5	4	5	4	**27**	6	7	3	4	3
8	6	3	4	3	3	**18**	6	3	4	4	3	**28**	7	6	6	4	4
9	6	4	4	3	3	**19**	6	4	6	4	4	**29**	3	6	7	5	3
10	6	3	4	4	3	**20**	4	6	5	3	3	**30**	3	7	6	4	3

Пример 1.5. Сколько цифр в первой тысяче не содержат в своей записи цифры 5?

Решение. Для записи любой из цифр 000, 001, 002, …, 999 необходимо трижды выбрать повторным способом одну из десяти цифр, поэтому и получается всего 10^3 чисел. Если цифру 5 исключить, то выбор можно производить только из девяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Поэтому всего получится 9^3=729 чисел в первой тысяче, в записи которых нет цифры 5.

Ответ. 729.

Задача 1.5. Сколько чисел в первом миллионе содержат хотя бы одну цифру Вашего варианта? (См. пример 1.5.)

В комбинаторных расчетах часто используется так называемая «формула включений и исключений» (вывод формулы можно найти в [4]). Пусть имеется N предметов, каждый из которых обладает некоторым набором из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. В том числе имеются предметы, у которых вообще нет перечисленных свойств, или только одно из этих свойств, или два и т. д. Обозначим через $N(\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha_k)$ число предметов, обладающих свойствами $\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha_k$ (остальные свойства этих предметов нас не интересуют). Отсутствие свойства α_k будем обозначать через $\bar{\alpha}_k$. Например, $N(\alpha_1, \bar{\alpha}_2, \alpha_3)$ означает число предметов, у которых есть свойства α_1 и α_3, но нет свойства α_2. Тогда

$$\begin{gathered} N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \ldots - N(\alpha_n) + \\ + N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \ldots + N(\alpha_1, \alpha_n) + \ldots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - \\ - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \ldots - N(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) + \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \end{gathered} \tag{1.7}$$

Пример 1.6. Сколько шестизначных чисел содержат в записи ровно три различных цифры?

Решение. Заметим, что всего шестизначных чисел имеется $9{\cdot}10^5$, так как первая цифра может быть любой (исключая нуль), а остальные пять могут быть выбраны 10^5 способами.

Выбрать три ненулевых цифры можно $C_9^3 = 84$ способами. Из выбранных трех цифр можно составить 3^6 шестизначных чисел, из двух — 2^6, а из одной — 1^6=1 шестизначное число. По формуле (1.7) получаем, что существует $3^6 - C_3^2 \cdot 2^6 + C_3^1 \cdot 1^6 = 540$ шестизначных чисел, в записи которых есть только три заданные цифры. Поэтому общее число шестизначных чисел, в записи которых имеются три отличные от нуля цифры, равно $84 \cdot 540 = 45360$.

Учтем теперь возможность использования нуля. К нулю нужно добавить две цифры, что можно сделать $C_9^2 = 36$ способами. Если, например, были выбраны цифры 0, 2, 5, то первой цифрой должна быть 2 или 5. К этой первой цифре в соответствии с формулой (1.7) можно добавить $3^5 - C_2^1 \cdot 2^5 + 1 = 180$ комбинаций остальных пяти цифр. Тогда всего шестизначных чисел, состоящих из 0, 2, 5 будет $2 \cdot 180 = 360$. Всего же шестизначных чисел, записанных тремя цифрами, среди которых встречается нуль, ровно $36 \cdot 360 = 12960$. Всего чисел, удовлетворяющих условиям задачи, имеется $45360 + 12960 = 58320$.

Ответ. 58320.

Задача 1.6. Сколько *n*-значных чисел содержат в записи ровно *k* различных цифр? (См пример 1.6 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 1.6.

№	*n*	*k*	№	*n*	*k*	№	*n*	*k*	№	*n*	*k*	№	*n*	*k*	№	*n*	*k*
1	5	2	**6**	8	4	**11**	9	6	**16**	11	4	**21**	10	3	**26**	9	7
2	6	4	**7**	7	3	**12**	7	5	**17**	10	2	**22**	9	5	**27**	10	5
3	5	3	**8**	8	2	**13**	8	5	**18**	9	3	**23**	10	2	**28**	11	5
4	6	2	**9**	7	4	**14**	8	6	**19**	11	3	**24**	9	6	**29**	10	6
5	7	2	**10**	8	3	**15**	9	2	**20**	9	4	**25**	10	4	**30**	11	6

Пример 1.7. В саду есть цветы десяти наименований (розы, флоксы, ромашки и т. д.).

а) Сколькими способами можно составить букет из пяти цветков (не принимая во внимание совместимость растений и художественные соображения)?

б) Сколькими способами можно составить букет из пяти *различных* цветков?

в) Сколькими способами можно составить букет из пяти цветков так, чтобы в букете непременно было хотя бы по одному цветку двух определенных наименований

Решение. а) Если запрета на повторение цветков нет, то мы имеем дело с повторным выбором и нас интересует только состав. Поэтому по формуле (1.5) получаем $C_{10+5-1}^5 = C_{14}^5 = \frac{14!}{5!9!} = 2002$ способа.

б) Если цветы должны быть разными, то способ выбора бесповторный и букет можно составить $C_{10}^5 = 504$ способами.

в) Отберем по одному цветку каждого из двух названных наименований. Три остальных цветка можно выбрать из 10 возможных $C_{10+3-1}^3 = 220$ способами.

Ответ. а) 2002; б) 504; в) 220.

Задача 1.7. Продаются воздушные шарики n различных цветов (красные, синие, зеленые и т.д.).

а) Сколькими способами можно приобрести k шариков?

б) Сколькими способами можно приобрести k шариков различных цветов?

в) Сколькими способами можно приобрести k шариков так чтобы среди купленных было не менее двух красных и одного синего шарика?

(См. пример 1.7 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 1.7.

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	6	4	**6**	8	4	**11**	9	6	**16**	11	4	**21**	12	6	**26**	14	4
2	7	5	**7**	8	5	**12**	10	4	**17**	11	5	**22**	12	7	**27**	14	5
3	7	4	**8**	8	6	**13**	10	5	**18**	11	6	**23**	13	4	**28**	14	6
4	6	5	**9**	9	4	**14**	10	6	**19**	12	4	**24**	13	5	**29**	15	4
5	8	4	**10**	9	5	**15**	10	7	**20**	12	5	**25**	13	6	**30**	15	5

Пример 1.8. Имеется n_1 яблок, n_2 груш и n_3 персиков. Сколькими способами можно их разложить по двум корзинам? Сколькими способами можно это сделать, если в каждой корзине должно быть хотя бы по одному фрукту всех названных видов (полагаем, что фруктов каждого наименования два или больше)?

Решение. Ясно, что яблоки можно разложить n_1+1 способом (в первую корзину можно не положить яблок совсем, положить одно яблоко, два яблока, …, все яблоки). Те же рассуждения в отношении груш и персиков дают соответственно n_2+1 и n_3+1 комбинаций. По комбинаторному принципу всего будет $(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)$ способов.

При ответе на второй вопрос учтем, что следует по одному яблоку сразу положить в каждую из корзин, а остальные n_1-2 яблока раскладывать произвольным образом (в первую корзину либо не добавляем яблок, либо добавляем одно, либо — два, …, либо — все n_1-2 яблока). Все это можно сделать $n_1-2+1=n_1-1$ способами. Те же рассуждения насчет других фруктов и комбинаторный принцип дают следующий результат: $(n_1-1)(n_2-1)(n_3-1)$.

Ответ. $(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)$; $(n_1-1)(n_2-1)(n_3-1)$.

Задача 1.8. Имеется n_1 предметов первого вида, n_2 предметов второго вида, n_3 третьего и n_4 четвертого вида. Сколькими способами можно распределить эти предметы между двумя людьми (не исключая случая, когда одному из них нечего не достается)? Сколькими способами можно распределить эти предметы так, чтобы каждому досталось не менее двух предметов каждого вида (полагаем, что предметов каждого вида не менее четырех)? (См. пример 1.8 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 1.8.

№	n_1	n_2	n_3	n_4	№	n_1	n_2	n_3	n_4	№	n_1	n_2	n_3	n_4
1	5	6	7	8	**11**	7	9	6	8	**21**	7	9	12	5
2	7	9	8	6	**12**	6	10	12	5	**22**	6	5	11	12
3	8	7	9	6	**13**	5	7	8	6	**23**	8	7	10	12
4	6	10	7	5	**14**	6	5	9	7	**24**	11	6	9	8
5	9	6	8	7	**15**	9	10	7	8	**25**	6	12	7	5
6	10	9	8	5	**16**	8	9	7	6	**26**	10	9	8	11
7	6	7	8	5	**17**	9	8	7	10	**27**	5	7	10	9
8	7	9	6	10	**18**	10	5	8	6	**28**	9	10	7	8
9	11	8	9	10	**19**	8	6	10	12	**29**	7	8	6	9
10	5	8	6	7	**20**	6	9	5	12	**30**	6	10	9	5

Пример 1.9. Требуется найти число натуральных делителей натурального числа N.

Решение. Разложим N на простые множители:

$$N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}, \tag{1.8}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа. (Например, $84672 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^2$.)

Заметим, что при разделении числа N на любые два множителя N_1 и N_2 простые сомножители распределятся между N_1 и N_2. Если сомножитель p_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, в число N_1 входит m_j, то разложение (1.8) примет вид:

$$N = (p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k})(p_1^{n_1 - m_1} p_2^{n_2 - m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k - m_k}),$$

Так что разложение N на два сомножителя сводится к разделению каждого из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ на две части, а это можно сделать $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_k + 1)$ способами.

Ответ. $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_k + 1)$.

Задача 1.9. Найдите число натуральных делителей натурального числа N. (См. пример 1.9 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 1.9.

№	N	№	N	№	N	№	N	№	N
1	1080	**7**	3024	**13**	5292	**19**	3600	**25**	2376
2	1440	**8**	1008	**14**	2475	**20**	1260	**26**	4752
3	900	**9**	1764	**15**	7425	**21**	3465	**27**	6048
4	720	**10**	3528	**16**	4312	**22**	3080	**28**	4320
5	2880	**11**	756	**17**	2400	**23**	5544	**29**	8400
6	2700	**12**	2352	**18**	1485	**24**	6160	**30**	6300

2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Классическое определение вероятности

Классическое определение вероятности. Если исходы опыта *равновозможны,* то вероятностью события A называется отношение числа исходов, *благоприятствующих* данному событию, к числу всех возможных исходов опыта, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число исходов опыта, благоприятствующих событию, а n — число всех возможных исходов.

Свойства вероятностей.

1. Вероятность любого события — есть число, заключенное между нулем и единицей, т.е. $0 \le P(A) \le 1$. Вероятность невозможного события равна 0, а вероятность достоверного события равна 1.

2. Если события A и B *несовместны*, то $P(A+B) = P(A)+P(B)$.

3. Вероятность любого события A в сумме с вероятностью противоположного события $\overline{A}$ равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Если вероятность интересующего нас события A по каким-либо причинам вычислить трудно, то можно попытаться вычислить вероятность противоположного события, а затем с помощью свойства 3 вычислить искомую вероятность события A.

Пример 2.1. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

A — на обеих костях выпало одинаковое число очков;

B — сумма числа очков не меньше 11;

C — число очков на первой кости больше, чем на второй;

D — сумма очков четная;

E — сумма числа очков больше трех.

Решение. Число очков, благоприятствующих каждому из названных событий, легко подсчитать, если все возможные исходы опыта перечислить в виде табл. 2.1.1. В каждой клетке таблицы первая цифра указывает число очков на первой кости, вторая — на второй кости.

Таблица 2.1.1

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56

61	62	63	64	65	66

Если кости симметричны и однородны, то все перечисленные исходы опыта равновозможны. Тогда $P(A) = 6/36 = 1/6$ (благоприятствуют исходы: 11, 22, 33, 44, 55, 66), $P(B) = 3/36 = 1/12$ (благоприятствуют три исхода: 56, 65, 66) Непосредственный подсчет числа благоприятствующих исходов дает $P(C) = 15/36 = 5/12$, $P(D) = 18/36 = 1/2$, $P(E) = 33/36 =$ $= 11/12$.

Ответ. $P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/12$, $P(C) = 5/12$, $P(D) = 1/2$, $P(E) = 11/12$.

Задача 2.1.1. Брошены две игральные кости. Для вариантов 1–10 найти вероятности следующих событий:
A — сумма числа очков не превосходит *N*;
B — произведение числа очков превосходит *N*;
C — произведение числа очков делится на *N*.

(См. пример 2.1, *N* равно последней цифре номера варианта плюс 2).

Для вариантов 11–20 найти вероятности следующих событий:
A — сумма числа очков не меньше *N*;
B — произведение числа очков меньше *N*;
C — сумма числа очков делится на *N*.

(См. пример 2.1, *N* равно последней цифре номера варианта плюс 3).

Для вариантов 21–30 найти вероятности следующих событий:
A — сумма числа очков равна *N*;
B — произведение числа очков больше *N*;
C — сумма числа очков делится на *N*.

(См. пример 2.1, *N* последняя цифра номера варианта плюс 4).

Задача 2.1.2. Из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ наугад взяли одно число, затем второе.

Какова вероятность того, что первое число меньше второго?

Какова вероятность того, что оба числа больше $n/2$?

Найдите вероятность того, что будут выбраны равные числа.

Какова вероятность того, что сумма этих чисел окажется меньше n?

Какова вероятность того, что первое число окажется на 2 больше второго?

Какова вероятность того, что первое число окажется меньше 3, а второе больше $(n-3)$?

Решите задачу в случае бесповторного и в случае повторного выбора.

(См. пример 2.1, n — номер варианта плюс 3).

Пример 2.2. а) В урне содержится N шаров, из них R красного цвета. Наугад выбрано n шаров. Какова вероятность того, что r из них окажутся красного цвета? Какова вероятность того, что среди выбранных шаров хотя бы один будет красным?

б) Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых три бракованных, наугад извлекаются три изделия для контроля. Найти вероятности следующих событий:

A — среди выбранных изделий ровно два бракованных;

B — выбраны только бракованные изделия;

C — среди выбранных изделий содержится хотя бы одно бракованное.

Решение. а) Если шары тщательно перемешаны и выбираются наугад, то равновозможен выбор любых n шаров. Поэтому применимо классическое определение вероятности. Поскольку выбор бесповторный и нас интересует только состав, то выбрать любые n шаров можно C_N^n способами. Сформировать выборку требуемого состава можно, если из R красных шаров выбрать любые r шаров (это можно сделать C_R^r способами) и к ним добавить $(n-r)$ любых не красных шаров (это можно сделать C_{N-R}^{n-r} способами).

По комбинаторному принципу число благоприятствующих исходов равно $C_R^r C_{N-R}^{n-r}$. Искомая вероятность равна

$$P_{n,r} = \frac{C_R^r C_{N-R}^{n-r}}{C_N^n}. \qquad (2.1.1)$$

Пусть A_i означает наличие в выборке i красных шаров. Выбор хотя бы одного красного шара равносилен появлению хотя бы одного из несовместных событий A_i или A_2 или … или A_n. Поэтому вероятность выбора хотя бы одного красного шара равна

$$P_{n,1} + P_{n,2} + \ldots + P_{n,n} \quad 1 = P_{n,0} \quad 1 = \frac{C_{N-R}^n}{C_N^n}.$$

б) Выбрать любых три изделия из 10 можно C_{10}^3 способами. Поэтому имеем $C_{10}^3 = 120$ равновозможных исходов.

Событию A благоприятствуют те исходы, при которых из семи годных изделий выбирается одно (это можно сделать $C_7^1 = 7$ способами) и из трех бракованных — два (это можно сделать $C_3^2 = 3$ способами). По комбинаторному принципу число благоприятствующих событию A исходов равно $C_7^1 C_3^2 = 7 \cdot 3 = 21$. Поэтому $P(A) = 21/120 \quad 7/40 \approx 1/6$, т.е. примерно один шанс из шести.

Событию B благоприятствует всего один исход и его вероятность $P(B) = 1/120$.

Вероятность события C проще вычислить, определив сначала вероятность события $\overline{C}$, которое состоит в том, что выбраны все годные изделия. Выбрать три годных изделия из семи можно $C_7^3 = 35$ способами. Поэтому $P(\overline{C}) = 35/120$ и

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) \quad 1 - 35/120 \quad 17/24 \approx 2/3.$$

Ответ. а) $\dfrac{C_R^r C_{N-R}^{n-r}}{C_N^n}$, $1 - \dfrac{C_{N-R}^n}{C_N^n}$;

б) $P(A) = 7/40 \approx 1/16$, $P(B) = 1/120$, $P(C) = 17/24 \approx 2/3$.

Задача 2.2.1. Из N изделий M имеют скрытый дефект. Наугад выбрано n изделий. Найдите вероятности следующих событий:

A — среди выбранных m изделий имеют скрытый дефект;

B — среди выбранных есть хотя бы одно изделие со скрытым дефектом;

C — среди выбранных не более двух изделий со скрытым дефектом.

(См. пример 2.2 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.2.1.

№	N	M	n	m	№	N	M	n	m	№	N	M	n	m
1	10	3	4	2	**11**	12	4	3	2	**21**	9	5	4	2
2	10	3	5	2	**12**	12	4	4	2	**22**	9	5	4	3
3	10	4	3	2	**13**	12	4	4	3	**23**	11	3	3	2
4	10	4	4	2	**14**	12	5	3	2	**24**	11	3	4	2
5	10	4	4	3	**15**	12	5	4	2	**25**	11	3	4	3
6	12	3	3	2	**16**	9	3	3	2	**26**	11	4	3	2
7	12	3	4	2	**17**	9	4	3	2	**27**	11	4	4	2
8	12	3	4	3	**18**	9	4	4	2	**28**	11	4	4	3
9	12	3	5	2	**19**	9	4	4	3	**29**	14	3	3	2
10	12	4	5	3	**20**	9	5	3	2	**30**	14	3	4	2

Задача 2.2.2. В урне содержится $2n$ шаров, из которых два черных, а остальные белые. Наугад выбирается n шаров. Найдите вероятности следующих событий:

A — в числе выбранных оказались оба черных шара;

B — ни один из черных шаров не выбран;

C — среди выбранных шаров только один черный шар.

Найдите значения этих вероятностей при $n \to \infty$. (См. пример 2.2, $n = k + 2$, где k — номер варианта.)

Задача 2.2.3. В урне содержится n_1 белых и n_2 черных шаров. Из урны наугад выбирают два шара. Что вероятнее — вынуть два белых шара или вынуть один белый и один черный шар? (См. пример 2.2 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.2.3.

№	n_1	n_2	№	n_1	n_2	№	n_1	n_2	№	n_1	n_2	№	n_1	n_2	№	n_1	n_2
1	4	2	**6**	6	3	**11**	7	3	**16**	8	3	**21**	9	4	**26**	10	3
2	4	3	**7**	6	4	**12**	7	4	**17**	8	5	**22**	9	5	**27**	10	4
3	5	2	**8**	6	5	**13**	7	5	**18**	8	6	**23**	9	6	**28**	10	5
4	5	3	**9**	6	6	**14**	7	6	**19**	9	2	**24**	9	7	**29**	10	6
5	6	2	**10**	7	2	**15**	8	2	**20**	9	3	**25**	10	2	**30**	10	7

Задача 2.2.4. В урне m_1 белых, m_2 синих и m_3 красных шаров. Наугад выбирают 6 шаров. Найдите вероятности следующих событий: A — среди выбранных только белые шары; B — среди выбранных нет красных шаров; C — среди выбранных поровну шаров всех цветов; D — среди выбранных только один красный шар. (См. пример 2.2 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.2.4.

№	m_1	m_2	m_3	№	m_1	m_2	m_3	№	m_1	m_2	m_3	№	m_1	m_2	m_3	№	m_1	m_2	m_3
1	8	3	4	**7**	7	3	5	**13**	9	4	3	**19**	8	5	3	**25**	9	5	2
2	8	4	3	**8**	7	5	3	**14**	9	3	3	**20**	8	2	6	**26**	9	5	4
3	8	2	5	**9**	7	4	4	**15**	9	3	5	**21**	8	6	2	**27**	9	4	5
4	6	5	2	**10**	8	2	3	**16**	9	5	3	**22**	9	3	4	**28**	9	3	6
5	7	2	6	**11**	9	4	2	**17**	8	4	4	**23**	9	2	5	**29**	9	6	3
6	7	6	2	**12**	9	3	4	**18**	8	3	5	**24**	9	4	3	**30**	9	2	7

Задача 2.2.5. Из N билетов с номерами от 1 до N один за другим (без возвращения) берут два билета. Найдите вероятности следующих событий:

A — оба номера билетов четные;

B — оба номера нечетные;

C — номер первого билета четный, а второго нечетный;

D — номер одного четный, а другого нечетный:

E — номер второго билета четный.

(См. пример 2.2, N — номер варианта плюс 5.)

Задача 2.2.6. В урне содержатся шары с номерами $1, 2, 3, \ldots, n$. Наугад без возвращения выбирают k шаров. Какова вероятность того, что будут выбраны только шары с номерами больше k? Какова вероятность того, что для каждого из первых k шаров номер шара совпадет с его номером по порядку извлечения? (См. пример 2.2 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.2.6.

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	7	3	**6**	10	3	**11**	11	4	**16**	13	3	**21**	14	4	**26**	15	5
2	8	3	**7**	10	4	**12**	12	3	**17**	13	4	**22**	14	5	**27**	15	6
3	8	4	**8**	10	5	**13**	12	4	**18**	13	5	**23**	14	6	**28**	16	3
4	9	3	**9**	11	3	**14**	12	5	**19**	13	6	**24**	15	3	**29**	16	4
5	9	4	**10**	11	5	**15**	12	6	**20**	14	3	**25**	15	4	**30**	16	5

Пример 2.3. При раздаче тщательно перемешанных карт (в колоде 36 карт) игрок получает шесть карт. Какова вероятность того, что игрок получит два туза, два короля и две дамы любой масти?

Решение. Шесть карт данному игроку можно сдать C_{36}^{6} способами, так как выбор бесповторный и нас интересует только состав выбора. Выбрать два туза, два короля и две дамы можно $C_4^2 C_4^2 C_4^2 = 6^3 =$ 216 способами. Поэтому искомая вероятность равна $P = 216 / C_{36}^{6} =$ $9/2618 \approx 0{,}003$.

Ответ. $9/2618 \approx 0{,}003$.

Задача 2.3. В урне смешаны N_1 шаров белого цвета, N_2 шаров черного цвета, N_3 — синего и N_4 — красного. Наугад выбрано n шаров. Какова вероятность того, что среди выбранных ровно n_1 белых, n_2 черных, n_3 синих и n_4 красных шаров ($n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$)? (См. пример 2.3 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.3.

№	N_1	N_2	N_3	N_4	n_1	n_2	n_3	n_4	№	N_1	N_2	N_3	N_4	n_1	n_2	n_3	n_4
1	2	4	1	3	1	2	1	2	**16**	3	4	2	3	2	2	1	2
2	2	4	1	3	1	3	1	2	**17**	4	3	2	3	2	1	1	2
3	2	2	4	3	1	1	2	2	**18**	2	4	2	3	2	3	1	2
4	2	2	4	3	1	2	1	2	**19**	2	4	2	3	1	1	2	2
5	2	2	4	3	1	2	2	2	**20**	2	4	2	3	1	2	1	2
6	2	4	2	3	1	2	2	2	**21**	4	2	3	2	2	1	1	1
7	2	4	2	3	2	2	1	2	**22**	4	2	3	2	3	1	1	2
8	2	4	2	3	2	1	2	1	**23**	4	3	3	2	2	1	2	1
9	2	4	2	3	1	3	1	2	**24**	4	2	3	3	2	1	1	2
10	2	4	2	3	1	2	1	2	**25**	4	3	3	2	3	2	1	2
11	3	1	4	2	2	1	2	1	**26**	4	4	3	2	2	2	1	1
12	3	1	4	2	2	1	3	1	**27**	2	3	3	5	1	2	1	2
13	3	1	4	2	2	1	2	2	**28**	3	2	3	5	1	2	2	2
14	2	4	2	3	1	2	2	2	**29**	3	5	2	4	2	1	1	1
15	2	4	2	3	1	3	1	2	**30**	3	3	2	5	2	1	1	3

Пример 2.4. В течение недели *независимо* друг от друга происходят четыре события. Найдите вероятности следующих событий:

A — все четыре события произойдут в разные дни недели;

B — все четыре события произойдут в один день;

C — все эти события произойдут в последние три дня недели;

D — хотя бы в один день недели произойдут два или более из этих событий.

Решение. Дни недели можно представить в виде ящиков, а события в виде шариков. Тогда распределение событий по дням недели можно считать раскладкой шариков по ящикам.

Так как каждый из четырех шариков можно поместить в любой из семи ящиков, то существует $7^4 = 2401$ равновозможный способ разложить четыре шарика по семи ящикам. Из них событию A благоприятствуют $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ способов, так как для каждого последующего шарика остается на один пустой ящик меньше. Поэтому $P(A) = \dfrac{840}{2401} \approx 0,35.$

Событию B благоприятствует всего семь способов. Поэтому $P(B) = \dfrac{7}{7^4} = \dfrac{1}{343} \approx 0,003.$

Все четыре события могут произойти в последние три дня недели 3^4 способами. Поэтому $P(C) = \dfrac{3^4}{7^4} \approx 0,038.$

Событие D противоположно событию A. Поэтому $P(D) = 1 - P(A) =$ $= 1 - \dfrac{840}{2401} \approx 1 - 0,35 = 0,65.$

Ответ. $P(A) = \dfrac{840}{2401} \approx 0,35$, $P(B) = \dfrac{1}{343} \approx 0,003$, $P(C) = \dfrac{81}{2401} \approx 0,038$, $P(D) = 0,65.$

Задача 2.4. В лифт k-этажного дома сели m пассажиров. Каждый пассажир независимо от других с равной вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

A — все пассажиры вышли на разных этажах;

B — все вышли выше четвертого этажа;

C — никто не вышел на пятом этаже;

D — хотя бы два вышли на одном этаже.

(См. пример 2.4 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.4.

№	k	m	№	k	m	№	k	m	№	k	m	№	k	m	№	k	m
1	8	3	**6**	9	4	**11**	10	5	**16**	7	5	**21**	12	5	**26**	16	4
2	8	4	**7**	9	5	**12**	10	6	**17**	6	5	**22**	14	3	**27**	16	5
3	8	5	**8**	9	6	**13**	6	4	**18**	12	3	**23**	14	4	**28**	16	6
4	8	6	**9**	10	3	**14**	7	4	**19**	12	4	**24**	14	5	**29**	11	4
5	9	3	**10**	10	4	**15**	7	3	**20**	12	5	**25**	14	6	**30**	11	5

Пример 2.5. 10 книг, из которых четыре имеют красный переплет, наугад ставят на полку. В предположении, что все расстановки книг на полке равновозможны, найти вероятность того, что книги с красными переплетами окажутся стоящими подряд.

Решение. 10 книг можно на полке расставить $n = 10!$ способами. Для подсчета благоприятствующих комбинаций представим сначала, что красные книги связаны в одну пачку и переставляются как единая книга. Тогда переставить эту пачку и остальные шесть книг можно 7! способами. После того, как эта перестановка совершилась и красные книги оказались стоящими подряд, развяжем пачку и на заданных четырех местах переставим красные книги между собой. Это можно сделать 4! способами. По комбинаторному принципу всего благоприятствующих способов $m = 4!\cdot 7!$. Поэтому искомая вероятность равна $(4!\cdot 7!\,)/10! = 1/30$.

Ответ. 1/30.

Задача 2.5. Из n книг k_1 имеют красные переплеты, а k_2 — синие. Книги наугад ставят на полку. Полагая равновозможными все расстановки книг, найдите вероятность того, что все красные книги будут стоять подряд и все синие тоже. (См. пример 2.5 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.5.

№	n	k_1	k_2	№	n	k_1	k_2	№	n	k_1	k_2	№	n	k_1	k_2	№	n	k_1	k_2
1	8	3	2	**7**	10	4	3	**13**	8	4	2	**19**	11	4	2	**25**	11	4	5
2	8	2	2	**8**	10	3	2	**14**	10	5	3	**20**	11	2	2	**26**	11	5	3
3	9	3	2	**9**	10	4	2	**15**	9	2	5	**21**	11	3	2	**27**	12	3	3
4	9	3	3	**10**	10	2	5	**16**	10	6	2	**22**	11	3	3	**28**	12	3	4
5	9	4	2	**11**	7	2	2	**17**	10	4	4	**23**	11	4	3	**29**	12	5	2
6	10	3	3	**12**	6	2	2	**18**	6	3	2	**24**	11	5	2	**30**	12	3	5

Замечание. Пусть n одинаковых предметов необходимо распределить между k людьми. Это можно сделать $C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}$ способами. К такому выводу приводят следующие соображения. Добавим к этим n предметам $k-1$ черный шар, поставим предметы и шары в один ряд, и будем их переставлять между собой. Число *различимых* перестановок будет равно

C_{n+k-1}^{k-1}, так как именно таким числом способов можно из $n+k-1$ места выбрать $k-1$ место и поставить на эти места черные шары, а на остальные места поставить предметы. Вместе с тем число C_{n+k-1}^{k-1} равно числу способов n одинаковых предметов распределить между k людьми: первому достанутся предметы до первого черного шара, второму — от первого до второго черного шара и т.д. Если $(i-1)$-й и i-й шары стоят рядом, то i-му человеку не достанется ничего.

Пример 2.6. Случайным образом 12 одинаковых шаров размещаются в шести ящиках. Какова вероятность того, что ровно два ящика останутся пустыми?

Решение. Согласно предыдущему замечанию распределить 12 шаров по шести ящикам можно $C_{12+6-1}^{6-1} = C_{17}^{5} = 6188$ способами. Имеется $C_6^2 = 15$ вариантов выбрать два пустых ящика из шести. В остальных четырех ящиках должно быть хотя бы по одному шару. Для этого размещаем в каждый из них по одному шару, а остальные $12-4=8$ шаров раскладываем произвольным образом в эти же четыре ящика. Это можно сделать $C_{8+4-1}^{3} = C_{11}^{3}$ способами. Всего получается $15 \cdot C_{11}^{3} = 15 \cdot 165 = 2475$ благоприятствующих способов. Вероятность того, что останутся два свободных ящика, равна $2475/6188 \approx 0{,}4$.

Ответ. $2475/6188 \approx 0{,}4$.

Задача 2.6. Случайным образом n шаров размещаются в m ящиках. Какова вероятность того, что ровно r ящиков останутся пустыми? (См. пример 2.6 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.6.

№	n	m	r	№	n	m	r	№	n	m	r	№	n	m	r	№	n	m	r
1	5	4	2	**7**	7	3	1	**13**	8	5	1	**19**	9	5	3	**25**	10	5	2
2	5	4	1	**8**	7	5	2	**14**	8	5	3	**20**	9	6	1	**26**	10	5	3
3	6	4	2	**9**	8	4	1	**15**	9	4	2	**21**	9	6	2	**27**	10	6	1
4	6	4	1	**10**	8	4	2	**16**	9	4	1	**22**	9	6	3	**28**	10	6	2
5	7	4	2	**11**	8	4	1	**17**	9	5	1	**23**	9	6	4	**29**	10	6	3
6	7	4	1	**12**	8	5	2	**18**	9	5	2	**24**	10	5	1	**30**	10	6	4

2.2. Геометрические вероятности

Область применения классического определения вероятности — испытания с *конечным* числом равновозможных исходов. Существенным является условие равновозможности. От конечности числа исходов опыта можно отказаться и определять вероятности не с помощью числа исходов, а с помощью отношения длин, площадей и т.д., но при сохранении условия равновозможности.

Геометрическое определение вероятности. Пусть область *g* принадлежит области *G* (рис. 2.2.1).

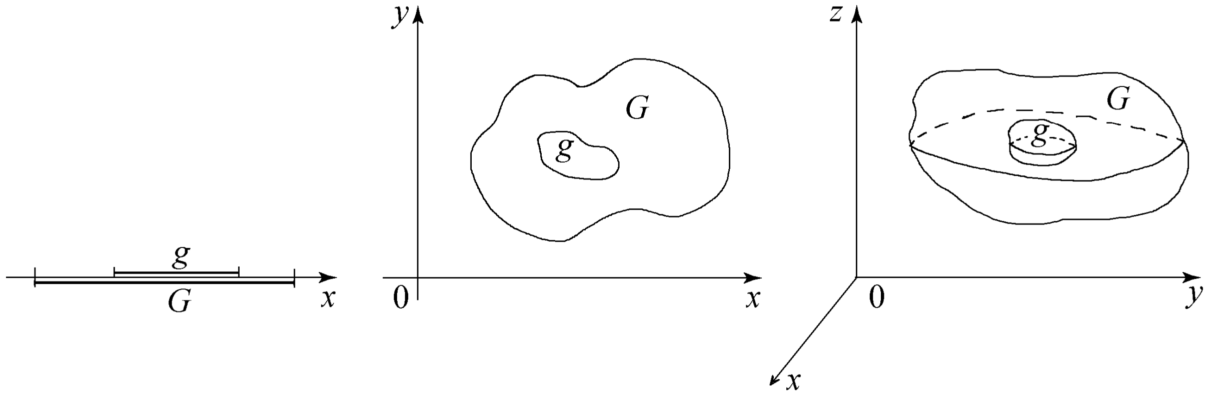


Рис. 2.2.1

Если *равновозможно* попадание точки в любую точку области *G*, то вероятность попасть в область *g* равна отношению меры области *g* к мере области *G*:

$$P(\text{попасть в область } g) = \frac{\text{Мера области } g}{\text{Мера области } G},$$

где «мера» — означает: 1) длину, если область G часть прямой или кривой линии; 2) площадь, если *G* часть плоскости; 3) объем, если *G* часть пространства, и т.д. в зависимости от характера области *G*.

Пример 2.7. Две радиостанции течение часа независимо друг от друга должны передать сообщения длительностью 10 мин. и 20 мин. соответственно. Какова вероятность того, что сообщения не перекроются по времени.

Решение. Пусть *x* — момент начала сообщения первой радиостанции, а *y* — момент начала второго сообщения. Для того чтобы сообщения уложились в отведенный час, должны выполняться условия: $0 \le x \le 50$, $0 \le y \le 40$. Сообщения не перекроются во времени, если выполнятся условия: $y - x > 10$ и $y - x > 20$. Этим условиям удовлетворяют точки заштрихованных областей, изображенных на рис. 2.2.2.

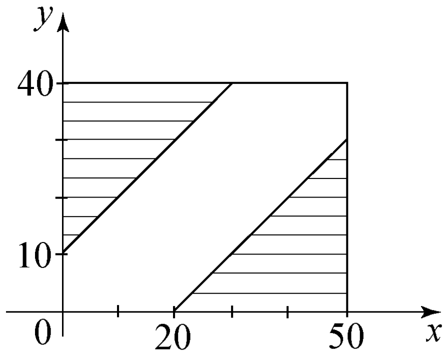


Рис. 2.2.2

Так как все положения точки (x, y) в прямоугольнике 50×40 равновозможны, то искомая вероятность равна отношению заштрихованной площади, которая равна 30×30, к площади прямоугольника. Поэтому $P = (30 \times 30) / (50 \times 40) = 9 / 20$.

Ответ. 9/20.

Задача 2.7.1. В течение суток к причалу должны независимо друг от друга подойти и разгрузиться два сухогруза. Одному из них для разгрузки требуется k_1 часов, другому — k_2 часов. Какова вероятность того, что ни одному из сухогрузов не придется ожидать в очереди на разгрузку? (См. пример 2.7 и исходные данные)

Исходные данные к задаче 2.7.1.

№	k_1	k_2	№	k_1	k_2	№	k_1	k_2	№	k_1	k_2	№	k_1	k_2	№	k_1	k_2
1	2	5	**6**	3	5	**11**	4	3	**16**	4	8	**21**	5	7	**26**	6	8
2	2	6	**7**	3	6	**12**	4	4	**17**	5	3	**22**	5	8	**27**	7	7
3	2	7	**8**	3	7	**13**	4	5	**18**	5	4	**23**	6	3	**28**	7	8
4	2	8	**9**	3	8	**14**	4	6	**19**	5	5	**24**	6	6	**29**	8	8
5	3	3	**10**	4	2	**15**	4	7	**20**	5	6	**25**	6	7	**30**	8	6

Задача 2.7.2. В отрезок [0;1] наугад брошены две точки, причем все положения каждой точки в этом отрезке равновозможны. Пусть X — расстояние от левого конца отрезка до ближайшей точки, а Y — расстояние между точками. Найдите вероятность того, что $nX \le Y$, где n — номер варианта. (См. пример 2.7).

Пример 2.8. В треугольник с вершинами A(0;0), B(4;0) и C(0;2) наугад брошена точка, причем все положения точки в этом треугольнике равновозможны. Найдите вероятность того, что координаты точки X и Y будут удовлетворять неравенству $3X^2 \le 2XY + Y^2$.

Решение. Полагая в квадратном трехчлене $3X^2 - 2XY - Y^2$ переменной величиной X, а Y коэффициентом, найдем корни трехчлена $X = Y$ и

$X = -Y/3$. Тогда неравенство $3X^2 - 2XY - Y^2 \le 0$ можно записать в виде $3(X - Y)(X + Y/3) \le 0$, или $(X - Y)(3X + Y) \le 0$. Последнее неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} X - Y \ge 0, \\ 3X + Y \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} X - Y \le 0, \\ 3X + Y \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} X \ge Y, \\ Y \le -3X; \end{cases} \\ \begin{cases} X \le Y, \\ Y \ge -3X. \end{cases} \end{array}\right.$$

Точки плоскости, координаты которых удовлетворяют этой совокупности систем неравенств, на рис. 2.2.3 выделены штриховкой. Часть из них содержится в треугольнике *ABC*.

Так как по условию все положения точки (XY) в треугольнике *ABC* равновозможны, то по геометрическому определению вероятности искомая вероятность равна отношению площади заштрихованного треугольника *AEC* к площади треугольника *ABC*.

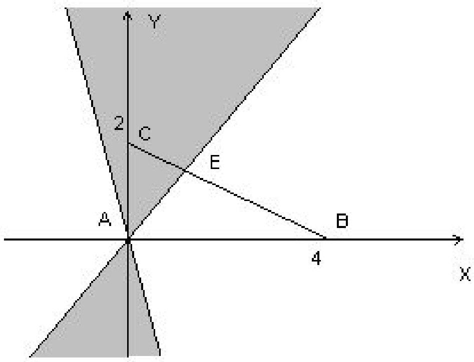


Рис. 2.2.3

Площадь треугольника *ABC* равна половине произведения *AB* на *AC*, т.е. равна 4. Линия *BC* имеет уравнение $x + 2y = 4$, а линия *AE* определяется уравнением $y = x$.

Их точка пересечения имеет координаты *E*(4/3;4/3). Абсцисса точки *E* равна высоте треугольника *AEC*, опущенной на сторону *AC*. Поэтому площадь треугольника *AEC* равна $(1/2)(2 \cdot 4/3) = 4/3$. Поэтому искомая вероятность равна $(4/3):4 = 1/3$.

Ответ. 1/3.

Задача 2.8. В область *D* наугад брошена точка, причем все положения точки в этой области равновозможны. Найдите вероятность того, что координаты точки *X* и *Y* будут удовлетворять неравенству $cXY \le aX^2 + bY^2$ (в нечетных вариантах область *D* — единичный квадрат

$[0;1]\times[0;1]$, в четных вариантах область D — треугольник с вершинами $A(0;0)$, $B(1;0)$ и $C(0;1)$). (См. пример 2.8 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.8.

№	*a*	*b*	*c*	№	*a*	*b*	*c*	№	*a*	*b*	*c*	№	*a*	*b*	*c*	№	*a*	*b*	*c*
1	1	3	4	**7**	1	–15	2	**13**	9	–3	–6	**19**	–3	1	2	**25**	4	–3	4
2	1	–3	2	**8**	1	–24	2	**14**	3	1	4	**20**	–3	4	4	**26**	15	1	8
3	1	5	6	**9**	4	–3	4	**15**	5	1	6	**21**	–8	4	4	**27**	4	5	12
4	1	–8	2	**10**	4	–3/4	2	**16**	–8	1	2	**22**	–15	4	4	**28**	12	1	8
5	1	–5	4	**11**	1	–3/4	1	**17**	–7	1	6	**23**	–5	1	4	**29**	1	8	5
6	1	–7	6	**12**	4	–8	4	**18**	–5	1	4	**24**	9	–3	–6	**30**	5	4	12

Пример 2.9. Координаты случайной точки $M(b,c)$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $b+c=3$, служат коэффициентами квадратного уравнения $z^2+bz+c=0$. Полагая все положения случайной точки в указанном треугольнике равновозможными, найти вероятность того, что уравнение имеет два действительных корня.

Решение. Пусть A — интересующее нас событие. Уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант $D=b^2-4c\geq 0$. Это неравенство будет выполнено, если случайная точка M попадет в треугольнике ниже кривой $c\leq\dfrac{b^2}{4}$ (на рис. 2.2.4 заштрихованная область). Точка пересечения линий $b+c=3$ и $c=\dfrac{b^2}{4}$ имеет координаты (2;1). Поэтому площадь заштрихованной фигуры на рис. 2.2.4 равна $\int\limits_0^1 (3-c-2\sqrt{c})dc=7/6.$

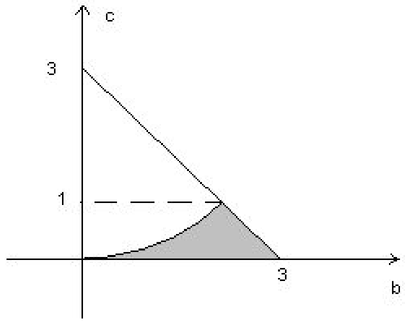


Рис. 2.2.4

Так как площадь всего треугольника равна 9/2, то по геометрическому определению вероятности $P(A)=7/27$.

Ответ. 7/27.

Задача 2.9. Координаты случайной точки $M(b,c)$ в прямоугольнике, ограниченном осями координат и прямыми $x=m$ и $y=n$, служат коэффициентами квадратного уравнения $z^2+bz+c=0$. Полагая все положения случайной точки в указанном прямоугольнике равновозможными, найдите вероятность того, что уравнение не имеет действительных корней. (См. пример 2.9 и исходные данные).

Исходные данные к задаче 2.9.

№	m	n	№	m	n	№	m	n	№	m	n	№	m	n	№	m	n
1	2	1	**6**	6	1	**11**	3	1	**16**	2	5	**21**	4	5	**26**	–5	1
2	1	2	**7**	7	1	**12**	3	2	**17**	3	3	**22**	–2	1	**27**	–6	1
3	1	3	**8**	8	1	**13**	4	1	**18**	3	4	**23**	–1	2	**28**	–7	1
4	1	4	**9**	2	2	**14**	2	4	**19**	4	3	**24**	–1	3	**29**	–8	1
5	5	1	**10**	2	3	**15**	5	3	**20**	4	4	**25**	–1	4	**30**	–2	2

Пример 2.10. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$. Острый угол ромба равен 60°, а наибольшая диагональ равна $2m$ ($m < a$). Ромб наугад бросают на плоскость. Какова вероятность того, что ромб пересечет одну из прямых?

Решение. Бросание ромба «наугад» подразумевает, что центр ромба с равными шансами может оказаться на любом расстоянии x (в пределах от 0 до a) от ближайшей прямой, а значения угла φ между наибольшей диагональю и ближайшей прямой равновозможны в пределах от 0 до $\pi/2$, при этом x и φ независимы. Заметим, что расстояние от центра ромба до его стороны равно $m\sin 30° = m/2$.

Если $x \le m/2$, то ромб несомненно пересечет ближайшую прямую. Если же $m/2 < x < a$, то для пересечения ближайшей прямой необходимо и достаточно, чтобы $x < m\sin\varphi$, т.е. проекция половины наибольшей диагонали на перпендикуляр к прямой должна быть больше расстояния от центра ромба до прямой (см. рис. 2.2.5).

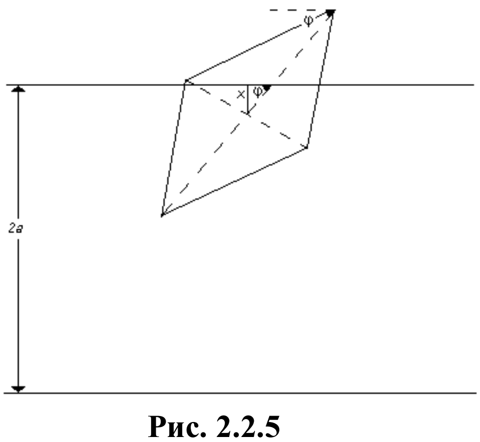


Рис. 2.2.5

Названные условия выполняются в заштрихованной области на рис. 2.2.6. Графики функций $y = m/2$ и $y = m\sin\varphi$ пересекаются в точках, в которых $m/2 = m\sin\varphi$, т.е. при $\varphi = \pi/6$ и $\varphi = 5\pi/6$. Поэтому заштрихованная площадь равна

$$2\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+m\int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin\varphi\, d\varphi \quad \frac{m\pi}{6}+m\sqrt{3}=\frac{m(\pi+6\sqrt{3})}{6}.$$

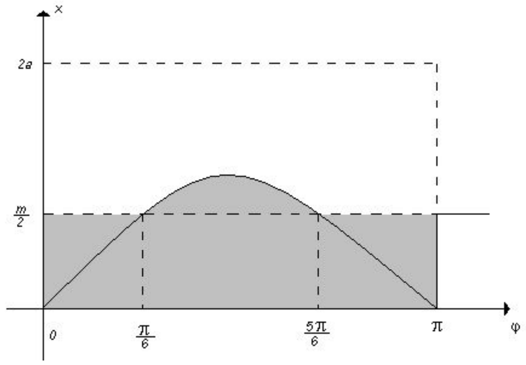


Рис. 2.2.6

Любое положение ромба относительно ближайшей прямой можно охарактеризовать точкой в прямоугольнике со сторонами a и $\pi/2$. Поскольку все положения ромба относительно ближайшей прямой равновозможны, то по геометрическому определению вероятности искомая вероятность равна $P=\dfrac{m(\pi+6\sqrt{3})}{6\,\pi\, a}$.

Ответ. $\dfrac{m(\pi+6\sqrt{3})}{6\,\pi\, a}$.

Задача 2.10. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$. На плоскость наугад бросают:

1) в вариантах 1, 5, 8, 13, 17, 16, 21, 25, 29 равносторонний треугольник со стороной $2m$;

2) в вариантах 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30 квадрат со стороной $2m$;

3) в вариантах 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27 правильный шестиугольник со стороной $2m$;

4) в вариантах 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 прямоугольник с диагональю $2m$ и углом между диагоналями 60°.

(См. пример 2.10, a — номер варианта N плюс 2, m — целая часть числа $N/2$ плюс 1).

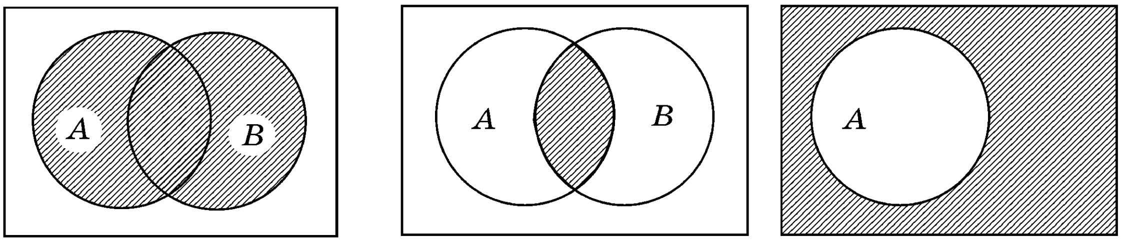
2.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

В теории вероятностей события рассматривают на фоне комплекса условий, которые его порождают. Проще говоря, событие — это результат опыта, который проистекает в природе по воле человека, независимо от нее или ей вопреки. Рассмотрим множество событий, которые можно наблюдать в эксперименте при фиксированном комплексе условий. На множестве таких событий определим следующие понятия.

Суммой событий A и B называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B . Сумму событий A и B обозначают через $A+B$.

Приведенные понятия можно проиллюстрировать следующим образом.

Пусть комплекс условий состоит в том, что внутрь прямоугольника наугад бросают точку. Обозначим через A попадание точки внутрь левого круга, а через B — внутрь правого круга. Тогда события $A+B$, AB и $\overline{A}$ состоят в попадании точки внутрь областей, закрашенных на соответствующей части рис. 2.3.1.



$A+B$ $\qquad$ AB $\qquad$ $\overline{A}$

Рис. 2.3.1

Произведением событий A и B называют событие, состоящее в появлении событий A и B в одном и том же опыте. Обозначают произведение событий A и B через AB.

Событие, состоящее в *не появлении события* A, называется *противоположным* событием и обозначается через $\overline{A}$.

Если в каждом опыте два события A и B всегда либо оба происходят, либо оба не происходят, то такие события называют *равносильными* или *эквивалентными* и записывают: $A=B$.

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_m$ образуют *полную группу* событий, если они попарно несовместимы и в каждом опыте непременно происходит одно и только одно из этих событий.

Словесные рассуждения можно перевести в символическую запись с помощью соответствий: «или» $\Leftrightarrow$ «+»; «и» $\Leftrightarrow$ «·»; «не A» $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$; «равносильно» $\Leftrightarrow$ «=».

Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью* события A и обозначается через $P(A/B)$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения событий равна вероятности одного события, умноженной на вероятность другого события, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т.е.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

События называются *независимыми*, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого. Если события независимы, то $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$ и $P(AB) = P(A)P(B)$.

Для любого конечного числа событий вероятность произведения событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что предыдущие события произошли, т.е.

$$P(A_1A_2A_3 \cdot ... \cdot A_{n-1}A_n) =$$

$$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1A_2A_3\cdot \ldots \cdot A_{n-1}).$$

Если события независимы, то

$$P(A_1A_2A_3\cdot \ldots \cdot A_{n-1}A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Итак, перед вычислением вероятности произведения событий необходимо установить, *зависимы события или нет.*

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

События называются *несовместными*, если их появление в одном и том же опыте невозможно. Если события A и B *несовместны*, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Для трех *совместных* событий теорема сложения вероятностей имеет вид:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Если события несовместны, то

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Теорему сложения можно обобщить на любое конечное число слагаемых:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdot \ldots \cdot A_n).$$

Если события *несовместны*, то

$$P\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Итак, *прежде чем вычислять вероятность суммы событий следует выяснить, совместны они или нет.*

Указание. Желателен следующий порядок решения задач и оформления записи:

а) обозначения событий;

б) анализ взаимосвязей событий и их символическая запись;

в) вычисление вероятностей.

Пример 2.11. Вероятности попадания в цель при одном выстреле для первого, второго и третьего стрелков равны соответственно 0,3; 0,6; 0,8. Все три стрелка выстрелили в цель. Какова вероятность того, что:

а) цель поражена;

б) произошло только одно попадание;

в) произошло ровно два попадания;

г) попадут все три стрелка;

д) будет хотя бы один промах?

Решение. Обозначим через A_i — событие, состоящее в попадании в цель i-го стрелка.

а) Поражение цели (событие A) равносильно появлению хотя бы одного из событий A_1 или A_2 или A_3. Поэтому $A = A_1 + A_2 + A_3$. Учитывая совместность событий, имеем

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3),$$

а так как события независимы, то

$$P(A) = 0,3 + 0,6 + 0,8 - 0,3\cdot 0,6 - 0,3\cdot 0,8 - 0,6\cdot 0,8 + \ 0,3\cdot 0,6\cdot 0,8 = 0,944.$$

б) Рассмотрим три случая:

1) $B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ — первый стрелок попал в цель и при этом второй не попал и третий не попал;

2) $B_2 = \overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ — первый стрелок не попал и при этом второй попал и третий не попал;

3) $B_3 = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ — первый и второй не попали и при этом третий попал.

Только одно попадание в цель (событие B) равносильно реализации хотя бы одного из несовместных событий B_1 или B_2 или B_3 . Поэтому

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

В силу независимости событий A_i имеем

$$P(B) = 0,3\cdot 0,4\cdot 0,2 + 0,7\cdot 0,6\cdot 0,2 + 0,7\cdot 0,4\cdot 0,8 = 0,332.$$

в) Два попадания в цель (событие C) равносильны реализации хотя бы одного из несовместных случаев: $A_1A_2\overline{A}_3$ или $A_l\cdot A_1\overline{A}_2A_3$ или $\overline{A}_1A_2A_3$. В силу независимости событий A_i получаем

$$P(C) = 0,3\cdot 0,6\cdot 0,2 + 0,3\cdot 0,4\cdot 0,8 + 0,7\cdot 0,6\cdot 0,8 = 0,468.$$

г) Все три стрелка попадут в цель (событие D), если произойдут события A_1 и A_2 и A_3, т.е. $D = A_1A_2A_3$. В силу независимости событий A_i имеем

$$P(D) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \quad 0,3\cdot 0,6\cdot 0,8 = 0,144.$$

д) Хотя бы один промах (событие E) равносилен появлению хотя бы одного из событий $\overline{A}_1$ или $\overline{A}_2$ или $\overline{A}_3$, т.е. $E = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$. Вместо вычисления вероятности суммы трех совместных событий, заметим, что событие E равносильно не появлению события D. Поэтому

$$P(E) = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}144 = 0{,}856.$$

Ответ. а) 0,944; б) 0,332; в) 0,468; г) 0,144; д) 0,856.

Замечание. Значительное число вероятностных задач связано с теорией стрельб. В связи с этим уместно вспомнить изречение немецкого военного теоретика Карла Клаузевица (1780–1830): «Никакая человеческая деятельность не соприкасается со случаем так всесторонне и так часто, как война».

Задача 2.11. В каждой из трех урн содержится по восемь шаров. В первой урне пять белых и три черных шара. Во второй урне m_1 белых шаров, а остальные шары черные, в третьей урне m_2 белых шаров, а остальные шары черные. Из каждой урны наугад выбрано по одному шару. Найти вероятности следующих событий:

A — выбран только один белый шар;

B — выбраны только белые шары;

C — выбран хотя бы один белый шар.

(См. пример 2.11 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.11.

№	m_1	m_2	№	m_1	m_2	№	m_1	m_2	№	m_1	m_2	№	m_1	m_2	№	m_1	m_2
1	2	2	**6**	3	2	**11**	4	3	**16**	5	3	**21**	6	3	**26**	7	3
2	2	3	**7**	3	4	**12**	4	4	**17**	5	4	**22**	6	4	**27**	7	4
3	2	4	**8**	3	5	**13**	4	5	**18**	5	5	**23**	6	5	**28**	7	5
4	2	5	**9**	3	6	**14**	4	6	**19**	5	6	**24**	6	6	**29**	1	3
5	2	6	**10**	4	2	**15**	5	2	**20**	6	2	**25**	7	2	**30**	1	4

Пример 2.12. Из 20 изделий четыре имеют скрытые дефекты. Изделия выбирают наугад по одному и проверяют. Найдите вероятности следующих событий:

A — первым бракованным изделием окажется пятое по счету проверяемое изделие;

B — первыми бракованными изделиями окажутся третье и четвертое проверяемые изделия;

C — первыми бракованными изделиями окажутся третье и пятое по счету изделия.

Решение. Обозначим через A_i — событие, состоящее в выборе годного изделия при i-м выборе. Событие A произойдет, если первые четыре изделия окажутся годными и лишь пятое по счету изделие будет бракованным. Это означает, что $A = A_1A_2A_3A_4\overline{A}_5$, причем события зависимы. Поэтому

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1A_2)P(A_4 / A_1A_2A_3)P(\overline{A}_5 / A_1A_2A_3A_4) =$$
$$= \frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\cdot\frac{13}{17}\cdot\frac{4}{16} = \frac{91}{969} \approx 0{,}094.$$

Событие B произойдет, если первые два изделия будут годными, а третье и четвертое окажутся бракованными. Символически это можно записать в виде $B = A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4$. В силу зависимости событий

$$P(B) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(\overline{A}_3 / A_1A_2)P(\overline{A}_4 / A_1A_2\overline{A}_3) =$$
$$= \frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{3}{17} = \frac{8}{323} \approx 0{,}025.$$

Аналогично, $C = A_1A_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5$ и

$$P(C) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(\overline{A}_3 / A_1A_2)P(A_4 / A_1A_2\overline{A}_3)P(\overline{A}_5 / A_1A_2\overline{A}_3A_4) =$$
$$= \frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{14}{17}\cdot\frac{3}{16} = \frac{7}{323} \approx 0{,}022.$$

Ответ. $P(A) = \frac{91}{969} \approx 0{,}094$; $P(B) = \frac{8}{323} \approx 0{,}025$; $P(C) = \frac{7}{323} \approx 0{,}022.$

Задача 2.12.1. Из тщательно перемешанной колоды карт (36 карт) выбирают одна за другой карты.

Варианты 1–10. Какова вероятность того, что первой картой пиковой масти будет k-я по счету карта?

Варианты 11–20. Какова вероятность того, что первыми картами пиковой масти будут k-я и $(k+1)$-я по счету карты?

Варианты 21–31. Какова вероятность того, что первыми картами пиковой масти будут k-я и $(k+2)$-я по счету карты?

(См. пример 2.12 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.12.1.

№	k	№	k	№	k	№	k	№	k	№	k	№	k	№	k	№	k	№	k
1	2	**4**	5	**7**	8	**10**	2	**13**	4	**16**	7	**19**	10	**22**	3	**25**	6	**28**	9
2	3	**5**	6	**8**	9	**11**	2	**14**	5	**17**	8	**20**	11	**23**	4	**26**	7	**29**	10
3	4	**6**	7	**9**	11	**12**	3	**15**	6	**18**	9	**21**	2	**24**	5	**27**	8	**30**	11

Задача 2.12.2. Среди n изделий находится два изделия со скрытым дефектом. Изделия выбирают наугад по одному и проверяют, пока оба бракованных изделия не будут обнаружены.

Какова вероятность того, что придется проверить ровно k изделий?

Какова вероятность того, что придется проверить не менее k изделий?

(См. пример 2.12 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.12.2.

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	5	4	**6**	6	6	**11**	7	7	**16**	8	7	**21**	9	6	**26**	10	4
2	5	5	**7**	7	3	**12**	8	3	**17**	8	8	**22**	9	7	**27**	10	5
3	6	3	**8**	7	4	**13**	8	4	**18**	9	3	**23**	9	8	**28**	10	6
4	6	4	**9**	7	5	**14**	8	5	**19**	9	4	**24**	9	9	**29**	10	7
5	6	5	**10**	7	6	**15**	8	6	**20**	9	5	**25**	10	3	**30**	10	8

Пример 2.13.1. Имеется система соединенных между собой элементов (скажем, участок электрической цепи, поточная линия и т.д., см. рис. 2.3.2). Вероятность безотказной работы каждого элемента в течение заданного времени (надежность) равна 0,8. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Какова надежность системы?

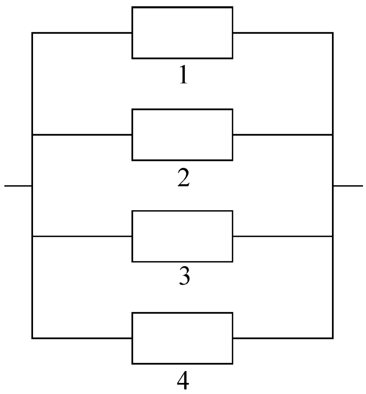


Рис. 2.3.2

Решение. Пусть событие A состоит в безотказной работе системы в течение заданного времени, а A_i означает безотказную работу i-го элемента в течение того же времени. Безотказная работа системы равносильна безотказной работе хоты бы одного элемента. Поэтому $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. События A_i совместны. Вместо вычисления вероятности $P(A) = \; = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$ по формуле вероятности суммы совместных событий вычислим вероятность противоположного события $\overline{A}$. Выход из строя системы эквивалентен выходу из строя всех элементов в течение заданного времени, т.е. $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$. Так как элементы выходят из строя независимо друг от друга, то

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4) \quad (0,2)^4 \quad 0,0016.$$

Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,0016 \quad 0,9984 \approx 1.$$

Ответ. $0,9984 \approx 1$.

Пример 2.13.2. Имеется система соединенных между собой элементов (электрическая цепь, поточная линия и т.д., см. рис. 2.3.3). Вероятность безотказной работы (надежность) каждого элемента равна 0,9. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Какова надежность системы?

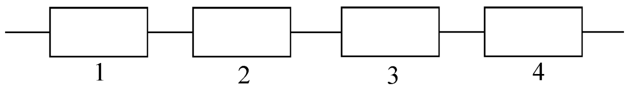


Рис. 2.3.3

Решение. Пусть событие A состоит в безотказной работе системы, а A_i — означает безотказную работу i-го элемента. Событие A произойдет, если одновременно произойдут события A_1, A_2, A_3 и A_4. Поэтому $A = A_1 A_2 A_3 A_4$, а так как события независимы, то

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \quad (0,9)^4 \approx 0,66.$$

Ответ. $(0,9)^4 \approx 0,66$.

Задача 2.13. На рис. 2.3.4 изображена схема некоторой системы (например, участок электрической цепи, или участок поточной линии, где деталь подвергается обработке на разных станках). Вероятность безотказной работы в течение некоторого времени (надежность) для каждого элемента первого блока равна 0,9, а для элементов второго блока эта вероятность равна 0,8. В первом блоке три параллельные линии соответственно из k_1, k_2, k_3 элементов. Второй блок состоит из двух параллельных линий, в которых соответственно m_1 и m_2 элементов.

Найдите надежность системы. (См. примеры 2.13.1, 2.13.2 и исходные данные.)

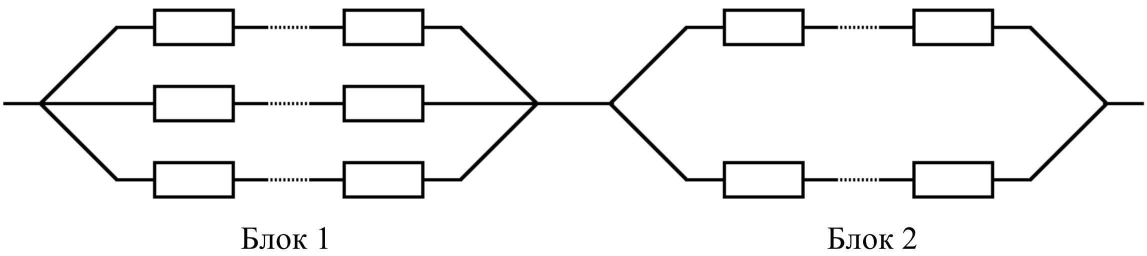


Рис. 2.3.4

Исходные данные к задаче 2.13.

№	k_1	k_2	k_3	m_1	m_2	№	k_1	k_2	k_3	m_1	m_2	№	k_1	k_2	k_3	m_1	m_2
1	2	2	2	1	1	**11**	1	2	1	1	1	**21**	1	2	1	1	1
2	2	3	2	2	1	**12**	1	2	1	2	1	**22**	1	2	1	2	1
3	2	3	1	2	2	**13**	1	2	1	2	2	**23**	1	2	1	2	2
4	2	2	2	2	1	**14**	2	2	1	1	1	**24**	2	2	1	1	1
5	2	3	2	1	1	**15**	2	2	1	2	1	**25**	2	2	1	2	1
6	2	3	1	1	1	**16**	2	2	1	2	2	**26**	2	2	1	2	2
7	2	2	2	2	2	**17**	1	1	1	1	1	**27**	1	1	1	1	1

8	2	3	2	2	2	**18**	1	1	1	2	1	**28**	1	1	1	2	1
9	2	3	1	2	1	**19**	1	1	1	2	2	**29**	1	1	1	2	2
10	2	3	1	2	2	**20**	3	2	1	1	1	**30**	3	2	1	1	1

Пример 2.14. В первой урне два белых шара, четыре синих и девять красных, а во второй соответственно три, пять и шесть. Из каждой урны наугад выбирают два шара. Какова вероятность того, что будут выбраны шары одного цвета?

Решение. Событие, состоящее в выборе шаров одного цвета, обозначим через A. Обозначим через B_i выбор из i-й урны двух белых шаров, через C_i обозначим выбор из i-й урны двух синих шаров, через D_i выбор из i-й урны двух красных шаров.

Событие A произойдет, если из первой урны будут выбраны два белых шара (событие B_1) и из второй урны будут выбраны тоже два белых шара (событие B_2) или из первой урны извлекут два синих шара (событие C_1) и из второй урны будут выбраны тоже два синих шара (событие C_2) или из первой урны будут выбраны два красных шара (событие D_1) и из второй урны будут выбраны тоже два красных шара (событие D_2). Поэтому $A = B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2$. События независимы и слагаемые несовместны. В итоге получаем, что

$$P(A) = P(B_1)P(B_2) + P(C_1)P(C_2) + P(D_1)P(D_2) =$$

$$= \frac{C_2^2}{C_{15}^2} \cdot \frac{C_3^2}{C_{14}^2} + \frac{C_4^2}{C_{15}^2} \cdot \frac{C_5^2}{C_{14}^2} + \frac{C_9^2}{C_{15}^2} \cdot \frac{C_6^2}{C_{14}^2} = \frac{201}{3185} \approx 0{,}06.$$

Ответ. $\dfrac{201}{3185} \approx 0{,}06.$

Задача 2.14. В первой урне n_1 белых шаров, n_2 синих и n_3 красных, а во второй соответственно m_1, m_2 и m_3. Из каждой урны наугад выбирают k шаров ($k = 1$ для нечетных вариантов и $k = 2$ для четных).

Какова вероятность того, что будут выбраны шары одного цвета?

(См. пример 2.14 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.14.

№	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3	№	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3
1	3	5	7	2	2	5	**14**	6	5	4	5	3	4
2	3	5	6	5	2	3	**17**	4	5	1	6	3	2
3	4	3	8	3	2	5	**18**	5	2	3	2	4	4
4	8	4	3	3	2	5	**19**	6	3	2	4	6	2
5	3	7	5	5	2	3	**20**	3	5	4	6	2	2
6	5	3	7	3	5	2	**21**	3	4	5	5	3	6
7	5	7	3	4	3	3	**22**	3	4	5	3	6	2
8	7	3	5	3	4	3	**23**	2	5	7	4	3	3
9	4	5	6	4	3	3	**24**	2	6	4	8	3	1

10	5	4	6	2	4	4	**25**	6	4	3	2	3	5
11	5	6	4	4	2	4	**26**	6	4	4	3	5	7
12	6	5	4	4	4	2	**27**	7	3	4	5	2	4
13	4	6	5	3	5	4	**28**	7	4	3	6	5	2
15	2	6	7	5	4	3	**29**	6	3	4	5	4	3
16	5	2	8	6	3	3	**30**	6	5	3	8	3	4

Пример 2.15. Два стрелка по очереди стреляют в цель до первого попадания. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна для них соответственно 1/3 и 1/2. Каждый стрелок имеет право только на два выстрела. Какова вероятность того, что цель будет поражена? Какова вероятность того, что цель поразит первый стрелок?

Решение. Обозначим через A_i попадание первого стрелка при i-м выстреле, а через B_i — попадание второго стрелка при i-м выстреле.

На рис. 2.3.5 изображено «дерево» всех возможных способов протекания стрельбы.

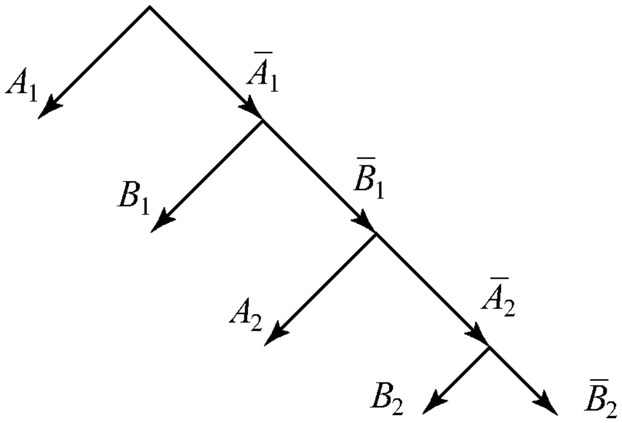


Рис. 2.3.5

Цель не будет поражена (событие $\overline{C}$), если произойдут события $\overline{A}_1$ и $\overline{B}_1$ и $\overline{A}_2$ и $\overline{B}_2$. Так как события независимы, то

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{B}_2) = (2/3)(1/2)(2/3)(1/2) = 1/9.$$

Поэтому вероятность поражения цели $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 1/9 = 8/9$.

Цель поразит первый стрелок (событие A), если он попадет при первом выстреле или при первом выстреле он не попадет в цель и второй стрелок при своем первом выстреле не попадет в цель и после этого первый стрелок попадет в цель. Поэтому $A = A_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1A_2$. События A_1 и $\overline{A}_1\overline{B}_1A_2$ несовместны. В силу независимости событий получаем

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(A_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

Ответ. 8/9; 4/9.

Задача 2.15. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Первым бросок делает игрок A.

Варианты 1–8. Найти вероятность события: выиграл игрок A до k-го броска.

Варианты 9–15. Найти вероятность события: выиграл игрок B до k-го броска.

Варианты 16–23. Найти вероятность события: выиграл игрок A не позднее k-го броска.

Варианты 24–30. Найти вероятность события: Выиграл игрок B не позднее k-го броска.

(См. пример 2.15, k — последняя цифра варианта плюс четыре.)

Пример 2.16. Урна содержит шесть занумерованных шаров с номерами от одного до шести. Шары извлекаются по одному без возвращения. Пусть событие A состоит в том, что шары будут извлечены в порядке их номеров, а событие B в том, что хотя бы один раз номер шара совпадет с порядковым номером его извлечения. Найти вероятности событий A и B и определить предельные вероятности этих событий при неограниченном увеличении числа шаров в урне.

Решение. а) Обозначим через A_i — событие, состоящее в том, что порядок извлечения i-го шара совпадает с его номером. Тогда событие $A = A_1 A_2 A_3 \cdot \ldots \cdot A_6$. Вместо рассмотрения произведения зависимых событий заметим, что шары в указанном порядке можно извлечь только одним способом, а всего равновозможных способов извлечения существует (6!). Поэтому $P(A) = \dfrac{1}{6!} = \dfrac{1}{720}$. При увеличении числа шаров $P(A) \to 0$.

Событие B произойдет, если появится хотя бы одно из событий A_1 или A_2 или … или A_6. Поэтому $B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$, причем события совместны. При переходе к противоположному событию придется рассматривать произведение шести зависимых событий $\overline{A}_i$, что в данном случае сделать сложно. Поэтому вычислим вероятность суммы непосредственно:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 6} P(A_i)\, P(A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le 6} P(A_i) P(A_j) P(A_k) - \ldots -$$

$$-P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6) = 1 - C_6^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + C_6^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} - C_6^4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} +$$

$$+C_6^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{454}{720} \approx 0,65.$$

Заметим, что искомая вероятность является частичной суммой ряда Тейлора функции $1-\ e^{-x}$ при $x=-1$. Поэтому при больших n имеем

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)\approx 1-e^{-1}\approx 0,63.$$

Ответ. $P(A)=\dfrac{1}{720}$; $P(A)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$; $P(B)=\dfrac{454}{720}\approx 0,63$;

$P(B)\xrightarrow[n\to\infty]{}1-e^{-1}$.

Задача 2.16. На вешалке висит n шляп. Каждый из владельцев шляпы берет шляпу наугад и уходит. Какова вероятность того, что хотя бы один уйдет в своей шляпе? (См. пример 2.16 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.16.

№	n	№	n	№	n	№	n	№	n	№	n	№	n	№	n	№	n	№	n
1	4	**4**	7	**7**	4	**10**	7	**13**	8	**16**	7	**19**	8	**22**	10	**25**	8	**28**	4
2	3	**5**	9	**8**	5	**11**	9	**14**	3	**17**	5	**20**	4	**23**	5	**26**	9	**29**	5
3	5	**6**	8	**9**	3	**12**	10	**15**	4	**18**	9	**21**	3	**24**	7	**27**	3	**30**	7

Пример 2.17. Имеется две одинаковых колоды карт, состоящие каждая из N различных карт. Карты в каждой колоде перемешивают (колоду тасуют). После этого сравнивают расположение карт в колодах. Если какая-то карта занимает одно и то же положение в колодах, то говорят, что произошло совпадение. Совпадения могут происходить на любом из N мест и на нескольких местах одновременно. Какова вероятность ровно m совпадений? (Такая задача имеет много вариантов условий. Например, можно говорить о шляпах, перепутанных в гардеробе и распределенных случайно между посетителями, или о письмах, наугад разосланных N адресатам и т.д.)

Решение. Возможность вычисления этих вероятностей открывает следующая теорема.

Теорема. Пусть имеем группу событий $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_N$. Для любого целого m, удовлетворяющего условию $1\le m\le N$, вероятность $P[m]$ одновременного появления m из N событий $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_N$. определяется формулой

$$P[m]=S_m-C_{m+1}^{m}S_{m+1}+C_{m+2}^{m}S_{m+2}-\ldots\pm C_N^m S_N, \qquad (2.3.1)$$

где

$$S_1=\sum_i P(A_i),\ S_2=\sum_{i\ne j}P(A_iA_j),\ S_3=\sum_{i\ne j\ne k}P(A_iA_jA_k),\ \ldots .$$

К формуле (2.3.1) приводят следующие соображения. Пусть E — элементарный исход опыта. Предположим, что этот исход включен в n из N событий A_i. Тогда вероятность этого исхода $P(E)$ входит в состав $P[m]$ только при $n=m$. Заметим, что $P(E)$ входит в суммы $S_1,S_2,\ldots,S_n$ и не входит в суммы $S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots, S_N$. Это означает, что $P(E)$ не входит в правую часть (2.3.1) при $n < m$. При $n = m$ вероятность $P(E)$ входит в сумму S_m, а при $n > m$ члены $P(E)$ в суммах $S_m, S_{m+1}, \ldots, S_n$ взаимно уничтожаются. В самом деле, из n событий, содержащих E, можно образовать C_n^k групп по k, поэтому $P(E)$ входит в S_k с коэффициентом C_n^k. Тогда при $n > m$ вероятность $P(E)$ входит в правую часть равенства (2.3.1) с коэффициентом

$$C_n^m - C_{m+1}^m C_n^{m+1} + C_{m+2}^m C_n^{m+2} - \ldots \ . \tag{2.3.2}$$

Но $C_{m+\nu}^m C_n^{m+\nu} = C_n^m C_{n-m}^{\nu}$ (в этом легко убедиться, записав левую и правую часть равенства через факториалы). Поэтому выражение (2.3.2) преобразуется к виду

$$C_n^m \{C_{n-m}^0 - C_{n-m}^1 + \ldots \pm C_{n-m}^{n-m}\}..$$

В последнем выражении в скобке имеем разложение бинома $(1-1)^{n-m} = 0$, так что коэффициент (2.3.2) равен нулю.

Продолжим решение примера. Установлено, что вероятность ровно m совпадений в соответствии с формулой (2.3.1) равна

$$P(0) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \mp \frac{1}{(N-2)!} \pm \frac{1}{(N-1)!} \mp \frac{1}{N!};$$

$$P(1) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \mp \frac{1}{(N-2)!} \pm \frac{1}{(N-1)!};$$

$$P(2) = \frac{1}{2!}\left\{1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{(N-3)!} \mp \frac{1}{(N-2)!}\right\};$$

$$P(3) = \frac{1}{3!}\left\{1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{(N-3)!}\right\};$$

. . . .

$$P(N-2) = \frac{1}{(N-2)!}\left\{1 - 1 + \frac{1}{2!}\right\};$$

$$P(N-1) = \frac{1}{(N-1)!}\{1-1\} = 0.$$

Здесь равенство нулю означает невозможность получить $N-1$ совпадение без того, чтобы не было N совпадений:

$$P(N) = \frac{1}{N!}.$$

Задача 2.17. В каждой из двух урн находятся шары с номерами от 1 до N. Из каждой урны бесповторным способом вынимают по одному шару и сравнивают их номера.

В нечетных вариантах: какова вероятность того, что совпадений номеров будет не более k?

В четных вариантах: какова вероятность того, что совпадений номеров будет не менее k?

(См. пример 2.17 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.17.

№	N	k	№	N	k	№	N	k	№	N	k	№	N	k	№	N	k
1	5	2	**6**	7	6	**11**	8	2	**16**	8	5	**21**	9	4	**26**	10	8
2	5	3	**7**	7	3	**12**	5	2	**17**	9	2	**22**	9	8	**27**	10	4
3	6	3	**8**	7	5	**13**	6	2	**18**	9	6	**23**	10	2	**28**	10	9
4	6	4	**9**	5	3	**14**	8	3	**19**	9	3	**24**	10	7	**29**	12	2
5	7	2	**10**	8	6	**15**	8	7	**20**	9	7	**25**	10	3	**30**	12	10

2.4. Формула полной вероятности

Пусть событие A может произойти с одним и только с одним из несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Иными словами, событие A появится, если произойдет событие B_1 и при этом появится событие A, или произойдет событие B_2 и при этом появится событие A и т.д. Символическая запись этой фразы имеет вид

$$A = B_1A + B_2A + \ldots + B_nA.$$

В силу несовместимости событий можно записать

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \ldots + P(B_nA).$$

Используя теорему умножения вероятностей, получаем формулу

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots + P(B_n)P(A/B_n),$$

которая и называется *формулой полной вероятности*. Обычно ее записывают кратко:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i). \qquad (2.4.1)$$

Пример 2.18. Имеется две коробки деталей, в каждой из которых по 10 деталей. В первой коробке среди деталей две низкого сорта, а во второй четыре низкосортных детали. Из первой коробки для нужд производства взяли наугад половину деталей, а оставшиеся высыпали во вторую коробку. Через некоторое время из второй коробки взяли наугад деталь. Какова вероятность того, что это деталь низкого сорта?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в выборе из второй коробки детали низкого сорта. Возможность этого выбора зависит от того, какие именно детали были добавлены во вторую коробку. На этот счет можно выдвинуть следующие предположения: B_1 — во вторую коробку добавили пять годных деталей; B_2 — добавили одну деталь низкого сорта и четыре доброкачественные; B_3 — добавили две детали низкого сорта и три доброкачественные. Пять деталей во вторую коробку можно переложить $n = C_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!\,5!} = 252$ способами. Из них событию B_1 благоприятствует $C_8^5 = 56$, событию B_2 — $C_2^1 C_8^4 = 2 \cdot 70 = 140$, а событию B_3 — $C_2^2 C_8^3 = 56$ способов. Событие A произойдет, если появится событие B_1 и после этого произойдет событие A или появится событие B_2 и после этого произойдет событие A или появится B_3 и после этого произойдет A. Символически: $A = B_1A + B_2A + B_3A.$ Учитывая несовместность событий B_i, имеем

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + P(B_3A) =$$
$$= P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2) + P(B_3)P(A / B_3) =$$
$$= (4/15)(56/252) + (5/15)(140/252) + (6/15)(56/252) = 1/3.$$

Ответ. 1/ 3.

Задача 2.18.1. Из урны с n_1 белыми и n_2 черными шарами k шаров, взятые наугад, были перенесены в урну с m_1 белыми и m_2 черными шарами. Какова после этого вероятность вынуть белый шар из второй урны? (См. пример 2.18. Для нечетных вариантов $k = 2$, для четных $k = 3$; величины n_1, n_2, m_1, m_2 взять из исходных данных к задаче 2.14.)

Задача 2.18.2. В условиях задачи 2.26 из первой урны выбирают два шара, а из второй один. Затем из выбранных шаров наугад берут шар. Какова вероятность того, что шар будет белым? (См. пример 2.18).

2.5. Формулы Байеса

Пусть событие A может наступить только при появлении одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. В этих условиях вероятность события A можно вычислить по формуле полной вероятности (2.4.1). События B_i иногда называют «гипотезами», поскольку можно лишь предполагать какое именно из них произойдет. Предположим, что известны вероятности $P(B_1)$, $P(B_2)$, …, $P(B_n)$.

Проделан опыт, в результате которого событие A произошло. Тогда вероятности событий B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, при условии появления события A определяются по формулам Байеса

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)\, P(A / B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\, P(A / B_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.5.1)$$

Формулы Байеса позволяют переоценивать вероятности гипотез (событий B_i) с учетом информации, которую содержит в себе факт появления события A.

Пример 2.19.1. По каналу связи передается одна из последовательностей букв $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$ с вероятностями соответственно 0,5; 0,4; 0,1. Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью 0,8 и с вероятностями 0,1 и 0,1 за любую из двух других букв. Предполагается, что искажаются буквы при передаче независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано $AAAA$, если принято $ABCA$.

Решение. Для краткости записи формулы обозначим $AAAA$ через T_1, $BBBB$ через T_2, $CCCC$ через T_3. Тогда по формулам Байеса (2.5.1)

$$P(T_1 / ABCA) = \frac{P(T_1)P(ABCA/T_1)}{P(T_1)P(ABCA/T_1)+P(T_2)P(ABCA/T_2)+P(T_3)P(ABCA/T_3)} =$$

$$= \frac{0,5\cdot 0,8\cdot 0,1\cdot 0,1\cdot 0,8}{0,5\cdot 0,8\cdot 0,1\cdot 0,1\cdot 0,8\ +\ 0,4\cdot 0,1\cdot 0,8\cdot 0,1\cdot 0,1+0,1\cdot 0,1\cdot 0,1\cdot 0,8\cdot 0,1} = \frac{8}{9}.$$

Ответ. 8/9.

Пример 2.19.2. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для этих стрелков соответственно равны 0,8; 0,7; 0,6. Какова вероятность того, что третий стрелок промахнулся, если в мишени оказалось две пробоины?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в появлении двух пробоин в мишени. В отношении двух пробоин могут быть три предположения: B_1 — попали первый и второй стрелки, а третий не попал, вероятность чего равна $P(B_1)=0,8\cdot 0,7\cdot 0,4=0,224$; B_2 — попали первый и третий, а второй не попал, вероятность чего равна $P(B_2)=0,8\cdot 0,3\cdot 0,6=0,144$; B_3 — попали второй и третий, а первый не попал, вероятность чего равна $P(B_3)=0,2\cdot 0,7\cdot 0,6=0,084$.

Заметим, что $P(A/B_i)=1,\ \ i=1,2,3$. Тогда по формулам Байеса (2.5.1)

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)} =$$

$$= \frac{0,224}{0,224+0,144+0,084} = \frac{56}{113} \approx \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{56}{113} \approx \frac{1}{2}.$

Задача 2.19.1. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для этих стрелков соответственно равны p_1, p_2 и p_3. Какова вероятность того, что i-й стрелок промахнулся, если в мишени оказалось две пробоины? (См. примеры 2.19.1, 2.19.2 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.19.1.

№	p_1	p_2	p_3	i	№	p_1	p_2	p_3	i	№	p_1	p_2	p_3	i
1	0,7	0,6	0,4	3	**11**	0,8	0,6	0,3	2	**21**	0,5	0,3	0,7	1
2	0,7	0,6	0,3	2	**12**	0,8	0,6	0,3	1	**22**	0,5	0,4	0,8	3
3	0,4	0,7	0,9	1	**13**	0,4	0,5	0,8	3	**23**	0,5	0,4	0,8	2
4	0,8	0,3	0,4	3	**14**	0,4	0,5	0,8	2	**24**	0,5	0,4	0,8	1
5	0,8	0,3	0,4	2	**15**	0,4	0,5	0,6	1	**25**	0,4	0,6	0,8	3
6	0,8	0,3	0,4	1	**16**	0,5	0,3	0,7	3	**26**	0,4	0,7	0,3	2
7	0,4	0,5	0,7	3	**17**	0,5	0,3	0,7	2	**27**	0,3	0,5	0,6	3
8	0,4	0,5	0,7	2	**18**	0,5	0,7	0,3	1	**28**	0,3	0,4	0,8	2
9	0,4	0,5	0,7	1	**19**	0,5	0,4	0,7	3	**29**	0,7	0,4	0,6	2
10	0,8	0,6	0,3	3	**20**	0,5	0,3	0,7	2	**30**	0,6	0,5	0,3	3

Задача 2.19.2. Из урны, содержащей n белых и m черных шаров наугад без возвращения выбирают три шара. Третий шар оказался белым. Какова вероятность того, что первые два шара были тоже белого цвета? Какова вероятность того, что первые два шара были разного цвета? (См. примеры 2.19.1, 2.19.2 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.19.2.

№	n	m	№	n	m	№	n	m	№	n	m	№	n	m	№	n	m
1	5	2	**6**	6	3	**11**	7	3	**16**	8	3	**21**	9	3	**26**	6	7
2	5	3	**7**	6	4	**12**	7	4	**17**	8	4	**22**	9	4	**27**	6	8
3	5	4	**8**	6	5	**13**	7	5	**18**	8	5	**23**	5	6	**28**	6	9
4	5	5	**9**	6	6	**14**	7	6	**19**	8	6	**24**	5	7	**29**	7	7
5	6	2	**10**	7	2	**15**	8	2	**20**	9	2	**25**	5	8	**30**	7	7

Пример 2.20. В партии из 10 изделий с равными шансами может оказаться от нуля до трех бракованных. Наугад взяли и проверили три изделия. Они оказались годными. Какова вероятность того, что остальные изделия в партии тоже годные?

Решение. Насчет содержания в партии бракованных изделий по условиям задачи может быть четыре предположения B_0, B_1, B_2, B_3, где B_i означает, что в партии i бракованных изделий. По условиям задачи все эти предположения равновозможны и поэтому имеют вероятности $P=1/4$ каждое. Обозначим через A факт проверки трех годных изделий. Требуется найти $P(B_0 / A)$.

Заметим, что $P(A/B_0)=1$, $P(A/B_1)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{10}=0,7$, $P(A/B_2)=$ $=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{7}{15}$, $P(A/B_3)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}$. Поэтому по формулам Байеса (2.5.1)

$$P(B_0/A)=$$

$$=\frac{P(B_0)P(A/B_0)}{P(B_0)P(A/B_0)+P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{15}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{24}}=\frac{24}{59}\approx 0,41.$$

Ответ. 24/59.

Задача 2.20.1. В партии из n изделий с равными шансами содержится от нуля до m изделий со скрытыми дефектами (брак). Взятые наугад k изделий оказались годными. Какова вероятность того, что среди оставшихся непроверенных изделий содержится s изделий со скрытыми дефектами? (См. пример 2.20 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.20.1.

№	n	m	k	s	№	n	m	k	s	№	n	m	k	s
1	8	2	3	1	**11**	10	2	3	0	**21**	12	3	3	0
2	10	3	4	1	**12**	12	2	3	2	**22**	8	4	2	1
3	12	3	2	2	**13**	8	3	2	1	**23**	10	3	4	3
4	8	2	3	0	**14**	10	2	3	2	**24**	12	3	3	1
5	10	3	2	1	**15**	12	3	2	1	**25**	16	3	3	0
6	12	2	3	0	**16**	8	3	2	2	**26**	10	3	2	0
7	8	2	3	2	**17**	10	3	4	0	**27**	12	3	3	2
8	10	2	2	1	**18**	12	3	2	0	**28**	16	2	3	1
9	12	2	3	1	**19**	8	2	4	0	**29**	10	3	2	2
10	8	3	2	0	**20**	10	3	4	2	**30**	12	3	3	3

Задача 2.20.2. В условиях задачи 2.23 выбранные из двух урн шары оказались одного цвета. Какова вероятность того, что это именно белые шары? (См. примеры 2.14, 2.20 и исходные данные к задаче 2.20.1.)

Пример 2.21. Вероятность того, событие B произойдет в течение часа, равна 0,9. Оказалось, что в течение первых 40 мин. событие B не произошло. Какова вероятность того, что это событие появится в оставшиеся 20 мин. времени?

Решение. В отношении события B могут быть два предположения: либо оно появится (B), либо оно не появится ($\overline{B}$). Обозначим через A тот факт, что событие B не появилось в течение первых 40 мин. Нас интересует вероятность $P(B / A)$. По формулам Байеса (2.5.1) получим

$$P(B / A) = \frac{P(B)P(A / B)}{P(B)P(A / B) + P(\overline{B})P(A / \overline{B})}.$$

В задаче по умолчанию предполагается, что событие B, если оно происходит, то равновозможно его появление в любой момент данного часа. Поэтому по геометрическому определению вероятности $P(A / B) = 20 / 60 = 1 / 3$, а $P(A / \overline{B}) = 1$. В итоге получаем, что

$$P(B / A) = \frac{0{,}9 \cdot 1 / 3}{0{,}9 \cdot 1 / 3 + 0{,}1 \cdot 1} = 3 / 4.$$

Ответ. 3/4.

Задача 2.21. В течение времени T событие B может произойти с вероятностью p. Оказалось, что в течение первых t мин. ($0 < t < T$) событие не произошло. Какова вероятность того, что событие не произойдет в оставшееся время? (См. пример 2.21 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.21.

№	t	p	№	t	p	№	t	p	№	t	p	№	t	p	№	t	p
1	10	0,9	**6**	10	0,8	**11**	10	0,7	**16**	10	3/4	**21**	10	2/3	**26**	25	3/4
2	30	0,8	**7**	30	0,9	**12**	30	3/4	**17**	30	0,7	**22**	25	0,5	**27**	30	0,5
3	25	3/4	**8**	25	2,3	**13**	25	0,8	**18**	50	3/4	**23**	30	2/3	**28**	45	0,7
4	45	0,9	**9**	45	0,8	**14**	20	0,7	**19**	20	0,8	**24**	10	0,6	**29**	50	0,8
5	20	2/3	**10**	20	0,9	**15**	50	0,9	**20**	45	3/4	**25**	45	2/3	**30**	25	0,7

Пример 2.22. В кошельке лежат четыре монеты. Три монеты обычных, а у четвертой на той и другой стороне изображен герб. Наугад взяли монету и подбросили три раза. Все три раза выпал герб. Какова вероятность того, что и при четвертом подбрасывании выпадет герб?

Решение. Обозначим через B_1 — выбор монеты с одним гербом, через B_2 — выбор монеты с двумя гербами. Априорные вероятности этих событий равны: $P(B_1) = 3 / 4$ и $P(B_2) = 1 / 4$.

Обозначим через A — выпадение трех гербов подряд. Апостериорные вероятности по формулам Байеса равны:

$$P(B_1 / A) = \frac{3 / 4 \cdot (1 / 2)^3}{3 / 4 \cdot (1 / 2)^3 + 1 / 4 \cdot 1} = \frac{3}{11}, \; P(B_2 / A) = \frac{1 / 4 \cdot 1}{3 / 4 \cdot (1 / 2)^3 + 1 / 4 \cdot 1} = \frac{8}{11}.$$

Тогда по формуле полной вероятности (2.4.1):

P(выпадения герба в четвертый раз) $= 3 / 11 \cdot 1 / 2 + 8 / 11 \cdot 1 = 19 / 22$.

Ответ. 19/22.

Задача 2.22. В каждой из трех одинаковых внешне урн находится n шаров. В первой урне k_1 белых, а остальные черные, во второй урне k_2 белых, а остальные черные, в третьей урне все шары черные. Из взятой наугад урны извлекли один за другим m шаров. Все они оказались черными. Какова вероятность того, что следующий шар тоже будет черным? (См. пример 2.22 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.22.

№	n	m	k_1	k_2	№	n	m	k_1	k_2	№	n	m	k_1	k_2
1	6	2	1	2	**11**	6	2	3	4	**21**	6	3	2	2
2	8	2	2	2	**12**	8	2	3	2	**22**	8	2	3	3
3	10	2	5	5	**13**	8	2	5	5	**23**	8	3	4	3
4	6	2	2	2	**14**	6	2	4	3	**24**	10	3	5	5
5	8	2	3	4	**15**	8	2	4	4	**25**	6	3	2	1
6	6	2	3	2	**16**	8	3	4	5	**26**	8	3	4	5
7	8	3	3	2	**17**	6	3	1	2	**27**	8	2	2	1
8	6	2	2	3	**18**	8	2	2	3	**28**	8	3	3	5
9	8	2	4	3	**19**	8	3	3	4	**29**	8	3	4	4
10	10	2	4	4	**20**	8	3	5	4	**30**	10	2	4	6

2.6. Повторные независимые испытания

2.6.1. Формула Бернулли

Опыты называются *независимыми*, если вероятность каждого исхода любого опыта не изменяется от того, какие исходы имели другие опыты.

Пусть производится n независимых опытов и известна $P(A) = p$ — вероятность появления события A в каждом из опытов ($P(\overline{A}) = 1 - p = q$). Тогда вероятность того, что в n независимых опытах событие A появится ровно k раз, равна по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (2.6.1)$$

Число $k = k_0$, при котором вероятность $P_n(k)$ принимает наибольшее значение, называется *наивероятнейшим числом появления события*.

Если $(n+1)p$ — число дробное, то k_0 равно целой части числа $(n+1)p$. Если же $(n+1)p$ — число целое, то k_0 принимает два значения: $k_0 = (n+1)p - 1$ и $k_0 = (n+1)p$.

Пример 2.23.1. Предположим, что 30% студентов нашего института занимаются спортом. Какова вероятность того, что среди первых пяти встречных студентов окажется только один спортсмен? Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы один спортсмен? Каково наиболее вероятное число спортсменов среди них?

Решение. Так как студентов в институте много (несколько тысяч), то по мере опроса нескольких из них пропорции в оставшейся части практически не изменяются. Поэтому можно считать опрос каждого студента независимым опытом. Всего опытов производится $n = 5,$ а вероятность положительного ответа $p = 0,3.$ По формуле Бернулли (2.6.1) имеем $P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,3 \cdot (0,7)^4 = 0,36015.$ Вероятность хотя бы одного правильного ответа проще вычислять, если перейти к противоположному событию: $P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(0) = 1-(0,7)^5 = 1 - 0,16807 = 0,83193.$ Так как $(n+1)p = (5+1)0,3 = 1,8$ (целая часть числа равна 1), то наиболее вероятное число спортсменов среди пяти опрошенных $k_0 = 1.$

Ответ. 0,36015; 0,83193; 1.

Пример 2.23.2. На каждый вопрос предлагается три возможных ответа, из которых следует выбрать один правильный. Задано пять вопросов. Какова вероятность того, что путем простого угадывания удастся правильно ответить на четыре вопроса? Какова вероятность угадать правильный ответ хотя бы на один вопрос?

Решение. Выбор ответа на вопрос можно рассматривать как независимый опыт. Всего таких опытов производится $n = 5,$ а вероятность успеха в каждом опыте равна $p = 1/3.$ Тогда вероятность путем простого угадывания правильно ответить на четыре вопроса равна $P_5(4) =$ $= C_5^4 (1/3)^4 (2/3)^1 = 10/243 \approx 1/24.$

Вероятность угадать хотя бы один правильный ответ равна

$$P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(0) = 1-(2/3)^5 = 1 - 32/243 = 211/243 \approx 7/8.$$

Ответ. $10/243 \approx 1/24;$ $211/243 \approx 7/8.$

Задача 2.23. Из кошелька на стол высыпали *n* монет.

а) Какова вероятность того, что *k* из них упали гербом вверх?

б) Какова вероятность того, что не менее *k* из них упали гербом вверх?

в) Каково наиболее вероятное число монет, упавших гербом вверх?

(См. примеры 2.23.1, 2.23.2 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.23.

№	*n*	*k*	№	*n*	*k*	№	*n*	*k*	№	*n*	*k*	№	*n*	*k*	№	*n*	*k*
1	4	1	**6**	5	3	**11**	6	4	**16**	7	4	**21**	8	3	**26**	9	2
2	4	2	**7**	5	4	**12**	6	5	**17**	7	5	**22**	8	4	**27**	9	3
3	4	3	**8**	6	1	**13**	7	1	**18**	7	6	**23**	8	5	**28**	9	4
4	5	1	**9**	6	2	**14**	7	2	**19**	8	1	**24**	8	6	**29**	9	5

5	5	2	**10**	6	3	**15**	7	3	**20**	8	2	**25**	9	1	**30**	9	6

Пример 2.24. Вероятность попадания в цель при выстреле равна 0,3. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы вероятность поражения цели была больше 0,9?

Решение. Каждый выстрел можно рассматривать как независимое испытание, и в каждом из них вероятность появления события (попадания в цель) равна $p = 0{,}3.$ Цель будет поражения, если в n выстрелах будет хотя бы одно попадание, вероятность чего равна

$$P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) > 0{,}9 \Rightarrow 1 - (0{,}7)^n > 0{,}9 \Rightarrow (0{,}7)^n < 0{,}1 \Rightarrow n \geq 7.$$

Ответ. $n \geq 7.$

Задача 2.24.1. Для игрока в баскетбол вероятность забросить мяч в корзину со штрафного броска равна p. Сколько бросков надо предоставить игроку, чтобы вероятность попадания в корзину хотя бы один раз было больше $P = 0{,}9$? (См. пример 2.24, $p = 0{,}n,$ n — номер варианта, для девятого варианта $n = 35.$)

Задача 2.24.2. В отделе технического контроля проверку каждой большой партии изделий производят следующим образом: отбирается наугад n изделий и если среди них окажется хотя бы одно бракованное изделие, то партия направляется на пересортировку. Каков должен быть объем случайной выборки ($n = ?$), чтобы партии, содержащие более k% брака, были отвергнуты с вероятностью большей, чем P?

В вариантах 1–9 величина k равна последней цифре номера варианта, а $P = 0{,}9.$

Для вариантов 11–19 величина k равна последней цифре номера варианта, а $P = 0{,}95.$

В вариантах 21–29 считайте $P = 0{,}98,$ а величину k возьмите равной последней цифре номера варианта.

В вариантах 10, 20, 30 возьмите $P = 0{,}99,$ а k равным первой цифре номера варианта.

(См. пример 2.24.)

Пример 2.25. Монету подбрасывают до тех пор, пока герб не выпадет три раза. Какова вероятность того, что до этого цифра выпадет пять раз?

Решение. Всего должно состояться восемь подбрасываний монеты. Чтобы опыт закончился именно на восьмом броске, необходимо при восьмом подбрасывании получить герб, вероятность чего равна 1/2, и до этого при семи подбрасываниях герб должен выпасть ровно два раза, вероятность чего по формуле Бернулли (2.6.1) равна

$$P_7(2) = C_7^2(1/2)^2(1/2)^5 = 21/128.$$

В силу независимости опытов искомая вероятность равна $(21/128)(1/2) = $ $= 21/256 \approx 1/13.$

Ответ. $21/256 \approx 1/13.$

Задача 2.25. Вероятность попасть в цель при одном выстреле равна p. Стрельба производится до n попаданий. Какова вероятность того, что при этом будет m промахов? (См. пример 2.25 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.25.

№	n	m	p	№	n	m	p	№	n	m	p	№	n	m	p	№	n	m	p
1	2	3	0,3	**7**	5	4	0,4	**13**	4	5	0,4	**19**	5	5	0,2	**25**	6	3	0,4
2	3	3	0,4	**8**	3	5	0,2	**14**	4	5	0,2	**20**	5	5	0,4	**26**	7	2	0,2
3	4	3	0,2	**9**	3	6	0,4	**15**	5	2	0,4	**21**	6	2	0,3	**27**	7	3	0,3
4	5	3	0,5	**10**	3	7	0,3	**16**	5	2	0,6	**22**	6	3	0,2	**28**	5	6	0,4
5	5	2	0,3	**11**	4	3	0,3	**17**	5	3	0,3	**23**	6	4	0,6	**29**	7	4	0,3
6	5	4	0,6	**12**	4	4	0,2	**18**	5	4	0,3	**24**	6	2	0,5	**30**	7	5	0,4

Пример 2.26. Из начала координат начинает движение точка. На каждом шаге она с вероятностью $p = 1/2$ сдвигается на единицу вверх или вероятностью $q = 1 - p = 1/2$ сдвигается на единицу вправо. Какова вероятность того, что после восьми шагов частица окажется в точке A (5;3)? Какова вероятность того, что за эти восемь шагов частица поднимется не менее, чем на пять единиц вверх?

Решение. Каждый шаг частицы можно считать независимым испытанием. Частица после восьми шагов окажется в точке A(5;3), если из восьми шагов три будут сделаны вверх (а остальные пять — вправо), вероятность чего по формуле Бернулли (2.6.1) равна

$$P_8(3) = C_8^3(1/2)^5(1/2)^3 \quad 7/32 \approx 0,22.$$

Частица поднимется не менее чем на пять единиц вверх, если не менее пяти шагов из восьми будут сделаны вверх. Вероятность этого равна

$$P_8(k \geq 5) \quad P_8(5) + P_8(6) + P_3(7) + P_8(8) = 93/256 \approx 0,36.$$

Ответ. $93/256 \approx 0,36.$

Задача 2.26.1. Из начала координат начинает движение точка. На каждом шаге она с вероятностью p сдвигается на единицу вверх или вероятностью $q = 1 - p$ сдвигается на единицу вправо. Какова вероятность того, что после n шагов частица окажется в точке $A(k; n-k)$? Какова вероятность того, что за эти n шагов частица поднимется не более, чем на k единиц вверх? (См. пример 2.26 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.26.1.

№	n	p	k	№	n	p	k	№	n	p	k	№	n	p	k	№	n	p	k
1	9	1/2	3	**7**	5	1/4	1	**13**	9	1/4	2	**19**	7	1/2	1	**25**	7	1/3	1
2	5	1/2	2	**8**	9	2/3	2	**14**	6	1/2	0	**20**	8	1/2	3	**26**	8	2/3	3
3	8	1/2	2	**9**	6	1/4	4	**15**	6	1/2	2	**21**	7	2/3	3	**27**	9	3/4	1
4	8	1/3	3	**10**	6	1/4	0	**16**	6	1/2	4	**22**	8	2/3	1	**28**	7	1/4	3
5	9	1/3	2	**11**	6	1/4	2	**17**	7	1/2	5	**23**	7	1/3	5	**29**	8	1/4	3
6	5	1/3	2	**12**	8	1/4	3	**18**	7	1/2	3	**24**	7	1/3	3	**30**	7	1/4	5

Задача 2.26.2. Частица в начальный момент времени находится в начале координат. В каждую из последующих n секунд она сдвигается с вероятностями, равными 1/2, на единицу вправо или влево независимо от движений в предшествующие секунды. Какова вероятность того, что через n секунд частица окажется в точке с координатой k? (См. пример 2.26 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.26.2.

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	8	6	**6**	8	–6	**11**	9	3	**16**	9	–7	**21**	10	–6	**26**	12	4
2	8	4	**7**	10	8	**12**	9	1	**17**	10	4	**22**	10	–8	**27**	12	2
3	8	2	**8**	10	6	**13**	9	–1	**18**	10	2	**23**	12	10	**28**	12	–2
4	8	–2	**9**	9	7	**14**	9	–3	**19**	10	–2	**24**	12	8	**29**	12	–4
5	8	–4	**10**	9	5	**15**	9	–5	**20**	10	–4	**25**	12	6	**30**	12	–6

Пример 2.27. Каждый из двух стрелков четыре раза стреляет в цель. Вероятности попасть в цель при каждом выстреле равны для них соответственно 0,6 и 0,8. Какова вероятность того, что у первого будет два промаха, а у второго только один? Какова вероятность того, что у стрелков будет равное число попаданий?

Решение. Каждый выстрел можно считать независимым опытом. Первый стрелок должен в четырех выстрелах попасть два раза, вероятность чего по формуле Бернулли (2.6.1) равна

$$P_4(2) = C_4^2(0,6)^2(0,4)^2 = 0,3456.$$

Второй должен попасть три раза, вероятность чего равна

$$P_4(3) = C_4^3(0,8)^3(0,2)^1 = 0,4096.$$

Вероятность двух промахов у первого стрелка и одного промаха у второго стрелка равна, в силу независимости опытов, $0,3456 \cdot 0,4096 = 0,1416$.

Вероятность того, что у каждого стрелка будет m попаданий равна

$$C_4^m(0,6)^m(0,4)^{4-m}C_4^m(0,8)^m(0,2)^{4-m}.$$

Поэтому вероятность равного числа попаданий равна

$$\sum_{m=0}^{4} C_4^m(0,6)^m(0,4)^{4-m}C_4^m(0,8)^m(0,2)^{4-m} = 0,2102.$$

Ответ. 0,3456; 0,2102.

Задача 2.27. Биатлонисту на каждом из двух рубежей необходимо поразить пять мишеней. Вероятность поразить мишень при выстреле лежа (на первом рубеже) равна p_1, а при выстреле стоя (на втором рубеже) эта вероятность равна p_2. Какова вероятность того, что оба рубежа биатлонист преодолеет без промахов? Какова вероятность того, что на каждом рубеже биатлонист допустит по одному промаху. Какова вероятность того, что биатлонист допустит только один промах? Какова вероятность того, что на первом рубеже биатлонист допустит k_1 промах, а на втором k_2 промахов. (См. пример 2.27 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.27.

№	p_1	p_2	k_1	k_2	№	p_1	p_2	k_1	k_2	№	p_1	p_2	k_1	k_2
1	0,95	0,85	0	2	**11**	0,95	0,75	0	2	**21**	0,80	0,65	2	2
2	0,95	0,80	1	2	**12**	0,95	0,70	0	2	**22**	0,90	0,70	2	2
3	0,90	0,85	0	2	**13**	0,90	0,65	1	2	**23**	0,90	0,70	1	2
4	0,90	0,80	0	2	**14**	0,90	0,60	1	2	**24**	0,80	0,70	1	2
5	0,90	0,75	1	2	**15**	0,85	0,60	1	2	**25**	0,80	0,70	0	3
6	0,90	0,70	0	2	**16**	0,85	0,80	1	2	**26**	0,90	0,75	1	3
7	0,85	0,80	1	2	**17**	0,90	0,70	1	2	**27**	0,90	0,65	1	3
8	0,85	9,75	0	2	**18**	0,90	0,75	2	2	**28**	0,90	0,65	2	2
9	0,85	0,75	1	2	**19**	0,80	0,75	1	2	**29**	0,90	0,75	1	2
10	0,80	0,70	2	2	**20**	0,80	0,65	1	2	**30**	0,95	0,75	2	2

Пример 2.28. Среди 300 изделий 15 бракованных. Для проверки наугад выбрали пять изделий. Какова вероятность того, что среди них нет бракованных? Сравнить точное значение вероятности с приближенным, найденным по формуле Бернулли.

Решение. Пусть A — интересующее нас событие. Выбрать пять изделий из 300 можно C_{300}^5 способами. Событию A благоприятствуют те способы выбора, при которых пять изделий выбирается из 285 годных. Число таких способов равно C_{285}^5. Точное значение искомой вероятности (с точностью до одной десятитысячной) равно $P(A) = C_{285}^5 \,/\, C_{300}^5 = 0,7724$.

Так как партия изделий велика, то выбор одного за другим нескольких изделий не меняет заметно пропорции в этой партии. Поэтому можно считать, что производится пять независимых опытов и что вероятность выбора бракованного изделия в каждом опыте примерно равна $p = 15/300 = 0,05$. По формуле Бернулли (2.6.1) приближенное значение равно:

$$P(A) = P_5(0) \quad C_5^0(0,05)^0(0,95)^5 \quad 0,7738. \quad =$$

Ответ. Точное значение 0,7724;

приближенное по формуле Бернулли 0,7738.

Задача 2.28. При приемочном контроле из партии, состоящей из n изделий, наугад проверяют m изделий. Если среди проверяемых окажется хотя бы одно бракованное, то партия бракуется. Какова вероятность приема партии, если на самом деле в ней k бракованных изделий? Сравните точное значение этой вероятности с приближенным, найденным по формуле Бернулли. (См. пример 2.28 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.28.

№	n	m	k	№	n	m	k	№	n	m	k	№	n	m	k	№	n	m	k
1	100	10	1	**7**	200	10	4	**13**	75	5	3	**19**	300	25	3	**25**	500	25	2
2	100	10	2	**8**	200	20	2	**14**	75	10	3	**20**	300	50	3	**26**	150	10	3
3	100	10	3	**9**	200	20	1	**15**	50	10	1	**21**	400	40	2	**27**	150	15	1
4	100	20	1	**10**	200	30	1	**16**	100	5	1	**22**	400	20	2	**28**	150	30	1
5	100	15	1	**11**	75	15	1	**17**	100	15	2	**23**	500	50	2	**29**	150	15	2
6	200	10	2	**12**	50	5	1	**18**	300	30	3	**24**	500	25	4	**30**	200	10	1

Пример 2.29. Два игрока A и B подбрасывают монету. Если монета выпадает гербом вверх, то A получает очко. Если выпадает решка, то очко получает игрок B.

а) Какова вероятность того, что после 10 бросков монеты счет будет равным?

б) Какова вероятность того, что после этих бросков у игрока A будет на два очка больше?

Решение. Каждый бросок монеты можно считать независимым опытом, и таких опытов производится 10. Счет будет равным, если в результате десяти бросков герб выпадет пять раз. Вероятность этого по формуле Бернулли (2.6.1) равна

$$P_{10}(5) = C_{10}^{5}(0{,}5)^{10} \quad \frac{63}{256} \approx \frac{1}{4}.$$

Игрок A получит на два очка больше, если в десяти бросках герб выпадет шесть раз, вероятность чего равна

$$P_{10}(6) = C_{10}^{6}(0{,}5)^{10} \quad \frac{105}{512} \approx \frac{1}{5}.$$

Ответ. $63/256 \approx 1/4$; $105/512 \approx 1/5$.

Задача 2.29. В урне содержится m_1 белых и m_2 черных шаров. Из урны производится повторный выбор n шаров.

а) Какова вероятность того, что будет выбрано равное число белых и черных шаров?

б) Какова вероятность того, что белых будет выбрано на k больше?

в) Какова вероятность того, что будет выбрано не менее двух белых шаров?

(См. пример 2.29 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.29.

№	m_1	m_2	n	k	№	m_1	m_2	n	k	№	m_1	m_2	n	k
1	1	2	6	2	**11**	1	2	12	4	**21**	4	2	10	4
2	1	2	8	2	**12**	1	2	10	4	**22**	2	4	6	2
3	1	2	10	2	**13**	2	3	6	2	**23**	2	4	8	4
4	3	1	8	2	**14**	2	3	8	4	**24**	2	4	10	4
5	3	1	10	2	**15**	2	3	10	4	**25**	4	3	6	2
6	2	1	6	2	**16**	3	2	6	2	**26**	4	3	8	2
7	2	1	8	2	**17**	3	2	8	4	**27**	4	3	10	4
8	3	1	6	2	**18**	3	2	10	4	**28**	3	4	6	2
9	2	1	10	4	**19**	4	2	6	2	**29**	3	4	8	4
10	1	2	8	4	**20**	4	2	8	4	**30**	3	4	10	4

Пример 2.30. Вероятность того, что в пяти опытах событие A появится хотя бы один раз, равна 0,92224. Какова вероятность того, в трех опытах это событие появится не более одного раза?

Решение. Пусть вероятность появления события в одном опыте равна p. По условию,

$$P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 p^0 q^5 = 1 - q^5 = 0,92224.$$

Откуда $q^5 = 0,07776$, т.е. $q = 0,6$, а $p = 0,4$. Поэтому

$$P_3(k \leq 1) = P_3(0) + P_3(1) = C_3^0 (0,4)^0 (0,6)^3 + C_3^1 \cdot 0,4 \cdot (0,6)^2 = 0,216 + 0,432 = 0,648.$$

Ответ. 0,648.

Задача 2.30. Вероятность того, что в n независимых опытах событие A произойдет хотя бы один раз, равна p. Какова вероятность того, что в m независимых опытах это событие появится не менее k раз? (См. пример 2.30 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.30.

№	n	p	m	k	№	n	p	m	k	№	n	p	m	k
1	3	0,488	4	1	**11**	3	0,973	5	2	**21**	3	0,936	5	2
2	4	0,5904	3	1	**12**	4	0,7599	3	1	**22**	4	0,7599	3	2
3	3	0,657	2	1	**13**	3	0,488	2	1	**23**	3	0,973	4	1
4	4	0,7599	3	2	**14**	4	0,7599	5	2	**24**	4	0,7599	5	1
5	3	0,784	5	1	**15**	3	0,657	5	1	**25**	3	0,488	5	2
6	4	0,8704	2	1	**16**	4	0,8704	3	1	**26**	4	0,8704	5	1
7	3	0,875	4	2	**17**	3	0,784	5	2	**27**	3	0,657	4	1
8	4	0,9375	5	1	**18**	4	0,9375	3	2	**28**	4	0,9375	5	2
9	3	0,936	2	1	**19**	3	0,875	2	1	**29**	3	0,784	2	1
10	4	0,5904	5	1	**20**	4	0,5904	3	1	**30**	4	0,9744	5	1

Пример 2.31. Вероятность того, что в четырех независимых опытах событие *A* произойдет два раза, рана 3/8. Какова вероятность того, что в шести независимых опытах событие тоже произойдет два раза?

Решение. Пусть вероятность события *A* равна $P(A) = p$. По формуле Бернулли (2.6.1)

$$P_4(2) = C_4^2 \; p^2(1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2 = 3/8,$$

откуда $p^2(1-p)^2 = 1/16$ или $p(1-p) = 1/4$.

В итоге имеем равенство $4p^2 - 4p + 1 = 0$, из которого следует, что $p = 1/2$. Тогда $P_6(2) = C_6^2 \; 0{,}5^2(1-0{,}5)^2 = 15/64$.

Ответ. 15/64.

Задача 2.31. Вероятность того, что в четырех независимых опытах событие *A* произойдет два раза, равна:

8/27 в вариантах 1, 6, 11, 16, 21, 26;

27/128 в вариантах 2, 7, 12, 17, 22, 27;

96/625 в вариантах 3, 8, 13, 18, 23, 28;

25/216 в вариантах 4, 9, 14, 19, 24, 29;

216/625 в вариантах 5, 10, 15, 20, 25, 30.

В нечетных вариантах $P(A) = p \le 1/2$, в четных вариантах $P(A) = p > 1/2$.

В вариантах 1–10 найдите $P_5(2)$, в вариантах 11–20 найдите $P_5(3)$, в вариантах 21–30 найдите $P_5(4)$.

(См. пример 2.31.)

Пример 2.32. В цехе шесть станков, которые работают независимо друг от друга. В течение рабочего дня (восемь часов) каждый станок простаивает в сумме два часа. Какова доля времени, в течение которой в цехе работает не менее пяти станков?

Решение. Наблюдение над состоянием каждого станка можно рассматривать как независимый опыт, число которых $n = 6$. Вероятность застать станок работающим равна $p = 6/8 = 3/4$ (в соответствии с геометрическим определением вероятности). Тогда вероятность застать работающими не менее пяти станков равна

$$P_6(k \ge 5) = P_6(5) + P_6(6) = C_6^5 (3/4)^5 (1/4)^1 + C_6^6 (3/4)^6 (1/4)^0 = 243/512 \approx 0{,}47.$$

Ответ. $243/512 \approx 0{,}47$.

Задача 2.32. На светофоре красный и зеленый свет горят по *t* сек., а желтый — 5 сек. Автомобилю предстоит проехать *n* перекрестков, на которых светофоры работают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что:

а) все светофоры автомобиль проедет без остановки;

б) автомобиль будет ожидать у светофора не менее двух раз.

(См. пример 2.32 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.32.

№	t	n	№	t	n	№	t	n	№	t	n	№	t	n	№	t	n
1	30	4	**6**	55	4	**11**	45	4	**16**	35	4	**21**	60	4	**26**	50	4
2	35	5	**7**	60	5	**12**	50	5	**17**	40	5	**22**	30	5	**27**	55	5
3	40	6	**8**	30	6	**13**	55	6	**18**	45	6	**23**	35	6	**28**	60	6
4	45	7	**9**	35	7	**14**	60	7	**19**	50	7	**24**	40	7	**29**	30	7
5	50	8	**10**	40	8	**15**	30	8	**20**	55	8	**25**	45	8	**30**	35	8

2.6.2. Обобщенная формула Бернулли

Формулу Бернулли (2.6.1) можно обобщить на случай независимых опытов, каждый из которых имеет *более двух* возможных исходов.

Пусть в результате опыта происходит одно из m попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$ соответственно ($p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$). Тогда вероятность того, что в результате независимых опытов событие A_1 наступит k_1 раз, событие A_2 наступит k_2 раза, …, событие A_m наступит k_m раз, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, равна:

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{k_m}. \qquad (2.6.2)$$

Пример 2.33. В крупной партии изделий 60% изделий первого сорта, 30% — второго, 10% — третьего сорта. Для проверки взяли наугад шесть изделий. Какова вероятность того, что среди них три изделия первого сорта, два изделия второго сорта и одно изделие третьего сорта?

Решение. Так как партия изделий велика, то последовательный выбор из нее нескольких изделий практически не меняет пропорции в партии и, значит, не меняет вероятности выбора изделия данного сорта. Поэтому можно в качестве математической модели взять схему независимых опытов. Будем считать, что производится шесть независимых опытов, в каждом из которых вероятность выбора изделия первого сорта равна $p_1 = 0,6$, второго — 0,3, третьего — 0,1. В соответствии с формулой (2.6.2)

$$P_6(3,2,1) = \frac{6!}{3!\,2!\,1!}(0,6)^3(0,3)^2(0,1) \quad 0,11664 \approx 0,12.$$

Ответ. $0,11664 \approx 0,12$.

Задача 2.33.1. В урне находится m_1 белых, m_2 черных и m_3 красных шаров. Из урны повторным способом выбирают в нечетных вариантах шесть шаров, в четных — семь шаров. Какова вероятность того, что в k_1 раз будет выбран белый шар, в k_2 — черный шар и в k_3 — красный? (См. пример 2.33 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.33.1.

№	m_1	m_2	m_3	k_1	k_2	k_3	№	m_1	m_2	m_3	k_1	k_2	k_3
1	3	5	2	2	2	2	**16**	4	4	2	3	3	1
2	4	5	3	2	3	2	**17**	3	4	2	2	2	2
3	3	5	2	2	3	1	**18**	4	4	3	3	3	1
4	4	5	3	3	2	2	**19**	3	5	3	2	2	2
5	4	5	3	2	3	1	**20**	4	4	3	3	2	2
6	4	5	3	2	3	2	**21**	4	4	3	3	2	1
7	4	5	3	3	2	1	**22**	3	4	4	1	3	3
8	5	4	3	2	2	3	**23**	3	4	4	1	2	3
9	5	4	3	3	2	1	**24**	3	4	4	2	2	3
10	4	5	3	3	2	2	**25**	4	4	3	1	3	2
11	3	5	4	2	3	1	**26**	4	3	4	3	2	2
12	3	5	4	2	3	2	**27**	4	4	2	2	2	2
13	3	4	3	3	1	2	**28**	2	4	4	2	2	3
14	3	5	4	2	4	1	**29**	4	4	2	3	2	1
15	3	5	4	2	2	2	**30**	2	4	4	1	3	3

Задача 2.33.2. В урне находится m_1 белых шаров и m_2 черных. Из урны наугад выбирают два шара, затем шары возвращают в урну, перемешивают и опыт повторяют. Предполагается проделать n таких опытов. Какова вероятность того, что в k_1 раз будут выбраны оба белых шара, в k_2 раз — оба черных шара и в k_3 раз — шары разного цвета? (См. пример 2.33; величины m_1, m_2, n, k_1, k_2, k_3 возьмите из исходных данных к задаче 2.33.1.)

Пример 2.34. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна $p = 0,2$. Подбрасывают игральный кубик. Если выпадает m очков, то стрелок получает право на m выстрелов. Какова вероятность поражения цели?

Решение. При m выстрелах вероятность поражений цели (вероятность хотя бы одного попадания) равна $1-(0,8)^m$. Так как вероятность выпадения каждой грани равна 1/6, то полная вероятность поражения цели равна

$$P = [(1-0,8)+(1-0,8^2)+(1-0,8^3)+(1-0,8^4)+(1-0,8^5)+(1-0,8^6)]\frac{1}{6} =$$

$$= 0,508096 \approx 0,51.$$

Ответ. $0,508096 \approx 0,51$.

Задача 2.34. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна p. Монету подбрасывают n раз. Если герб выпадает m раз, то стрелок получает право на m выстрелов. Какова вероятность поражения цели? (См. пример 2.34 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.34.

№	n	p	№	n	p	№	n	p	№	n	p	№	n	p
1	4	0,1	**7**	4	0,4	**13**	4	0,2	**19**	4	0,5	**25**	4	0,3
2	3	0,15	**8**	3	0,45	**14**	3	0,25	**20**	3	0,6	**26**	3	0,35
3	2	0,2	**9**	2	0,5	**15**	2	0,3	**21**	2	0,1	**27**	2	0,4
4	4	0,25	**10**	4	0,6	**16**	4	0,35	**22**	4	0,15	**28**	4	0,45
5	3	0,3	**11**	3	0,1	**17**	3	0,4	**23**	3	0,2	**29**	3	0,5
6	2	0,35	**12**	2	0,15	**18**	2	0,45	**24**	2	0,25	**30**	2	0,6

2.7. Простейший (пуассоновский) поток событий

Потоком событий называется последовательность событий, происходящих одно за другим в случайные моменты времени. Например, телефонные вызовы, автомобили, подъезжающие к перекрестку, выходы из строя некоторого устройства, покупатели, приходящие в магазин и т.д. Для наглядности можно изображать моменты наступления событий точками на оси времени. События могут распределяться не только во времени, но и в пространстве (например, опечатки в тексте, капли дождя на асфальте, пожары в городе и т.д.).

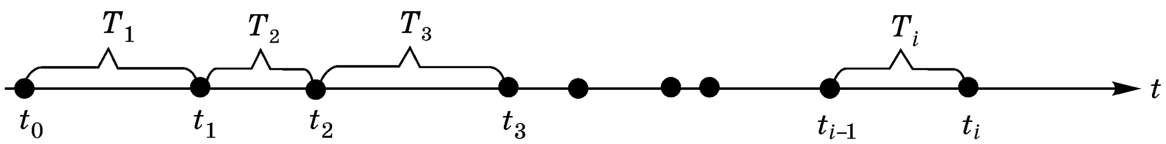


Рис. 2.7.1

На рис. 2.7.1 точками отмечены моменты поступления событий, t_i — момент поступления i-го события, $T_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1,2,3,\ldots$, случайные интервалы между последовательными моментами прихода событий. Потоки событий различаются распределениями величин T_i, характером их зависимости или независимости, числом событий происходящих в данный момент времени. Например, события могут происходить через равные промежутки времени. Такой поток называют регулярным или детерминированным.

Одним из самых интересных и в математическом плане и с точки зрения приложений является *пуассоновский или простейший поток*.

Поток событий называется *простейшим* или *пуассоновским*, если выполняются следующие условия:

1. Появление того или иного числа событий на интервале времени длины t зависит только от длины этого интервала и не зависит от его

расположения на оси времени и от требований, приходящих вне этого интервала.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность появления k событий на интервале времени длины t.

2. Вероятность появления одного события за малый промежуток времени Δt пропорциональна длине этого промежутка, т.е. $P_1(\Delta t) = \mu\Delta t$, где μ — некоторая постоянная.

3. Вероятность появления двух или более событий за малый промежуток времени Δt есть величина более высокого порядка малости по сравнению с Δt.

Независимость вероятностей $P_k(t)$ от расположения отрезка длины t на числовой оси означает стационарность потока, а независимость от событий вне отрезка означает отсутствие последействия, т.е. независимость событий потока.

Из условий 2 и 3 следует, что за малый промежуток времени Δt может либо наступить одно событие, либо ни одного события не поступит. Остальными возможностями можно пренебречь. В этом случае говорят, что поток событий *ординарен*, т.е. события происходят по одному, а не группами. Формально свойства 2 и 3 означают, что

$$P_0(\Delta t) + P_1(\Delta t) + o(\Delta t) = 1, \tag{2.7.1}$$

или

$$P_0(\Delta t) = 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t).$$

Построим математическую модель простейшего потока. Прежде всего из определения простейшего потока выведем формулы для вероятностей $P_i(t)$.

Чтобы не заниматься выводом формулы для каждой вероятности отдельно, рассмотрим так называемую производящую функцию

$$\Phi(t,z) = P_0(t) + zP_1(t) + z^2P_2(t) + \ldots + z^nP_n(t) + \ldots, \tag{2.7.2}$$

для которой интересующие нас вероятности служат коэффициентами ее разложения в ряд по степеням z.

Выберем $0 < z < 1$, и будем считать, что каждое событие потока независимо от других может оказаться «красным» с вероятностью z. Такая условная раскраска событий позволяет придать функции $\Phi(t,z)$ вероятностный смысл, что упрощает дальнейшие рассуждения по выводу для нее дифференциального уравнения

Выражение $zP_1(t)$ можно понимать как вероятность того, что за время t поступило одно событие и оно оказалось «красным», $z^2P_2(t)$ — можно считать вероятностью того, что за время t поступило два события и они оба «красные». В свою очередь, $z^nP_n(t)$ можно расценивать как вероятность того, что за время t поступило n «красных» событий. Это дает возможность понимать $\Phi(t,z)$ как полную вероятность того, что за время t поступили только «красные» события.

Составим уравнение для определения $\Phi(t,z)$. Рассмотрим отрезок $[0,t+\Delta t]$. За время $t+\Delta t$ наступят только красные события, вероятность чего равна $\Phi(t+\Delta t,z)$, если за время t наступят только «красные» события, вероятность чего равна $\Phi(t,z)$, и за время Δt либо не произойдет событий, вероятность чего равна $P_0(\Delta t)$, либо произойдет одно событие и оно будет красным, вероятность чего равна $zP_1(\Delta t)$. Эту фразу можно символически записать в виде

$$\Phi(t+\Delta t,z)=\Phi(t,z)[P_0(\Delta t)+P_1(\Delta t)z].$$

Возможностью прихода двух или более требований за малое время Δt пренебрегаем в силу ординарности потока. Последнее равенство с учетом (2.7.1) можно переписать в форме

$$\Phi(t+\Delta t,z)=\Phi(t,z)[1-\mu\Delta t+\mu\Delta tz+o(\Delta t)],$$

или

$$\Phi(t+\Delta t,z)-\Phi(t,z)=\Phi(t,z)\mu(z-1)\Delta t+o(\Delta t)\ .$$

После деления обеих частей равенства на Δt и перехода к пределу при $\Delta t\to 0$ получаем уравнение

$$\Phi'_t=\mu(z-1)\Phi,$$

причем $\Phi(0,z)=1$, так как $P_0(0)=1$, а все $P_k(0)=0,\ k=1,2,3,\ldots$.

Решением этого дифференциального уравнения при указанном начальном условии является функция

$$\Phi(t,z)=\exp[\mu(z-1)t].$$

Разложение этой функции в ряд по степеням z имеет вид

$$\Phi(t,z)=\exp(-\mu t)\exp(\mu tz)=$$

$$=\exp(-\mu t)(1+\mu tz+(\mu tz)^2/2!+\ldots+(\mu tz)^k/k!+\ldots)=$$

$$=e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t}z+z^2(\mu t)^2e^{-\mu t}/2!+\ldots+z^k(\mu t)^ke^{-\mu t}/k!+\ldots\ .$$

Сравнение с записью (2.7.2) приводит к выводу, что

$$P_0(t)=e^{-\mu t},\qquad P_1(t)=\mu te^{-\mu t},\qquad P_2(t)=(\mu t)^2e^{-\mu t}/2!,\ldots,$$

$$P_k(t)=\frac{(\mu t)^k}{k}e^{-\mu t}. \tag{2.7.3}$$

Величина μ называется *интенсивностью простейшего потока*. Она равна среднему числу событий, происходящих в единицу времени. Среднее число событий, происходящих за время t, равно μt. Полученный результат можно не строго сформулировать следующим образом. Если события приходят независимо друг от друга и по одному и известно, что на данный интервал времени в среднем приходится λ событий, то вероятность появления на этом интервале равно k событий равна

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{2.7.4}$$

Стоит обратить внимание на то, что этот сильный количественный результат получен из очень простых предположений. Можно назвать много примеров, где эти предположения приблизительно выполняются (телефонные звонки, опечатки в тексте, радиоактивный распад и т.д.).
Причина такого широкого распространения пуассоновских потоков состоит в том, что пуассоновский поток является предельным потоком. В том смысле, что сумма большого числа независимых потоков малой интенсивности близка по своим свойствам к пуассоновскому потоку (см. рис. 2.7.2).

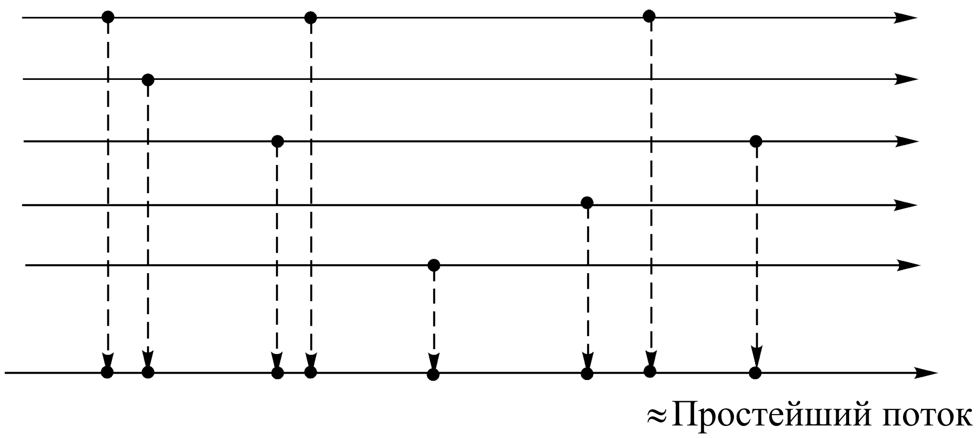


Рис. 2.7.2

Именно такими суммарными потоками являются потоки вызовов на телефонную станцию, поток отказов сложных систем и. т.д.

Замечание. Если в произвольном потоке требований каждое требование отбрасывать с определенной вероятностью, то после такого многократного «прореживания» получается поток близкий к простейшему.

Пример 2.35. Известно, что наборщик в среднем допускает одну ошибку на две страницы текста. В набранной книге взяли наугад страницу. Какова вероятность того, что на данной странице содержится более одной опечатки? Какова вероятность того, что на данных четырех страницах содержится ровно одна опечатка?

Решение. Опечатки появляются по одной и независимо друг от друга. Условия простейшего потока приблизительно выполняются, и формула Пуассона приблизительно верна. На одну страницу приходится в среднем $\lambda = 1/2$ опечатки. Поэтому вероятность того, что на данной странице содержится более одной опечатки, равна

$$P(k > 1) = 1 - P(k = 0) - P(k = 1) = 1 - \frac{(1/2)^0}{0!} e^{-1/2} - \frac{(1/2)^1}{1!} e^{-1/2} = 1 - 1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}1.$$

Для четырех страниц среднее число опечаток $\lambda = 2$. Поэтому

$$P(k=1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2} \approx 0,27.$$

Ответ. $1-1,5\mathrm{e}^{-0,5} \approx 0,1$; $2e^{-2} \approx 0,27$.

Задача 2.35.1. На многоканальный телефон фирмы поступает простейший поток вызовов. В среднем за пять минут поступает один вызов, т.е. интенсивность потока равна $\mu = 1/5$ вызова в минуту.

В вариантах 1–10: какова вероятность того, что k минут подряд не будет вызовов, а в следующие пять минут поступят два вызова (k — номер варианта)?

В вариантах 11–19: какова вероятность того, что в первые k минут вызовы были, а в последующие пять минут вызовов не было (k равно последней цифре номера варианта)?

В вариантах 21–29: какова вероятность того, что за k минут поступит только один вызов, а в последующие пять минут вызовов не будет (k равно последней цифре номера варианта)?

В вариантах 20, 30: какова вероятность того, что в первые пять минут вызовов не будет, а в последующие пять минут поступит m вызовов, где m равно первой цифре варианта. (См. пример 2.35).

Задача 2.35.2. В некотором районе в среднем каждый будний день происходит одно дорожно-транспортное происшествие (ДТП). Какова вероятность того, что в этом районе в первые два дня недели произойдет k_1 ДТП, в последующие два дня — k_2, а в последний будний день k_3 ДТП? Какова вероятность того, что за все пять дней произойдет $k_1 + k_2 + k_3$ ДТП? (См. пример 2.35 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.35.2.

№	k_1	k_2	k_3	№	k_1	k_2	k_3	№	k_1	k_2	k_3	№	k_1	k_2	k_3	№	k_1	k_2	k_3
1	1	1	0	**7**	2	0	0	**13**	2	3	0	**19**	1	2	1	**25**	0	3	0
2	2	1	0	**8**	1	0	1	**14**	2	0	1	**20**	2	3	2	**26**	2	2	3
3	3	2	1	**9**	2	2	1	**15**	0	1	1	**21**	0	2	0	**27**	3	2	2
4	4	3	2	**10**	2	2	0	**16**	2	1	2	**22**	0	1	2	**28**	0	3	1
5	4	3	0	**11**	1	2	0	**17**	1	3	1	**23**	3	2	0	**29**	2	0	1
6	3	1	2	**12**	1	1	2	**18**	2	3	1	**24**	0	2	1	**30**	2	0	2

2.8. Случайные величины. Функция распределения. Функция плотности вероятности. Числовые характеристики

2.8.1. Случайные величины

С каждым случайным экспериментом связано множество его возможных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$. Это множество обычно называют *пространством элементарных исходов* или элементарных событий. Экспериментатор обычно не просто наблюдает, а измеряет, и в результате эксперимента получается число. Тем самым каждому исходу эксперимента ставится в соответствие определенное число $\xi(\omega)$, а это означает, что на множестве исходов эксперимента определена некоторая числовая функция.

Определение. *Случайной величиной* называется функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на множестве элементарных исходов эксперимента и принимающая действительные или комплексные значения. Если множество исходов эксперимента конечно, то приведенное определение является точным. В общем случае функция $\xi(\omega)$ полагается измеримой. Случайная величина считается заданной, если указано, какие значения она может принимать и каковы вероятности этих значений.

Определение. Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется *законом распределения случайной величины.* Фактически для задания закона распределения нужно перечислить все возможные значения случайной величины и указать вероятности этих значений.

Закон распределения является исчерпывающей характеристикой случайной величины. Если он задан, то с вероятностной точки зрения случайная величина описана полностью. Поэтому часто говорят о том или ином законе распределения, имея в виду случайную величину, которая распределена по этому закону.

Случайные величины будем обозначать большими латинскими буквами $X, Y, Z, \ldots$, а отдельные возможные значения этих величин соответствующими малыми буквами $x, y, z, \ldots$.

Определение. Случайную величину называют *дискретной*, если она может принимать отделенные друг от друга значения с определенными вероятностями. Множество возможных значений дискретной случайной величины конечно или счетно, т.е. их можно занумеровать с помощью ряда натуральных чисел.

Определение. Случайная величина называется *непрерывной*, если ее возможные значения составляет некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Отметим способы задания законов распределения дискретных случайных величин. Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и вероятностями этих значений можно задать в виде формулы. Если это затруднительно, то можно просто перечислить то и другое в виде таблицы, называемой *рядом распределения*:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k	$\dots$

где $p_k = P(X = x_k)$ — вероятность того, что X примет значение x_k. Из соображений наглядности принято возможные значения перечислять в порядке возрастания. События $X = x_1, X = x_2, \dots$ несовместимы, и в результате опыта одно из них непременно происходит, т.е. эти события образуют полную группу. Поэтому $\sum\limits_i p_i = 1$.

Ряд распределения можно изобразить графически. Для этого в каждой точке x_i на горизонтальной оси откладывают вдоль вертикальной оси отрезок, равный p_i. Полученную в результате фигуру называют *многоугольником распределения* (рис. 2.8.1).

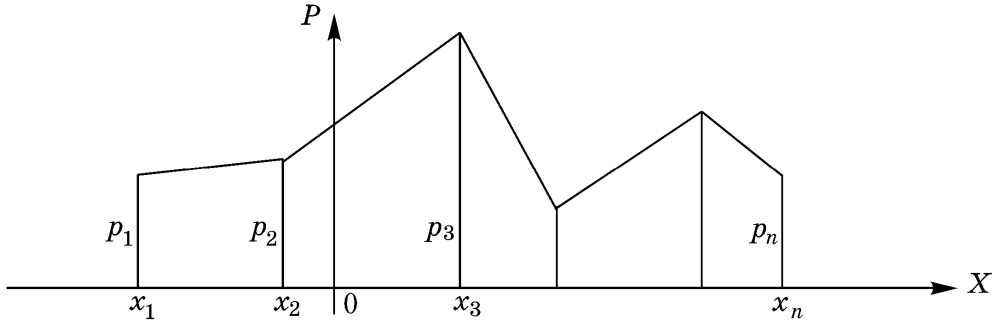


Рис. 2.8.1

2.8.2. Функция распределения

Определение. *Функцией распределения* случайной величины X называют функцию

$$F(x) = P(X < x),$$

определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X в результате опыта примет значение меньшее x.

Непосредственно из определения *функции распределения* можно вывести ряд ее *свойств*.

1. $0 \le F(x) \le 1$. Это следует из того, что $F(x)$ равна вероятности, а вероятность любого события заключена между нулем и единицей.

Отметим также, что $F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0$ и $F(+\infty) = P(X < +\infty) = 1$, так как события $X < -\infty$ и $X < +\infty$ являются соответственно невозможным и достоверным.

2. Функция распределения является неубывающей, т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$. В самом деле, при $x_1 < x_2$ появление события $X < x_2$

эквивалентно появлению одного из несовместимых событий $X < x_1$ и $x_1 \le X < x_2$. Поэтому $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$ или

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2) \qquad (2.8.1)$$

В правой части равенства (2.8.1) находится неотрицательная величина, поэтому $F(x_1) \le F(x_2)$. Равенство (2.8.1) означает, что вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[x_1, x_2)$ равна приращению функции распределения на этом полуинтервале.

3. $F(x)$ непрерывна слева, т.е. $\lim F(x) = F(x_0)$ при $x \to x_0 - 0$.

4.Для любого x, согласно формуле (2.8.1),

$$P(X = x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(x \le X < x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} [F(x + \Delta x) - F(x)].$$

Предел в правой части равен нулю, если x — точка непрерывности функции $F(x)$. Если же x — точка разрыва функции $F(x)$, то предел в правой части равенства равен скачку этой функции в точке x. Следовательно, если a и b точки непрерывности функции $F(x)$, то

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

Впредь будем называть непрерывными только случайные величины с непрерывной функцией распределения. Для непрерывной случайной величины вероятность любого отдельно взятого значения равна нулю. Сходная ситуация в геометрии. Геометрическая точка не имеет размера, а состоящий из точек интервал имеет отличную от нуля длину. Так и для непрерывной случайной величины: одно отдельно взятое значение имеет нулевую вероятность, хотя и является возможным значением, и только интервалы значений имеют отличную от нуля вероятность.

График функции распределения одной из непрерывных случайных величин изображен на рис. 2.8.2.

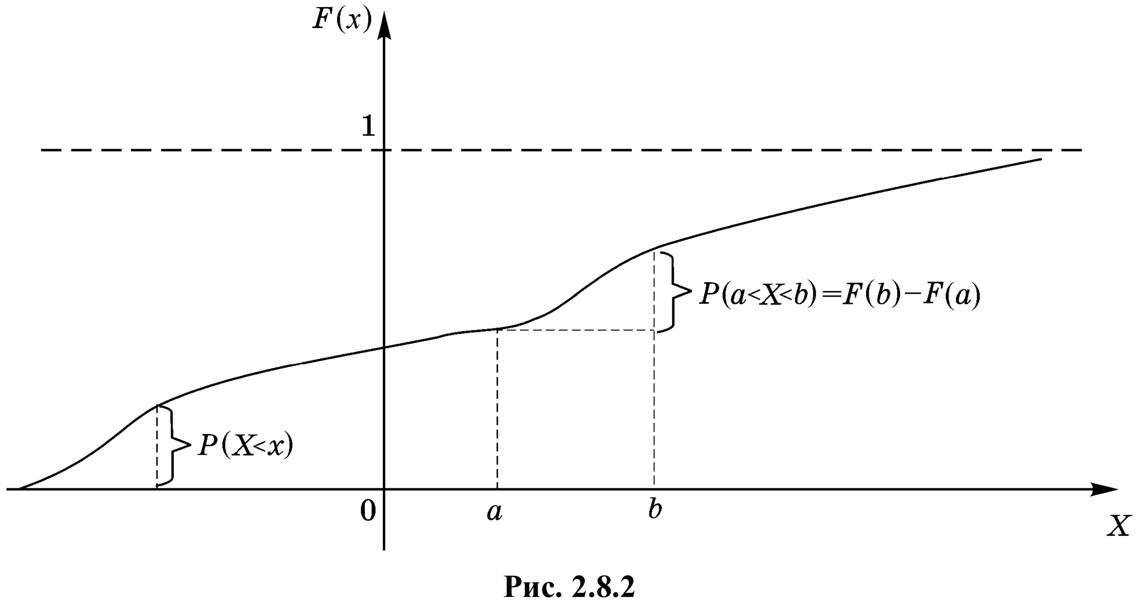


Рис. 2.8.2

Функцию распределения можно задать и для непрерывной и для дискретной случайной величины. Для дискретной случайной величины функция распределения представляет собой, как это следует из определения, функцию накопленных вероятностей:

$$F(x) = \Sigma P(X = x_i),$$

где суммирование распространяется на все значения индекса *i*, для которых $x_i < x$.

Если дискретная случайная величина *X* имеет закон распределения:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k	$\dots$

то ее функция распределения имеет вид ступенчатой функции, причем скачки функции равны вероятностям соответствующих значений *X* (рис. 2.8.3).

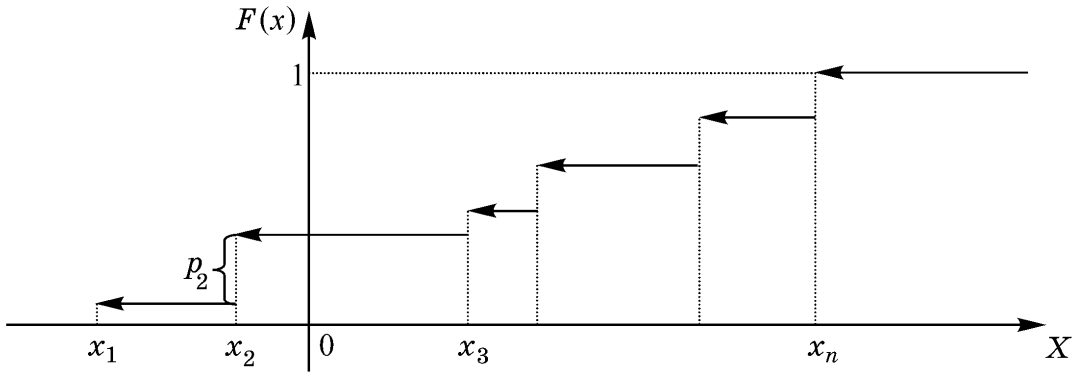


Рис. 2.8.3

Функция распределения непрерывной случайной величины непрерывна, для дискретной случайной величины она представляет собой ступенчатую функцию. Можно привести примеры таких случайных величин, функция распределения которых вместе с участками непрерывного роста в некоторых точках имеет разрывы. Такие величины называют *смешанными* случайными величинами. Примером смешанной случайной величины может служить время ожидания у светофора. Пусть, например, равновозможно прибытие автомобиля к перекрестку в любой момент цикла работы светофора (рис. 2.8.4). Найдем функцию распределения времени ожидания автомобиля.

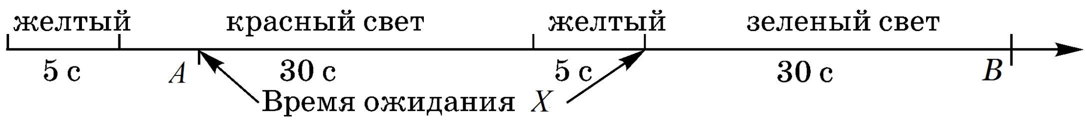


Рис. 2.8.4

Обозначим время ожидания у светофора через X. Это неотрицательная случайная величина. Вероятность того, что время ожидания будет меньше x, равна вероятности прибыть к светофору в момент времени из интервала (A,B). Поэтому $F(x)=P(X<x)=(x+30)/70$ при $0<x<40$ и $F(x)=1$ при $x\geq 40$. Функция распределения времени ожидания изображена на рис. 2.8.5. Из графика функции распределения видно, что нулевое время ожидания, имея вероятность 3/7, соответствует точке скачка функции, равного этой величине.

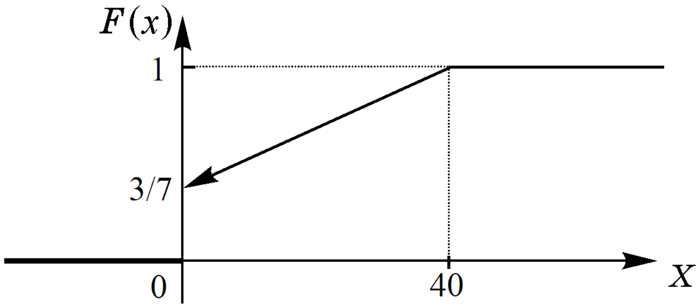


Рис. 2.8.5

2.8.3. Функция плотности вероятности

Если функция распределения представима в виде $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$, где функция $f(x)\geq 0$, то подынтегральную функцию $f(x)$ называют *функцией плотности вероятности*. Если функция распределения дифференцируема, то функцией плотности вероятности $f(x)$ называется первая производная от функции распределения $F(x)$, т.е. $f(x)=F'(x)$.

Заметим, что

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\int\limits_a^b F'(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Геометрически это означает, что вероятность попадания случайной величины в интервал (a,b) численно равна площади криволинейной трапеции, которая опирается на этот интервал и ограничена сверху кривой $f(x)$ (рис. 2.8.6).

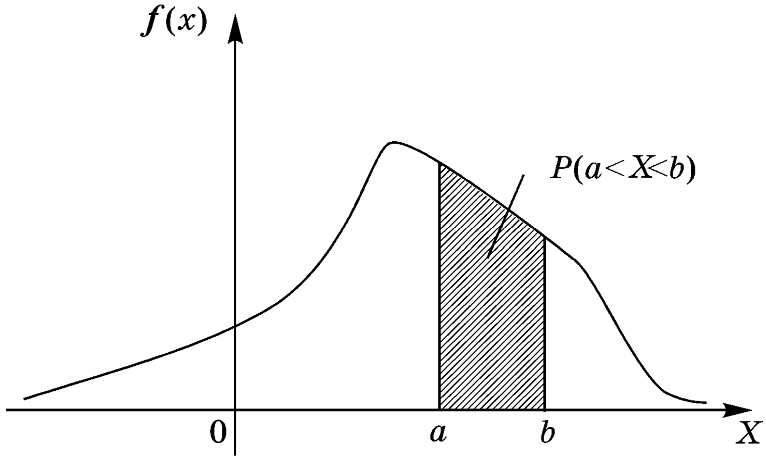


Рис. 2.8.6

Свойства функции плотности вероятности.

1. $f(x) \ge 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < \infty) = 1$.

Последнее условие называется *условием нормировки*. Геометрически это условие означает, что площадь, заключенная между осью абсцисс и графиком функции плотности вероятности, равна единице.

По функции плотности вероятности $f(x)$ можно найти функцию распределения случайной величины:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx..$$

2.8.4. Числовые характеристики случайных величин

Числа, назначение которых указывать основные особенности случайных величин, называются числовыми характеристиками.

Определение. *Математическим ожиданием* (или средним значением) дискретной случайной величины *X* называется число

$$M(X) = \sum_i x_i p_i, \tag{2.8.2}$$

равное сумме произведений возможных значений x_i на соответствующие им вероятности p_i. Если дискретная случайная величина имеет бесконечно много значений, то требуется абсолютная сходимость ряда (2.8.2). Если ряд (2.8.2) не сходится абсолютно, то математическое ожидание такой случайной величины не существует.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины, имеющей функцию плотности вероятности $f(x)$, называется число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \tag{2.8.3}$$

если интеграл абсолютно сходится. Если интеграл (2.8.3) не сходится абсолютно, то говорят, что математическое ожидание не существует.

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной равно самой этой постоянной, т.е. $M(C) = C \cdot 1 = C$.

2. Математическое ожидание суммы любого конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

3. Математическое ожидание произведения любого конечного числа взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

Определение. Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \tag{2.8.4}$$

Для вычисления дисперсии иногда удобно использовать другую формулу:

$$D(X) = M[X^2] - [M(X)]^2, \tag{2.8.5}$$

т.е. дисперсия равна математическому ожиданию квадрата случайной величины минус квадрат ее математического ожидания:

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C) = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии с возведением в квадрат, т.е. $D(CX) = C^2 D(X)$, где C — постоянная величина.

Определение. *Центрированной случайной величиной* называется отклонение случайной величины от ее математического ожидания:

$$\overset{\circ}{X} = X - M(X).$$

Центрированные случайные величины удобно использовать в преобразованиях, так как

$$M(\overset{\circ}{X}) = M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0;$$

$$M(\overset{\circ}{X})^2 = M[X - M(X)]^2 = D(X).$$

3. Если случайные величины X и Y независимы, то

$$D(X \pm Y) \quad D(X) + D(Y).$$

4. Если случайные величины X и Y *независимы*, то

$$D(XY)=D(X)D(Y)+D(X)[M(Y)]^2+D(Y)[M(X)]^2.$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Это лишает наглядности дисперсию как числовую характеристику. Поэтому для характеристики разброса значений случайной величины используют *среднее квадратическое отклонение,* которое равно положительному значению корня квадратного из дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$. Среднее квадратическое отклонение имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

Пример 2.36. Некто носит на связке пять ключей. При отмыкании замка он последовательно испытывает ключи, пока не подберет нужный. Полагая выбор ключей бесповторным, написать закон распределения числа испытанных ключей. Вычислите математическое ожидание этой случайной величины.

Решение. Обозначим через X — число испытанных ключей. Так как выбор ключей бесповторный, то X может принимать значения: 1, 2, 3, 4, 5. Случайная величина X примет значение $x_1=1$, если с первой попытки будет выбран нужный ключ, вероятность чего равна 1/5 в силу равновозможности выбора любого из ключей. Значение $x_2=2$ случайная величина примет, если при первой попытке ключ будет выбран ошибочно (вероятность чего равна 4/5) и при второй попытке будет выбран нужный ключ из оставшихся четырех(вероятность этого равна 1/4). Поэтому:

$P(X=2)=(4/5)(1/4)=1/5;$

$P(X=3)=(4/5)(3/4)(1/3)=1/5;$

$P(X=4)=(4/5)(3/4)(2/3)(1/2)=1/5;$

$P(X=5)=(4/5)(3/4)(2/3)(1/2)\cdot 1=1/5.$

Случайная величина X имеет закон распределения

X	1	2	3	4	5
P	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Среднее число попыток равно

$$M(X)=1\cdot 1/5+2\cdot 1/5+3\cdot 1/5+4\cdot 1/5+5\cdot 1/5=3.$$

Ответ. 3.

Задача 2.36. В урне n белых и k черных шаров. Шары вынимают из урны по одному без возвращения, пока не выберут черный шар. Пусть X — число вынутых шаров. Напишите закон распределения для случайной величины X и найдите ее математическое ожидание. (См. пример 2.36 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.36.

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k

1	4	2	**6**	5	3	**11**	6	4	**16**	4	4	**21**	4	9	**26**	5	9
2	4	3	**7**	6	1	**12**	6	5	**17**	4	5	**22**	4	10	**27**	5	10
3	5	4	**8**	4	4	**13**	6	6	**18**	4	6	**23**	5	6	**28**	6	7
4	3	2	**9**	6	2	**14**	5	5	**19**	4	7	**24**	5	7	**29**	6	8
5	5	2	**10**	6	3	**15**	5	2	**20**	4	8	**25**	5	8	**30**	6	9

Пример 2.37. В ящике в полном беспорядке лежат пять пар туфель. Туфли по одной (без возвращения) вынимают из ящика, пока среди выбранных не обнаружится какая-либо пара. Сколько в среднем туфель придется извлечь из ящика?

Решение. Обозначим через X — число извлеченных туфель. Случайна величина X принимает только значения 2, 3, 4, 5, 6. (Чтобы сформировать пару, нужно извлечь минимум две туфли, а среди шести туфель хотя бы одна пара непременно найдется.) Найдем вероятности этих значений:

$P(X=2)=1/9$, так как после выбора первой туфли в пару к ней годится только одна из девяти оставшихся;

$P(X=3)=\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2}{9}$, так как вторая должна быть не парной к первой, вероятность чего равна 8/9, а третья должна быть парной либо к первой, либо ко второй, вероятность чего равна 2/8;

$P(X=4)=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{18}{63}$, так как вторая должна быть не парной к первой, вероятность чего 8/9, третья — не парной к первым двум, вероятность чего 6/8, а четвертая должна быть одной тефлей из трех уже разукомплектованных пар, вероятность чего 3/7;

$P(X=5)=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{16}{63}$, так как вторая должна быть не парной к первой, вероятность чего 8/9, третья — не парной к первым двум, вероятность чего 6/8, четвертая — не парной к первым трем, вероятность чего равна 4/7, а пятая должна быть одной туфлей из четырех уже разукомплектованных пар, вероятность чего 4/6;

$P(X=6)=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{8}{63}$, так как для этого необходимо, чтобы каждая из пяти первых туфель выбиралась из еще не тронутой пары.

Итак, случайная величина имеет закон распределения:

X	2	3	4	5	6
P	7/63	14/63	18/63	16/63	8/63

$M(X)=2\cdot 7/63+3\cdot 14/63+4\cdot 18/63+5\cdot 16/63+6\cdot 8/63=256/63\approx 4.$

Ответ. $M(X)=256/63\approx 4.$

Задача 2.37. В урне содержатся шары n различных цветов, причем шаров каждого цвета содержится k штук. Шары выбирают из урны по одному, пока среди выбранных не окажется двух шаров одного цвета. Пусть X — число извлеченных при этом шаров. Найдите закон распределения X и $M(X)$. (См. пример 2.37 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.37.

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	4	2	**6**	4	5	**11**	4	3	**16**	3	3	**21**	3	5	**26**	3	4
2	4	3	**7**	3	3	**12**	3	5	**17**	3	4	**22**	3	6	**27**	5	3
3	3	5	**8**	3	4	**13**	3	6	**18**	5	3	**23**	4	4	**28**	6	2
4	3	6	**9**	5	3	**14**	4	4	**19**	6	2	**24**	4	2	**29**	4	5
5	4	4	**10**	6	2	**15**	4	2	**20**	4	5	**25**	4	3	**30**	3	3

Пример 2.38. Цена лотерейного билета равна 50 рублей. В данной лотерее каждый пятый билет выигрывает. Величина выигрыша на один билет X имеет распределение:

X	без выигрыша	100 руб.	200 руб.	1000 руб.
P	0,8	0,12	0,07	0,01

Некто приобрел пять билетов. Необходимо вычислить его средний выигрыш от участия в этом тираже лотереи.

Решение. Обозначим через X_i выигрыш, приходящийся на i-й билет. Тогда общий выигрыш $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. По свойствам математического ожидания

$$M(Y) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) + M(X_4) + M(X_5),$$

где $M(X_i) = 0 \cdot 0{,}8 + 100 \cdot 0{,}12 + 200 \cdot 0{,}07 + 1000 \cdot 0{,}01 = 36.$

Поэтому средний выигрыш на пять билетов составит $5 \cdot 36 = 180$ руб., но за билеты было заплачено 250 руб. В итоге, средний «выигрыш» (фактически, проигрыш) равен $180 - 250 = -70$ руб.

Ответ. –70 руб.

Задача 2.38. Цена лотерейного билета равна 50 руб. Величина выигрыша на один билет X имеет распределение

X	без выигрыша	100 руб.	500 руб.	1000 руб.
P	$1 - p_1 - p_2 - p_3$	p_1	p_2	p_3

Вы приобрели n билетов. Вычислите Ваш средний выигрыш от участия в этом тираже лотереи. (См. пример 2.38 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.38.

№	n	p_1	p_2	p_3	№	n	p_1	p_2	p_3	№	n	p_1	p_2	p_3
1	3	0,1	0,05	0,01	**11**	7	0,1	0,05	0,019	**21**	5	0,1	0,05	0,019
2	4	0,12	0,04	0,01	**12**	8	0,1	0,03	0,01	**22**	6	0,1	0,04	0,01

3	5	0,12	0,03	0,015	**13**	3	0,1	0,04	0,015	**23**	7	0,1	0,03	0,015
4	6	0,1	0,03	0,01	**14**	4	0,1	0,04	0,01	**24**	8	0,1	0,05	0,01
5	7	0,1	0,04	0,015	**15**	5	0,1	0,03	0,015	**25**	3	0,12	0,04	0,01
6	8	0,1	0,04	0,01	**16**	6	0,1	0,05	0,01	**26**	4	0,12	0,03	0,015
7	3	0,1	0,03	0,015	**17**	7	0,12	0,04	0,01	**27**	5	0,1	0,05	0,01
8	4	0,1	0,05	0,01	**18**	8	0,12	0,03	0,015	**28**	6	0,12	0,04	0,01
9	5	0,12	0,04	0,01	**19**	3	0,1	0,03	0,01	**29**	7	0,12	0,03	0,015
10	6	0,12	0,03	0,015	**20**	4	0,1	0,04	0,015	**30**	8	0,1	0,03	0,01

Пример 2.39. Монету подбрасывают до тех пор, пока не выпадет герб, или пять раз подряд не выпадет цифра. Пусть X — число бросков монеты. Напишите закон распределения случайной величины X и найдите ее математическое ожидание.

Решение. Если при первом же броске выпадет герб, то $X=1$, вероятность чего равна 1/2.

Бросков понадобится два, если сначала выпадет цифра, а при втором броске — герб. Вероятность такого исхода равна $(1/2)(1/2)=1/4$.

Монету придется бросать трижды, если сначала дважды выпадет цифра и при третьем броске — герб. Вероятность этого равна $(1/2)(1/2)\cdot$ $\cdot(1/2)=1/8$.

Аналогично $P(X=4)=(1/2)(1/2)(1/2)(1/2)=1/16$.

Если четыре раза подряд выпадет цифра, то необходим пятый бросок, который независимо от результата (с вероятностью один) будет последним. Поэтому $P(X=5)=(1/2)(1/2)(1/2)(1/2)\cdot 1=1/16$.

Закон распределения числа бросков имеет вид:

X	1	2	3	4	5
P	1/2	1/4	1/8	1/16	1/16

Среднее число бросков равно

$$M(X)=1\cdot 1/2+2\cdot 1/4+3\cdot 1/8+4\cdot 1/16+5\cdot 1/16=31/16\approx 2.$$

Ответ. $31/16\approx 2$.

Задача 2.39. Стрелок стреляет в цель, пока не попадет, либо пока не сделает m промахов. Вероятность попасть в цель при одном выстреле равна p. Пусть X — число произведенных выстрелов. Напишите закон распределения для случайной величины X и найдите ее математическое ожидание. (См. пример 2.39 и исходные данные).

Исходные данные к задаче 2.39.

№	p	m	№	p	m	№	p	m	№	p	m	№	p	m	№	p	m
1	0,6	5	**6**	0,4	6	**11**	0,3	4	**16**	0,5	4	**21**	0,55	4	**26**	0,65	6
2	0,6	4	**7**	0,7	4	**12**	0,3	6	**17**	0,6	6	**22**	0,55	5	**27**	0,75	4

3	0,6	6	**8**	0,7	5	**13**	0,8	4	**18**	0,45	4	**23**	0,55	6	**28**	0,75	5
4	0,4	4	**9**	0,7	6	**14**	0,8	5	**19**	0,45	5	**24**	0,65	4	**29**	0,75	6
5	0,4	5	**10**	0,3	5	**15**	0,8	6	**20**	0,45	6	**25**	0,65	5	**30**	0,35	4

Пример 2.40. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 1/3. Имеется семь патронов. Стрельба производится до тех пор, пока не будет трех попаданий или пока не кончатся патроны. Пусть X — число выстрелов. Найдите математическое ожидание случайной величины X.

Решение. Найдем сначала закон распределения случайной величины X. Для трех попаданий необходимо минимум три выстрела. Вероятность трех попаданий подряд равна $(1/3)^3$. Поэтому $P(X=3)=(1/3)^3=1/27$. Выстрелов понадобится четыре, если в первых трех выстрелах будет только два попадания (вероятность чего равна $C_3^2(1/3)^2(2/3)=2/9$) и при четвертом выстреле будет попадание. Поэтому $P(X=4)=\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$. Придется произвести пять выстрелов, если в первых четырех выстрелах будет два попадания (вероятность чего равна $C_4^2(1/3)^2(2/3)^2=8/27$) и попадание будет при пятом выстреле. Поэтому $P(X=5)=\dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{81}$. Аналогично $P(X=6)=C_5^2(1/3)^2(2/3)^3\cdot(1/3)=80/729$.

Выстрелов будет семь, если к моменту седьмого выстрела будет два или меньше двух попаданий. Поэтому $P(X=7)=C_6^0(1/3)^0(2/3)^6+$ $+C_6^1(1/3)^1(2/3)^5+C_6^2(1/3)^2(2/3)^4=496/729.$ Заметим, что проще эту вероятность было посчитать, отняв от единицы вычисленные уже вероятности остальных значений. Итак, случайная величина X имеет закон распределения:

X	3	4	5	6	7
P	1/27	2/27	8/81	80/729	496/729

$$M(X)=3\cdot\frac{1}{27}+4\cdot\frac{2}{27}+5\cdot\frac{8}{81}+6\cdot\frac{80}{729}+7\cdot\frac{496}{729}=\frac{4609}{729}\approx 6{,}3.$$

Ответ. $M(X)=\dfrac{4609}{729}\approx 6{,}3.$

Задача 2.40. Вероятность того, что каждая из имеющихся в наличии n лампочек исправна, равна p. Лампочки проверяют по одной, пока не будет отобрано k годных или не будут проверены все до единой лампочки. Пусть X — число проверенных лампочек. Найдите закон распределения случайной величины X и ее математическое ожидание. (См. пример 2.40 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.40.

№	p	k	n	№	p	k	n	№	p	k	n	№	p	k	n	№	p	k	n
1	0,2	2	5	**7**	0,3	2	6	**13**	0,2	2	6	**19**	0,2	2	7	**25**	0,4	2	7
2	0,3	3	6	**8**	0,2	3	6	**14**	0,4	2	5	**20**	0,4	2	6	**26**	0,5	3	7
3	0,4	3	7	**9**	0,3	2	7	**15**	0,3	3	7	**21**	0,5	2	7	**27**	0,6	2	6
4	0,5	2	6	**10**	0,4	4	7	**16**	0,5	3	6	**22**	0,6	3	6	**28**	0,3	4	7
5	0,2	3	7	**11**	0,5	2	5	**17**	0,6	2	5	**23**	0,3	2	5	**29**	0,5	4	6
6	0,4	3	6	**12**	0,6	3	7	**18**	0,5	4	7	**24**	0,6	4	7	**30**	0,6	2	7

Пример 2.41. Из 12 изделий три имеют скрытые дефекты. Наугад выбраны четыре изделия. Напишите закон распределения числа изделий со скрытыми дефектами среди выбранных.

Решение. Пусть X — число деталей со скрытыми дефектами среди выбранных четырех. Это дискретная случайная величина с возможными значениями 0, 1, 2 ,3. Четыре детали из 12 можно выбрать $C_{12}^4 = 495$ способами.

Значению $X = 0$ благоприятствуют $C_9^4 = 126$ способов выбора изделия. Поэтому $P(X = 0)\; 126/495\; 14/55$. Значению $X = 1$ благоприятствуют $C_3^1 C_9^3 = 252$ способа, $P(X = 1)\; 252/495\; 28/55$. Значению $X = 2$ благоприятствуют $C_3^2 C_9^2 = 108$ способов, $P(X = 2)\; 108/495\; 12/55$. Наконец, значению $X = 3$ благоприятствуют $C_3^3 C_9^1 = 9$ способов, $P(X = 3) =$ $= 9/495 = 1/55$. Случайная величина X имеет закон распределения

X	0	1	2	3
P	14/55	28/55	12/55	1/55

Среднее число деталей со скрытыми дефектами в выборке равно

$$M(X) = 0 \cdot 14/55 + 1 \cdot 28/55 + 2 \cdot 12/55 + 3 \cdot 1/55 = 1.$$

Ответ. 1.

Задача 2.41. В партии из n изделий m имеют скрытые дефекты. Наугад выбраны r изделий. Пусть X — число бракованных изделий среди выбранных. Напишите закон распределения для случайной величины X и вычислите ее математическое ожидание. (См. пример 2.41 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.41.

№	n	m	r	№	n	m	r	№	n	m	r	№	n	m	r	№	n	m	r
1	10	4	3	**7**	9	4	3	**13**	8	4	3	**19**	12	5	3	**25**	12	3	4
2	10	5	3	**8**	9	3	3	**14**	8	2	3	**20**	12	4	3	**26**	11	4	3
3	10	3	3	**9**	9	5	3	**15**	8	3	3	**21**	12	3	3	**27**	11	5	3
4	10	4	4	**10**	9	4	4	**16**	8	4	4	**22**	12	5	4	**28**	11	3	3

5	10	5	4	**11**	9	3	4	**17**	8	3	4	**23**	11	5	4	**29**	11	4	4
6	10	3	4	**12**	9	5	4	**18**	8	5	3	**24**	12	4	4	**30**	11	3	4

Пример 2.42. Случайная величина X принимает значения 1, 3, 5, 7, 9 с вероятностями $P(X = k) = ak$, где a — некоторая постоянная величина. Найти математическое ожидание X.

Решение. Так как сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице, то $a{\cdot}1 + a{\cdot}3 + a{\cdot}5 + a{\cdot}7 + a{\cdot}9 = a{\cdot}25 = 1$, $a = 1/25$ и $P(X = k) = k/25$. Поэтому

$M(X) = 1{\cdot}1/25 + 3{\cdot}3/25 + 5{\cdot}5/25 + 7{\cdot}7/25 + 9{\cdot}9/25 = 165/25 = 6{,}6.$

Ответ. 6,6.

Задача 2.42. Случайная величина X принимает значения n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Вероятность $P(X = x) = sx$, где s — некоторая постоянная величина. Найти значение s, запишите закон распределения X, вычислите математическое ожидание X. (См. пример 2.42, n — номер варианта.)

Пример 2.43. Из чисел 1, 2, 3, …, 20 наугад без возвращения выбирают восемь чисел. Найти математическое ожидание их суммы.

Решение. Обозначим через X_i число, выбранное i-м по порядку. Тогда для любого $m = 1,2,3,\ldots,20$ имеем

$$P(X_i = m) = \frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{17}{18}\cdot\ldots\cdot\frac{20-m+1}{20-m+2}\cdot\frac{1}{20-m+1} = \frac{1}{20}.$$

Например, вероятность того, что пятое по порядку число будет равно m равна

$$P(X_i = m) = \frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{20}.$$

Это означает, что для i-го по порядку числа равновозможны все значения от 1 до 20. Поэтому математическое ожидание i-го числа равно $M(X_i) =$ $= 1\cdot\frac{1}{20} + 2\cdot\frac{1}{20} + \ldots + 20\cdot\frac{1}{20} = 10{,}5.$ Сумма выбранных чисел $Y = \sum_{i=1}^{8} X_i$ имеет математическое ожидание $M(Y) = \sum_{i=1}^{8} M(X_i) = 8\cdot 10{,}5 = 84.$

Ответ. 84.

Задача 2.43. Из чисел от 1 до n выбирают наугад без возвращения k чисел. Найдите математическое ожидание суммы этих чисел. Найдите математическое ожидание суммы этих чисел при повторном выборе. (См. пример 2.43, n — номер варианта плюс пять, $k = 4$ в нечетных вариантах и $k = 6$ в четных вариантах.)

Пример 2.44. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 наугад без возвращения выбирают четыре числа. Пусть X — наибольшее из этих чисел. Требуется найти закон распределения случайной величины X и ее математическое ожидание.

Решение. Случайная величина X может принимать значения 4, 5, 6, 7. Вычислим вероятности этих значений. Всего имеется $C_7^4 = 35$ способов выбрать любых четыре числа из семи. Реализуется значение $X = 4$, если будут выбраны первые четыре числа 1, 2, 3, 4. Это можно сделать единственным способом. Поэтому $P(X = 4) = 1/35$. Значение $X = 5$ получится, если будет выбрано число пять и в добавление к этому три числа из первых четырех. Это можно сделать $C_4^3 = 4$ способами. Поэтому $P(X = 4) = 4/35$. Величина $X = 6$, если будет выбрана цифра шесть и в дополнение к ней любых три числа из первых пяти. Это можно сделать $C_5^3 = 10$. Следовательно, $P(X = 5) = 10/35$. Если будет выбрана цифра семь и в дополнение к ней любые три из первых шести, то реализуется значение $X = 7$. Вероятность этого $P(X = 7) \quad C_6^3 \neq 35 \quad 20 \neq 35$. В итоге имеем закон распределения:

X	4	5	6	7
P	1/35	4/35	10/35	20/35

Поэтому $M(X) = 4 \cdot 1/35 + 5 \cdot 4/35 + 6 \cdot 10/35 + 7 \cdot 20 \neq / 35 \quad 6,4$.

Ответ. $M(X) = 6,4$.

Задача 2.44. Имеется N фишек, занумерованных числами 1, 2, 3, …, ***N***. Наугад без возвращений извлекают n фишек.

В нечетных вариантах: X — наибольший номер в выборке.

В четных вариантах: X — наименьший номер в выборке.

Найдите закон распределения случайной величины X и ее математическое ожидание. (См. пример 2.44 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.44.

№	N	n	№	N	n	№	N	n	№	N	n	№	N	n	№	N	n
1	8	4	**6**	9	5	**11**	10	7	**16**	10	6	**21**	11	8	**26**	12	8
2	8	5	**7**	9	5	**12**	10	5	**17**	11	6	**22**	11	8	**27**	12	9
3	9	6	**8**	9	4	**13**	10	6	**18**	11	6	**23**	12	7	**28**	12	9
4	8	4	**9**	9	4	**14**	10	7	**19**	12	7	**24**	12	7	**29**	13	9
5	8	5	**10**	9	6	**15**	10	5	**20**	12	7	**25**	12	8	**30**	13	10

Пример 2.45. Пусть в урне находится M белых шаров и R черных. Из урны наугад выбирают один шар. После установления его цвета в урну добавляют $k+1$ шар того же цвета (т.е. выбранный шар возвращают в урну и к нему добавляют еще k шаров того же цвета). Затем выбирают из урны второй шар и в урну возвращают $k+1$ шар такого же цвета, что и второй

шар. Потом выбирают очередной шар и т.д. Всего производят выбор и добавление шаров n раз.

Обозначим через X число белых шаров, выбранных из урны в процессе этих n испытаний. Требуется найти закон распределения случайной величины X и ее математическое ожидание.

Решение. Заметим, что X принимает значения 0, 1, 2, 3, …, n. Вычислим $P(X=m)$.

Рассудим следующим образом. После каждого опыта число шаров в урне возрастает на k. Первый шар выбирается из $N=M+R$ шаров, выбор второго возможен из $N+k$ шаров, третий шар можно выбрать из $N+2k$ шаров и т.д., для n-го шара имеется $N+(n-1)k$ возможностей выбора. Поэтому число всех возможных исходов этих n опытов по комбинаторному принципу равно

$$N(N+k)(N+2k)\cdot\ldots\cdot(N+(n-1)k).$$

Если белый шар был выбран m раз, то первый их них выбирался из M шаров, второй — из $M+k$ шаров, третий — из $M+2k$ и т.д., m-й белый шар можно было выбрать из $M+(m-1)k$ шаров. По комбинаторному принципу m белых шаров можно было выбрать $M(M+k)(M+2k)\cdot\ldots\cdot(M+(m-1)k)$ способами.

Аналогично $n-m$ черный шар можно было выбрать $R(R+k)\cdot$ $\cdot(R+2k)\cdot\ldots\cdot(R+(n-m-1)k)$ способами. Тогда выбрать m белых и $n-m$ черных шаров в любой последовательности можно было $M(M+k)\cdot$ $\cdot(M+2k)\cdot\ldots\cdot(M+(m-1)k)R(R+k)(R+2k)\cdot\ldots\cdot(R+(n-m-1)k)$ способами.

Различимых последовательностей в чередовании белых и черных шаров существует C_n^m, именно таким числом способов можно из n опытов выбрать различных m и в них получить белые шары. Поэтому

$$P(X=m)= \tag{2.8.6}$$
$$=C_n^m\frac{M(M+k)(M+2k)\ldots(M+(m-1)k)R(R+k)(R+2k)\ldots(R+(n-m-1)k)}{N(N+k)(N+2k)\ldots(N+(n-1)k)}.$$

Закон распределения случайной величины X со значениями 0, 1, 2, 3, …, n и вероятностями этих значений $P(X=m)$, определяемыми по формуле (2.8.6), называют *законом распределения Полиа*.

Замечание. Если в распределении Полиа $k=0$, то получим независимые опыты и формула (2.8.5) переходит в формулу Бернулли (2.6.1). Если же $k=-1$, то это означает, что выбранный шар в урну не возвращается и новых шаров в урну не добавляется. Мы попадаем в условия бесповторного выбора. В этом случае формула (2.8.5) переходит в формулу (2.1.1).

Задача 2.45. Пусть в урне находится *M* белых шаров и *R* черных. Из урны наугад выбирают один шар. После установления его цвета в урну добавляют $k+1$ шар того же цвета (т.е. выбранный шар возвращают в урну и к нему добавляют еще *k* шаров того же цвета). Затем выбирают из урны второй шар и в урну возвращают $k+1$ шар такого же цвета, что и второй шар. Потом выбирают очередной шар и т.д. Всего производят выбор и добавление шаров *n* раз.

а) Найдите закон распределения случайной величины *X*, равной числу белых шаров выбранных из урны в процессе этих *n* испытаний. Найдите *M*(*X*).

б) Напишите закон распределения и найдите соответствующее математическое ожидание для случаев $k=0$ и $k=-1$.

(См. пример 2.45 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.45.

№	*M*	*R*	*n*	*k*	№	*M*	*R*	*n*	*k*	№	*M*	*R*	*n*	*k*	№	*M*	*R*	*n*	*k*
1	3	2	4	1	**9**	4	2	4	1	**17**	4	2	3	2	**25**	5	2	3	1
2	2	3	4	1	**10**	2	4	4	1	**18**	2	4	3	2	**26**	2	5	3	1
3	3	2	5	1	**11**	4	2	5	1	**19**	4	2	4	2	**27**	6	2	3	1
4	2	3	5	1	**12**	2	4	5	1	**20**	2	4	4	2	**28**	2	6	3	2
5	3	2	3	1	**13**	4	3	3	1	**21**	4	2	5	2	**29**	6	2	4	2
6	2	3	3	1	**14**	3	4	3	1	**22**	2	4	5	2	**30**	2	6	4	2
7	4	2	3	1	**15**	4	3	4	1	**23**	3	1	3	1	**31**	3	2	4	1
8	2	4	3	1	**16**	3	4	4	1	**24**	1	3	3	1	**32**	2	3	4	1

Рассмотрим серию опытов, которые производятся в неодинаковых условиях и поэтому вероятность появления события *A* меняется от опыта к опыту. Например, во время боя из-за сближения или удаления противника вероятность поражения цели при выстреле меняется от выстрела к выстрелу.

Обозначим через p_i — вероятность появления события *A* в *i*-м опыте, а вероятность непоявления события через $q_i = 1 - p_i$. Требуется найти вероятность P_{nm} того, что в результате *n* опытов событие *A* появится *m* раз.

Можно, как и при выводе формулы Бернулли (2.6.1), моделировать результаты *n* опытов с помощью *m* букв *A* и $n-m$ букв $\overline{A}$. *Различимых* перестановок таких букв будет $C_n^m = C_n^{n-m}$. Именно таким числом способов можно из *n* мест выбрать *m* и поставить на них буквы *A,* а на остальные — буквы $\overline{A}$.

Каждая перестановка этих букв соответствует определенной последовательности появлений и непоявлений события *A*. К сожалению, в нашем случае перестановки не равновозможны и суммировать их вероятности трудоемко. Вместо утомительного перебора возможных комбинаций букв поступим следующим образом. Составим функцию

$$\Psi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z)\ldots(q_n + p_n z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z),$$

где z — некоторая действительная переменная.

Если перемножить скобки, привести подобные и упорядочить их по степеням z, то получим многочлен по степеням z. Легко понять, что при каждой степени z^n будет коэффициент в виде произведения m букв p и $n-m$ букв q с какими-то индексами, а после приведения подобных получится коэффициент, который будет равен сумме всех подобных произведений, т.е. равный P_{nm}.

Пример 2.46. С разных расстояний производится четыре независимых выстрела по одной и той же цели. Вероятности попадания в цель при этих выстрелах равны соответственно 0,1; 0,2; 0,4; 0,8. Найти распределения числа попаданий и математическое ожидание этого числа.

Решение. Обозначим число попаданий в цель через X. Запишем производящую функцию

$$\Psi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z)\ldots(q_n + p_n z) =$$
$$= (0,9 + 0,1z)(0,8 + 0,2z)(0,6 + 0,4z)(0,2 + 0,8z) =$$
$$= 0,0864 + 0,4344z + 0,3784z^2 + 0,0944z^3 + 0,0064z^4.$$

Итак, случайная величина X имеет распределение:

X	0	1	2	3	4
P	0,0864	0,4344	0,3784	0,0944	0,0064

$$M(X) = 1\cdot 0,4344 + 2\cdot 0,3784 + 3\cdot 0,0944 + 4\cdot 0,0064 = 1,5.$$

Заметим, что $M(X)$ можно вычислить непосредственно (не находя предварительно закона распределения). Представим число попаданий в виде $X = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$, где J_i — число попаданий при i-м выстреле. Тогда

$$M(X) = M(J_1) + M(J_2) + M(J_3) + M(J_4).$$

Но $M(J_i) = 0\cdot q_i + 1\cdot p_i = p_i$. Поэтому $M(X) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,1 + 0,2 +$ $+0,4 + 0,8 = 1,5.$

Ответ. $M(X) = 1,5.$

Задача 2.46. Вероятности попадания в цель при выстреле для трех стрелков равны соответственно p_1, p_2, p_3. Написать закон распределения числа попаданий в цель и найти математическое ожидание этого числа, если каждый стрелок сделал по одному выстрелу. (См. пример 2.46; значения p_1, p_2, p_3 взять из условий задачи 2.19.1.)

Пример 2.47. На круговом экране локатора равновозможно появление пятна в каждой точке экрана. Радиус экрана равен R. Найти закон распределения расстояния от центра экрана до пятна. Найти математическое ожидание и дисперсию этого расстояния.

Решение. Обозначим через X расстояние от центра экрана до пятна. Это расстояние будет меньше x, если пятно попадет внутрь круга радиуса x. Вероятность этого по геометрическому определению вероятности равна отношению площади круга радиуса x к площади всего экрана локатора. Поэтому функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x)=0$ при $x \le 0$, $F(x)=P(X<x)=\dfrac{\pi x^2}{\pi R^2}=\dfrac{x^2}{R^2}$ при $0<x\le R$ и $F(x)=1$ при $R<x$. Тогда функция плотности вероятности $f(x)=\dfrac{2x}{R^2}$ при $0<x<R$, а

$$M(X)=\int_0^R x\frac{2x}{R^2}\,dx=\frac{2R}{3} \text{ и } D(X)=\int_0^R\left(x-\frac{2R}{3}\right)^2\frac{2x}{R^2}\,dx=\frac{R^2}{18}.$$

Ответ. $M(X)=2R/3$; $D(X)=R^2/18$.

Задача 2.47. Зона ответственности локатора определяется в полярных координатах неравенствами $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ и $\rho_1 \le \rho \le 100$. В случайной точке зоны ответственности может появиться цель. Расстояние ее от локатора — случайная величина X. Считая равновозможными все положения цели в зоне ответственности, найдите функцию распределения случайной величины X и ее функцию плотности вероятности. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. (См. пример 2.47 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.47.

№	φ_1	φ_2	ρ_1	№	φ_1	φ_2	ρ_1	№	φ_1	φ_2	ρ_1
1	0	π/4	0	**11**	0	3π/4	10	**21**	0	π	30
2	0	π/2	0	**12**	π/4	π	10	**22**	π/4	3π/4	30
3	0	π	0	**13**	0	π/4	20	**23**	0	3π/4	30
4	π/4	3π/4	0	**14**	0	π/2	20	**24**	π/4	π	30
5	0	3π/4	0	**15**	0	π/6	20	**25**	0	π/4	40
6	π/4	π	0	**16**	π/4	3π/4	20	**26**	0	π/2	40
7	0	π/4	10	**17**	0	3π/4	20	**27**	0	π	40
8	0	π/2	10	**18**	π/4	π	20	**28**	0	3π/2	40
9	0	π	10	**19**	0	π/4	30	**29**	0	π/2	50
10	π/4	3π/4	10	**20**	0	π/2	30	**30**	0	π/4	50

Пример 2.48. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=P(X<x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ x^2/36 & \text{при } x\in[0,6];\\ 1 & \text{при } x>6.\end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(X<4)$, $P(2<X<5)$, $P(X>3)$.

Решение. Найдем сначала функцию плотности вероятности

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ x/18 & \text{при } x\in[0,6];\\ 0 & \text{при } x>6.\end{cases}$$

Тогда $M(X)=\int\limits_0^6 x\dfrac{x}{18}\,dx=4$, $M(X^2)=\int\limits_0^6 x^2\dfrac{x}{18}\,dx=18$. Поэтому $D(X)=M(X^2)-$ $-[M(X)]^2=2$.

С учетом определения и свойств функции распределения $F(x)$ имеем

$P(X<4)=F(4)=4/9$; $P(2<X<5)=F(5)-F(2)=25/36-4/36=7/12$;

$P(X>3)=1-P(X<3)=1-F(3)=1-9/36=3/4$.

(В последнем случае учтено, что $P(X=3)=0$ в силу непрерывности случайной величины *X*.

Ответ. $M(X)=4$; $D(X)=2$; $P(X<4)=4/9$; $P(2<X<5)=7/12$; $P(X>3)=3/4$.

Задача 2.48.1. Случайная величина *X* имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a;\\ \sqrt{x-a} & \text{при } x\in[a,a+1];\\ 1 & \text{при } x>a+1.\end{cases}$$

Найдите $M(X)$, $D(X)$, $P(X<a+1/9)$, $P(a+1/16<X<a+1/4)$, $P(X>1/4)$. (См. пример 2.48; *a* — номер варианта.)

Задача 2.48.2. Случайная величина *X* имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \dfrac{4(ax-x^2)}{a^2} & \text{при } x\in[0,a/2];\\ 1 & \text{при } x>a/2.\end{cases}$$

Найдите $M(X)$, $P\left(X<a/4\right)$, $P\left(a/8<X<a/4\right)$. (См. пример 2.48; *a* — номер варианта).

Задача 2.48.3. Случайная величина X имеет распределение Парето с плотностью вероятности $f(x)=\dfrac{a}{x_0}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{a+1}$ при $x_0\le x$ и $f(x)=0$ при $x<x_0$, ($a>0$ и $x_0>0$). Найдите $M(X)$ и $P(x_0\le x<x_0+a)$. (См. пример 2.48, x_0 — номер варианта, $a=2$ в вариантах 1–10, $a=3$ в вариантах 11–20 и $a=4$ в вариантах 21–30.)

2.9. Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad (2.9.1)$$

где $-\infty < m < \infty$ и $\sigma > 0$ — некоторые параметры.

График функции плотности вероятности (2.9.1) имеет максимум в точке $x = m$, а точки перегиба отстоят от точки m на расстояние σ. При $x \to \pm\infty$ функция (2.9.1) асимптотически приближается к нулю (ее график изображен на рис. 2.9.1).

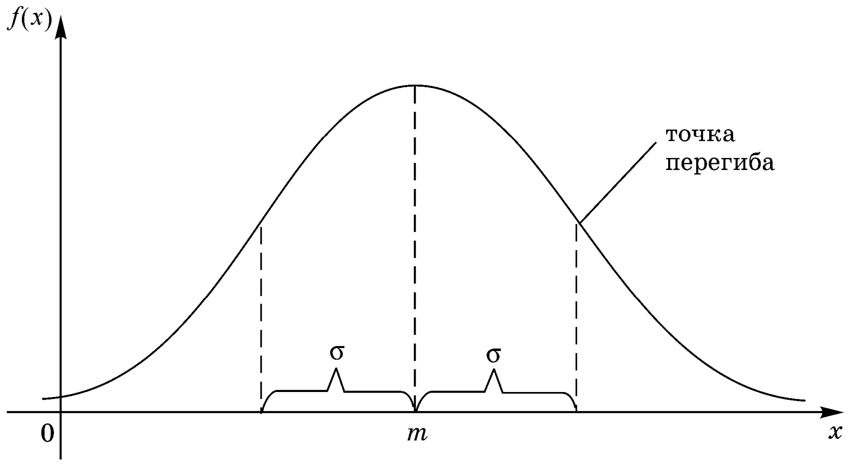


Рис. 2.9.1

Помимо геометрического смысла, параметры нормального закона распределения имеют и вероятностный смысл. Параметр m равен математическому ожиданию нормально распределенной случайной величины, а дисперсия $D(X) = \sigma^2$. Если $X \sim N(m;\sigma^2)$, т.е. X имеет нормальный закон распределения с параметрами m и σ^2, то

$$P(a < X < b) \quad \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \qquad (2.9.2)$$

где $\Phi(x) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt$ — *функция Лапласа*.

Значения функции $\Phi(x)$ можно найти по таблице (см. прил., табл. П2). Функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Поэтому ее таблица дана только для неотрицательных x. График функции Лапласа изображен на рис. 2.9.2. При значениях $x > 5$ она практически остается постоянной. Поэтому в таблице даны значения функции только для $0 \le x \le 5$. При значениях $x > 5$ можно считать, что $\Phi(x) = 0,5$.

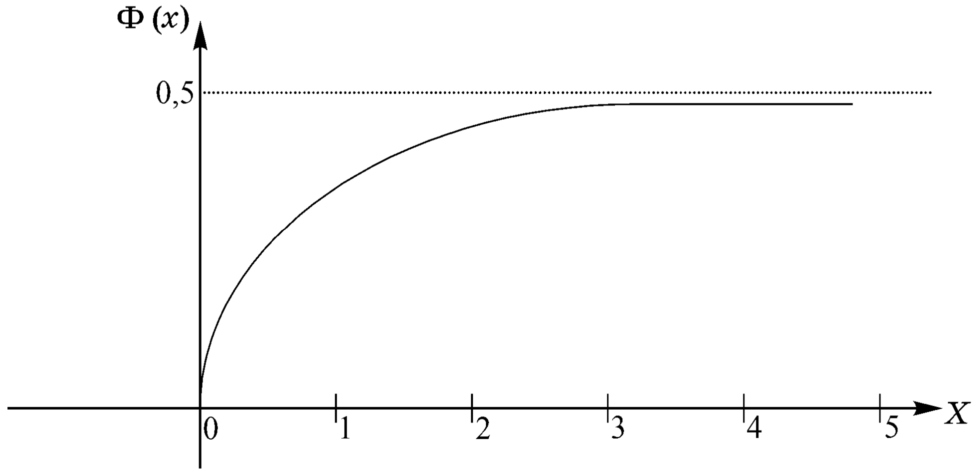


Рис. 2.9.2

Если $X \sim N(m;\sigma^2)$, то

$$P(|X - m| < \alpha) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right). \tag{2.9.3}$$

Пример 2.49. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(m;\sigma^2)$. Известно, что $P(X < 1) = 0{,}15866$, а $P(X > 4) = 0{,}30854$. Найти значения параметров m и σ^2.

Решение. Воспользуемся формулой (2.9.2):

$$P(X < 1) = P(-\infty < X < 1) = \Phi\left(\frac{1-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - m}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1-m}{\sigma}\right) + \Phi(\infty) = 0{,}15866.$$

Так как $\Phi(\infty) = 0{,}5$, то $-\Phi\left(\frac{1-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{m-1}{\sigma}\right) = 0{,}5 - 0{,}15866 = 0{,}34134$. По таблице функции Лапласа (см. прил., табл. П2) находим, что $\Phi(1) = 0{,}34134$. Поэтому $\frac{m-1}{\sigma} = 1$ или $m - 1 = \sigma$.

Аналогично $P(X > 4) = P(4 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{4-m}{\sigma}\right) = 0{,}30854.$

Так как $\Phi(\infty) = 0{,}5$, то $\Phi\left(\frac{4-m}{\sigma}\right) = 0{,}5 - 0{,}30854 = 0{,}19146.$ По таблице функции Лапласа (см. прил., табл. П2) находим, что $\Phi(1/2) = 0{,}19146$. Поэтому $\frac{4-m}{\sigma} = 0{,}5$ или $m - 4 = -0{,}5\sigma$. Из системы двух уравнений $m - 1 = \sigma$ и $m - 4 = -0{,}5\sigma$ находим, что $m = 3$, а $\sigma = 2$, т.е. $\sigma^2 = 4$. Итак, случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(3;4)$.

График функции плотности вероятности этого закона распределения изображен на рис. 2.9.3.

Ответ. $m = 3$; $\sigma^2 = 4$.

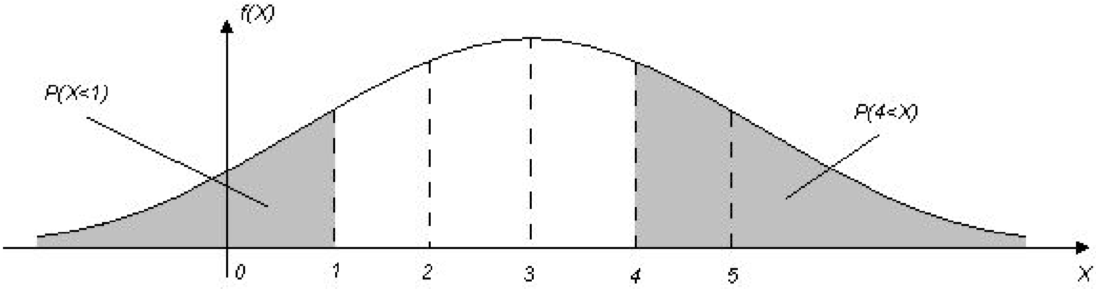


Рис. 2.9.3

Задача 2.49. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(m;\sigma^2)$. Известно, что:

а) для нечетных вариантов $P(X < a)$ α, а $P(X < b)$ β;

б) для четных вариантов $P(X < a)$ α, а $P(X > b)$ β.

Найдите значения параметров m и σ^2. Сделайте эскиз функции плотности вероятности при найденных значениях параметров. Найдите $P(X^2 < 4)$. (См. пример 2.49 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.49.

№	a	α	b	β	№	a	α	b	β
1	–2	0,0668	3	0,8413	**16**	–1/2	0,4013	2	0,1587
2	–1	0,1587	5	0,0227	**17**	5	0,6915	2	0,1587
3	–1	0,4332	4	0,8413	**18**	5	0,6915	2	0,8413
4	0	0,1587	6	0,0227	**19**	2	0,0227	8	0,8413
5	–2	0,1587	1	0,6915	**20**	2	0,0227	8	0,1587
6	2	0,8413	–1	0,6915	**21**	3	0,1587	12	0,9773
7	1	0,1587	5	0,8413	**22**	3	0,1587	4,5	0,6915
8	1	0,1587	5	0,1587	**23**	0	0,3085	6	0,8413
9	–6	0,0227	3	0,8413	**24**	0	0,3085	6	0,6915
10	3	0,1587	6	0,0227	**25**	–2	0,1587	4	0,6915
11	–3	0,1587	0	0,6915	**26**	–2	0,1587	4	0,3085
12	–3	0,1587	0	0,3085	**27**	2	0,5000	4	0,6915
13	0	0,3446	5	0,7258	**28**	4	0,6915	2	0,5000
14	–1/2	0,4013	2	0,8413	**29**	–3	0,1587	0	0,9773
15	–3	0,1587	0	0,0227	**30**	0	0,3446	5	0,2742

Пример 2.50. Ошибка измерения X имеет нормальный закон распределения, причем систематическая ошибка равна 1 мк, а дисперсия ошибки равна 4 мк^2. Какова вероятность того, что в трех независимых измерениях ошибка ни разу не превзойдет по модулю 2 мк?

Решение. По условиям задачи $X \sim N(1;4)$. Вычислим сначала вероятность того, что в одном измерении ошибка не превзойдет 2 мк. По формуле (2.9.2)

$$P(|X| \le 2) = P(-2 \le X \le 2) = \Phi\left(\frac{2-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-1}{2}\right) = \Phi(1/2) - \Phi(-3/2) =$$

$$= \Phi(1/2) + \Phi(3/2) \approx 0,1915 + 0,4332 = 0,6241.$$

Вычисленная вероятность численно равна заштрихованной площади на рис. 2.9.4.

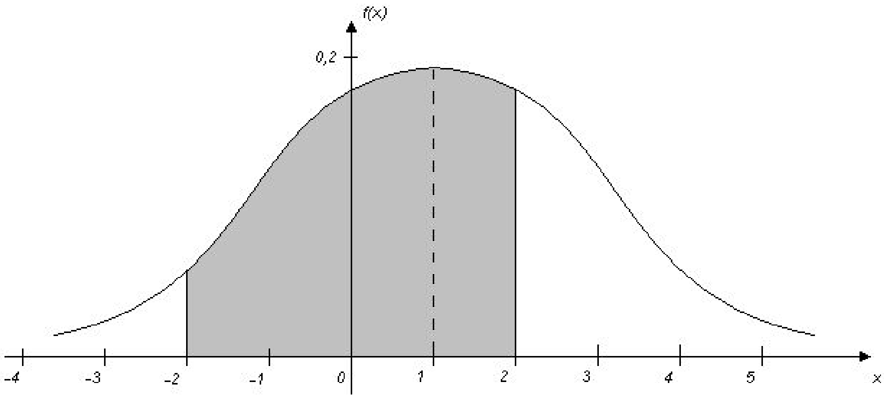


Рис. 2.9.4

Каждое измерение можно рассматривать как независимый опыт. Поэтому по формуле Бернулли (2.6.1) вероятность того, что в трех независимых измерениях ошибка ни разу не превзойдет 2 мк, равна $P_3(3) =$ $= C_3^3 (0,6241)^3 (0,3753)^0 \approx 1/4.$

Ответ. $\approx 1/4.$

Задача 2.50. Ошибка измерения X имеет нормальный закон распределения $N(m;\sigma^2)$. Найдите вероятность того, что при измерении ошибка по модулю *не превысит* v. Изобразите найденную вероятность на рисунке. Найдите вероятность того, что в n независимых измерениях ошибка измерения k раз *превзойдет* v. (См. пример 2.50 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.50.

№	m	σ^2	v	n	k	№	m	σ^2	v	n	k	№	m	σ^2	v	n	k
1	–1	4	2	4	1	**11**	2	2,25	3	4	1	**21**	–1	9	3	3	1
2	2	9	3	3	1	**12**	0,5	4	2	3	1	**22**	2	2,25	2	3	1
3	1	4	3	4	2	**13**	2	9	3	4	1	**23**	0,5	4	3	4	1
4	2	4	3	3	1	**14**	0,5	9	3	4	2	**24**	0,5	6,25	4	3	1
5	–1	16	5	4	1	**15**	–1	4	3	4	2	**25**	2	9	3	4	2
6	2	4	4	3	1	**16**	0,5	4	3	4	1	**26**	0,5	9	4	3	1
7	1	2,25	3	3	1	**17**	0,5	16	3	3	1	**27**	1,5	4	3	3	2

8	–1	9	2	4	1	**18**	2	9	3	4	1	**28**	–2	9	3	4	1
9	2	9	3	3	1	**19**	0,5	4	2	4	2	**29**	0	4	3	4	2
10	1	4	3	4	2	**20**	0,5	2,25	3	3	1	**30**	0	9	4	3	1

Пример 2.51. Функция плотности вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \gamma \exp\{-2x^2 - 4/3x + 1/3\}. \tag{2.9.4}$$

Требуется определить коэффициент γ, найти $M(X)$ и $D(X)$, определить тип закона распределения, нарисовать график функции $f(x)$, вычислить вероятность $P(-1 < X < 0)$.

Замечание. Если каждый закон распределения из некоторого семейства законов распределения имеет функцию распределения $F\left(\dfrac{x-a}{b}\right)$, где $F(x)$ — фиксированная функция распределения, $a \in R$, $b > 0$, то говорят, что эти законы распределения *принадлежат к одному виду или типу распределений*. Параметр *a* называют параметром сдвига, *b* – – параметром масштаба.

Решение. Так как (2.9.4) функция плотности вероятности, то интеграл от нее по всей числовой оси должен быть равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2 - 3/4x + 1/3} dx = 1. \tag{2.9.5}$$

Преобразуем выражение в показателе степени, выделяя полный квадрат:

$$-2(x^2 + 2/3x - 1/6) \quad -2(x^2 + 2/3x + 1/9 - 1/9 - 1/6) \quad -2(x + 1/3)^2 + 5/9.$$

Тогда (2.9.5) можно записать в виде

$$e^{5/9}\,\gamma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x+1/3)^2}\,dx = 1. \tag{2.9.6}$$

Сделаем замену переменных так, чтобы $2(x + 1/3)^2 = t^2/2$, т.е. $x + 1/3 = t/2$, $dx = dt/2$. Пределы интегрирования при этом останутся прежними. Тогда (2.9.6) преобразуется к виду

$$e^{5/9}\,\gamma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,\frac{dt}{2} = 1.$$

Умножим и разделим левую часть равенства на $\sqrt{2\pi}$. Получим равенство

$$\frac{1}{2}\gamma\sqrt{2\pi}\,e^{5/9}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 1.$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 1,$ как интеграл по всей числовой оси от функции плотности вероятности стандартного нормального закона распределения $N(0,1)$, то приходим к выводу, что

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-5/9}.$$

Поэтому

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-5/9} \exp\{-2x^2 - 4/3x + 1/3\} \quad \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-2x^2 - 4/3x - 2/9\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-2(x^2 + 2/3x + 1/9)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}0{,}5} e^{-\frac{(x+1/3)^2}{2\cdot 1/4}}.$$

Последняя запись означает, что случайная величина имеет нормальный закон распределения с параметрами $m = -1/3$ и $\sigma^2 = 1/4$. График функции плотности вероятности этого закона изображен на рис. 2.9.5. Распределение случайной величины X принадлежит к семейству нормальных законов распределения. По формуле (2.9.2)

$$P(-1 < X < 0) \quad \Phi\left(\frac{0-(-1/3)}{1/2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-(-1/3)}{1/2}\right) \quad \Phi(2/3) + \Phi(4/3) \quad 0{,}653.$$

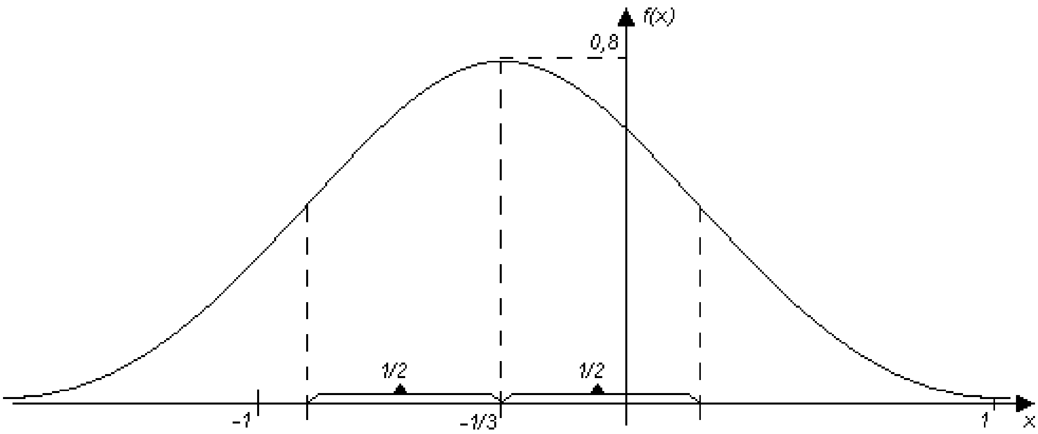


Рис. 2.9.5

Ответ. $\gamma = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-5/9}$, $M(X) = -1/3$, $D(X) = 1/4$, $N(-1/3;\ 1/4)$.

Задача 2.51. Функция плотности вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \gamma \exp\{ax^2 + bx + c\}.$$

Найдите коэффициент γ, $M(X)$, $D(X)$, определите тип закона распределения, нарисуйте график функции $f(x)$. Вычислите $P(|x| < 2)$. (См. пример 2.51 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.51.

№	a	b	c	x_1	x_2	№	a	b	c	x_1	x_2
1	–1	2	3	–1/3	4/3	**16**	–3	–4	2	1/3	1
2	–2	8	–1	1	3	**17**	–2	–4/3	2/3	–1/3	2/3
3	–4	–6	0	–3/4	1/4	**18**	–3	3	0	1/2	3/2
4	–2	8	–2	1	3	**19**	–2	4/3	0	1/3	1
5	–2	4/3	–2/3	1/3	2/3	**20**	–3	4	–2	–1/3	2/3
6	–3	3	–2	1/2	3/2	**21**	–2	–8	0	–3/2	–1/3
7	–2	–8	2	–3/2	–1	**22**	–2	–4/3	0	–1/3	2/3
8	–4	6	2	1/4	3/4	**23**	–3	–4	1	1/3	1
9	–2	4/3	–1/3	0	2/3	**24**	–4	6	0	0	3/4
10	–3	4	–1	1/3	4/3	**25**	–3	4	0	–1/3	4/3
11	–3	–3	1	1/2	3/2	**26**	–2	8	–1	1	2
12	–2	8	0	1	3	**27**	–4	6	1	0	3/4
13	–4	–6	–2	–1/2	1/4	**28**	–2	–8	1	–3/2	–1
14	–3	–4	0	1/3	4/3	**29**	–3	3	0	1/2	3/2
15	–3	–3	2	–1/2	1/3	**30**	–4	–6	–1	–1/2	1/4

2.10. Асимптотика схемы независимых испытаний

2.10.1. Локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа

При большом числе опытов n формула Бернулли (2.6.1) приводит к большому объему вычислений. Существуют приближенные формулы для вычисления вероятностей $P_n(k),$ которые дают тем большую точность, чем больше число ***n*.**

Пусть k — число появлений события A в n независимых опытах, в каждом из которых $P(A)=p\ \ (0<p<1).$ Тогда при достаточно больших n (хотя бы несколько десятков) вероятность того, что в n независимых опытах событие A ровно k раз, определяется формулой

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac{\left(k-np\right)^2}{2npq}\right\}. \qquad (2.10.1)$$

Эта формула составляет содержание *локальной* теоремы Муавра–Лапласа. Для вычисления вероятностей по формуле (2.10.1) удобно пользоваться таблицей функции $\varphi(t)\ \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-t^2/2\}$ (см. прил., табл. П1). Использование этой функции позволяет записать искомую вероятность в виде

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Вероятность того, что в n независимых опытах событие A появится от k_1 до k_2 раз, определяется формулой

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (2.10.2)$$

Эта формула составляет содержание *интегральной теоремы Муавра–Лапласа.*

Замечание. Правая часть формулы (2.10.1) соответствует функции плотности вероятности нормального закона распределения $N(np;npq)$. Формула (2.10.2) является формулой (2.9.2), записанной для нормального закона распределения $N(np;npq)$.

Пример 2.52. Восемьдесят процентов приборов после сборки нуждаются в регулировке. Какова вероятность того, что среди 400 собранных за смену приборов в регулировке нуждаются: а) не менее 310; б) не более 350; в) от 304 до 336?

Решение. Сборку каждого прибора можно считать независимым испытанием с вероятностью появления события равной $p = 0,8.$ Так как число опытов велико, то можно воспользоваться интегральной теоремой Муавра–Лапласа (2.10.2):

а) $$P_{400}(310;400) = \Phi\left(\frac{400 - 400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{310 - 400\cdot 0,8\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) =$$

$$= \Phi(10) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944 \approx 0,9;$$

б) $$P_{400}\left(0;350\right) = \Phi\left(\frac{350 - 400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) =$$

$$= \Phi(3,75) + \Phi(40) = 0,4999 + 0,5 = 0,9999 \approx 1;$$

в) $$P_{400}\left(304;336\right) = \Phi\left(\frac{336 - 400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{304 - 400\cdot 0,8\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) =$$

$$= \Phi(2) + \Phi(2) = 2\Phi(2) = 0,9545.$$

Ответ. а) $0,8944 \approx 0,9$; б) $0,9999 \approx 1$; в) 0,9545.

Задача 2.52.1. Вероятность того, что передаче по каналу связи сигнал из-за помех будет искажен, равна p. Оцените вероятность того, что при независимой передаче n сигналов: а) от k_1 до k_2 из них будут искажены; б) не менее k_1 из них будут искажены; в) не более k_2 из них будут искажены. (См. пример 2.52 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.52.1.

№	p	n	k_1	k_2	№	p	n	k_1	k_2	№	p	n	k_1	k_2

1	0,02	500	5	12	**11**	0,03	700	16	24	**21**	0,01	500	10	16
2	0,02	400	6	20	**12**	0,03	800	18	26	**22**	0,02	500	8	12
3	0,02	600	9	14	**13**	0,01	800	6	12	**23**	0,02	400	6	15
4	0,02	700	10	16	**14**	0,01	900	6	13	**24**	0,02	600	8	12
5	0.02	800	12	20	**15**	0,01	1000	8	14	**25**	0,01	900	7	10
6	0,02	900	14	20	**16**	0,01	1500	12	20	**26**	0,03	400	8	13
7	0,02	1000	15	22	**17**	0,01	2000	14	22	**27**	0,02	400	7	12
8	0,01	1000	8	14	**18**	0,01	1200	8	14	**28**	0,01	700	4	10
9	0,03	500	10	15	**19**	0,01	400	10	16	**29**	0,02	200	3	9
10	0,03	600	14	16	**20**	0,01	1600	12	18	**30**	0,01	300	3	8

Задача 2.52.2. Известно, что p процентов жителей нашего города поддерживают некоторое мероприятие. Какова вероятность того, что при опросе наугад n жителей не менее k из них выскажутся в поддержку мероприятия. (См. пример 2.52 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.52.2.

№	p	n	k	№	p	n	k	№	p	n	k
1	15	200	25	**11**	10	400	35	**21**	70	100	65
2	35	200	65	**12**	20	150	35	**22**	50	200	110
3	20	150	25	**13**	20	200	45	**23**	50	200	95
4	25	200	55	**14**	60	200	115	**24**	35	200	75
5	30	100	25	**15**	50	150	70	**25**	20	300	55
6	40	100	45	**16**	60	200	125	**26**	20	300	65
7	25	200	45	**17**	50	150	80	**27**	20	300	70
8	15	200	35	**18**	50	300	140	**28**	25	300	80
9	45	100	50	**19**	50	200	90	**29**	25	400	90
10	50	100	45	**20**	50	200	105	**30**	25	400	105

Пример 2.53. В страховой компании застраховано 10000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате дорожно-транспортного происшествия равна 0,02. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 24 у.е. страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 1000 у.е. Найдите вероятность того, что по истечении года работы компания потерпит убытки от этого вида страховой деятельности.

Решение. Страховой сбор с 10000 владельцев автомобилей составляет $24 \cdot 10000 = 240000$ у.е. Компания потерпит убытки, если будет предъявлено более 240 исков по 1000 у.е. каждый. Вероятность поступления страхового иска от каждого автовладельца равна 0,02. Эксплуатацию каждого автомобиля в течение страхового срока можно считать независимым испытанием. Так как число испытаний велико

($n = 10000$), то можно воспользоваться интегральной теоремой Муавра-Лапласа. По формуле (2.10.2)

$$P_{10000}(240 \le k \le 10000) \quad \Phi\left(\frac{10000 - 10000 \cdot 0{,}02}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{240 - 10\,000 \cdot 0{,}02}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}}\right) \quad \Phi(700) - \Phi(2{,}86) \quad 0{,}5 - 0{,}4979 \quad 0{,}0021.$$

Ответ. 0,0021.

Задача 2.53. Медицинская страховка туриста стоит 300 рублей. При наступлении страхового случая (травма, заболевание и т.д.) турист получает страховку m тыс. рублей. Страховая компания застраховала n туристов. Вероятность наступления страхового случая для каждого туриста равна p. Какова вероятность того, что страховая компания потерпит убытки от этого вида страховой деятельности?

Какова вероятность того, что доход компании от этого вида страховой деятельности превысит $10k$ тыс. рублей *в* вариантах 1–15, и превысит $5k$ в вариантах 16–30, где k — номер варианта? (См. пример 2.53 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.53.

№	m	n	p	№	m	n	p	№	m	n	p
1	20	2000	0,01	**11**	2000	0,025	4	**21**	20	4000	0,015
2	20	3000	0,015	**12**	3000	0,01	4	**22**	25	4000	0,025
3	25	2000	0,02	**13**	4000	0,015	2	**23**	20	5000	0,015
4	25	3000	0,025	**14**	4000	0,02	1	**24**	25	5000	0,015
5	20	4000	0,01	**15**	5000	0,025	4	**25**	20	2000	0,025
6	25	4000	0,015	**16**	5000	0,01	4	**26**	20	3000	0,025
7	20	5000	0,02	**17**	2000	0,02	4	**27**	25	2000	0,01
8	25	5000	0,025	**18**	3000	0,01	5	**28**	25	3000	0,02
9	20	2000	0,015	**19**	2000	0,02	5	**29**	20	4000	0,025
10	20	3000	0,02	**20**	3000	0,015	5	**30**	25	4000	0,01

Пример 2.54. Вероятность попадания в цель при выстреле равна 0,8. Сколько нужно запланировать выстрелов, чтобы с вероятностью большей 0,9 можно было получить не менее 30 попаданий.

Решение. Каждый выстрел считаем независимым опытом. Из условий задачи легко видеть, что число выстрелов n должно быть достаточно большим ($n > 30$). Поэтому можно воспользоваться интегральной формулой Муавра–Лапласа (2.10.2):

$$P_n(30 \le k \le n) \approx \Phi\left(\frac{n - n\cdot 0{,}8}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{30 - n\cdot 0{,}8}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) > 0{,}9. \qquad (2.10.3)$$

Заметим, что $\frac{n - n\cdot 0{,}8}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = \frac{n\cdot 0{,}2}{0{,}4\sqrt{n}} = \sqrt{n}/2$ и при $n > 30$ величина $\sqrt{n}/2 > 2{,}74$. Поэтому $\Phi\left(\frac{n - n\cdot 0{,}8}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) > 0{,}4969 \approx 0{,}5.$

В итоге неравенство (2.10.3) можно переписать в виде

$$\Phi\left(\frac{n\cdot 0{,}8 - 30}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) > 0{,}4.$$

По таблице функции Лапласа находим, что $\Phi(1{,}28) = 0{,}4.$ Так как функция Лапласа строго возрастает, то $\frac{n\cdot 0{,}8 - 30}{0{,}4\sqrt{n}} > 1{,}28$ или $n - 0{,}64\sqrt{n} - 37{,}5 > 0.$ Откуда $\sqrt{n} > 6{,}4538,$ т.е. $n > 41{,}65.$ Итак, $n \ge 42.$

Ответ. 42.

Задача 2.54. При разливе выплавленного металла вероятность получить годную отливку равна *p*. Сколько нужно запланировать отливок, чтобы с вероятностью больше *P* после проверки получить не менее *k* годных отливок? (См. пример 2.54 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.54.

№	*p*	*P*	*k*	№	*p*	*P*	*k*	№	*p*	*P*	*k*	№	*p*	*P*	*k*
1	0,9	0,9	25	**9**	0,6	0,9	40	**17**	0,8	0,8	50	**25**	0,5	0,9	35
2	0,9	0,95	40	**10**	0,9	0,9	35	**18**	0,5	0,9	30	**26**	0,6	0,9	30
3	0,6	0,9	35	**11**	0,7	0,9	35	**19**	0,8	0,9	45	**27**	0,9	0,95	25
4	0,9	0,9	30	**12**	0,6	0,8	40	**20**	0,6	0,9	45	**28**	0,6	0,95	35
5	0,7	0,9	30	**13**	0,9	0,95	35	**21**	0,7	0,9	40	**29**	0,8	0,9	40
6	0,6	0,8	30	**14**	0,6	0,9	25	**22**	0,5	0,9	40	**30**	0,9	0,95	30
7	0,8	0,9	35	**15**	0,5	0,9	45	**23**	0,9	0,95	50	**31**	0,8	0,9	35
8	0,5	0,9	25	**16**	0,9	0,9	40	**24**	0,8	0,9	30	**32**	0,6	0,8	40

Замечание. При значениях $0{,}1 < p < 0{,}9$ формула Муавра–Лапласа (2.10.2) дает приближение приемлемой точности, так как многоугольник распределения при большом числе опытов напоминает по форме функцию плотности вероятности нормального закона распределения (см. рис. 2.10.1, на котором указаны вероятности $P_8(k) = C_8^k p^k q^{8-k}$ при разных значениях *p*).

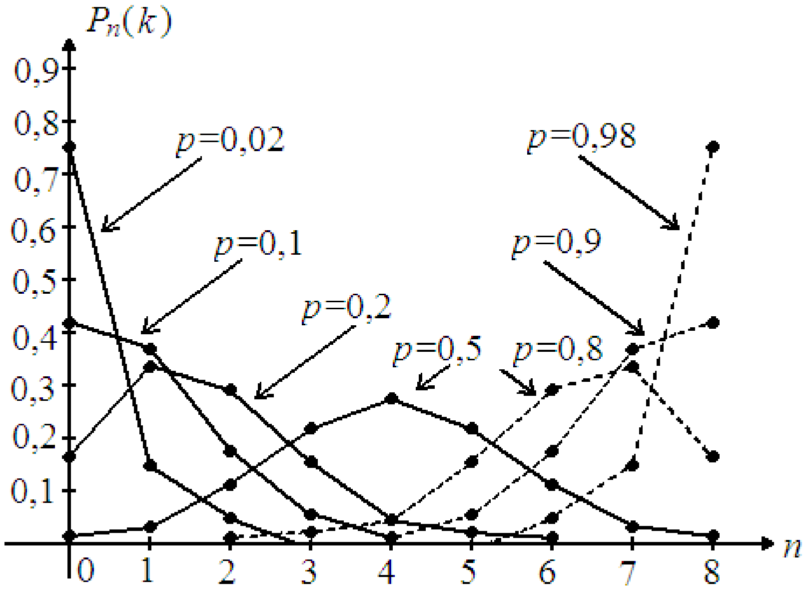


Рис. 2.10.1

2.10.2. Формула Пуассона

При значениях вероятности появления события близких к нулю или единице многоугольник распределения существенно несимметричен (см. рис. 2.10.1). Приближенная формула (2.10.1) не обеспечивает приемлемой точности. В этих условиях для вычисления вероятностей $P_n(k)$ используют обычно формулу Пуассона (2.10.4).

Пусть число независимых опытов n велико (чем больше, тем лучше), а вероятность события p мала (чем меньше, тем лучше, но $p > 0$). Тогда

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (2.10.4)$$

где $\lambda = np$. Эту формулу называют *формулой Пуассона.* Формула Пуассона дает приемлемую точность, если производится хотя бы несколько десятков опытов, а $p < 0{,}1$.

Пример 2.55. Вероятность того, что изделие при транспортировке с завода повредится, равна 0,0005. С завода отправлено четыре тысячи изделий. Какова вероятность того, что в пути повредится больше двух изделий?

Решение. Транспортировку каждого изделия можно рассматривать как независимый опыт, число которых ($n = 4000$) велико. Вероятность же появления события в каждом опыте ($p = 0{,}0005$) мала. Это дает основание воспользоваться для вычислений формулой Пуассона (2.7.1). Заметим, что $\lambda \quad np \quad 4000 \cdot 0{,}0005 = 2$. Нас интересует вероятность

$$P_{4000}(k>2)=P_{4000}(3)+P_{4000}(4)+\ldots+P_{4000}(4000).$$

Проще эту вероятность вычислить, если рассмотреть вероятность противоположного события:

$$P_{4000}(k>2)=1-P_{4000}(k\le 2)=1-P_{4000}(0)-P_{4000}(1)-P_{4000}(2)$$

$$=1-\frac{2^0}{0!}e^{-2}-\frac{2^1}{1!}e^{-2}-\frac{2^2}{2!}e^{-2}=1-e^{-2}-2e^{-2}-2e^{-2}=1-5e^{-2}\approx 0{,}31.$$

Ответ. $1-5\,e^{-2}\approx 0{,}31$.

Задача 2.55. При дальней радиосвязи из-за помех каждый сигнал независимо от других с вероятностью p может быть принят ошибочно. Передано n сигналов. Какова вероятность того, что k из них будут приняты ошибочно? Какова вероятность ошибочного приема не менее k сигналов? (См. пример 2.55 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.55.

№	p	n	k	№	p	n	k	№	p	n	k
1	0,01	200	1	**11**	0,004	250	3	**21**	0,0025	400	3
2	0,01	200	2	**12**	0,004	250	2	**22**	0,005	400	1
3	0,01	200	3	**13**	0,008	250	1	**23**	0,005	400	2
4	0,015	200	1	**14**	0,008	250	2	**24**	0,005	400	3
5	0,015	200	2	**15**	0,008	250	3	**25**	0,005	600	2
6	0,015	200	3	**16**	0,01	300	2	**26**	0,005	600	3
7	0,02	200	2	**17**	0,01	300	3	**27**	0,005	600	4
8	0,02	200	3	**18**	0,01	300	4	**28**	0,0025	800	1
9	0,02	200	4	**19**	0,0025	400	1	**29**	0,0025	800	2
10	0,004	250	1	**20**	0,0025	400	2	**30**	0,0025	800	3

Пример 2.56. Известно, что из каждой 1000 элементов в среднем 999 сохраняют свою работоспособность в течение гарантийного срока. Какова вероятность того, что из 3000 элементов все до единого сохранят свою работоспособность в течение гарантийного срока?

Решение. Работу каждого элемента в течение гарантийного срока можно считать независимым опытом. Число опытов велико ($n=3000$). Вероятность того, что элемент сохранит работоспособность в течение гарантийного срока, равна 0,999. Формула Бернулли (2.6.1) из-за большого числа опытов для расчетов неприемлема. Для применения формулы Пуассона будем говорить не о работоспособных элементах, а об элементах вышедших из строя. Вероятность выхода из строя элемента $p=0{,}001$. Тогда $\lambda = np = 3000\cdot 0{,}001=3$. Все 3000 элементов сохранят свою работоспособность, если ни один из них не выйдет из строя. По формуле Пуассона (2.7.1)

$$P_{3000}(0)=\frac{3^0}{0!}e^{-3}\approx 0{,}05.$$

Ответ. $e^{-3} \approx 0,05.$

Задача 2.56. Каждое изделие независимо от других стандартно с вероятностью *p*. Произведено *n* изделий. Какова вероятность того, что *k* из них стандартны? (См. пример 2.56 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.56.

№	*n*	*p*	*k*	№	*n*	*p*	*k*	№	*n*	*p*	*k*
1	100	0,99	100	**11**	200	0,99	198	**21**	200	0,98	200
2	100	0,97	98	**12**	100	0,97	96	**22**	200	0,99	197
3	100	0,98	96	**13**	200	0,98	199	**23**	200	0,98	198
4	100	0,99	97	**14**	100	0,97	95	**24**	100	0,97	99
5	100	0,99	99	**15**	200	0,985	200	**25**	100	0,97	97
6	200	0,99	200	**16**	100	0,98	98	**26**	200	0,99	197
7	200	0,98	197	**17**	200	0,985	197	**27**	200	0,98	196
8	100	0,99	98	**18**	100	0,98	97	**28**	200	0,99	196
9	100	0,98	100	**19**	200	0,98	195	**29**	300	0,99	298
10	100	0,98	99	**20**	200	0,99	199	**30**	300	0,98	295

Пример 2.57. В студенческом строительном отряде работает 400 студентов. Вероятность того, что студент в течение всего срока работы получит травму, требующую введения противостолбнячной сыворотки, равна 0,005. Какое минимальное количество доз сыворотки должно быть в медсанпункте этого отряда, чтобы с вероятностью не менее 0,95 их хватило в случае необходимости?

Решение. Работу каждого студента в строительном отряде можно считать независимым опытом. Имеем большое число $n = 400$ опытов, а вероятность травмы $p = 0,005$ — мала. Поэтому можно воспользоваться формулой Пуассона (2.7.1), в которой $\lambda = 400 \cdot 0,005 = 2.$

Минимальное количество доз можно найти как минимальное *m*, при котором выполняется неравенство $P_{400}(k \le m) \ge 0,95.$ Непосредственный подсчет по формуле (2.7.1) показывает, что

$$P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) + P_{400}(3) + P_{400}(4) =$$
$$= \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2} + \frac{2^4}{4!}e^{-2} = 0,9496 \approx 0,95.$$

Заметим, что добавление к четырем еще одной дозы дает $\sum_{k=0}^{5} \frac{2^k}{k!} e^{-2} = 0,9858 \approx 0,99.$

Ответ. 4.

Задача 2.57. В аудиториях учебного корпуса установлено *n* ламп для освещения. Вероятность того, что данная лампа в течение месяца перегорит, равна p. Один раз в месяц электротехник обходит аудитории и заменяет перегоревшие лампы. Какой запас лампочек он должен иметь, чтобы с вероятностью P их хватило для замены всех перегоревших лампочек? (См. пример 2.57 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.57.

№	n	p	P	№	n	p	P	№	n	p	P
1	200	0,01	0,9	**25**	300	0,01	0,9	**21**	400	0,01	0,9
2	400	0,005	0,9	**25**	500	0,004	0,9	**22**	600	0,005	0,9
3	1000	0,002	0,9	**20**	800	0,005	0,9	**23**	500	0,008	0,9
4	500	0,002	0,9	**25**	2000	0,001	0,9	**24**	1500	0,001	0,9
5	250	0,004	0,9	**20**	3000	0,001	0,9	**25**	250	0,008	0,9
6	300	0,01	0,95	**25**	200	0,01	0,95	**26**	400	0,01	0,95
7	500	0,004	0,95	**20**	400	0,005	0,95	**27**	600	0,005	0,95
8	800	0,005	0,95	**20**	1000	0,002	0,95	**28**	500	0,008	0,95
9	2000	0,001	0,95	**25**	500	0,002	0,95	**29**	1500	0,001	0,95
10	3000	0,001	0,95	**25**	250	0,004	0,95	**30**	250	0,008	0,95

Пример 2.58. Предстоит произвести профилактический осмотр 400 устройств. Вероятность того, что в осматриваемом устройстве некоторый элемент потребуется заменить, равна 0,005. Какова вероятность того, что придется заменить не более четырех элементов?

Решение. Осмотр каждого устройства можно считать независимым опытом, и всего таких опытов планируется $n = 400$. Вероятность замены детали $p = 0{,}005$ — мала. Поэтому формула Муавра–Лапласа неприемлема. В этих условиях лучше воспользоваться асимптотической формулой Пуассона. Так как $\lambda = np = 400 \cdot 0{,}005 = 2$, то $P_n(k) \approx \dfrac{2^k}{k!} e^{-2}$.

Поэтому $P_{400}(k \le 4) = P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) + P_{400}(3) + P_{400}(4) =$

$$= \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2} + \frac{2^4}{4!}e^{-2} = 0{,}953.$$

Ответ. 0,953.

Задача 2.58. Известно, что только b% раковин жемчужниц содержат жемчужину. Найдите вероятность того, что в n добытых раковинах обнаружится не более m жемчужин. (См. пример 2.58 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.58.

№	n	b	m	№	n	b	m	№	n	b	m	№	n	b	m
1	100	1	3	**9**	150	0,2	3	**17**	50	1	2	**25**	250	0,2	5
2	150	1	2	**10**	200	1	4	**18**	100	0,5	2	**26**	300	1	3
3	200	1	3	**11**	250	0,2	5	**19**	200	0,5	3	**27**	400	0,5	4

4	250	0,2	4	**12**	1000	0,1	3	**20**	250	1	4	**28**	800	0,5	5
5	300	1	5	**13**	400	0,25	3	**21**	300	1	5	**29**	200	1	3
6	400	0,5	3	**14**	600	0,25	5	**22**	400	0,5	4	**30**	300	1	4
7	800	0,5	4	**15**	800	0,05	4	**23**	100	0,5	3	**31**	400	0,5	3
8	100	2	3	**16**	1000	0,1	3	**24**	200	1,5	4	**32**	600	0,25	5

2.11. Функции случайных величин

Пусть $h(x)$ — однозначная функция. Функцией случайной величины X называется такая случайная величина $H = h(X)$, которая принимает значение $h_i = h(x_i)$ каждый раз, когда величина X принимает значение x_i. Требуется найти закон распределения случайной величины H, зная закон распределения величины X. Решение этой задачи рассмотрим последовательно в пунктах I, II, III, IV в зависимости от типа случайной величины и особенностей функции $h(x)$.

I. Пусть X — дискретная случайная величина. Если функция $h(x)$ в области возможных значений X монотонна, то величина H примет значение $h_i = h(x_i)$ тогда и только тогда, когда $X = x_i$. Следовательно, возможными значениями H будут значения $h_i = h(x_i)$, и этим значениям соответствуют вероятности $p_i = P(H = h_i) = P(X = x_i)$.

II. Если $h(x)$ немонотонна и существует несколько значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$, при которых $h = h(x_i)$, то

$$P[h(x) = h_i] = P[X = x_1 \text{ или } X = x_2 \text{ или } \ldots \text{ или } X = x_m] = \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i).$$

Следовательно, для нахождения закона распределения случайной величины $H = h(X)$ нужно вычислить все ее значения, расположить их в порядке возрастания, отбрасывая повторяющиеся, и каждому из полученных значений h_i приписать вероятность, равную сумме вероятностей тех значений X, для которых $h = h(x_i)$.

Пример 2.59. Дискретная случайная величина имеет закон распределения

X	–2	0	2	4
P	0,4	0,2	0,3	0,1

Найти закон распределения $Y = 9 - X^2$.

Решение. Вероятность возможного значения $y_1 = -7$ равна вероятности события $X = 4$, т.е. 0,1. Вероятность возможного значения $y_2 = 5$ равна сумме вероятностей несовместных событий $X = -2$ и $X = 2$, т.е. $0,4+0,3=0,7$. Вероятность значения $y_3=9$ равна $P(X=0)=0,2$. Искомое распределение имеет вид

Y	–7	5	9
P	0,1	0,7	0,2

Задача 2.59. Случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с параметрами n и p (т.е. $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q=1-p$, $k=0,1,2,\ldots,n$). Найдите закон распределения случайной величины $Y=4X-X^2$. Найдите математические ожидание величины Y. В нечетных вариантах $n=3$, в четных — $n=4$. (См. пример 2.59 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.59.

№	p	№	p	№	p	№	p	№	p	№	p
1	0,1	**6**	0,5	**11**	0,4	**16**	0,8	**21**	0,7	**26**	1/3
2	0,4	**7**	1/3	**12**	0,7	**17**	0,6	**22**	0,2	**27**	0,9
3	0,2	**8**	0,6	**13**	1/4	**18**	0,9	**23**	3/4	**28**	0,3
4	1/4	**9**	0,3	**14**	3/4	**19**	2/3	**24**	1/6	**29**	5/6
5	1/6	**10**	2/3	**15**	0,5	**20**	0,1	**25**	0,8	**30**	0,7

Пример 2.60. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют каждая закон распределения:

X_i	–1	0	2
P	0,6	0,3	0,1

Найти законы распределения случайных величин: $Y=2X_1$; $Z=X_1+X_2$; $U=X_1^2$; $W=X_1X_2$. Найти математические ожидания этих величин.

Решение. Функция $y=2x$ монотонна. Поэтому Y может принимать значения –2, 0, 4 с вероятностями, равными вероятностям соответствующих значений X. Отсюда

Y	–2	0	4
P	0,6	0,3	0,1

и $M(Y)=-2\cdot 0,6+0\cdot 0,3+4\cdot 0,1 \quad -0,8$. Найдем возможные значения Z:

$Z=-1+(-1)=-2$ с вероятностью $p=0,6\cdot 0,6=0,36$;

$Z=-1+0 \quad -1$ с вероятностью $p=0,6\cdot 0,3=0,18$;

$Z=-1+2=1$ с вероятностью $p=0,6\cdot 0,1=0,06$;

$Z=0+(-1)=-1$ с вероятностью $p=0,3\cdot 0,6=0,18$;

$Z=0+0=0$ с вероятностью $p=0,3\cdot 0,3=0,09$;

$Z=0+2=2$ с вероятностью $p=0,3\cdot 0,1=0,03$;

$Z=2+(-1)=1$ с вероятностью $p=0,1\cdot 0,6=0,06$;

$Z=2+0=2$ с вероятностью $p=0,3\cdot 0,1=0,03$;

$Z=2+2=4$ с вероятностью $p=0,1\cdot 0,1=0,01$.

Суммируя вероятности повторяющихся значений Z, получаем закон распределения:

Z	–2	–1	0	1	2	4
P	0,36	0,36	0,09	0,12	0,06	0,01

и $M(Z) = -2\cdot 0,36 + (-1)\cdot 0,36 + 0\cdot 0,09 + 1\cdot 0,12 + 2\cdot 0,06 + 4\cdot 0,01 = -0,8$.

Случайная величина U принимает значения: $U = (-1)^2 = 1$ с вероятностью 0,6; $U = 0$ с вероятностью 0,3 и $U = 2^2 = 4$ с вероятностью 0,1. Поэтому закон распределения U имеет вид:

U	0	1	4
P	0,3	0,6	0,1

и $M(U) = 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,6 + 4\cdot 0,1 = 1$. Найдем возможные значения W:

$W = -1\cdot(-1) = 1$ с вероятностью $0,6\cdot 0,6 = 0,36$;

$W = -1\cdot 0 = 0$ с вероятностью $0,6\cdot 0,3 = 0,18$;

$W = -1\cdot 2 = -2$ с вероятностью $0,6\cdot 0,1 = 0,06$;

$W = 0\cdot(-1) = 0$ с вероятностью $0,3\cdot 0,6 = 0,18$;

$W = 0\cdot 0 = 0$ с вероятностью $0,3\cdot 0,3 = 0,09$;

$W = 0\cdot 2 = 0$ с вероятностью $0,3\cdot 0,1 = 0,03$;

$W = 2\cdot 0 = 0$ с вероятностью $0,1\cdot 03 = 0,3$;

$W = 2\cdot(-1) = -2$ с вероятностью $0,1\cdot 0,6 = 0,06$;

$W = 2\cdot 2 = 4$ с вероятностью 0,01.

Суммируя вероятности повторяющихся значений W, получаем закон распределения:

W	–2	0	1	4
P	0,12	0,51	0,36	0,01

и $M(W) = -2\cdot 0,12 + 0\cdot 0,51 + 1\cdot 0,36 + 4\cdot 0,01 = 0,16$.

Ответ.

Y	–2	0	4
P	0,6	0,3	0,1

Z	–2	–1	0	1	2	4
P	0,36	0,36	0,09	0,12	0,06	0,01

U	0	1	4
P	0,3	0,6	0,1

W	–2	0	1	4
P	0,12	0,51	0,36	0,01

$M(Y) = -0,8$; $M(Z) = -0,8$; $M(U) = 1$; $M(W) = 0,16$.

Задача 2.60. Случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с параметрами n и p (т.е. $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$,

$k=0,1,2,\ldots,n$). Найдите законы распределения следующих случайных величин: а) $Y=2X$; б) $Z=X+X$; в) $U=X^2$; г) $V=X\cdot X$ (в пунктах б) и г) предполагается независимость слагаемых и сомножителей). Найдите математические ожидания этих величин. (В нечетных вариантах $n=3$, в четных вариантах $n=4$.) (См. пример 2.60 и исходные данные к задаче 2.59.)

Пример 2.61. В каждой игре игрок может выиграть один рубль с вероятностью p и проиграть рубль с вероятностью $q=1-p$, т.е. результат i-й игры можно охарактеризовать случайной величиной X_i, которая имеет закон распределения

X_i	-1	1
P	q	p

Пусть S — результат n игр, т.е. $S=X_1+X_2+\ldots+X_n$. Требуется найти $M(S)$, $D(S)$ и $\sigma(S)$.

Решение. По свойству математических ожиданий

$$M(S)=M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n).$$

Так как $M(X_i)=(-1)\cdot q+1\cdot p=p-q$, то $M(S)=n(p-q)$. В силу независимости случайных величин X_i

$$D(S)=D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

Так как $M(X_i^2)=(-1)^2q+1^2\cdot p=p+q=1$, то $D(X_i)=1-(p-q)^2=$ $=(1-p+q)(1+p-q)=2q\cdot 2p=4pq$. Поэтому $D(S)=4npq$ и $\sigma(S)=$ $=\sqrt{D(S)}=2\sqrt{npq}$.

Ответ. $M(S)=n(p-q)$; $D(S)=4npq$; $\sigma(S)=2\sqrt{npq}$.

Задача 2.61. Частица в начальный момент времени находится в начале координат на числовой оси. В каждую из последующих секунд частица перемещается на две единицы вправо с вероятностью p или на единицу влево с вероятностью $q=1-p$. Пусть S — положение (координата) частицы через n секунд. Найдите $M(S)$, $D(S)$ и $\sigma(S)$. (См. пример 2.61, величину p возьмите из исходных данных к задаче 2.18.1.)

III. Рассмотрим монотонную функцию от непрерывной случайной величины X. Предположим, что функция $h(x)$ монотонна и непрерывна вместе со своей производной в области возможных значений случайной величины X**.** Пусть X имеет непрерывную функцию плотности вероятности $f(x)$, а величина $H=h(X)$ имеет непрерывную функцию плотности вероятности $g(h)$, которую предстоит найти.

Для малых Δx вероятность $P(x < X < x + \Delta x) \quad \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt \approx f(x)\Delta x.$

Соответственно $P(h < H < h + \Delta h) \equiv g(h)\Delta h.$ Функция $h(x)$ монотонна, поэтому каждый интервал $(x, x + \Delta x)$ отображается взаимно однозначно на некоторый интервал $(h, h + \Delta h)$ (см. рис. 2.11.1).

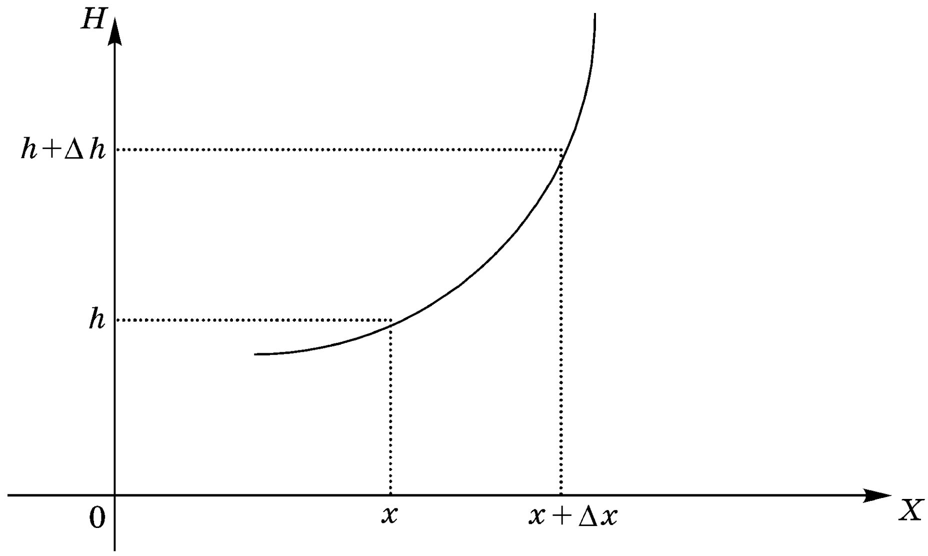


Рис. 2.11.1

Значит, события $x < X < x + \Delta x$ и $h < H < h + \Delta h$ эквивалентны и вероятности этих событий равны

$$P(x < X < x + \Delta x) = P(h < H < h + \Delta h). \qquad (2.11.1)$$

Поэтому $f(x)\Delta x \approx g(h)\Delta h.$ Последнее равенство в пределе при $\Delta x \to 0$ становится точным равенством

$$f(x)dx = g(h)dh. \qquad (2.11.2)$$

Из дифференцируемости и монотонности функции $h = h(x)$ следует существование обратной функции $x = x(h).$ Подставляя эту функцию и ее дифференциал $dx = \dfrac{dx(h)}{dh}\,dh$ в равенство (2.11.2), получим

$$f[x(h)]\left|\frac{dx(h)}{dh}\right| dh = g(h)dh. \qquad (2.11.3)$$

Знак модуля взят потому, что в левой части равенства (2.11.3) стоит неотрицательная величина, а производная функции $x(h)$ может оказаться отрицательной. Сравнивая левую и правую части равенства (2.11.3), приходим к выводу, что

$$g(h) = f[x(h)]\left|\frac{dx(h)}{dh}\right|, \qquad (2.11.4)$$

Пример 2.62. Прямая линия вращается в плоскости и ось ее вращения находится в точке с координатами (0,1). Прямая приводится во вращение, которое останавливается под действием сил трения. При остановке равновозможно любое положение прямой, т.е. угол X (рис. 2.11.2) имеет равномерное распределение в отрезке $[0,\pi]$. Найти закон распределения точки пересечения прямой с осью абсцисс.

Решение. Обозначим координату точки пересечения прямой с осью абсцисс через H. Очевидно, что H является функцией от X. Из рис. 2.11.2 видно, что значения случайных величин X и H связаны соотношением $h = \operatorname{ctg}(x)$ или $x = \operatorname{arcctg} h$. Откуда $\dfrac{dx}{dh} = -\dfrac{1}{1+h^2}$.

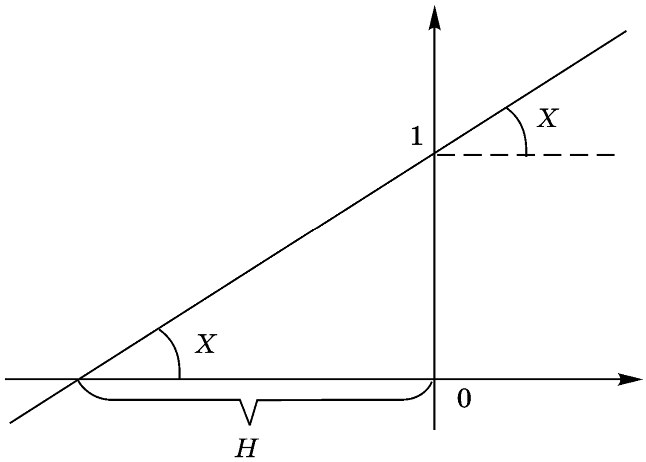


Рис. 2.11.2

Случайная величина X равномерно распределена в отрезке $[0,\pi]$ с плотностью вероятности $f(x) = 1/\pi$ при $0 \le x \le \pi$ и $f(x) = 0$ при остальных x. Из формулы (2.11.4) имеем $g(h) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1+h^2}$. Это плотность вероятности закона распределения Коши.

Ответ. $g(h) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1+h^2}$.

Задача 2.62. Через точку $A(a,b)$ наугад проведена прямая. Все положения прямой равновозможны. Найдите распределение точки пересечения этой прямой: а) с осью OX; б) с осью OY. (См. пример 2.62 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.62.

№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b
1	2	4	**6**	3	6	**11**	4	7	**16**	4	10	**21**	5	6	**26**	8	2
2	2	5	**7**	3	7	**12**	4	8	**17**	4	3	**22**	6	2	**27**	8	3
3	2	6	**8**	3	8	**13**	2	7	**18**	5	2	**23**	6	3	**28**	8	4

4	3	4	**9**	4	5	**14**	1	2	**19**	5	3	**24**	6	4	**29**	8	6
5	3	5	**10**	4	6	**15**	4	2	**20**	5	3	**25**	6	5	**30**	1	4

Пример 2.63. В точке $A(0,0,1)$ на вертикальной оси находится источник корпускулярного излучения. (Траектории частиц, вылетающих из точки A, — прямые линии.) Полагаем интенсивность излучения по всем направлениям одинаковой. Требуется найти распределение расстояния от начала координат до точки попадания частицы в горизонтальную плоскость. Требуется найти также вероятность попадания частицы в круг на горизонтальной плоскости радиусом $r = 1$ с центром в начале координат.

Решение. Пусть ρ — расстояние от начала координат до точки попадания частицы в горизонтальную плоскость. Для угла X (см. рис. 2.11.3) равновозможны все значения в отрезке $[0, \pi/2]$.

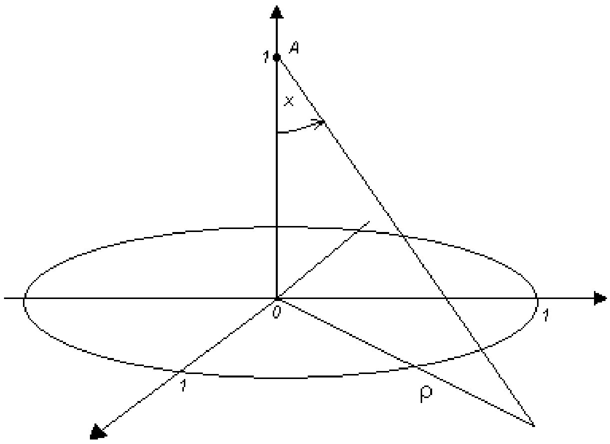


Рис. 2.11.3

Поэтому случайная величина X имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 2/\pi & \text{при } x \in [0, \pi/2], \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Заметим, что $\dfrac{\rho}{1} = \operatorname{tg} X$. Так как обратная функция имеет вид $x = x(\rho) = \operatorname{arctg}\rho$, то по формуле (2.11.4)

$$g(\rho) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\rho^2}.$$

Вероятность попадания частицы в круг на горизонтальной плоскости радиусом $r = 1$ с центром в начале координат равна

$$P(\rho < 1) = \int_0^1 g(\rho)\,d\rho = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{d\rho}{1+\rho^2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\rho\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $g(\rho)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\rho^2}$; $\frac{1}{2}$.

Задача 2.63. В точке $A(0,0,a)$ на вертикальной оси находится источник корпускулярного излучения. (Траектории частиц, вылетающих из точки *A*, — прямые линии.) Полагая интенсивность излучения по всем направлениям одинаковой, найдите распределение расстояния от начала координат до точки попадания частицы в горизонтальную плоскость. Найдите вероятность попадания частицы в кольцо на горизонтальной плоскости с центром в начале координат и внутренним радиусом *a* и внешним радиусом $a\sqrt{3}$. (См. пример 2.63, *a* — номер варианта.)

Пример 2.64. Пусть $X\sim N(0,1)$, а $H=aX+b$, где *a* и *b* — некоторые постоянные. Найти закон распределения случайной величины *H*.

Решение. Из равенства $x=\frac{h-b}{a}$ получаем, что $\frac{dx(h)}{dh}=\frac{1}{a}$. Так как $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$, то по формуле (2.11.4) имеем

$$g(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(h-b)^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{1}{a}.$$

Значит $H\sim N(b,a^2)$ при $x\in(-\infty;\infty)$.

Ответ. $N(b,a^2)$.

Задача 2.64. Случайная величина *X* имеет плотность вероятности $f(x)$. Случайная величина $H=aX+b$. Найдите плотность вероятности случайной величины *H*.

В 1–6 вариантах $f(x)=\frac{x+2}{8}$ при $x\in[-2,2]$ и $f(x)=0$ при остальных *x*; в 7–12 вариантах $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (закон распределения Коши); в 13–18 вариантах $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ (закон распределения арксинуса); в 19–24 вариантах $f(x)=0{,}5e^{-|x|}$; в 25–30 вариантах $f(x)=\frac{2-x}{8}$ при $x\in[-2,2]$ и $f(x)=0$ при остальных *x*. (См. пример 2.64, величины *a* и *b* возьмите из исходных данных к задаче 2.62.)

IV. Если функция $h(x)$ немонотонна, то вместо исходного равенства (2.11.1) имеем равенство (см. рис. 2.11.4)

$$P(h < H < h + \Delta h) = P(x_1 < X < x_1 + \Delta x_1 \text{ или } x_2 < X < x_2 + \Delta x_2 \text{ или } \ldots)$$
$$= P(x_1 < X < x_1 + \Delta x_1) + P(x_2 < X < x_2 + \Delta x_2) + \ldots .$$

Каждое слагаемое в этом равенстве соответствует отдельному интервалу монотонности функции $h(x)$. Повторяя рассуждения пункта III для каждого интервала монотонности, можно показать, что

$$g(h) = f[x_1(h)]\left|\frac{dx_1(h)}{dh}\right| + f[x_2(h)]\left|\frac{dx_2(h)}{dh}\right| + \ldots + f[x_m(h)]\left|\frac{dx_m(h)}{dh}\right|, \qquad (2.11.5)$$

где $x_1(h), x_2(h), \ldots$ — функции, обратные к $h(x)$ на соответствующих интервалах монотонности.

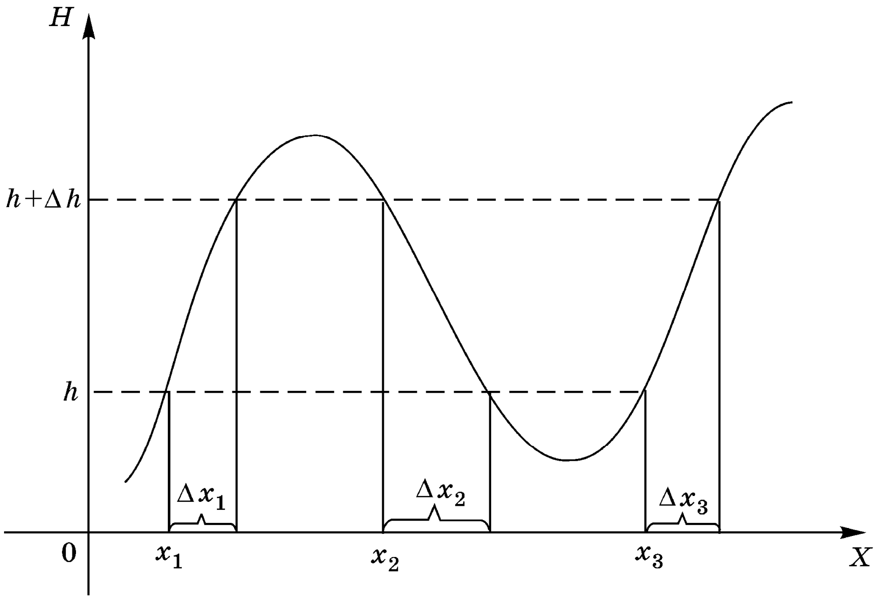


Рис. 2.11.4

Пример 2.65. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти плотность вероятности случайной величины $H = X^2$.

Решение. Функция $h = x^2$ немонотонная. На интервале $(-\infty; 0)$ она убывает, а на интервале $(0, \infty)$ возрастает. Обратные функции имеют вид соответственно $x = -\sqrt{h}$ и $x = \sqrt{h}$. В соответствии с формулой (2.11.5) имеем

$$g(h) = \frac{1}{\pi(1+h)}\left|\frac{-1}{2\sqrt{h}}\right| + \frac{1}{\pi(1+h)}\left|\frac{1}{2\sqrt{h}}\right| = \frac{1}{\pi\sqrt{h}(1+h)} \text{ при } h \geq 0.$$

Ответ. $g(h) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{h}(1+h)}$ при $h \geq 0$.

Задача 2.65. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)$. Случайная величина $H = \varphi(x)$. Найдите плотность вероятности случайной величины *H*. В 1–6 вариантах $f(x)=\dfrac{x+2}{8}$ при $x\in[-2,2]$ и $f(x)=0$ при остальных *x*, а $\varphi(x) = \exp\{-a\,|\,x\,|\}$. В 7–12 вариантах $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ при $x\in(-1;1)$, и $f(x)=0$ при остальных *x* (закон распределения арксинуса), $\varphi(x)=ax^2$. В 13–18 вариантах $f(x)=\dfrac{3(a^2-x^2)}{4a^3}$ при $x\in(-a;a)$ и $f(x)=0$ при остальных *x*, $\varphi(x)=x^2$. В 19–24 вариантах $f(x)=0{,}5e^{-|x|}$, а $\varphi(x)=ax^2$. В 25–30 вариантах $f(x)=\dfrac{2-x}{8}$ при $x\in[-2,2]$ и $f(x)=0$ при остальных *x*, $\varphi(x)=ax^2$. (См. пример 2.69 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.65.

№	*a*	№	*a*	№	*a*	№	*a*	№	*a*	№	*a*	№	*a*	№	*a*	№	*a*	№	*a*
1	2	**4**	3	**7**	1	**10**	16	**13**	1	**16**	4	**19**	1	**22**	16	**25**	1	**28**	16
2	1	**5**	6	**8**	4	**11**	25	**14**	2	**17**	5	**20**	4	**23**	25	**26**	4	**29**	25
3	4	**6**	5	**9**	9	**12**	36	**15**	3	**18**	6	**21**	9	**24**	36	**27**	9	**30**	36

V. Рассмотрим смешанную случайную величину *X*, функция распределения которой имеет точки разрыва $x_1,x_2,\ldots,x_m$ со скачками соответственно $p_1,p_2,\ldots p_m$. Это означает, что *X*, помимо возможных значений нулевой вероятности, имеет значения $x_1,x_2,\ldots,x_m$ с отличными от нуля вероятностями $p_1,p_2,\ldots p_m$.

В этом случае плотность распределения вероятностей в точках $x_1,x_2,\ldots,x_m$ обращается в бесконечность, т.е. формально не существует. Эту трудность можно обойти, если воспользоваться *дельта-функцией* $\delta(x)$, которая понимается как производная (в обобщенном смысле) от функции единичного скачка $\eta(x)=0$ при $x\le 0$ и $\eta(x)=1$ при $x>0$. Наглядно $\delta(x)$ можно представить себе плотностью распределения «масс», при которой в точке $x=0$ сосредоточена единичная масса, а масса во всех остальных точках равна нулю. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0)$$

для всех непрерывных функций.

Функцию распределения смешанной случайной величины можно разложить на непрерывную и скачкообразную компоненты:

$$F(x)=\tilde F(x)+\sum_{k=1}^{m}p_k\eta(x-x_k)\,,$$

где $\tilde{F}(x)$ — непрерывная функция, которая не убывает и изменяется от 0 до $1-\sum_{k=1}^{m} p_k$. Тогда $f(x)=\tilde{f}(x)+\sum_{k=1}^{m} p_k \delta(x-x_k)$, и формула (2.11.4) примет вид

$$g(h)=f[x(h)]\left|\frac{dx(h)}{dh}\right|+\sum_{k=1}^{m} p_k \delta(h-h_k),$$

где $h_k=h(x_k)$.

Пример 2.66. Случайная величина X имеет закон распределения Коши с функцией плотности вероятности $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Случайная величина $Y=\varphi(X)$, где функция $\varphi(x)$ задана графически (см. рис. 2.11.5). Найти плотность вероятности величины Y.

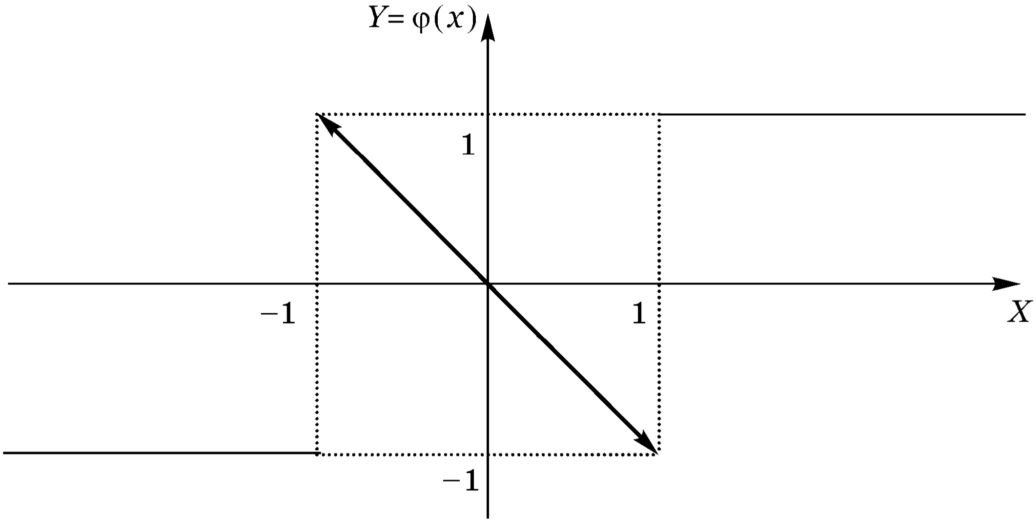


Рис. 2.11.5

Решение. Из графика функции $\varphi(x)$ видно, что значения $X\in(-\infty,-1]$ преобразуются в значение $Y=-1$. Поэтому $P(Y=-1)=P(-\infty<X\leq 1)=$
$=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-1}\dfrac{1}{1+x^2}dx \quad \dfrac{1}{\pi}\mathrm{arctg}(x)\Big|_{-\infty}^{-1} \quad \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$. Аналогично $P(Y=1)=\dfrac{1}{4}$.

На интервале $(-1,1)$ функция $y=-x$. Обратная функция: $x=-y$. Поэтому

$$\tilde{g}(y)=\frac{1}{\pi[1+(-y)^2]}\cdot|-1|=\frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Окончательно с учетом значений, имеющих ненулевые вероятности, получаем $g(y)=\frac{1}{4}\delta(y+1)+\frac{1}{4}\delta(y-1)+\frac{1}{\pi(1+y^2)}$ при $y\in[-1,1]$ и $g(y)=0$ при $y\notin[-1,1]$.

Ответ. $g(y)=\frac{1}{4}\delta(y+1)+\frac{1}{4}\delta(y-1)+\frac{1}{\pi(1+y^2)}$ при $y\in[-1,1]$

и $g(y)=0$ при $y\notin[-1,1]$

Задача 2.66. По заданной плотности вероятности $f(x)$ случайной величины *X* найти плотность распределения $Y=\varphi(X)$.

В 1–6 вариантах $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$; в 7–12 вариантах $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$; в 13–18 вариантах $f(x)=0{,}5e^{-|x|}$; в 19–24 вариантах $f(x)=\frac{x+2}{8}$ при $x\in[-2,2]$ и $f(x)=0$ при остальных *x*; в 25–30 вариантах $f(x)=\frac{2-x}{8}$ при $x\in[-2,2]$ и $f(x)=0$ при остальных *x*.

В 1, 7, 13,19, 25 вариантах $\varphi(x)=-1$ при $x<-1$, $\varphi(x)=x$ при $x\in[-1,1]$ и $\varphi(x)=1$ при остальных *x*. Во 2, 8, 14, 20, 26, 30 вариантах $\varphi(x)=1$ при $x<-1$, $\varphi(x)=-x$ при $x\in[-1,1]$ и $\varphi(x)=-1$ при остальных *x*. В 3, 9, 15, 21, 27 вариантах $\varphi(x)=-x-1$ при $x<-1$, $\varphi(x)=0$ при $x\in[-1,1]$ и $\varphi(x)=1-x$ при остальных *x*. В 4, 10, 16, 22, 28 вариантах $\varphi(x)=x+1$ при $x<-1$, $\varphi(x)=0$ при $x\in[-1,1]$ и $\varphi(x)=x-1$ при остальных *x*. В 5, 11, 17, 23, 29 вариантах $\varphi(x)=0$ при $x<0$, $\varphi(x)=x$ при $x\geq 0$. В 6, 12, 18, 24 30 вариантах $\varphi(x)=-x$ при $x<0$, $\varphi(x)=0$ при $x\geq 0$. (См. пример 2.66.)

Замечание. Если нас интересуют только математическое ожидание и дисперсия случайной величины $Z=\varphi(X)$, то нет необходимости предварительно находить закон распределения этой случайной величины.

Можно вычислить $M(Z)$ и $D(Z)$, используя закон распределения случайной величины *X*, по формулам

$$M(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\,dx, \tag{2.11.6}$$

$$D(Z)=M(Z^2)-[M(Z)]^2=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x)f(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx\right]^2,$$

если *X* — непрерывная случайная величина с функцией плотности вероятности $f(x)$, и по формулам

$$M(Z)=\sum_i \varphi(x_i)P(X=x_i),$$

$$D(Z)=M(Z^2)-[M(Z)]^2=\sum_i \varphi^2(x_i)P(X=x_i)-\left[\sum_i \varphi(x_i)P(X=x_i)\right]^2.$$

если X — дискретная случайная величина.

Пример 2.67. Отрезок $[0;a]$ произвольным образом делится на две части (все положения точки деления в этом отрезке одинаково возможны). Полученные части отрезка составляют две стороны прямоугольника. Найти среднее значение его площади и дисперсию этой площади.

Решение. Обозначим длину одной из частей отрезка через X, тогда другая часть отрезка имеет длину $a-X$, а площадь прямоугольника равна $S=X(a-X)=aX-X^2$. Так как все положения точки деления в отрезке одинаково возможны, то X имеет равномерное распределение на отрезке $[0;a]$ с функцией плотности вероятности $f(x)=1/a$ при $x\in[0;a]$, и $f(x)=0$ при остальных x. Поэтому среднее значение площади прямоугольника равно по формуле (2.11.6)

$$M(S)=\int_0^a (ax-x^2)\frac{1}{a}dx=\frac{a^2}{6}.$$

Дисперсия площади равна

$$D(S)=M(S^2)-\left[M\left(S\right)\right]^2=\int_0^a (ax-x^2)^2\frac{1}{a}\,dx-(a^2/6)^2=\frac{23}{90}a^4.$$

Ответ. $a^2/6$; $\frac{23}{90}a^4$.

Задача 2.67. Случайная величина X принимает значения в $[0,a]$ и имеет функцию плотности вероятности $f(x)$. В нечетных вариантах $f(x)$ — плотность равномерного распределения в $[0,a]$, в четных вариантах $f(x)=\dfrac{4a}{\pi(a^2+x^2)}$ при $x\in[0,a]$ и $f(x)=0$ при остальных x. Найдите математическое ожидание случайной величины Z.

В 1, 6, 11, 16, 21, 26 вариантах Z равна площади поверхности цилиндра с радиусом основания X и высотой $a-X$. Во 2, 7, 12, 17, 22, 27 вариантах Z равна объему конуса с радиусом основания X и высотой $a-X$. В 3, 8, 13, 18, 23, 28 вариантах Z равна площади ромба с диагоналями X и $a-X$. В 4, 9, 14, 19, 24, 29 вариантах Z равна объему цилиндра с радиусом основания X и высотой $a-X$. В 5, 10, 15, 30, 25, 30 вариантах Z равна площади равнобедренного треугольника с основанием X и высотой $a-X$. (См. пример 2.67; a — номер варианта.)

2.12. Функции нескольких случайных аргументов

2.12.1. Свертка

Пусть $Z = X + Y$, где случайные величины X и Y независимы и имеют функции плотности вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ соответственно. Случайная величина Z имеет функцию плотности вероятности

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z-x)\, dx. \qquad (2.12.1)$$

Выражение в правой части (2.12.1) называется *свёрткой* функций плотности вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$.

Если случайные величины X и Y неотрицательны, то формула (2.12.1) имеет вид:

$$f(z) = \int_{0}^{z} f_1(x) f_2(z-x)\, dx. \qquad (2.12.2)$$

Пример 2.68. Пусть случайные величины X_1 и X_2 независимы и равномерно распределены на отрезках [0,2] и [0,3] соответственно. Найти закон распределения случайной величины $Z = X_1 + X_2$.

Решение. Все значения случайной величины X_1 равновозможны в отрезке [0,2], поэтому ее плотность вероятности $f_1(x)$ во всех точках этого отрезка должна быть одинакова, т.е. постоянна. Значение этой постоянной находим из условия, что интеграл от функции плотности вероятности по всем возможным значениям случайной величины равен единице. Итак, случайная величина X_1 имеет функцию плотности вероятности $f_1(x) = 1/2$ при $x \in [0,2]$ и $f_1(x) = 0$ при остальных x. Из тех же соображений случайная величина X_2 имеет плотность вероятности $f_2(x) = 1/3$ при $x \in [0,3]$ и $f_2(x) = 0$ при остальных x. Так как X_1 и X_2 неотрицательны, то функцию плотности вероятности $f(z)$ случайной величины $Z = X_1 + X_2$ можно найти по формуле (2.12.2).

При $z < 0$ произведение функций $f_1(x) f_2(z-x) \equiv 0$ и поэтому из формулы (2.12.2) следует, что $f(z) = 0$. При $0 \le z < 2$ (см. рис. 12.1)

$$f(z) = \int_{0}^{z} f_1(x) f_2(z-x)\, dx = \int_{0}^{z} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\, dx = \frac{z}{6}.$$

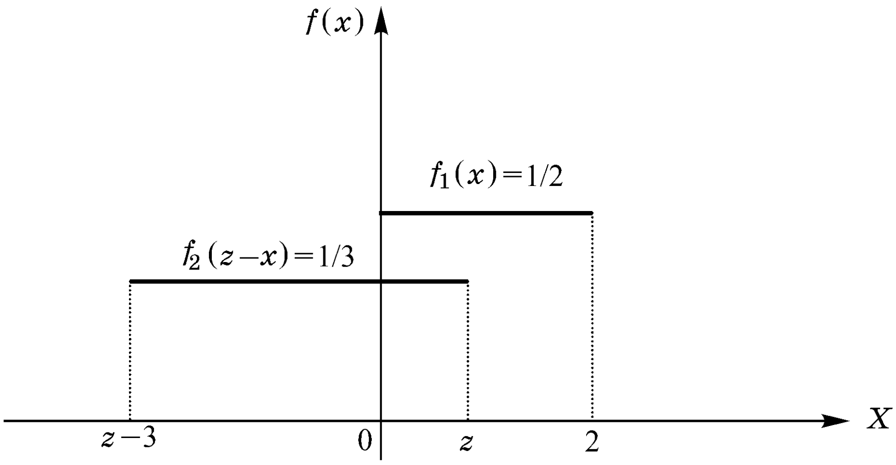


Рис. 2.12.1

При $2 \le z < 3$ получаем (см. рис. 2.12.2)

$$f(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z-x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{6}.$$

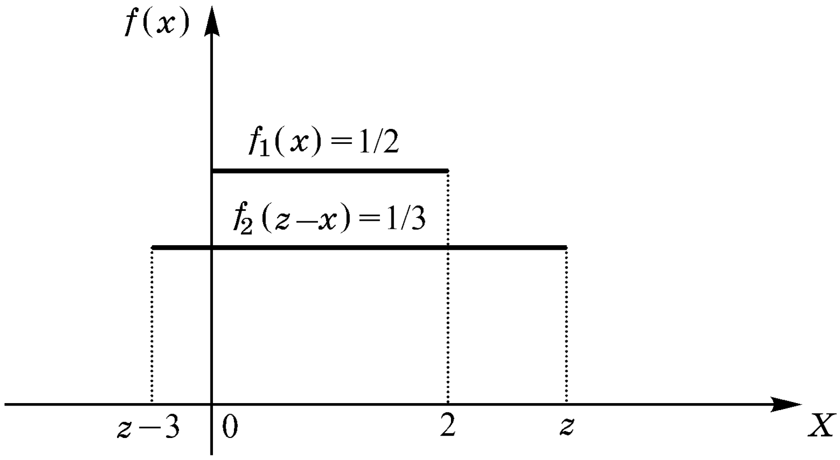


Рис. 2.12.2

При $3 \le z < 5$ (см. рис. 2.12.3)

$$f(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z-x)\,dx = \int_{z-3}^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\,dx = \frac{5-z}{6}.$$

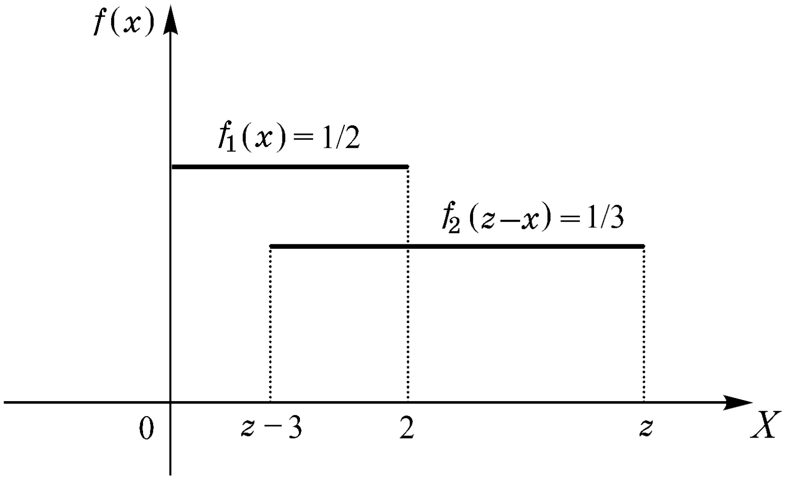


Рис. 2.12.3

При $5 \le z$ функция $f(z)=0$ так как в формуле (2.12.2) под знаком интеграла произведение $f_1(x) f_2(z-x) \equiv 0$.

Итак, $f(z)=0$ при $z<0$, $f(z)=\dfrac{z}{6}$ при $0 \le z < 2$, $f(z)=\dfrac{1}{3}$ при $2 \le z < 3$, $f(z)=\dfrac{5-z}{6}$ при $3 \le z < 5$, $f(z)=0$ при $5 \le z$. График функции плотности вероятности $f(z)$ изображен на рис. 2.12.4. Закон распределения с такой плотностью вероятности иногда называют трапециевидным.

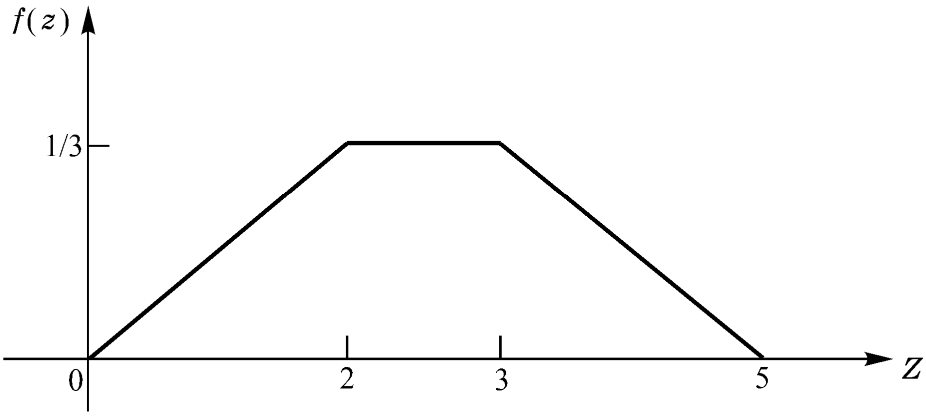


Рис. 2.12.4

Ответ. $f(z)=0$ при $z<0$, $f(z)=\dfrac{z}{6}$ при $0 \le z < 2$, $f(z)=\dfrac{1}{3}$ при $2 \le z < 3$, $f(z)=\dfrac{5-z}{6}$ при $3 \le z < 5$, $f(z)=0$ при $5 \le z$.

Задача 2.68.1. Случайные величины X и Y независимы и равномерно распределены на отрезках соответственно $[0,a]$ и $[0,b]$. Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$. Найдите вероятности $P(a < z < b)$ и $P(z < a)$. (См. пример 2.68, величины a и b возьмите из исходных данных к задаче 2.62.)

Замечание. Для $Z = X - Y$ формула (2.12.1) имеет вид

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z + x)\, dx. \tag{2.12.3}$$

Задача 2.68.2. Пусть случайные величины X и Y независимы и каждая из них равномерно распределена в отрезке $[\theta - b; \theta + b]$. Покажите, что случайная величина $Z = X - Y$ имеет распределение, которое не зависит от θ, и найдите плотность вероятности этой случайной величины. (См. пример 2.68, формулу (2.12.3); b — номер варианта.)

Задача 2.68.3. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и каждая имеет показательное распределение $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $0 \le x$, $\lambda > 0$. Пусть $Z = X_1 + X_2$. Найдите $M(Z)$, плотность распределения случайной величины Z и $P[X_1 + X_2 < M(Z)]$. (См. пример 2.68; λ — номер варианта.)

Задача 2.68.4. При измерении длительности импульса допускаются погрешности при отсчете начала и конца импульса. Эти погрешности независимы. Пусть погрешность (ошибка) отсчета начала импульса X имеет функцию плотности вероятности $f(x) = 2x / a^2$ при $x \in [0, a]$ и $f(x) = 0$ при остальных x. Пусть погрешность отсчета конца импульса Y имеет равномерное распределение в $[0, a]$, т.е. $f(y) = 1/a$ при $y \in [0, a]$ и $f(y) = 0$ при остальных y. Найдите вероятность того, что суммарная ошибка в определении длительности импульса $Z = X + Y$ не превзойдет a. (См. пример 2.68; a — номер варианта.)

Если X и Y независимые дискретные случайные величины и $Z = X + Y$, то для них формула свертки (2.12.1) имеет вид:

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_i P(X = x_i) P(Y = k - x_i). \tag{2.12.4}$$

Пример 2.69. Пусть случайные величины X_1 и X_2 независимы и каждая имеет геометрический закон распределения:

X	1	2	3	4	$\dots$	k	$\dots$
P	p	pq	pq^2	pq^3	$\dots$	pq^{k-1}	$\dots$

Требуется найти закон распределения случайной величины $Z = X_1 + X_2$.

Решение. Очевидно, что $Z = X_1 + X_2$ может принимать значения 2, 3, 4,… . В соответствии с формулой (2.12.4)

$$P(Z=2) = P(X=1)P(Y=1) = pp = p^2,$$

$$P(Z=3) = P(X=1)P(Y=2) + P(X=2)P(Y=1) = p\cdot pq + pq\cdot p = 2p^2q.$$

$$P(Z=4) = P(X=1)P(Y=3) + P(X=3)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=2) =$$

$$= p\cdot pq^2 + pq^2\cdot p + pq\cdot pq = 3p^2q^2.$$

Закономерность образования вероятностей для Z в достаточной степени проявилась. Можно предположить, что $P(Z=k) = (k-1)p^2q^{k-2}$. Вместо рассуждений по методу математической индукции можно просто заметить, что при вычислении каждой следующей вероятности добавляется еще одно слагаемое и в каждом слагаемом добавляется множитель q. Поэтому $P(Z=k+1) = kp^2q^{k-1}$.

Ответ. $P(Z=k) = (k-1)p^2q^{k-2}$, где $Z = 2,3,4,\ldots$.

Задача 2.69. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и каждая имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n=3$ и p, т.е.

$$P(X=k) = p^k(1-p)^{3-k},\quad k = 0,1,2,3.$$

Найдите закон распределения случайной величины $Z = X_1 + X_2$. (См. пример 2.69, величину p возьмите из исходных данных к задаче 2.59.)

Пример 2.70. Случайные X и Y независимы, причем X равномерно распределена на отрезке $[0;2]$, а Y имеет функцию распределения $F(y)=0$ при $y<0$, $F(y)=y^2$ при $0 \le y < 1$ и $F(y)=1$ при $1 \le y$. Требуется найти дисперсию произведения этих величин.

Решение. По свойству дисперсий для независимых случайных величин X и Y

$$D(XY) = D(X)D(Y) + D(X)[M(Y)]^2 + D(Y)[M(X)]^2.$$

Вычислим величины из правой части этого равенства. Так как все значения X равновозможны в отрезке $[0;2]$, то $f(x) = 1/2$ при $x \in [0;2]$ и $f(x) = 0$ при остальных x. Поэтому

$$M(X) = \int_0^2 x\frac{1}{2}\,dx = 1,\quad M(X^2) = \int_0^2 x^2\frac{1}{2}\,dx = \frac{4}{3},$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}.$$

Случайная величина Y имеет функцию плотности вероятности $f(y) = F'(y) = 2y$ при $0 \le y < 1$ и $f(y) = 0$ при остальных y. Поэтому

$$M(Y) = \int_0^1 y \cdot 2y\,dy = \frac{2}{3},\;\; M(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot 2y\,dy = \frac{1}{2},$$

$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

В итоге $D(XY) = (1/3)(1/18) + (1/3)(2/3)^2 + (1/18) \cdot 1^2 = 2/9.$

Ответ. $D(XY) = 2/9.$

Задача 2.70. Случайные X и Y независимы и равномерно распределены соответственно на отрезках $[0,a]$ и $[0,b]$. Найдите дисперсию произведения этих величин. (См. пример 2.70, величины a и b возьмите из исходных данных к задаче 2.62.)

2.12.2. Распределение системы двух дискретных случайных величин

Распределение системы двух дискретных случайных (X,Y) величин можно задать в виде таблицы, в которой перечислены пары возможных значений (x,y) и их вероятности:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3	…	x_n	$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	…	p_{n1}	$p(y_1)$
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	…	p_{n2}	$p(y_2)$
y_3	p_{13}	p_{23}	p_{33}	…	p_{n3}	$p(y_3)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	p_{3m}	…	p_{nm}	$p(y_m)$
$p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	…	$p(x_n)$	

В этой таблице $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$. При этом $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$, $P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$ и $P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$. Если X и Y независимы, то $p_{ij} = p(x_i)\,p(y_j)$.

Пример 2.71. Закон распределения дискретного случайного вектора задан в виде таблицы:

Y \ X	-1	0	2	$p(y_j)$
0	0,2	0,1	0,1	0,4
1	0,1	0,3	0,2	0,6
$P(X=x)$	0,3	0,4	0,3	

Требуется найти распределение случайных величин $Z = XY$ и $W = |X^2 - Y^2|$.

Решение. Найдем возможные значения случайной величины Z:

$Z = -1 \cdot 0 = 0$ с вероятностью 0,2;
$Z = -1 \cdot 1 = -1$ с вероятностью 0,1;
$Z = 0 \cdot 0 = 0$ с вероятностью 0,1;
$Z = 0 \cdot 1 = 0$ с вероятностью 0,3;
$Z = 2 \cdot 0 = 0$ с вероятностью 0,1;
$Z = 2 \cdot 1 = 2$ с вероятностью 0,2.

Закон распределения случайной величины Z запишем в виде ряда распределения

Z	-1	0	2
P	0,1	0,7	0,2

Случайная величина W принимает значения:

$W = |(-1)^2 - 0^2| = 1$ с вероятностью 0,2;
$W = |(-1)^2 - 1^2| = 0$ с вероятностью 0,1;
$W = |0^2 - 0^2| = 0$ с вероятностью 0,1;
$W = |0^2 - 1^2| = 1$ с вероятностью 0,3;
$W = |2^2 - 0^2| = 4$ с вероятностью 0,1;
$W = |2^2 - 1^2| = 3$ с вероятностью 0,2,

и имеет ряд распределения

W	0	1	3	4
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Ответ.

Z	-1	0	2
P	0,1	0,7	0,2

W	0	1	3	4
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Задача 2.71. Случайный вектор дискретного типа распределен по закону, определяемому таблицей:

Y \ X	x_1	x_2	x_3	x_4	$p(y_j)$
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	0,05	$p(y_1)$
y_2	p_{21}	p_{22}	0,02	0,03	$p(y_2)$
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	$p(x_4)$	

Найдите законы распределения случайных величин $Z = XY$, $U = |X - Y|$, $V = Y^2 - X^2$.

В нечетных вариантах: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 2$; $y_1 = -1$; $y_2 = 1$. В четных вариантах: $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1$; $y_1 = -2$; $y_2 = 2$. (См. пример 2.71 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.71.

№	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{21}	p_{22}	№	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{21}	p_{22}	№	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{21}	p_{22}
1	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	**11**	0,3	0,1	0,1	0,1	0,2	**21**	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1
2	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1	**12**	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	**22**	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1
3	0,1	0,3	0,1	0,1	0,2	**13**	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	**23**	0,3	0,1	0,1	0,1	0,2
4	0,3	0,1	0,1	0,2	0,1	**14**	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	**24**	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3
5	0,1	0,1	0,2	0,1	0,3	**15**	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	**25**	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1
6	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	**16**	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	**26**	0,3	0,1	0,1	0,1	0,2
7	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1	**17**	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1	**27**	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3
8	0,3	0,1	0,1	0,1	0,2	**18**	0,1	0,3	0,1	0,1	0,2	**28**	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1
9	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	**19**	0,3	0,1	0,1	0,2	0,1	**29**	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1
10	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	**20**	0,1	0,1	0,2	0,1	0,3	**30**	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

2.12.3. Распределение функции двух случайных величин

Рассмотрим функцию двух случайных величин $Z = \varphi(X, Y)$, где (X, Y) — система двух случайных величин (случайный вектор в плоскости). Пусть случайная точка (X, Y) имеет функцию плотности вероятности $f(x, y)$. Найдем функцию распределения $G(z)$ случайной величины Z.

Для каждого z обозначим через $W(z)$ область на плоскости, в которой выполняется неравенство $\varphi(X, Y) < z$. Чтобы это неравенство выполнилось, случайная точка должна попасть в область $W(z)$. По определению

$$G(z) = P(Z < z) = P[\varphi(X, Y) < z] = P[(X, Y) \in W(z)] = \iint\limits_{w(z)} f(x, y)\,dxdy.$$

Тогда плотность распределения случайной величины Z равна $g(z)=G'(z)$.

Пример 2.72. В квадрат со стороной a наугад брошена точка. Пусть Y — расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата. Считая все положения точки в квадрате равновозможными, найдите функцию плотности вероятности величины Y, $M(Y)$ и $D(Y)$.

Решение. Пусть Y — расстояние от точки до ближайшей стороны квадрата. Для определенности будем считать, что точка попала в треугольник AOD (см. рис. 2.12.5).

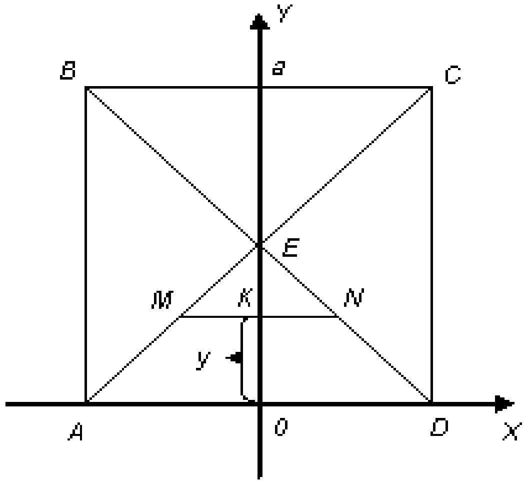


Рис. 2.12.5

Для всех точек этого треугольника AD — ближайшая сторона квадрата. Так как площадь треугольника AOD равна $a^2/4$, то плотность вероятности случайной точки в этом треугольнике $f(x,y)=4/a^2$. Вне треугольника $f(x,y)=0$. Расстояние от точки до основания будет равно y, если точка упадет на отрезок MN. Поскольку $OK=KN=a/2-y$, то плотность вероятности случайной величины Y получим, если проинтегрируем плотность вероятности $f(x,y)$ в пределах от $-(a/2-y)$ до $(a/2-y)$ (т.е. от точки M до точки N):

$$f(y)=\int_{-(a/2-y)}^{a/2-y} f(x,y)dx \quad \frac{4}{a^2}(a-2y) \quad \frac{4}{a}-\frac{8y}{a^2} \text{ при } y\in[0;a/2]$$

и $f(y)=0$ при остальных y. Поэтому $M(Y)=\int_0^{a/2} y\left(\frac{4}{a}-\frac{8y}{a^2}\right)dy=\frac{a}{6}$. Для вычисления дисперсии найдем сначала $M(Y^2)=\int_0^{a/2} y^2\left(\frac{4}{a}-\frac{8y}{a^2}\right)dy=\frac{a^2}{24}$.

Откуда $D(Y) = \; = M(Y^2) - [M(Y)]^2 \quad \dfrac{a^2}{24} - \left(\dfrac{a}{6}\right)^2 = \dfrac{a}{72}$.

Ответ. $M(Y) = a/6$; $D(Y) = a/72$.

Задача 2.72. В равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h наугад брошена точка. Пусть Y — расстояние от этой точки до основания треугольника. Считая все положения случайной точки в треугольнике равновозможными, найдите функцию плотности вероятности величины Y, $M(Y)$ и $D(Y)$. (См. пример 2.72; a — номер варианта.)

Пример 2.73. Две вершины треугольника совпадают с концами диаметра круга радиуса R, а третья вершина располагается в случайной точке (x, y) в верхней половине круга. Полагая равновозможными все положения третьей вершины в верхней половине круга, найдите функцию плотности вероятности для площади треугольника и математическое ожидание этой площади.

Решение. Так как все положения точки (x, y) в полукруге равновозможны, а площадь полукруга равна $\pi R^2/2$, то плотность вероятности случайной точки (x, y) имеет вид: $f(x, y) = \dfrac{2}{\pi R^2}$ во всех точках полукруга, и $f(x, y) = 0$ вне полукруга. Основание треугольника постоянно и равно $2R$, а высота треугольника равна ординате случайной точки y. Поэтому площадь треугольника равна $S = \dfrac{1}{2} \cdot 2R \cdot y = Ry$. Высота треугольника будет равна y, если случайная точка упадет на отрезок AB (см. рис. 2.12.6). Для получения плотности вероятности в точке y необходимо просуммировать плотность вероятности $f(x, y)$ вдоль отрезка AB:

$$f(y) = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y)dx \quad \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{2}{\pi R^2} dx \quad \frac{4\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2} \text{ при } y \in [0, R].$$

В итоге среднее значение площади треугольника равно

$$M(S) = \int_0^R R\, y \frac{4\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2} dy \quad \frac{4}{\pi R}\int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}\, dy =$$

$$= -\frac{2}{\pi R}\int_0^R (R^2-y^2)^{1/2} d(R^2-y^y) \quad -\frac{2}{\pi R} \cdot \frac{(R^2-y^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^R = \frac{4R^2}{3\pi}.$$

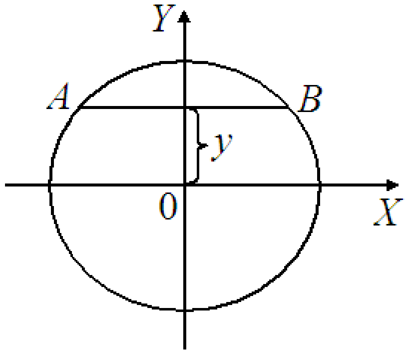


Рис. 2.12.6

Ответ. $\dfrac{4R^2}{3\pi}$.

Задача 2.73.1. Основанием треугольника служит отрезок от точки A до точки C. Третья вершина $B(x, y)$ находится в области D. Считая равновозможными все положения точки B в области D, найти математическое ожидание площади треугольника ABC.

В вариантах 1–10: a — номер варианта, A(0,0), C(a,0),

$$D = \{0 \le x;\ x \le a;\ 0 \le y;\ y \le \sqrt{x}\}.$$

В вариантах 11–20: a — номер варианта минус 10, A(0,0), C(a,0),

$$D = \{0 \le x;\ x \le a;\ 0 \le y;\ y \le x^2\}.$$

В вариантах 21–31: a — номер варианта минус 20, A(–a,0), C(a,0),

$$D = \left\{0 \le y;\ y \le \frac{a^2 - x^2}{a}\right\}.$$

(См. пример 2.73.)

Задача 2.73.2. Две вершины треугольника совпадают с точками A(0,0) и B(a,0). Положение третьей вершины $C(x, y)$ равновозможно в любой точке области $D = \{0 \le x \le a;\ 0 \le y;\ y \le (x - a)^2\}$. Найдите функцию плотности вероятности для площади треугольника и математическое ожидание этой площади (См. пример 2.73; a — номер варианта.)

Задача 2.73.3. Одна вершина треугольника находится в точке A(0,0), вторая — в точке B(a,0), а положение третьей вершины равновозможно в области, ограниченной линиями $Y = 0$, $X = a$ и $Y = \sqrt{ax}$. Найдите функцию плотности вероятности для площади треугольника, математическое ожидание этой площади и ее дисперсию. (См. пример 2.73; a — номер варианта.)

Пример 2.74. Все положения случайной точки (X,Y) равновозможны в квадрате со стороной, равной единице. Найдите функцию плотности вероятности случайной величины $Z = XY$ и ее среднее значение.

Решение. Так как все положения случайной точки (X,Y) равновозможны в квадрате со стороной, равной единице, то эта случайная точка имеет функцию плотности вероятности $f(x,y)=1$ внутри квадрата и $f(x,y)=0$ вне квадрата.

Найдем сначала функцию распределения случайной величины Z. По определению $F(z)=P(Z<z) \quad P[(X{=},Y)<z]$. Неравенство $(X,Y)<z$ выполняется, если случайная точка (X,Y) окажется внутри квадрата ниже гиперболы $xy=z$ (см. рис. 2.12.7). Поэтому

$$F(z)=P(Z<z)=1-P(Z\ge z)=P[(X,Y)\in S]=$$

$$=1-\iint\limits_{(S)} {=}f(x,y)dxdy \quad 1-\int_z^1 dx\int_{z/x}^1 {=}dy \quad 1-\int_z^1 (1-\frac{z}{x})dx = z(1-\ln z) \text{ при } 0\le z\le 1.$$

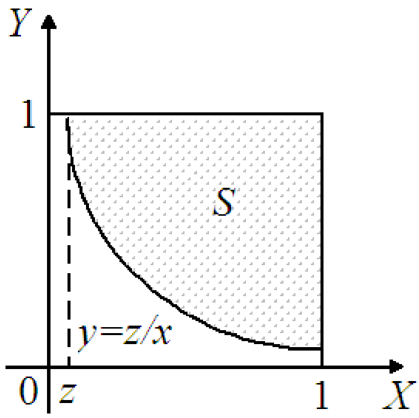


Рис. 2.12.7

Окончательно можно записать: $F(z)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } z\le 0, \\ z(1-\ln z) \quad \text{при } 0<z\le 1, \\ 1 \quad \text{при } 1<z. \end{cases}$

Дифференцируя $F(z)$ по z, получаем функцию плотности вероятности

$$f(z)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } z\le 0, \\ -\ln z \quad \text{при } 0<z\le 1, \\ 0 \quad \text{при } 1<z. \end{cases}$$

$M(Z) = M(Z)=\int_0^1 z(-\ln z)\,dz = 1/4$.

Ответ. $f(z)=\begin{cases}0 \text{ при } z\le 0,\\ -\ln z \text{ при } 0<z\le 1,\\ 0 \text{ при } 1<z.\end{cases}$ $M(Z)=1/4.$

Задача 2.74.1. Случайная точка (X,Y) в квадрате $D=\{0\le x\le a,$ $0\le y\le a\}$ имеет функцию плотности вероятности $f(x,y)=4xy/a$ при $(x,y)\in D$ и $f(x,y)=0$ вне D. Пусть $Z=XY$ — произведение координат точки. Найдите: функцию плотности вероятности случайной величины Z, $M(Z)$ и $P(Z<a)$. (См. пример 2.74, a — номер варианта.)

Задача 2.74.2. Плотность вероятности случайной точки (X,Y) в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ имеет вид $f(x,y)=2(ax+by)/(a+b)$. Найдите функцию распределения случайной величины $Z=XY$, ее математическое ожидание $M(Z)$ и $P[Z<M(Z)]$. (См. пример 2.74 и исходные данные к задаче 2.68.1.)

Замечание. Если требуется найти лишь математическое ожидание случайной величины $Z=\varphi(X,Y)$, то нет необходимости предварительно находить закон распределения Z. Если известна, например, $f(x,y)$ — функция плотности вероятности случайной точки (X,Y), то среднее значение Z можно вычислить непосредственно по формуле:

$$M(Z)=\iint\limits_D \varphi(x,y)f(x,y)\,dxdy, \qquad (2.12.5)$$

где D — область возможных значений двумерной случайной величины (X,Y).

Пример 2.75. Все положения случайной точки (X,Y) в области $D=\{(x,y):\ x+y<4,\ x>0,\ y>0\}$ равновозможны. Величина X равна стороне основания правильной четырехугольной пирамиды, а Y равняется высоте этой пирамиды. Найдите математическое ожидание объема пирамиды.

Решение. Область D представляет из себя треугольник, площадь которого равна восьми. Так как все положения случайной точки (X,Y) в треугольнике равновозможны, то функция плотности вероятности $f(x,y)$ внутри этого треугольника постоянна. Поэтому $f(x,y)=1/8$ во внутренних точках треугольника и $f(x,y)=0$ вне треугольника (см. рис. 2.12.8).

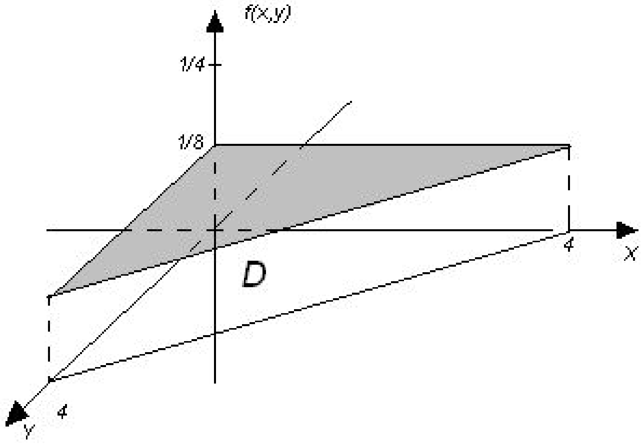


Рис. 2.12.8

Объем пирамиды равен $V=(1/3)YX^2$. Поэтому по формуле (2.12.5) имеем

$$M(V)=\frac{1}{3}\iint\limits_D y\,x^2\,\frac{1}{8}\,dx\,dy \quad \frac{1}{24}\int_0^4 x^2\int_0^{4-x} y\,dx\,dy \quad \frac{1}{48}\int_0^4 x^2(4-x)^2\,dx \quad \frac{32}{45}\approx 0{,}71.$$

Ответ. $M(V)=\dfrac{32}{45}\approx 0{,}71.$

Задача 2.75. Все положения случайной точки (X,Y) в области D равновозможны.

В нечетных вариантах область $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le a^2;\ x\ge 0;\ y\ge 0\}$. В четных вариантах область $D=\{(x,y):\ y\le\sqrt{x};\ x\le a;\ y\ge 0\}$.

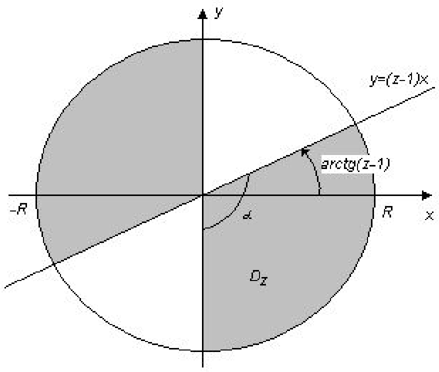
Координаты X и Y этой случайной точки определяют размеры геометрических фигур и тел. Найдите математическое ожидание случайной величины Z, если: в 1, 6, 11, 16, 21, 26 вариантах Z равна площади поверхности цилиндра с радиусом основания X и высотой Y; во 2, 7, 12, 17, 22, 27 вариантах Z равна объему конуса с радиусом основания X и высотой Y; в 3, 8, 13, 18, 23, 28 вариантах Z равна площади ромба с диагоналями X и Y; в 4, 9, 14, 19, 24, 29 вариантах Z равна объему цилиндра с радиусом основания X и высотой Y; в 5, 10, 15, 30, 25, 30 вариантах Z равна площади равнобедренного треугольника с основанием X и высотой Y. (См. пример 2.75, a — номер варианта.)

Пример 2.76. Равновозможны все положения случайной точки (X,Y) в круге радиуса R с центром в начале координат (иначе говоря, случайный вектор $\{X,Y\}$ распределен равномерно в указанном круге). Требуется найти плотность вероятности случайной величины $Z=(X+Y)/X$.

Решение. Так как все положения случайной точке в круге равновозможны, а площадь круга равна πR^2, то плотность вероятности случайной точки $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi R^2}$ внутри круга и $f(x,y)=0$ вне круга. Найдем сначала функцию распределения случайной величины *Z*. По определению

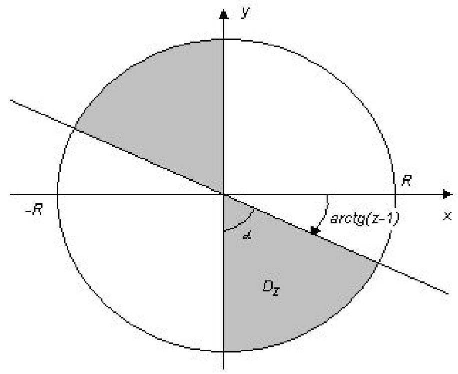
$$F(z)=P(X<z)=P\left(\frac{X+Y}{X}<z\right).$$

Неравенство $\dfrac{X+Y}{X}<z$ при $X>0$ преобразуется к виду $X+Y<zX$ или $Y<(z-1)X$, а при $X<0$ получаем $Y>(z-1)X$. Это означает, что, неравенство выполняется в заштрихованной на рис. 2.12.9 и рис. 2.12.10 области D_z.



при $z>1$

Рис. 2.12.9



при $z<1$

Рис. 2.12.10

Поэтому

$$F(z)=P(X<z)=P\left(\frac{X+Y}{X}<z\right)=\iint\limits_{D_z} f(x,y)\,dxdy=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{D_z} dxdy=\frac{1}{\pi R^2}\cdot 2S_\alpha$$

где S_α — площадь кругового сектора с углом α.

Заметим, что тангенс угла наклона прямой $y=(z-1)x$ равен $z-1$. Поэтому при $z>1$ угол $\alpha=0{,}5\pi+\mathrm{arctg}(z-1)$. При $z<1$ тоже $\alpha=0{,}5\pi+$ $+\mathrm{arctg}(z-1)$, так как в этом случае $\mathrm{arctg}(z-1)<0$. Поэтому площадь сектора

$$S_\alpha=\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}(z-1)\right).$$

Итак,

$$F(z)=\frac{1}{\pi R^2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}(z-1)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}(z-1)\right).$$

В итоге получаем

$$f(z)=F'(z)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(z-1)^2},$$

т.е. стандартный закон распределения Коши, только сдвинутый на единицу вправо (см. рис. 2.12.11).

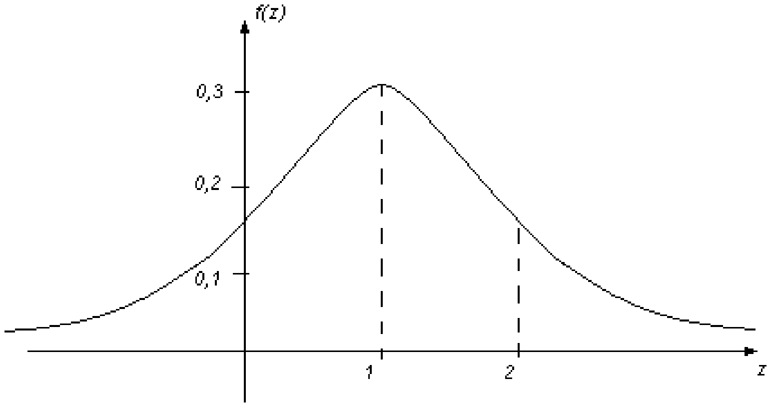


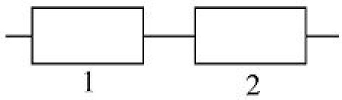
Рис. 2.12.11

Ответ. $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(z-1)^2}$.

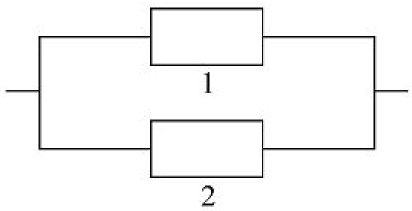
Задача 2.76. Равновозможны все положения случайной точки (X,Y) в круге радиусом b с центром в начале координат. Требуется найти плотность вероятности случайной величины $Z=aY/X$. (См. пример 2.76, b — номер варианта, a возьмите из исходных данных к задаче 2.71.1.)

Пример 2.77. Время безотказной работы каждого элемента имеет показательный закон распределения ($F(x)=P(X<x)=1-e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$, $\lambda>0$, $M(X)=1/\lambda$). Считая, что элементы выходят из строя независимо друг от друга, найти среднее время безотказной работы («наработку на отказ») для каждой из систем:

а)



б)



Решение. Обозначим время безотказной работы i-го элемента через X_i. Система а) выходит из строя вместе с первым отказавшим элементом, поэтому время безотказной работы первой системы $Y=\min(X_1,X_2)$. Заметим, что $P(X_i>x)=1-P(X_i<x)=1-(1-e^{-\lambda x})=e^{-\lambda x}$. Найдем функцию распределения величины Y:

$$F(y) = P(Y < y) = P(\min(X_1, X_2) < y) = 1 - P(\min(X_1, X_2) > y) =$$

$$= 1 - P(X_1 > y, X_2 > y) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) = 1 - e^{-\lambda y}e^{-\lambda y} = 1 - e^{-2\lambda y}.$$

Оказалось, что величина $Y = \min(X_1, X_2)$ имеет показательный закон распределения с параметром 2λ. Наработка на отказ для системы с последовательным соединением элементов равна

$$M(Y) = \int_0^\infty y\,dF(y) = \int_0^\infty y \cdot 2\lambda e^{-2\lambda y} dy = 1/2\lambda,$$

т.е. в два раза меньше наработки на отказ одного элемента.

Система б) работает безотказно, пока в рабочем состоянии находится хотя бы один из двух элементов. Поэтому ее время безотказной работы $Z = \max(X_1, X_2)$. Найдем функцию распределения величины Z:

$$F(z) = P(Z < z) = P(\max(X_1, X_2) < z) = P(X_1 < z, X_2 < z) =$$

$$= P(X_1 < z)P(X_2 < z) = F(z)F(z) = (1 - e^{-\lambda z})^2.$$

Наработка на отказ для системы с параллельным соединением элементов (такое соединение при одновременно работающих элементах называют нагруженным или «горячим» резервированием) равна

$$M(Z) = \int_0^\infty z\,dF(z) = \int_0^\infty z(1 - 2e^{-\lambda z} + e^{-2\lambda z})'dz = \int_0^\infty z(2\lambda e^{-\lambda z} - 2\lambda e^{-2\lambda z})dz = 3/2\lambda.$$

Ответ. а) 1/2λ; б) 3/2λ.

Задача 2.77.1. Случайные величины X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, распределены равномерно на отрезке $[0,a]$. Найдите функцию распределения и функцию плотности вероятности случайной величины $Y = \underbrace{\max}_{1 \le k \le n}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, считая величины X_k независимыми. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y. Вычислите вероятность $P(Y \ge a/2)$. (См. пример 2.77 и исходные данные.)

Исходные данные к задачам 2.77.1.

№	*n*	*a*	№	*n*	*a*	№	*n*	*a*	№	*n*	*a*	№	*n*	*a*	№	*n*	*a*
1	2	2	**6**	2	7	**11**	3	2	**16**	3	7	**21**	4	2	**26**	4	7
2	2	3	**7**	2	8	**12**	3	3	**17**	3	8	**22**	4	3	**27**	4	8
3	2	4	**8**	2	9	**13**	3	4	**18**	3	9	**23**	4	4	**28**	4	9
4	2	5	**9**	2	10	**14**	3	5	**19**	3	10	**24**	4	5	**29**	4	10
5	2	6	**10**	3	1	**15**	3	6	**20**	4	1	**25**	4	6	**30**	5	1

Задача 2.77.2. Случайные величины X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, распределены равномерно на отрезке $[0,a]$. Найдите функцию распределения и функцию плотности вероятности случайной величины $Z = \underbrace{\min}_{1 \le k \le n}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, считая величины X_k независимыми. Вычислите математическое ожидание и

дисперсию случайной величины Z. Вычислите вероятность $P(Z \le a/2)$. (См. пример 2.77 и исходные данные к задаче 2.77.1.)

Пример 2.78. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет равномерное распределение в интервале (0,1). Пусть $Z = \min\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ge 1\}$. Требуется найти $M(Z)$.

Решение. По условию каждая из случайных величин равномерно распределена в интервале (0,1), т.е. имеет функцию распределения

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0; \\ x \text{ при } 0 \le x < 1; \\ 1 \text{ при } 1 \le x. \end{cases}$$

Соответствующая функция плотности вероятности $f(x) = 1$ при $x \in (0,1)$ и $f(x) = 0$ при остальных x. Понятно, что Z принимает значения 2, 3, 4, … . Поэтому

$$M(Z) = \sum_{k=2}^{\infty} kP(Z = k) = 2P(Z = 2) + 3P(Z = 3) + 4P(Z = 4) + 5P(Z = 5) + \ldots =$$

$$\begin{aligned} &= P(Z=2) + P(Z=3) + P(Z=4) + P(Z=5) + \ldots \\ &+ P(Z=2) + P(Z=3) + P(Z=4) + P(Z=5) + \ldots \\ &\qquad\qquad\quad + P(Z=3) + P(Z=4) + P(Z=5) + \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + P(Z=4) + P(Z=5) + \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + P(Z=5) + \ldots \end{aligned}$$

$$= 1 + P(Z \ge 2) + P(Z \ge 3) + P(Z \ge 4) + P(Z \ge 5) + \ldots = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} P(Z \ge k).$$

Введем обозначение $P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n < y) = q_k(y)$, $0 < y \le 1$. Заметим, что

$$P(Z \ge k) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-1} < 1) = q_k(1).$$

Легко видеть, что $q_1(y) = P(X_1 < y) = y$. Тогда полная вероятность того, что $X_1 + X_2 < y$ равна $q_2(y) = \int_0^y f(u) q_1(y-u)\, du = \int_0^y 1 \cdot (y-u)\, du = \frac{y^2}{2}$. Тогда $q_3(y) = \int_0^y f(u) q_2(y-u)\, du = \frac{1}{2}\int_0^y 1 \cdot (y-u)^2\, du = \frac{y^3}{3!}$. Продолжая рассуждать подобным образом, получим рекуррентное соотношение для величин $q_k(y)$:

$$q_k(y) = \int_0^y f(u) q_{k-1}(y-u)\, du = \int_0^y q_{k-1}(y-u)\, du. \tag{2.12.6}$$

По формуле (2.12.6) $q_4(y)=\dfrac{y^4}{4!}$, $q_5(y)=\dfrac{y^5}{5!}$ и т.д. По методу математической индукции предполагаем, что $q_{k-1}(y)=\dfrac{y^{k-1}}{(k-1)!}$, откуда

$$q_k(y)=\int_0^y \frac{(y-u)^{k-1}}{(k-1)!}\,du=\frac{y^k}{k!}.$$

В итоге получаем, что

$$M(Z)=1+\sum_{k=2}^{\infty}P(Z\geq k)=1+\sum_{k=1}^{\infty}q_k(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots=e.$$

Ответ. $e\approx 2{,}7$.

Задача 2.78. Пусть $X_1,X_2,\ldots,X_n$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет равномерное распределение в интервале $(0,a)$.

Пусть в нечетных вариантах $Z=\min\{n: X_1+X_2+\ldots+X_n\geq 2a\}$. В четных вариантах $Z=\min\{n: X_1+X_2+\ldots+X_n\geq 3a\}$.

Найдите $M(Z)$. (См. пример 2.78, a — номер варианта.)

2.13. Центральная предельная теорема

Формулировка центральной предельной теоремы (*для одинаково распределенных слагаемых*).

Пусть $X_1,X_2,\ldots,X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Если дисперсии случайных величин конечны и отличны от нуля, то при достаточно больших n закон распределения суммы

$$X_1+X_2+\ldots+X_n$$

сколь угодно близок к нормальному закону распределения.

В условиях теоремы имеет место предельное соотношение

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-nm}{\sigma\sqrt{n}}<x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dx$$

где $m=M(X_i)$, $D(X_i)=\sigma^2$.

Пример 2.79. Стрелок в десятку попадает с вероятностью 0,4, в девятку — с вероятностью 0,3, в восьмерку — с вероятностью 0,2, в семерку — с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что при 25 выстрелах стрелок наберет от 220 до 240 очков?

Решение. Пусть при i-м выстреле стрелок выбивает X_i очков. Величины X_i независимы и имеют одно и то же распределение

X	7	8	9	10
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Заметим, что $M(X_i)=7\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}2+9\cdot 0{,}3+10\cdot 0{,}4=9$, а $D(X_i)=$ $=(7-9)^2\cdot 0{,}1+(8-9)^2\cdot 0{,}2+(9-9)^2\cdot 0{,}3+(10-9)^2\cdot 0{,}4=1.$

Сумма очков $Y=\sum_{i=1}^{25} X_i$, будучи суммой большого числа независимых одинаково распределенных слагаемых с ограниченными дисперсиями, имеет закон распределения близкий к нормальному с параметрами

$$M(Y)=M(\sum_{i=1}^{25} X_i) = \sum_{i=1}^{25} M(X_i) = 25\cdot 9=225$$

и

$$D(Y)=D(\sum_{i=1}^{25} X_i) = \sum_{i=1}^{25} D(X_i) = 25\cdot 1=25.$$

В итоге $Y\sim N(225;25)$. Поэтому по формуле (2.9.2)

$$P(220<Y<240) = \Phi\left(\frac{240-225}{5}\right)-\Phi\left(\frac{220-225}{5}\right)=$$

$$=\Phi(3)+\Phi(1) = 0{,}4986+0{,}3413 = 0{,}8399\approx 0{,}84.$$

Ответ. $0{,}8399\approx 0{,}84$.

Задача 2.79. Игральный кубик подбрасывают n раз. Оценить вероятность того, что суммарное число очков превзойдет $3n+10$. (См. пример 2.79, n — номер варианта плюс 50.)

Пример 2.80. Регулировка прибора занимает время от 4 до 10 мин. Регулировщику предстоит отрегулировать 50 приборов. Считая для каждого прибора равновозможными все значения времени регулировки в указанных пределах, оценить вероятность того, что регулировщик справится с работой за шесть часов.

Решение. Пусть X_i — время регулировки i-го прибора, а $Y=X_1+X_2+X_3+\ldots+X_{50}$ — время выполнения работы рабочим. Требуется найти $P(Y<360)$. Величина Y является суммой большого числа одинаково распределенных независимых случайных величин, каждая из которых ограничена. По центральной предельной теореме Y имеет закон распределения близкий к нормальному закону распределения. Найдем параметры этого закона, т.е. математическое ожидание и дисперсию величины Y. Так как случайные величины X_i независимы, то

$$M(Y) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_{50})$$

и

$$D(Y) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_{50}).$$

Вычислим $M(X_i)$ и $D(X_i)$. По условию все значения случайной величины X_i равновозможны в отрезке [4,10]. Поэтому функция плотности вероятности этой случайной величины в указанном отрезке постоянна. Чтобы площадь, заключенная между графиком функции плотности вероятности и осью абсцисс, равнялась единице, следует положить $f(x) = 1/6$ при $x \in [4,10]$ и $f(x) = 0$ при остальных x. С учетом этого имеем

$$M(X_i) = \int_4^{10} x \cdot 1/6dx = 7, \quad D(X_i) = \int_4^{10} (x-7)^2 \cdot 1/6dx = 3.$$

Поэтому $M(Y) = 50 \cdot 7 = 350$, $D(Y) = 50 \cdot 3 = 150$, $\sigma(Y) \approx 12,25$.

Итак, $Y \sim N(350;150)$. Для вычисления искомой вероятности воспользуемся формулой (2.9.2) и таблицей функции Лапласа (см. прил., табл. П2):

$$P(Y < 360) = P(200 < \mathrm{Y} < 360) = \Phi\left(\frac{360-350}{12,25}\right) - \Phi\left(\frac{200-350}{12,25}\right) =$$

$$= \Phi(0,82) + \Phi(12,24) = 0,294 + 0,5 \approx 0,8.$$

Ответ. $0,794 \approx 0,8.$

Задача 2.80.1. Регулировка каждого механизма занимает время от a до b минут. Считая все значения времени регулировки в этом интервале равновозможными, оценить вероятность того, что для регулировки n механизмов рабочему хватит m часов. (См. пример 2.80 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.80.1.

№	*a*	*b*	*n*	*m*	№	*a*	*b*	*n*	*m*	№	*a*	*b*	*n*	*m*
1	2	8	60	5	**11**	2	6	100	7	**21**	3	9	60	5
2	2	10	50	6	**12**	3	7	50	4	**22**	4	8	60	7
3	3	9	50	6	**13**	3	7	70	6	**23**	4	8	70	6,5
4	4	8	40	4	**14**	3	7	35	3	**24**	3	9	55	6
5	2	8	50	4	**15**	4	6	100	8	**25**	4	10	60	7
6	2	8	70	6	**16**	4	6	35	3	**26**	5	9	50	6
7	4	10	70	8	**17**	1	5	60	3	**27**	5	9	70	8
8	2	6	50	3	**18**	3	5	50	3	**28**	4	10	70	8
9	2	8	80	6,5	**19**	3	7	80	6,5	**29**	1	9	50	4
10	2	12	50	6	**20**	3	5	45	3	**30**	1	9	70	6

Задача 2.80.2. Время службы (в часах) каждого предохранителя случайно и имеет плотность вероятности $f(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}, \quad x \geq 0.$ Перегоревший предохранитель практически мгновенно заменяется новым. Оценить вероятность того, что запаса *n* предохранителей хватит на *m* часов работы ($\lambda = 0{,}01$ в вариантах 1–10; $\lambda = 0{,}02$ в вариантах 11–19; $\lambda = 0{,}03$ в вариантах 20–23; $\lambda = 0{,}04$ в вариантах 24–30). (См. пример 2.80 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.80.2.

№	*n*	*m*	№	*n*	*m*	№	*n*	*m*	№	*n*	*m*	№	*n*	*m*
1	25	3000	**7**	55	6000	**13**	40	2500	**19**	70	3500	**25**	35	1000
2	30	3000	**8**	60	6000	**14**	45	2500	**20**	30	1000	**26**	40	1000
3	35	4000	**9**	65	7000	**15**	50	2500	**21**	45	1500	**27**	50	1300
4	40	4000	**10**	70	7000	**16**	55	3000	**22**	65	1750	**28**	55	1500
5	45	5000	**11**	25	1500	**17**	60	3000	**23**	75	2000	**29**	60	1500
6	50	5000	**12**	30	1500	**18**	65	3500	**24**	25	700	**30**	70	750

Пример 2.81. Жетон для игрального автомата стоит 10 рублей. При использовании одного жетона (в отдельной игре) вероятность не получить ничего равна 0,8, вероятность получить 20 рублей равна 0,15, вероятность получения 50 рублей равна 0,04 и вероятность получения 100 рублей равна 0,01. Игрок купил жетонов на 1000 рублей. Какова вероятность того, что игрок не окажется в проигрыше?

Решение. Игрок купил $1000 : 10 = 100$ жетонов. Результат каждой игры (использование одного жетона) является случайной величиной X_i с законом распределения

X_i	–10	10	40	90
P	0,8	0,15	0,04	0,01

Выигрыш указан с учетом стоимости жетона.

Результат 100 игр обозначим через $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$. Величина Y является суммой большого числа одинаково распределенных независимых случайных величин, каждая из которых ограничена. По центральной предельной теореме Y имеет закон распределения близкий к нормальному закону распределения. Найдем параметры этого закона, т.е. математическое ожидание и дисперсию величины Y. Так как случайные величины X_i независимы, то

$M(Y) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_{100})$ и $D(Y) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_{100})$.

Так как

$$M(X_i) = -10 \cdot 0{,}8 + 10 \cdot 0{,}15 + 40 \cdot 0{,}04 + 90 \cdot 0{,}01 = -2,$$

а $D(X_i) = (-10+2)^2 \cdot 0{,}8 + (10+2)^2 \cdot 0{,}15 + (40+2)^2 \cdot 0{,}04 + (90+2)^2 \cdot 0{,}01 = 228,$

то $M(Y) = -2 \cdot 100 = -200$, $D(Y) = \sigma^2(Y) = 228 \cdot 100 = 22800$, $\sigma(Y) \approx 151.$

Итак, Y имеет примерно нормальный закон распределения $N(-200;\ 22800)$. Игрок не окажется в проигрыше, если $Y \ge 0$. По формуле (2.9.2) имеем

$$P(Y \ge 0) \quad P(0 \le Y \le 9000) \quad \Phi\left(\frac{9000-(-200)}{151}\right) - \Phi\left(\frac{0-(-200)}{151}\right) =$$

$$= \Phi(61) - \Phi(1{,}32) \quad 0{,}5 - 0{,}4066 \approx 0{,}09.$$

Ответ. $\approx 0{,}09$.

Задача 2.81. Лотерейный билет стоит 20 рублей. С вероятностью p_1 билет окажется без выигрыша, с вероятностью p_2 на билет выпадет выигрыш ценой 100 рублей и с вероятностью p_3 билет выиграет выигрыш ценой 200 рублей. Какова вероятность остаться в проигрыше, если приобрести n билетов? (См. пример 2.81 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.81.

№	p_1	p_2	p_3	n	№	p_1	p_2	p_3	n	№	p_1	p_2	p_3	n
1	0,9	0,08	0,02	20	**11**	0,9	0,06	0,04	25	**21**	0,9	0,08	0,02	45
2	0,9	0,07	0,03	60	**12**	0,9	0,09	0,01	40	**22**	0,9	0,07	0,03	30
3	0,9	0,06	0,04	20	**13**	0,9	0,08	0,02	35	**23**	0,9	0,06	0,04	45
4	0,9	0,09	0,01	50	**14**	0,9	0,07	0,03	40	**24**	0,9	0,09	0,01	35
5	0,9	0,08	0,02	30	**15**	0,9	0,06	0,04	35	**25**	0,9	0,08	0,02	50
6	0,9	0,07	0,03	50	**16**	0,9	0,09	0,01	20	**26**	0,9	0,07	0,03	25
7	0,9	0,06	0,04	30	**17**	0,9	0,08	0,02	40	**27**	0,9	0,06	0,04	50
8	0,9	0,09	0,01	45	**18**	0,9	0,07	0,03	35	**28**	0,9	0,09	0,01	30
9	0,9	0,08	0,02	25	**19**	0,9	0,06	0,04	40	**29**	0,9	0,08	0,02	60
10	0,9	0,07	0,03	45	**20**	0,9	0,09	0,01	25	**30**	0,9	0,07	0,03	20

Пусть k/n — частота появлений события в n независимых опытах, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$. Тогда при достаточно больших n (порядка десятков, сотен и т.д.) для любого $0 < \alpha$ имеют место следующая формула

$$P(|k/n - p| < \text{a}) \approx 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right), \qquad (2.13.1)$$

где Φ — функция Лапласа.

Пример 2.82.1. Вероятность рождения мальчика равна 0,514. Определить вероятность того, что доля мальчиков среди 400 новорожденных будет отличаться от вероятности рождения мальчика не более чем на 0,05 в ту или другую сторону.

Решение. Рождение ребенка можно рассматривать как независимый опыт с вероятностью «успеха» $p = 0{,}514$ (по данным статистики на каждую тысячу новорожденных приходится 514 мальчиков). Тогда по формуле (2.13.1)

$$P(|\,k/n - 0{,}514| < 0{,}05) \quad 2\Phi\left(\frac{0{,}05}{\sqrt{0{,}514 \cdot 0{,}486/400}}\right) \quad 2\Phi(2{,}0004) \quad 0{,}9545.$$

Ответ. 0,9545.

Пример 2.82.2. Вероятность события $P(A) = p = 0{,}9$. Сколько независимых опытов нужно проделать, чтобы с вероятностью 0,95 быть уверенным, что частота появления события в этих опытах будет отличаться от вероятности события не более чем на 0,05 в ту или другую сторону?

Решение. Запишем формулу (2.13.1) для нашего случая:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0{,}9\right| < 0{,}05\right) \quad 2\Phi\left(\frac{0{,}05}{\sqrt{0{,}9 \cdot 0{,}1/n}}\right) = 0{,}95.$$

По таблице функции Лапласа находим, что $2\Phi(1{,}96) = 0{,}95.$ Поэтому $0{,}05 \cdot 0{,}05 \cdot \sqrt{n}/0{,}3 = 1{,}96.$ Откуда $n \approx 138{,}3.$ Условия задачи выполняются при $n \geq 139.$

Ответ. $n \geq 139.$

Задача 2.82. Монету подбрасывают *n* раз. Какова вероятность того, что частота выпадения герба будет отличаться от вероятности выпадения герба не более, чем на α в ту или другую сторону. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью *P* можно было утверждать, что частота выпадения герба будет отличается от вероятности выпадения герба не более чем на α в ту или другую сторону? (См. примеры 2.82.1, 2.82.2 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.82.

№	*n*	α	*P*	№	*n*	α	*P*	№	*n*	α	*P*
1	256	0,02	0,9	**11**	841	0,03	0,97	**21**	400	0,03	0,95
2	289	0,01	0,95	**12**	900	0,05	0,98	**22**	441	0,06	0,96
3	324	0,03	0,96	**13**	961	0,10	0,99	**23**	484	0,10	0,97
4	361	0,05	0,97	**14**	1024	0,03	0,90	**24**	576	0,10	0,99
5	400	0,04	0,98	**15**	1225	0,04	0,95	**25**	676	0,04	0,95
6	484	0,03	0,99	**16**	1600	0,02	0,96	**26**	729	0,10	0,96
7	576	0,05	0,90	**17**	256	0,04	0,97	**27**	641	0,10	0,98
8	676	0,02	0,95	**18**	289	0,03	0,98	**28**	900	0,10	0,95
9	729	0,05	0,96	**19**	324	0,02	0,99	**29**	961	0,10	0,999
10	784	0,02	0,97	**20**	361	0,04	0,90	**30**	1024	0,04	0,99

2.14. Ковариация

Важную информацию о системе случайных величин (X,Y) дают ее числовые характеристики. К ним относятся математические ожидания каждой из величин $M(X)=m_x$ и $M(Y)=m_y$. Пара чисел m_x и m_y указывает на плоскости координаты средней точки, относительно которой происходит рассеяние положений случайной точки (X,Y). Дисперсии $D(X)=\sigma_x^2=M(\overset{\circ}{X}{}^2)$ и $D(Y)=\sigma_y^2=M(\overset{\circ}{Y}{}^2)$ характеризуют разброс положений случайной точки вдоль соответствующих координатных осей.

Для характеристики зависимости между X и Y используют величину

$$\sigma_{xy}=\operatorname{cov}(X,Y)=M(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y})=M[(X-m_x)(Y-m_y)],$$

которая называется *ковариацией* или ковариационным моментом. Заметим, что $\operatorname{cov}(X,X)=M(\overset{\circ}{X}{}^2)=\sigma_x^2$. Из определения ковариации следует, что

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M[XY-Xm_y-Ym_x+m_xm_y]=M(XY)-M(X)M(Y),$$

откуда

$$M(XY)=M(X)M(Y)+\operatorname{cov}(X,Y).$$

Кроме того $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$.

Если случайные величины X и Y независимы, то их ковариация равна нулю и тогда

$$M(XY)=M(X)M(Y) \text{ и } D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

Ковариация содержит информацию о зависимости между величинами. Но значение σ_{xy} изменяется при изменении единиц измерения X и Y. Поэтому для характеристики зависимости между величинами удобно рассматривать величину

$$r_{xy}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{M(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y})}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{M(XY)-M(X)M(Y)}{\sigma_X\sigma_Y}, \qquad (2.14.1)$$

которая называется *коэффициентом корреляции величин X и Y.*

Величины $D(X)=\sigma_x^2$,, $D(Y)=\sigma_y^2$ и $\operatorname{cov}(X,Y)$ характеризуют разброс положений случайной точка на плоскости. Эти числовые характеристики принято записывать в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(X,Y) & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}, \qquad (14.2)$$

которую называют *ковариационной матрицей системы случайных величин* (X,Y).

2.14.1. Корреляционная зависимость

Наиболее простой и известной формой зависимости между величинами является функциональная зависимость, при которой каждому значению аргумента соответствует строго определенное значение функции. Функциональная зависимость может быть и между случайными величинами. Существует иной, широко распространенный в природе, тип зависимости между случайными величинами. Эта зависимость проявляется в том, что закон распределения одной случайной величины изменяется при изменении другой. Такая зависимость называется *статистической.*

Следует заметить, что функциональная зависимость бывает лишь в теоретических построениях или в условиях специально подготовленных опытов. Физический опыт в том и состоит, что исследователь старается по возможности исключить влияние всех посторонних факторов и наблюдать зависимость в чистом виде.

Явления окружающего нас мира взаимосвязаны и воздействие одной переменной на другую происходит при одновременном воздействии множества других переменных, поэтому даже функциональные зависимости проявляются как зависимости статистические.

Итак, при статистической зависимости изменение одной величины приводит к изменению закона распределения другой. Если Y — дискретная случайная величина, то это означает, что при каждом фиксированном значении $X = x$ имеется набор возможных значений y и соответствующих им вероятностей $p(y / x) = P(Y = y / X = x)$. Последним обозначением подчеркивается, что речь идет о событии $Y = y$ при условии, что произошло событие $X = x$.

Набор возможных значений y и соответствующих им условных вероятностей образует *условный закон распределения* ($\sum_y p(y/x) = 1$).

Для непрерывной случайной величины можно ввести понятие условной функции распределения или условной плотности вероятности. Если рассмотреть вероятности событий $A = \{x < X < x + dx\}$ и $B = \{y < Y < y + dy\}$, то по аналогии с теоремой умножения вероятностей событий можно получить для условной плотности вероятности $f(y / x)$ соотношение $f(x, y) = f_1(x) f(y / x)$, где $f(x, y)$ — плотность вероятности системы (X, Y), а $f_1(x)$ — маргинальная плотность вероятности случайной величины *X.* Из этого соотношения

$$f(y / x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}.$$

На протяжении этого раздела будем проводить выкладки только для дискретных случайных величин. Для непрерывных случайных величин все рассуждения и выводы останутся в силе, если заменить суммы на интегралы, а вероятности на плотности вероятности.

Статистическая зависимость сложна для изучения. Трудно проследить за изменением всего закона распределения сразу. Проще сосредоточиться на изучении изменения числовых характеристик, в первую очередь математического ожидания. Условный закон распределения имеет числовые характеристики такие же, как и обычные законы распределения. В частности, $M(Y/x)=\sum_{y} yp(y/x)$ — для дискретной случайной величины называют условным математическим ожиданием, или средним значением Y при заданном значении $X=x$. Для непрерывной случайной величины его вычисляют в виде $M(Y/x)=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy$. Если условные математические ожидания при разных значениях X соединить, то получится линия, называемая *линией регрессии Y на X*. Уравнение этой линии называют уравнением регрессии Y на X (см. рис. 2.14.1, на котором точками показаны возможные значения двумерной случайной величины (X,Y)).

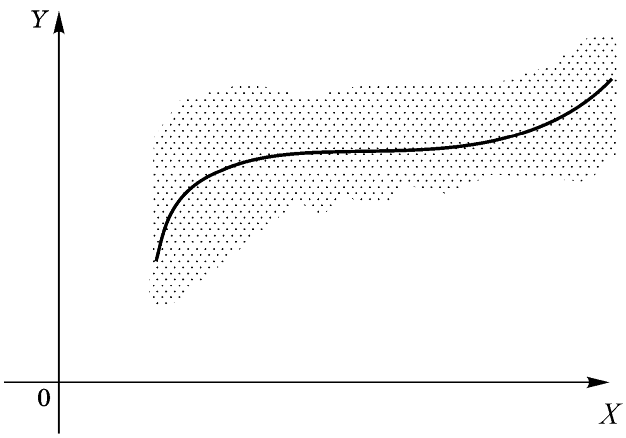


Рис. 2.14.1

Корреляционной зависимостью Y от X называется функциональная зависимость условного среднего значения Y от X. Графиком корреляционной зависимости служит линия регрессии. Например, рост человека X и его вес Y связаны статистической зависимостью. Для каждого значения роста существует целое распределение возможных значений веса. Между этими величинами существует и корреляционная зависимость, которая для людей зрелого возраста выражается известной формулой:

$$Y(\text{кг})=X(\text{см})-100.$$

Вместе с изменением условного среднего значения может изменяться и разброс Y относительно условного среднего значения. При каждом значении $X = x$ можно вычислить дисперсию соответствующих значений *Y*. Эту дисперсию называют *условной дисперсией.* Например, для дискретной случайной величины условная дисперсия равна

$$\sigma^2(Y/x) = \sum_y \left[y - M(Y/x)\right]^2 p\,(y/x).$$

Всякую зависимость изучают для того, чтобы уметь по известному значению одной величины предсказывать значение другой. При статистической зависимости между величинами можно использовать для прогноза линию регрессии. Если стало известно, что $X = x$, то в качестве предполагаемого значения *Y* можно назвать соответствующее условное среднее значение $M(Y/x)$, т.е. ординату линии регрессии при данном *x*. Если *Y* принимает значение *y*, то $y - M(Y/x)$ будет ошибкой прогноза и величину $\sigma(Y/x)$ можно рассматривать как среднюю квадратическую ошибку прогноза *Y* по значению *X* при указанном способе действий.

Представление о среднем квадрате ошибки прогноза *Y* по линии регрессии дает средняя из условных дисперсий

$$\sigma^2(Y/X) = \sum_x \sigma^2(Y/x)\,P(X = x).$$

Здесь значения $\sigma^2(Y/x)$ взяты с учетом вероятности каждого значения *x*. Величина $\sigma^2(Y/x)$ равна среднему квадрату отклонения значений *Y* от линии регрессии. Ее можно записать в виде

$$\sigma^2(Y/X) = M[X - M(Y/X)]^2.$$

Заметим, что при прогнозе *Y* по любой другой линии средний квадрат ошибки прогноза будет больше. В самом деле, для любой постоянной *a*

$$M(X-a)^2 = M[X - M(X) + M(X) - a]^2 = M[X - M(X)]^2 +$$
$$+2[M(X) - a]M[X - M(X)] + M[M(X) - a]^2.$$

Второе слагаемое в правой части равно нулю, так как $M[X - M(X)] = M(X) - M(X) = 0$. Третье слагаемое, очевидно, неотрицательно. Поэтому

$$M(X-a)^2 \ge M[X - M(X)]^2.$$

Равенство возможно лишь при $a = M(X)$. Это означает, что средняя квадратическая ошибка прогноза будет наименьшей, если случайную величину прогнозировать по ее среднему значению. Линия регрессии проходит через условные средние значения *Y*. Поэтому можно утверждать, что линия регрессии *минимизирует среднюю квадратическую ошибку прогноза случайной величины Y по наблюдаемому значению величины X.*

2.14.2. Линейная корреляция

Корреляция называется *линейной*, если линия регрессии одной величины на другую является прямой. В противном случае говорят о нелинейной корреляции.

Пусть линия регрессии имеет вид $M(Y/X) = \rho x + b$. Согласно свойству линии регрессии, должен быть минимален средний квадрат отклонений Y от этой линии, т.е. минимальной должна быть величина

$$M(Y - b - \rho x)^2 = F(b, \rho),$$

причем ее минимальное значение равно $\sigma^2(Y/x)$.

Параметры b и ρ можно найти из условия минимума функции $F(b,\rho)$. Необходимые условия экстремума дают систему уравнений

$$\begin{cases} \rho M(X^2) + bM(X) = M(XY), \\ \rho M(X) + b = M(Y), \end{cases}$$

решения которой имеют вид

$$\rho = r_{xy}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},\ b = M(Y) - r_{xy}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}M(X), \qquad (2.14.3)$$

где r_{xy} — коэффициент корреляции (2.14.1). Если выражения (2.14.3) подставить в $F(b,\rho)$, то после ряда преобразований получается, что

$$\sigma^2(Y/X) = \sigma^2(Y)(1 - r_{XY}^2). \qquad (2.14.4)$$

Из соотношений (2.14.3) и (2.14.4) можно извлечь информацию о *свойствах коэффициента корреляции.*

1. Так как $\sigma^2(Y/X) \geq 0$ и $\sigma^2(Y) \geq 0$, то $1 - r_{XY}^2 \geq 0$, откуда $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

2. Если $r_{xy} = 0$, то в силу (2.14.3) и угловой коэффициент линии регрессии равен нулю. Линия регрессии параллельна оси OX. В этом случае говорят, что величины *некоррелированы*, так как среднее значение Y не изменяется при изменении X. Отсутствие корреляционной зависимости не всегда означает независимость величин. Например, при постоянном среднем значении Y может изменяться разброс значений относительно среднего (см. рис. 2.14.2, на котором точками изображены возможные положения случайной точки).

3. Из (2.14.3) следует, что угловой коэффициент линии регрессии ρ и коэффициент корреляции имеют одинаковые знаки. Если $r_{xy} > 0$, то говорят, что величины *коррелированы положительно.* В этом случае большему значению величины X соответствует большее среднее значение Y (см. рис. 2.14.3). Еще раз подчеркнем, что речь идет именно об увеличении среднего значения Y. В отдельных опытах большему X может соответствовать меньшее Y. Например, положительно коррелированы рост

и вес человека, возраст и высота дерева, качество сырья и качество продукции и т.д.

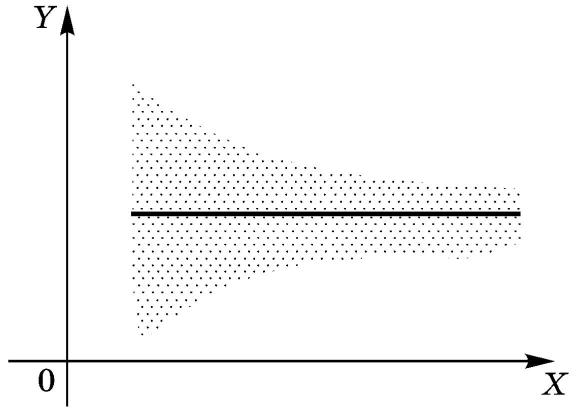


Рис. 2.14.2

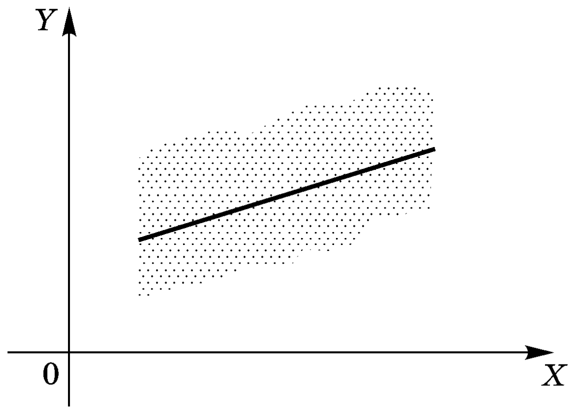


Рис. 2.14.3

Если $r_{xy} < 0$, то говорят, что величины *коррелированы отрицательно*. Это означает, что большему значению одной величины соответствует в среднем меньшее значение другой. Например, число пропусков занятий и успеваемость коррелированы отрицательно.

4. Если $r_{xy} = \pm 1$, то из (2.14.4) следует, что $\sigma^2(Y / X) = 0$. В этом случае разброса относительно линии регрессии нет. Между величинами существует линейная функциональная зависимость.

5. Из (2.14.4) следует, что $\sigma^2(Y / X) \to 0$ при $|r_{XY}| \to 1$. Значит, чем больше по модулю коэффициент корреляции, тем теснее прилегают значения *Y* к линии регрессии, тем меньше средний квадрат ошибки прогноза *Y* по наблюдаемому значению *X*. На рис. 2.14.4 для сравнения показан разброс положений случайной точки (*X*,*Y*) относительно линии регрессии при двух разных значениях коэффициента корреляции $r_{XY}^{(1)} < r_{XY}^{(2)}$.

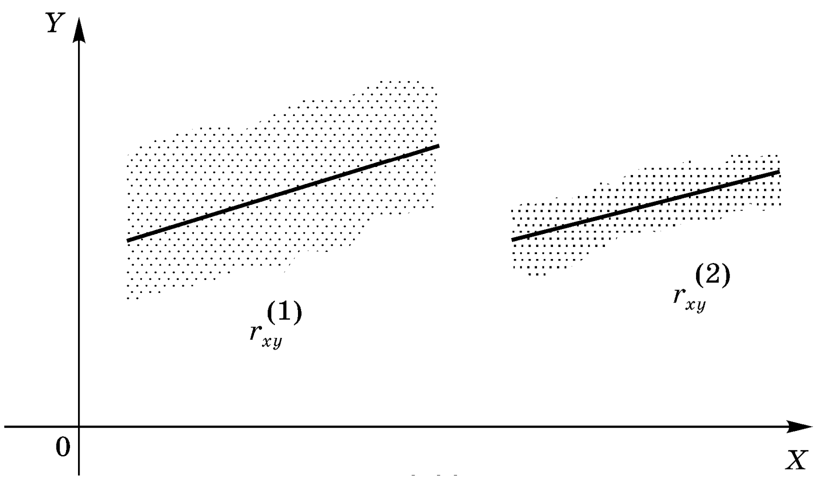


Рис. 2.14.4

Коэффициент *корреляции служит мерой линейной зависимости между величинами. Он показывает насколько статистическая зависимость близка к функциональной.*

Отметим, что в силу (2.14.3) уравнение линии регрессии можно записать в виде

$$Y = rX + b = r_{xy}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X + M(Y) - r_{xy}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}M(X)$$

или

$$\frac{Y - M(Y)}{\sigma_Y} = r_{XY}\frac{X - M(X)}{\sigma_X}. \tag{2.14.5}$$

Пример 2.83. Случайные величины X и Y независимы и имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

1) Найти коэффициент корреляции случайных величин $U = aX + bY$ и $V = aX - bY$.

2) Найти коэффициент корреляции между случайными величинами $Z = X + Y$ и X.

Решение. 1) По определению $r_{uv} = \dfrac{M\left[(U - MU)(V - MV)\right]}{\sigma(U)\sigma(V)}$. Найдем необходимые для вычисления r_{uv} величины. По свойствам математического ожидания и дисперсии имеем:

$$M(U) = M(aX + bY) = a\,M(X) + bM(Y) = am + bm,$$

$$M(V) = M(aX - bY) = aM(X) - bM(Y) = am - bm,$$

$$\overset{\circ}{U} = U - M(U) = aX + bY - M(aX + bY) = aX + bY - (am + bm) =$$

$$= a(X - m) + b(Y - m) = a\overset{\circ}{X} + b\overset{\circ}{Y}.$$

Аналогично, $\overset{\circ}{V} = V - M(V) = a\overset{\circ}{X} - b\overset{\circ}{Y}$,

$$M[(U - MU)(V - MV)] = M(\overset{\circ}{U}\overset{\circ}{V}) = M[(a\overset{\circ}{X} + b\overset{\circ}{Y})(a\overset{\circ}{X} - b\overset{\circ}{Y})] =$$

$$= M(a^2\overset{\circ}{X}{}^2 - b^2\overset{\circ}{Y}{}^2) = a^2M\overset{\circ}{X}{}^2 - b^2M\overset{\circ}{Y}{}^2 =$$

$$= a^2M(X - m)^2 - b^2M(Y - m)^2 = a^2\sigma^2 - b^2\sigma^2 = \sigma^2(a^2 - b^2).$$

Так как X и Y независимы, то

$$D(U) = D(aX + bY) = a^2D(X) + b^2D(Y) = \sigma^2(a^2 + b^2),$$

$$D(V) = D(aX - bY) = a^2D(X) + b^2D(Y) = \sigma^2(a^2 + b^2),$$

В результате имеем

$$r_{uv} = \frac{\sigma^2(a^2 - b^2)}{\sigma\sqrt{a^2 + b^2}\,\sigma\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

2) Вычислим величины, которые необходимы для использования формулы

$$r_{XZ} = \frac{M(XZ) - M(X)M(Z)}{\sigma_X \sigma_Z}.$$

Так как X и Y независимы, то

$$M(Z) = M(X+Y) = M(X) + M(Y) = m + m = 2m,$$

$$D(Z) = D(X+Y) = D(X) + D(Y) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2,$$

$$M(XZ) = M[X(X+Y)] = M(X^2) + M(XY) = M(X^2) + M(X)M(Y)$$

$$= M(X^2) - m^2 + 2m^2 = \sigma^2 + 2m^2.$$

Поэтому $r_{XZ} = \dfrac{\sigma^2 + 2m^2 - m \cdot 2m}{\sigma \cdot \sigma\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71.$

Ответ. $r_{uv} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$; $r_{XZ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71.$

Задача 2.83. Случайные величины X и Y независимы и имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $U = aX + bY$ и $V = cX - dY$. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $U = aX + bY$ и X. (См. пример 2.83 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.83.

№	a	b	c	d	№	a	b	c	d	№	a	b	c	d
1	4	3	2	1	**11**	1	3	1	1	**21**	1	–1	2	1
2	1	2	1	2	**12**	1	1	3	1	**22**	1	1	–2	1
3	2	1	2	1	**13**	1	1	1	3	**23**	1	–2	2	1
4	2	2	2	2	**14**	3	1	1	1	**24**	1	–2	–2	1
5	1	2	2	1	**15**	4	1	1	1	**25**	-1	2	2	–1
6	2	1	1	2	**16**	1	4	1	1	**26**	1	–3	3	1
7	1	2	1	1	**17**	1	1	4	1	**27**	1	–3	–3	1
8	1	1	2	1	**18**	1	1	1	4	**28**	3	–1	–3	1
9	1	3	3	1	**19**	4	1	1	4	**29**	3	–1	2	1
10	3	1	1	3	**20**	1	4	4	1	**30**	3	1	–2	1

Пример 2.84. Равновозможны все положения случайной точки (X,Y) в треугольнике D с вершинами $A(0,0)$, $B(0,1)$ и $C(2,1)$. Найти коэффициент корреляции случайных величин X и Y. Найти линию регрессии Y на X и оценить точность прогноза величины Y по наблюдаемому значению X.

Решение. Равновозможность всех положений случайной точки (X,Y) в треугольнике ABC (см. рис. 2.14.5) означает, что плотность вероятности $f(x,y) = 0$ вне этого треугольника, а в точках треугольника постоянна.

Площадь треугольника ABC равна 1. В точках треугольника положим $f(x,y)=1$. Тем самым соблюдено условие равенства единице объема, заключенного между функцией плотности вероятности и координатной плоскостью (напомним, что это является одним из отличительных свойств функции плотности вероятности системы двух случайных величин).

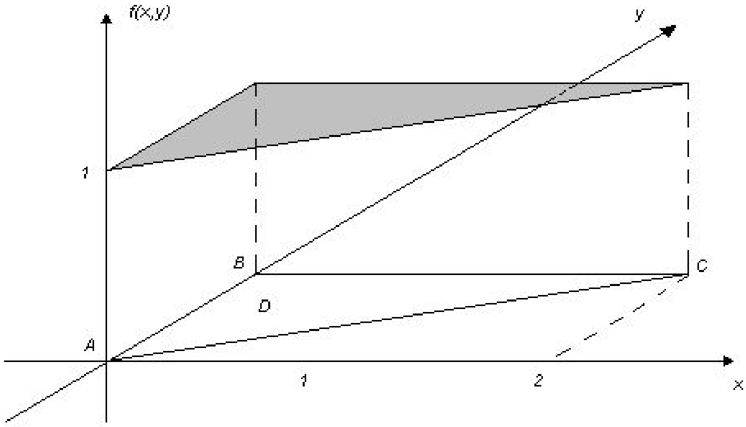


Рис. 2.14.5

Маргинальные функции плотности вероятности величин X и Y равны соответственно:

$$f_1(x)=\int_{x/2}^{1}1dy = 1-\frac{x}{2} \text{ при } x\in[0,2],\ f_1(x)=0 \text{ при } x\notin[0,2];$$

$$f_2(y)=\int_{0}^{2y}1dx=2y \text{ при } y\in[0,1],\ f_2(y)=0 \text{ при } y\notin[0,1].$$

Вычислим величины, необходимые для использования формул (2.14.3) и (2.14.5):

$$M(X)=\int_0^2 x\,(1-x/2)\,dx=2/3, \qquad M(X^2)=\int_0^2 x^2(1-x/2)dx=2/3,$$

$$M(Y)=\int_0^1 y\cdot 2ydy=2/3, \qquad M(Y^2)=\int_0^1 y^2\cdot 2ydy=1/2,$$

$$M(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y})=\int_0^2 dx\int_{x/2}^{1}(x-2/3)(y-2/3)\cdot 1dy=1/18.$$

Тогда $\sigma_X^2=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9},\ \sigma_x=\frac{\sqrt{2}}{3},$

$$\sigma_Y^2=M(Y^2)-[M(Y)]^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18},\ \sigma_y=\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

По формулам (2.14.3), (2.14.5) находим коэффициент корреляции $r_{XY}=\frac{1}{2}$ и уравнение линии регрессии $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$. Если использовать эту линию регрессии для прогноза Y по известному значению X, то средний квадрат ошибки прогноза по формуле (2.14.4) равен $\sigma^2(Y \neq X) \quad \frac{1}{18}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{24}\approx 0{,}042.$

Ответ. $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$; $\sigma^2(Y \neq X) \quad \frac{1}{24}\approx 0{,}042.$

Задача 2.84.1. Равновозможны все положения случайной точки (X,Y) в треугольнике с вершинами $A(0,0)$, $B(a,0)$ и $C(a,b)$ в нечетных вариантах, и с вершинами $A(0,0)$, $B(a,0)$ и $C(0,b)$ в вариантах четных. Найти коэффициент корреляции случайных величин X и Y. Найти линию регрессии Y на X и оценить точность прогноза величины Y по наблюдаемому значению X. (См. пример 2.84 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.84.1.

№	*a*	*b*	№	*a*	*b*	№	*a*	*b*	№	*a*	*b*	№	*a*	*b*	№	*a*	*b*
1	2	3	**6**	3	–1	**11**	–3	1	**16**	–4	–1	**21**	4	2	**26**	4	–3
2	2	–3	**7**	–3	2	**12**	–3	–1	**17**	3	3	**22**	4	–2	**27**	5	1
3	–2	1	**8**	–3	–2	**13**	3	2	**18**	3	–3	**23**	–4	2	**28**	5	2
4	–2	–1	**9**	2	2	**14**	3	–2	**19**	4	1	**24**	–4	–2	**29**	–5	1
5	3	1	**10**	2	–2	**15**	–4	1	**20**	4	–1	**25**	4	3	**30**	–5	2

Задача 2.84.2. Случайная точка (X,Y) имеет функцию плотности вероятности $f(x,y)=\frac{2(ax+by)}{a+b}$ при (x,y) в единичном квадрате $[0,1]\times[0,1]$ и $f(x,y)=0$ вне этого квадрата. Найдите для каждой из случайных величин функцию плотности вероятности, математическое ожидание, дисперсию. Вычислите коэффициент корреляции этих величин. Найдите линию регрессии Y на X. (См. пример 2.84.2 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.84.2.

№	*a*	*b*	№	*a*	*b*	№	*a*	*b*	№	*a*	*b*	№	*a*	*b*	№	*a*	*b*
1	1	1	**6**	3	2	**11**	4	2	**16**	5	1	**21**	3	5	**26**	1	6
2	1	2	**7**	2	3	**12**	2	4	**17**	1	5	**22**	5	4	**27**	6	2
3	2	1	**8**	2	2	**13**	4	3	**18**	5	2	**23**	4	5	**28**	2	6
4	1	3	**9**	4	1	**14**	3	4	**19**	2	5	**24**	4	4	**29**	6	3
5	3	1	**10**	1	4	**15**	3	3	**20**	5	3	**25**	6	1	**30**	3	6

Пример 2.85. Подбрасывают два игральных кубика. Пусть X — число выпавших «пятерок», а Y — число нечетных очков. Найдите закон

распределения случайного вектора $\{X, Y\}$, его математическое ожидание и дисперсионную матрицу. Найдите коэффициент корреляции r_{XY}.

Решение. Если кубики однородны и симметричны, то вероятность выпадения каждой грани равна 1/6. Запишем сначала закон распределения случайного вектора $\{X, Y\}$. Каждая из компонент вектора может принимать только значения 0, 1 и 2. Поэтому закон распределения можно представить в виде таблицы:

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y=y)$
0	1/4	0	0	1/4
1	1/3	1/6	0	1/2
2	1/9	1/9	1/36	1/4
$P(X=x)$	25/36	10/36	1/36	1

В клетках таблицы записаны вероятности $P(X = x \text{ и } Y = y)$. Например, $P(X=1 \text{ и } Y=1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$, так как с вероятностью 1/6 на первом кубике появится «5», а на втором кубике с вероятностью $3/6=1/2$ выпадет четное число, либо наоборот, на первом кубике — четное число, а на втором — «5». Или, например, $P(X=0 \text{ и } Y=2) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$, так как на каждом кубике должна выпасть нечетная цифра, но не «5». Вычислим числовые характеристики случайного вектора:

$$M(X) = 0\cdot 25/36 + 1\cdot 10/36 + 2\cdot 1/36 = 1/3.$$

Заметим, что X имеет биномиальное распределение. Поэтому математическое ожидание можно было подсчитать проще: $2\cdot 1/6 = 1/3$ — произведение числа опытов на вероятность появления события в одном опыте. Аналогично, $M(Y) = 0\cdot 1/4 + 1\cdot 1/2 + 2\cdot 1/4 = 1$. Для вычисления дисперсий вычислим предварительно математические ожидания квадратов величин:

$$M(X^2) = 0^2\cdot 25/36 + 1^2\cdot 10/36 + 2^2\cdot 1/36 = 7/18;$$

$$M(Y^2) = 0^2\cdot 1/4 + 1^2\cdot 1/2 + 2^2\cdot 1/4 = 1{,}5.$$

Тогда $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 7/18 - 1/9 = 5/18$,

$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = 1{,}5 - 1 = 1/2.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M(\mathring{X}\mathring{Y}) = (0-1/3)(0-1)1/4 + (0-1/3)(1-1)1/3 +$$
$$+(1-1/3)(1-1)1/6 + +(0-1/3)(2-1)1/9 + (1-1/3)(2-1)1/9 +$$
$$+(2-1/3)(2-1)1/36 = 1/6.$$

Дисперсионная матрица случайного вектора имеет вид $\begin{pmatrix} 5/18 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Коэффициент корреляции равен

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{1/6}{\sqrt{5/18}\sqrt{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,45.$$

Ответ. $1/\sqrt{5} \approx 0,45$.

Задача 2.85. Вероятность того, что на лотерейный билет выпадет крупный выигрыш, равна p_1, а вероятность мелкого выигрыша равна p_2. Приобретено три лотерейных билета. Пусть X — число выигрышных билетов среди этих трех, Y — число крупных выигрышей, Z — число мелких выигрышей.

В вариантах, номер которых делится на три с остатком один, найти: а) закон распределения вектора (X,Y); б) коэффициент корреляции r_{xy}.

В вариантах, номер которых делится на три с остатком два, найти: а) закон распределения вектора (X,Z); б) коэффициент корреляции r_{xz}.

В вариантах, номер которых делится на три без остатка, найти: а) закон распределения вектора (Y,Z); б) коэффициент корреляции r_{yz}.

(См. пример 2.85 и исходные данные.)

Указание. Для вычисления вероятностей пар возможных значений случайных величин использовать формулу (2.6.2).

Исходные данные к задаче 2.85.

№	p_1	p_2	№	p_1	p_2	№	p_1	p_2	№	p_1	p_2
1	0,01	0,05	**9**	0,01	0,09	**17**	0,005	0,08	**25**	0,02	0,07
2	0,01	0,04	**10**	0,005	0,05	**18**	0,005	0,09	**26**	0,02	0,08
3	0,01	0,06	**11**	0,005	0,04	**19**	0,02	0,05	**27**	0,02	0,09
4	0,01	0,03	**12**	0,005	0,06	**20**	0,02	0,04	**28**	0,03	0,10
5	0,01	0,02	**13**	0,005	0,03	**21**	0,02	0,06	**29**	0,03	0,12
6	0,01	0,10	**14**	0,005	0,02	**22**	0,02	0,10	**30**	0,03	0,08
7	0,01	0,07	**15**	0,005	0,10	**23**	0,02	0,12	**31**	0,03	0,12
8	0,01	0,08	**16**	0,005	0,07	**24**	0,02	0,10	**32**	0,03	0,08

Замечание. Рассмотрим индикатор события A:

$$I_A = \begin{cases} 1, \text{ если событие } A \text{ появилось;} \\ 0, \text{ если событие } A \text{ не появилось.} \end{cases}$$

Известно, что $M(I_A) = P(A) = p$, $D(I_A) = p(1-p) = pq$. Силу зависимости между событиями A и B можно оценить по величине коэффициента корреляции индикаторов этих событий. По формуле (2.14.1) имеем

$$r_{AB}=\frac{M(I_AI_B)-M(I_A)M(I_B)}{\sqrt{D(I_A)D(I_B)}}=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(\overline{A})}\,\sqrt{P(B)P(\overline{B})}}. \qquad (2.14.6)$$

Коэффициент r_{AB} принимает значения в $[-1;1]$, но есть некоторые особенности в трактовке значений коэффициента.

Если $r_{AB}=0$, то события независимы и наоборот (вспомните, для случайных величин факт равенства коэффициента корреляции нулю не означал независимость случайных величин). Положительные значения коэффициента корреляции говорят о том, что появление одного события увеличивает вероятность появления другого. Например, из рис. 2.14.6 видно, что отношение площади области *B* к площади прямоугольника меньше, чем отношение площади области *AB* к площади области *A*. Поэтому факт появления события *A увеличивает* вероятность появления события *B*.

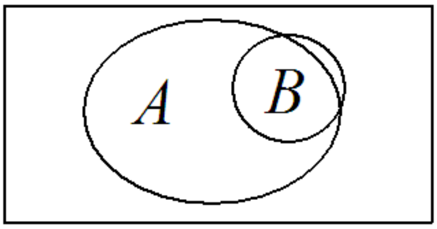


Рис. 2.14.6

Чем ближе к плюс единице значение r_{AB}, тем в большей степени проявляется это увеличение. При $r_{AB}=+1$ появление одного события всегда влечет появление другого. Если же $r_{AB}<0$, то появление одного события уменьшает вероятность появления другого. Например, из рис. 2.14.7 видно, что отношение площади области *B* к площади прямоугольника больше, чем отношение площади области *AB* к площади области *A*. Поэтому факт появления события *A* уменьшает вероятность появления события *B*. Значение $r_{AB}=-1$ свидетельствует о том, что появление одного события исключает появление другого.

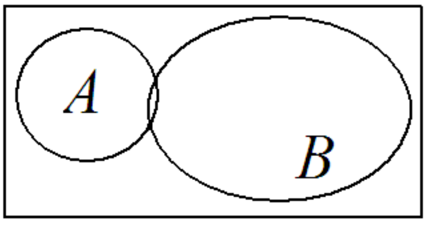


Рис. 2.14.7

Пример 2.86. В одной урне четыре белых и два черных шара, а во второй два белых и три черных. Обозначим через *A* и *B* выбор белого шара соответственно из первой и второй урны. Ясно, что $P(A)=2/3$, а

$\mathrm{P}(B) = 2/5$ и события независимы. Пусть при выборе из первой урны белого шара, его перекладывают во вторую урну и только потом выбирают из нее шар. Оценить силу зависимости между событиями *A* и *B*.

Решение. Для вычисления коэффициента корреляции воспользуемся формулой (2.14.6):

$$r_{AB} = \frac{(2/3)(1/2) - (2/3)(2/5)}{\sqrt{(2/3)(1/3)(2/5)(3/5)}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0,29.$$

Заметим, что в случае добавлении не одного, а двух белых шаров во вторую урну этот коэффициент равен

$$r_{AB} = \frac{(2/3)(4/7) - (2/3)(2/5)}{\sqrt{(2/3)(1/3)(2/5)(3/5)}} \approx 0,49.$$

Ответ. $\dfrac{1}{\sqrt{12}} \approx 0,29.$

Задача 2.86. В первой урне n_1 белых и n_2 черных шара, а во второй урне их соответственно m_1 и m_2. Из первой урны извлекают наугад два шара и перекладывают их во вторую урну. После этого из второй урны извлекают один шар.

Пусть A_i означает, что среди перемещенных во вторую урну шаров ровно i белых ($i = 0,1,2$). Обозначим через *B* факт выбора белого шара из второй урны. Найдите коэффициенты корреляции между каждым из событий A_i и событием *B*. (См. пример 2.86; величины n_1, n_2, m_1 и m_2 возьмите из исходных данных к задаче 2.14.)

2.15. Функциональные преобразования двухмерных случайных величин

Пусть (X,Y) и (U,V) — двумерные случайные величины, причем

$$U = \varphi_1(X,Y), \quad V = \varphi_2(X,Y), \tag{2.15.1}$$

где функции φ_1 и φ_2 непрерывно дифференцируемы и отображение (2.15.1) взаимно однозначно, т.е. существуют функции ψ_1 и ψ_2 такие, что

$$X = \psi_1(U,V) \text{ и } Y = \psi_2(U,V).$$

Если $f(x,y)$ — функция плотности вероятности случайного вектора (X,Y), а $g(u,v)$ — функция плотности вероятности случайного вектора (U,V), то

$$g(u,v) = f[y_1(u,v), y_2(u,v)]\,|I|, \tag{2.15.2}$$

где $I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial v} \end{vmatrix}.$

Пример 2.87. Случайный вектор (X,Y) имеет плотность вероятности

$$f(x,y)=\begin{cases}2\exp(-2x-y) & \text{при } x\ge 0,\ y\ge 0;\\ 0 & \text{при остальных } (x,y).\end{cases}$$

Найти плотность вероятности случайного вектора (U,V), если

$$U=X-Y \text{ и } V=X+Y. \qquad (2.15.3)$$

Решение. Найдем обратное к (2.15.3) преобразование:

$$x=\psi_1(u,v)=0{,}5\ (u+v),\quad y=\psi_2(u,v)=0{,}5(v-u).$$

Заметим, что из условия неотрицательности x и y следует: $v\ge -u,\ v\ge u,\ v\ge 0$. Так как

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ -0{,}5 & 0{,}5\end{vmatrix}=1/2,$$

то функция плотности вероятности случайного вектора (U,V), в соответствии с формулой (2.15.2), имеет вид

$$g(u,v)=2\exp[-2\cdot 0{,}5(u+v)-0{,}5(v-u)]\cdot 1/2=\exp[-0{,}5(u+3v)].$$

Ответ. $g(u,v)=\exp[-0{,}5(u+3v)]$ при $v\ge -u,\ v\ge u,\ v\ge 0$ и $g(u,v)=0$ при остальных (u,v).

Задача 2.87. Случайный вектор (X,Y) имеет плотность вероятности

$$f(x,y)=\begin{cases}ab\exp(-ax-by) & \text{при } x\ge 0,\ y\ge 0,\quad a>0,\quad b>0;\\ 0 & \text{при остальных } (x,y).\end{cases}$$

Найти плотность вероятности случайного вектора (U,V), если $U=\exp(X/c)$ и $V=cX+Y$. (См. пример 2.87 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.87.

№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c
1	1	2	1	**7**	3	1	1	**13**	1	2	3	**19**	3	2	3	**25**	1	4	1
2	2	1	2	**8**	3	2	2	**14**	2	2	3	**20**	2	3	3	**26**	1	1	4
3	1	2	2	**9**	2	3	2	**15**	3	3	1	**21**	4	1	1	**27**	1	2	4
4	2	2	1	**10**	3	2	1	**16**	3	3	2	**22**	4	2	1	**28**	2	1	4
5	2	2	2	**11**	2	2	3	**17**	3	1	3	**23**	4	1	2	**29**	1	2	4
6	2	3	1	**12**	1	3	2	**18**	1	3	3	**24**	4	2	2	**30**	3	1	4

Пример 2.88. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальные законы распределения с нулевыми средними значениями и одинаковыми дисперсиями σ^2:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}; \qquad f_2(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Пусть X и Y декартовы координаты случайного вектора (X,Y). Производится переход к полярным координатам по формулам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{2.15.4}$$

Требуется найти функцию плотности вероятности случайного вектора $(\rho;\varphi)$ и функции плотности вероятности компонент этого вектора ρ и φ.

Решение. Так как X и Y независимы, то плотность вероятности случайного вектора (X,Y) имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right\}..$$

Якобиан преобразования (2.15.4) равен

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

по формуле (2.15.2) получаем

$$g(\rho,\varphi) = f[x(\rho,\varphi); y(\rho,\varphi)] \cdot |I| = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{2.15.5}$$

Плотность вероятности (2.15.5) позволяет вычислить маргинальные плотности вероятности. Плотность распределения величины ρ

$$g_1(\rho) = \int_0^{\pi/2} g(\rho,\varphi)\,d\varphi = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right\} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad \rho \ge 0.$$

Это распределение известно как распределение Релея (Rayleigh distribution). График его плотности вероятности для нескольких значений параметра σ приведен на рис. 2.15.1.

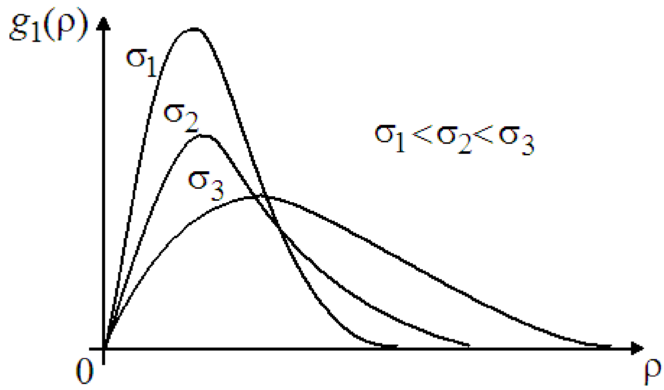


Рис. 2.15.1

Плотность распределения случайной величины φ:

$$g_2(\varphi) = \int_0^{\infty} g\,(\rho,\varphi)\, d\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\rho}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right\} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \text{ при } \varphi \in [0,2\pi].$$

Это равномерное распределение на отрезке $[0,2\pi]$

Ответ. $g(\rho,\varphi) = \dfrac{\rho}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\dfrac{\rho^2}{2\sigma^2}\right\}$; $g(\rho) = \dfrac{\rho}{\sigma^2}\exp\left\{-\dfrac{\rho^2}{2\sigma^2}\right\}$, $\rho \geq 0$;

$g(\varphi) = 1/2\pi$ при $\varphi \in [0,2\pi]$.

Задача 2.88.1. Случайные величины X и Y независимы и имеют показательный закон распределения с функциями плотности вероятности соответственно

$$f_1(x) = \lambda\, e^{-\lambda x},\ x \geq 0 \quad \text{и} \quad f_2(y) = \lambda\, e^{-\lambda y},\ y \geq 0.$$

Полагаем X и Y декартовыми координатами случайного вектора (X,Y) в первом квадранте $(x \geq 0;\ y \geq 0)$. Производится переход к полярным координатам по формулам

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Найдите плотность распределения случайного вектора $(\rho;\varphi)$ и найдите плотность вероятности его координаты φ. Нарисуйте график функции плотности вероятности случайной величины φ. (См. пример 2.88, λ — номер варианта.)

Задача 2.88.2. Случайная точка (X,Y) имеет функцию плотности вероятности $f(x,y)$ в круге $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq a^2\}$ и $f(x,y) = 0$ вне этого круга. Найдите математическое ожидание расстояния от центра круга до этой случайной точки. В нечетных вариантах $f(x,y) = \dfrac{3}{\pi a^2}\left(1 - \dfrac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

В четных вариантах $f(x,y) = \dfrac{3}{2\pi a^3}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Указание. Перейдите к полярным координатам. (См. пример 2.88, a — номер варианта.)

Задача 2.88.3. Электрический ток в момент времени t определяется равенством

$$I(t) = X\cos\omega t + Y\sin\omega t, \qquad (15.6)$$

где ω — частота, а X и Y — случайные величины, причем все положения случайной точки (X,Y) в области $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ равновозможны.

Выражение (15.6) подвергается стандартному преобразованию:

$$I(t)=\sqrt{X^2+Y^2}\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}\cos\omega t+\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\sin\omega t\right).$$

Тогда можно считать (см. рис. 2.15.2), что $\dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}=\sin\varphi$, а $\dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}=$ $=\cos\varphi$, где φ — некоторый угол.

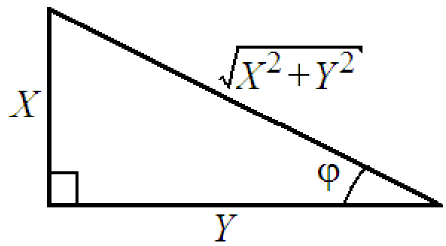


Рис. 2.15.2

Поэтому

$$I(t)=\sqrt{X^2+Y^2}(\sin\varphi\cos\omega t+\cos\varphi\sin\omega t)=\sqrt{X^2+Y^2}\sin(\omega t+\varphi).$$

Величину $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ обычно трактуют как «амплитуду», а φ считают «сдвигом по фазе». Найдите распределение случайного вектора (Z,φ). (См. пример 2.88. Величину ω возьмите равной номеру варианта.)

2.16. Правило «трех сигм»

Пусть случайная величина X имеет закон распределения $N(m;\sigma^2)$. Вероятность того, что эта случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более, чем на три средних квадратических отклонения равна

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\Phi(3\sigma/\sigma)=2\Phi(3)=0{,}997\approx 1,$$

т.е. отклонения, большие 3σ, имеют вероятность 0,003. Во многих приложениях такой вероятностью можно пренебречь и считать, что *при единичном наблюдении нормально распределенной случайной величины интервалом практически возможных значений является интервал* $(m-3\sigma;m+3\sigma)$. Это утверждение обычно называют правилом «трех сигм». Заметим, что для любой случайной величины из неравенства Чебышева следует, что

$$P(|X-m|<3\sigma)\geq 1-\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=1-\frac{1}{9}\approx 0{,}9.$$

Поэтому правилом «трех сигм» иногда пользуются не печалясь о том, что случайная величина вовсе не имеет нормального закона распределения.

Замечание. Последние годы все чаще предпочитают брать не 3σ, а 3,9σ. Тогда получается более «симпатичная» вероятность

$$P(|X-m|<3,9\sigma)=2\Phi(3,9\sigma/\sigma)=2\Phi(3,9)=0,999\approx 1.$$

(Величина 0,999 впечатляет больше, нежели 0,997!)

Пример 2.89.1. Монета подброшена 100 раз. Герб выпал 30 раз. Можно ли считать, что монета было симметричной?

Решение. Подбрасывание монеты можно считать независимым опытом, число которых $n=100$. Число появлений события в большой серии опытов имеет примерно нормальный закон распределения с параметрами $m=np$ и $\sigma^2=npq$. Если монета симметрична, то $p=0,5$, $q=1-p=0,5$. Тогда $m=100\cdot 0,5=50$ и $\sigma^2=100\cdot 0,5\cdot 0,5=25$, $\sigma=5$. Поэтому для симметричной монеты практически возможными значениями числа выпадений герба являются значения от 35 до 65. Число 30 к ним не принадлежит.

Ответ. При симметричной монете такой результат практически невозможен.

Пример 2.89.2. Некто утверждает, что он экстрасенс. Для проверки был проделан следующий опыт. Взято пять карточек с рисунками простейших геометрических фигур. Испытатель выбирает карточку наугад, а испытуемый, находясь в соседней комнате, пытается определить, руководствуясь сверхчувственным восприятием, какая карточка выбрана экспериментатором. Карточки перемешиваются. Затем опыт повторяется. Так проделали 100 раз. Оказалось, что в 28 случаях испытуемый правильно назвал карточку. Есть ли основания считать, что имело место сверхчувственное восприятие?

Решение. Естественно предположить, что 28 совпадений произошли случайно. Вероятность угадать нужную карточку равна 1/5. Угадывание каждой карточки можно считать независимым опытом. Так как опытов много ($n=100$), то число совпадений имеет близкий к нормальному закон распределения с параметрами $m=np=100\cdot 1/5=20$ и $\sigma^2=npq$ $=100\cdot 1/5\cdot 4/5=16$. Тогда $\sigma=4$ и, согласно правилу «трех сигм», практически возможно угадать от $20-3\cdot 4=8$ до $20+3\cdot 4=32$ раз. Число 28 входит в интервал возможных значений при простом угадывании. Следовательно, полученные опытные данные не подтверждают сверхчувственного восприятия.

Замечание. Предположим, что экстрасенс все-таки настаивает на своем сверхчустvenном восприятии. Серию опытов повторили. Совпадений оказалось 31. В этом случае всего опытов $n=200$, $np=40$, $3\sigma=\sqrt{200\cdot 0,2\cdot 0,8}\approx 17$. Интервал практически возможных значений: $(23;57)$. Общее число совпадений равно $28+31=59$.

Такое число совпадений при простом угадывании практически невозможно. Это может послужить поводом для тщательной проверки условий эксперимента (подавляющее большинство так называемых экстрасенсов — откровенные жулики). Или следует настоять на лабораторном обследовании экстрасенса (от чего экстрасенсы всячески уклоняются, их стихия — работа на публику).

Задача 2.89.1. Монета подброшена n раз. Герб выпал k раз. Можно ли считать, что монета было симметричной? (См. примеры 2.89.1 и 2.89.2 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.89.1.

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	144	95	**7**	144	55	**13**	144	86	**19**	144	53	**25**	324	145
2	256	100	**8**	256	105	**14**	256	150	**20**	256	145	**26**	400	175
3	324	132	**9**	324	180	**15**	324	140	**21**	324	182	**27**	484	272
4	400	232	**10**	400	175	**16**	400	228	**22**	400	180	**28**	900	401
5	484	210	**11**	484	270	**17**	484	212	**23**	144	56	**29**	400	168
6	900	402	**12**	900	491	**18**	900	489	**24**	256	110	**30**	256	112

Задача 2.89.2. При изготовлении массовой продукции (шарикоподшипники, резисторы и т.д.) p% изделий оказываются высшего сорта. Для текущего контроля за технологическим режимом время от времени отбирают наугад n изделий и проверяют. Среди проверенных оказалось k изделий высшего сорта. Есть ли основания считать, что технологический режим разладился и требует вмешательства в него, или некоторое отклонение от ожидаемого результата можно объяснить случайностями выбора? Сохранятся ли ваши выводы, если при повторном обследовании n издений среди них оказалось $k-2$ первосортных изделия? (См. примеры 2.89.1, 2.89.2 и исходные данные; p — в четных вариантах равно 90, в нечетных вариантах 80.)

Исходные данные к задаче 2.89.2.

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	100	72	**7**	100	69	**13**	144	105	**19**	144	104	**25**	144	105
2	144	121	**8**	144	124	**14**	100	84	**20**	100	80	**26**	100	85
3	121	83	**9**	121	86	**15**	121	85	**21**	121	84	**27**	196	141
4	100	82	**10**	100	83	**16**	144	123	**22**	144	126	**28**	144	127
5	144	102	**11**	144	100	**17**	100	71	**23**	100	73	**29**	196	139
6	121	98	**12**	121	103	**18**	121	100	**24**	121	100	**30**	144	127

2.17. Производящие функции. Преобразование Лапласа. Характеристические функции

2.17.1. Производящие функции

Пусть дискретная случайная величина X имеет закон распределения $P(X=i)=p_i$, $i=0,1,2,\ldots$, т.е. принимает только целые неотрицательные значения. Такого типа закон распределения имеет, например, число требований в очереди для систем массового обслуживания с ожиданием, число выходов из строя некоторого устройства за время эксплуатации, число телефонных звонков на телефон фирмы и т.д.

Функция

$$K(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k \tag{2.17.1}$$

называется *производящей функцией* этого распределения.

Заметим, что $K'(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\, z^{k-1} p_k$ и $K'(1)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\; p_k = M(X).$

Напомним:

1) *Начальным моментом порядка* k называется математическое ожидание k-й степени случайной величины

$$n_k = M(X^k).$$

Само математическое ожидание является начальным моментом первого порядка.

2) *Центральным моментом k-го порядка* называется математическое ожидание k-й степени соответствующей центрированной случайной величины

$$\mu_k = M(\overset{\circ}{X})^k = M[X - M(X)]^k.$$

Дисперсия является центральным моментом второго порядка

$$\mu_2 = M(\overset{\circ}{X})^2 = M[X - M(X)]^2 = D(X).$$

3) *Асимметрией* распределения называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения случайной величины: $A_s = \mu_3 / \sigma^3$.

Если распределение симметрично, то $A_s = 0$. На рис. 2.17.1 слева (в качестве примера закона равпределения с положительной асимметрией) изображен многоугольник распределения для биномиального закона распределения при $n=6$ и $P(A)=p=1/3$. В правой части рис. 2.17.1 приведен пример закона распределения с отрицательной асимметрией (биномиальный закон при $n=6$ и $P(A)=p=3/4$).

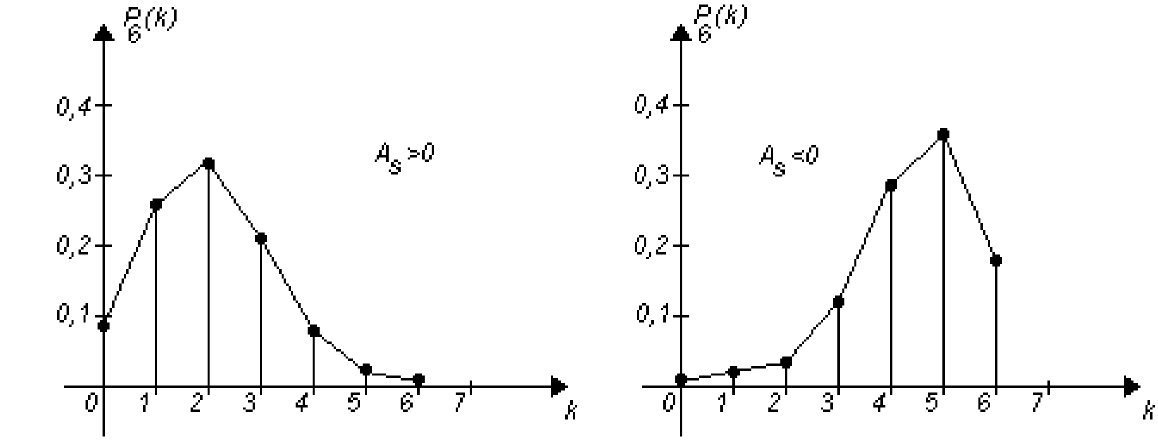


Рис. 2.17.1

4) Для нормального закона распределения $\mu_4 / \sigma^4 = 3$. Безразмерный коэффициент $E_k = \dfrac{\mu^4}{\sigma^4} - 3$ называется *эксцессом*. Этот коэффициент характеризует «островерхость» распределения в сравнении с нормальным законом распределения. Например, если говорить о функциях плотности вероятности, то при $E_k > 0$ график функции плотности вероятности более островерхий, чем график кривой нормального распределения (см. левую часть рис 2.17.2). При $E_k < 0$ график плотности вероятности имеет более плоскую вершину, нежели нормальная кривая при тех же математическом ожидании и дисперсии (см. правую часть рис. 2.17.2).

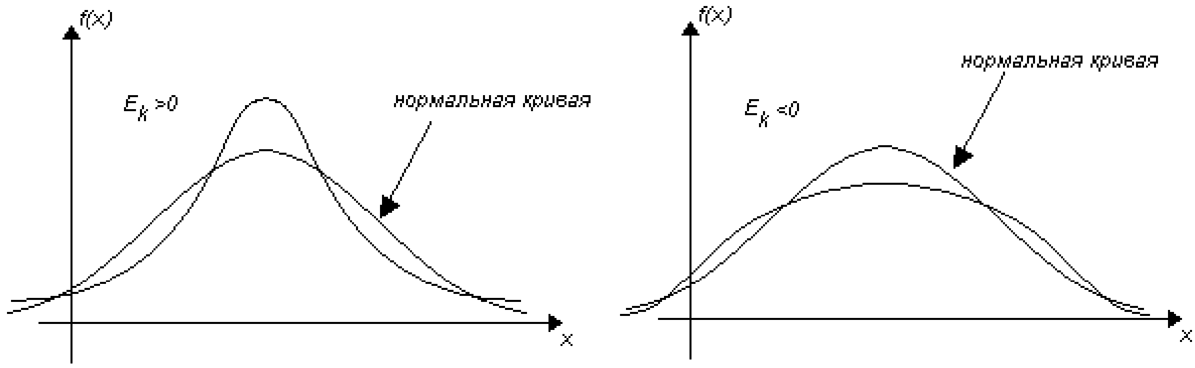


Рис. 2.17.2.

Через производящую функцию можно выразить и другие начальные и центральные моменты случайной величины. Выразим через производящую функцию, например, дисперсию. Так как

$$K''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\,z^{k-2}\,p_k,$$

то

$$K''(1)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2 p_k-\sum_{k=0}^{\infty}k\ p_k=M(X^2)-M(X) \text{ и } M(X^2)=K''(1)+K'(1). \quad (2.17.2)$$

Сформируем в правой части последнего равенства дисперсию. Для этого прибавим и отнимем квадрат математического ожидания:

$$K''(1)=M(X^2)-[M(X)]^2+[M(X)]^2-M(X).$$

Величина $M(X^2)-[M(X)]^2$ равна дисперсии. Поэтому

$$D(X)=K''(1)-[K'(1)]^2+K'(1). \quad (2.17.3)$$

Аналогично

$$K'''(Z)\big|_{z=1}=\sum_{k=0}^{\infty}k\,(k-1)(k-2)\,z^{k-3}\ p_k\Big|_{z=1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k^3 p_k-3\sum_{k=0}^{\infty}k^2 p_k+2\sum_{k=0}^{\infty}kp_k.$$

Итак, при $z=1$ имеем

$$K'''(1)=M(X^3)-3M(X^2)+2M(X),$$

откуда

$$M(X^3)=K'''(1)+3M(X^2)-2M(X),$$

а с учетом (2.17.2)

$$M(X^3)=K'''(1)+3\,[K''(1)+K'(1)]-2K'(1)=K'''(1)+3K''(1)+K'(1). \quad (2.17.4)$$

Пусть $M(X)=m.$ Рассмотрим *модифицированную* производящую функцию

$$\tilde{K}(z)=\frac{1}{z^m}\sum_{k=0}^{\infty}z^k p_k=\sum_{k=0}^{\infty}z^{k-m}p_k.$$

С помощью этой функции можно вычислять сразу центральные моменты случайной величины. Например,

$$\tilde{K}'(z)\big|_{z=1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k-m)z^{k-m-1}p_k\big|_{z=1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k-m)p_k=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k-m\sum_{k=0}^{\infty}p_k=m-m=0;$$

$$\tilde{K}''(z)\big|_{z=1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k-m)(k-m-1)\,z^{k-m-2}p_k\big|_{z=1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k-m)^2 p_k-\sum_{k=0}^{\infty}(k-m)\,p_k=D(X);$$

$$\tilde{K}'''(z)\big|_{z=1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k-m)(k-m-1)(k-m-2)\,z^{k-m-3}p_k\big|_{z=1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k-m)^3 p_k-3\sum_{k=0}^{\infty}(k-m)^2 p_k+\sum_{k=0}^{\infty}(k-m)\,p_k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k-m)^3 p_k-3\sum_{k=0}^{\infty}(k-m)^2 p_k=M(\overset{\circ}{X}{}^3)-3M(\overset{\circ}{X}{}^2),$$

откуда

$$M(\overset{\circ}{X}{}^3)=\tilde{K}'''(z)\big|_{z=1}+3M(\overset{\circ}{X}{}^2)=\tilde{K}'''(1)+3\tilde{K}''(1). \qquad (2.17.5)$$

Пример 2.90.1. Пусть X имеет пуассоновский закон распределения:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \text{где}\ \lambda>0\text{, а}\ k=0,1,2,3,\ldots\ .$$

Требуется найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент асимметрии этой случайной величины.

Решение. Производящая функция пуассоновского распределения имеет вид

$$K(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}z^k=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!}=e^{-\lambda}\,e^{\lambda z}=e^{\lambda(z-1)}.$$

Заметим, что $K'(z)=\lambda\,e^{\lambda(z-1)}$ и $K''(z)=\lambda^2\,e^{\lambda(z-1)}$. Поэтому $M(X)=K'(1)=\lambda$ и, в соответствии с (2.17.3),

$$D(X)=K''(z)-[K'(1)]^2+K'(1)=\lambda^2-\lambda^2+\lambda=\lambda.$$

Для вычисления коэффициента асимметрии составим модифицированную производящую функцию. Так как $M(X)=\lambda$, то

$$\tilde{K}(z)=\frac{1}{z^\lambda}\,e^{\lambda(z-1)}=z^{-\lambda}e^{\lambda(z-1)}=e^{\lambda(z-1)-\lambda\ln z}.$$

Тогда

$$\tilde{K}'(z)=\left(\lambda-\frac{\lambda}{z}\right)e^{\lambda(z-1)-\lambda\ln z};$$

$$\tilde{K}''(z)\big|_{z=1}=\left(\frac{\lambda}{z^z}+\left(\lambda-\frac{\lambda}{z}\right)^2\right)e^{\lambda(z-1)-\lambda\ln z}\big|_{z=1}=\lambda;$$

$$\tilde{K}'''(z)\big|_{z=1}=e^{\lambda(z-1)-\lambda\ln z}\left[-\frac{2\lambda}{z^2}+3\frac{\lambda}{z^2}\left(\lambda-\frac{\lambda}{z}\right)+\left(\lambda-\frac{\lambda}{z}\right)^2\right]\Bigg|_{z=1}=-2\lambda.$$

Поэтому по формуле (2.17.5) имеем

$$M(\overset{\circ}{X}{}^3)=\tilde{K}'''(1)+3\tilde{K}''(1)=-2\lambda+3\lambda=\lambda.$$

В итоге $A_s=\dfrac{\mu_3}{\sigma^3}=\dfrac{\lambda}{\lambda\sqrt{\lambda}}=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}.$

Ответ. $M(X)=\lambda,\ D(X)=\lambda,\ A_s=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}.$

Пример 2.90.2. Пусть X имеет закон распределения

X	0	1	2	3	4	$\dots$	k	$\dots$
P	p^2	$2p^2q$	$3p^2q^2$	$4p^2q^3$	$5p^2q^4$	$\dots$	$(k+1)p^2q^k$	$\dots$

(Это частный случай *отрицательного биномиального распределения* или *распределения Паскаля* с параметрами 2 и p). Требуется найти $M(X)$, $D(X)$ и коэффициент асимметрии A_s.

Решение. Составим производящую функцию

$$K(z) = p^2 + 2p^2qz + 3p^2q^2z^2 + 4p^2q^3z^3 + \dots = p^2(1 + 2qz + 3q^2z^2 + 4q^3z^3 + \dots).$$

Для вычисления суммы ряда в скобке рассмотрим сумму ряда

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots, \tag{2.17.6}$$

который абсолютно сходится при $|x| < 1$. Легко видеть, что нас интересует $S(qz)$. Проинтегрируем почленно ряд (2.17.6) внутри его области сходимости:

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x (1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + \dots)\,dt = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{x}{1-x}.$$

В последней строке мы воспользовались формулой суммы бесконечной убывающей прогрессии:

$$b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots = \frac{b}{1-q}.$$

Отсюда $S(x) = \left(\int_0^x S(t)\,dt\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, а $S(qz) = \frac{1}{(1-qz)^2}$. Откуда

$$K(z) = \frac{p^2}{(1-qz)^2}. \tag{2.17.7}$$

Воспользуемся теперь производящей функцией (2.17.7) для вычисления числовых характеристик случайной величины X:

$$K'(z) = \frac{2p^2q}{(1-qz)^3},\ K'(1) = \frac{2p^2q}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p} = M(X); \tag{2.17.8}$$

$$K''(z) = \frac{6p^2q^2}{(1-qz)^4},\ K''(1) = \frac{6p^2q^2}{(1-q)^4} = \frac{6p^2q^2}{p^4} = \frac{6q^2}{p^2} = M(X^2) - M(X),$$

откуда следует, что

$$M(X^2) = K''(1) + K'(1) = \frac{6q^2}{p^2} + \frac{2q}{p} = \frac{6q^2 + 2pq}{p^2}. \tag{2.17.9}$$

По формуле (2.17.3)

$$D(X) = K''(1) - [K'(1)]^2 + K'(1) = \frac{6q^2}{p^2} - \left(\frac{2q}{p}\right)^2 + \frac{2q}{p} = \frac{2q^2 + 2pq}{p^2}$$

$$=\frac{2q(q+p)}{p^2}=\frac{2q}{p^2},\ \ \sigma(X)=\sqrt{2q}\,/\,p.$$

Далее

$$K'''(Z)=\frac{24p^2q^3}{(1-qz)^5},\ \ K'''(Z)\big|_{z=1}=\frac{24p^2q^3}{(1-q)^5}=\frac{24p^2q^3}{p^5}=\frac{24\,q^3}{p^3}.$$

По формуле (2.17.4) вычисляем

$$M(X^3)=K'''(1)+3K''(1)+K'(1)=\frac{24\,q^3}{p^3}+3\frac{6q^2}{p^2}+\frac{2q}{p}=\frac{24q^3+18p\,q^2+2\,q\,p^2}{p^3}.$$

Так как

$$M(\overset{\circ}{X}{}^3)=M[X-M(X)]^3=M\{X^3-3M(X^2)M(X)+\ 3M(X)[M(X)]^2-$$
$$-[M(X)]^3\}=M(X^3)-3M(X^2)M(X)+2[M(X)]^3,$$

то с учетом (2.17.8) и (2.17.9) имеем

$$\mu_3=M(\overset{\circ}{X}{}^3)=\frac{24q^3+18pq^2+2qp^2}{p^3}-3\frac{6q^2+2pq}{p^2}\cdot\frac{2q}{p}+2\left(\frac{2q}{p}\right)^3=$$
$$=\frac{2q(2q^2+3pq+p^2)}{p^3}=\frac{2q(2-p)}{p^3}.$$

Учитывая это получаем значение коэффициента асимметрии

$$A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\frac{2q(2-p)p^3}{p^3 2q\sqrt{2q}}=\frac{2-p}{\sqrt{2q}}=\frac{1+q}{\sqrt{2q}}.$$

Ответ. $M(X)=\dfrac{2q}{p}$; $D(X)=\dfrac{2q}{p^2}$; $A_s=\dfrac{1+q}{\sqrt{2q}}$.

Задача 2.90.1. В вариантах 1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 21, 23, 25, 27: случайная величина X имеет геометрический закон распределения:

$$P(X=k)=pq^k,\ \text{где}\ p+q=1,\ k=0,1,2,3,\ldots$$

(X — это, например, число независимых опытов до первого появления события, если вероятность появления события в одном опыте равна p, причем опыт, в котором событие появилось, не считается).

В вариантах 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, 22, 24, 26, 28: случайная величина X имеет геометрический закон распределения:

$$P(X=k)=p^kq,\ \text{где}\ p+q=1,\ k=0,1,2,3,\ldots$$

(X — это, например, число независимых опытов до первого непоявления события, если вероятность появления события в одном опыте равна p, причем опыт, в котором событие появилось, не считается).

В вариантах 9, 10, 19, 20, 29, 30: случайная величина X имеет закон распределения:

$$P(X=k)=pq^{k-1},\ \text{где}\ p+q=1,\ k=1,2,3,\ldots$$

(X — это, например, число независимых опытов до первого появления события, если вероятность появления события в одном опыте равна p, причем опыт, в котором событие появилось, считается).

Найдите $M(X)$, $D(X)$ и коэффициент асимметрии A_s.

(См. примеры 2.94, 2.95; $p = 0{,}1n$, где n — последняя цифра номера варианта, а в вариантах 10, 20, 30 n — первая цифра номера варианта.) (См. примеры 2.90.1, 2.90.2.)

Задача 2.90.2. Случайная величина X имеет закон распределения:

$$P(X = k) = \frac{(k+2)p^k q^2}{(2-p)},\ \text{где}\ p + q = 1,\ k = 0,1,2,3,\ldots .$$

С помощью производящей функции найдите $M(X)$ и $D(X)$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)x^k = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$ при $|x|<1$.

(См. примеры 2.94 и 2.95, $p = 0{,}1n$, где n — последняя цифра номера варианта, а в вариантах 10, 20, 30 n — первая цифра номера варианта.) (См. примеры 2.90.1 и 2.90.2.)

2.17.2. Преобразование Лапласа

Для непрерывной и неотрицательной случайной величины роль производящей функции может играть преобразование Лапласа.

Пусть X — непрерывная, неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Тогда

$$\varphi(s) = M(e^{-sX}) = \int_0^{\infty} e^{-sx}dF(x) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx \tag{2.17.10}$$

называется *преобразованием Лапласа* для этого распределения. (Фактически роль величины z в формуле (2.17.1) играет величина e^{-s}. Преимущество такого выбора состоит в том, что $e^{a+b} = e^a e^b$.)

Отметим, что $\varphi'(s) = -\int_0^{\infty} x\, e^{-sx} dF(x)$ и $\varphi''(s) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-sx} dF(x)$. Поэтому

$-\varphi'(0) = \int_0^{\infty} x\,dF(x) = M(X)$, а $\varphi''(0) = \int_0^{\infty} x^2 dF(x) = M(X^2)$ и

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \varphi''(0) - [\varphi'(0)]^2. \tag{2.17.11}$$

Производная любого порядка от преобразования Лапласа связана с начальными моментами случайной величины соотношением

$$\varphi^{(n)}(0) = (-1)^n M(X^n). \tag{2.17.12}$$

Говорят, что случайная величина X имеет *гамма-распределение* с параметрами $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$, если ее функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 \quad \text{при } x < 0, & \end{cases} \qquad (2.17.13)$$

где $\Gamma(a)$ — так называемая гамма-функция Эйлера, которая при целых положительных α принимает значения $\Gamma(a) = (a-1)!$.

Пример 2.91. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \frac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \text{ и } f(x) = 0 \text{ при } x < 0$$

(гамма-распределение с параметрами $\alpha = 3$ и λ). Требуется найти $M(X)$, $D(X)$ и коэффициент асимметрии A_s.

Решение. Соответствующее преобразование Лапласа имеет вид

$$\varphi(s) = \frac{\lambda^3}{2}\int_0^{\infty} e^{-sx} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^3}{2}\int_0^{\infty} x^2 e^{-(s+\lambda)x} dx =$$

(интегрируем по частям)

$$= \left\langle u = x^2,\ du = 2x dx,\ dv = e^{-(\lambda+s)x}dx,\ v = -e^{-(\lambda+s)x}/(\lambda+s) \right\rangle =$$

$$= \frac{\lambda^3}{2}\left(-\frac{x^2}{s+\lambda} e^{-(s+\lambda)x}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{s+\lambda}\int_0^{\infty} x e^{-(s+\lambda)x} dx \right) =$$

(первое слагаемое в скобке равно нулю, так как $e^{-(s+\lambda)x}$ с увеличением x убывает быстрее, чем растет x^2)

$$= \frac{\lambda^3}{s+\lambda}\int_0^{\infty} x e^{-(s+\lambda)x} dx =$$

(интегрируем еще раз по частям)

$$= \left\langle u = x,\ du = dx,\ dv = e^{-(\lambda+s)x}dx,\ v = -e^{-(\lambda+s)x}/(\lambda+s) \right\rangle =$$

$$= \frac{\lambda^3}{s+\lambda}\left(-\frac{x}{s+\lambda} e^{-(s+\lambda)x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s+\lambda}\int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} dx \right) = \frac{\lambda^3}{(s+\lambda)^2}\int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} dx =$$

$$= \frac{\lambda^3}{(s+\lambda)^2}\int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} dx = \frac{\lambda^3}{(s+\lambda)^2}\left(-\frac{1}{s+\lambda} e^{-(s+\lambda)x} \right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{\lambda^3}{(s+\lambda)^3}.$$

Вычислим начальные моменты распределения:

$$\varphi(s) = \frac{-3\lambda^3}{(s+\lambda)^4}, \qquad -\varphi(0) = \frac{3}{\lambda} = M(X);$$

$$\varphi''(s)=\frac{12\,\lambda^3}{(s+\lambda)^5},\qquad \varphi''(0)=\frac{12}{\lambda^2}=M(X^2),$$

поэтому

$$D(X)=\frac{12}{\lambda^2}-\left(\frac{3}{\lambda}\right)^2=\frac{3}{\lambda^2},\quad \text{а }\ \sigma(x)=\frac{\sqrt{3}}{\lambda}.$$

Далее

$$\varphi'''(s)=-\frac{60\,\lambda^3}{(s+\lambda)^6},\qquad -\varphi'''(0)=\frac{60}{\lambda^3}=M(X^3).$$

Вычислим центральный момент третьего порядка:

$$\mu_3=M(\overset{\circ}{X})^3=M[X-M(X)]^3=M\{X^3-3X^2M(X)+3X[M(X)]^2-[M(X)]^3\}=$$
$$=M(X^3)-3M(X^2)M(X)+3M(X)[M(X)]^2-[M(X)]^3=$$
$$=M(X^3)-3M(X^2)M(X)+2\,[M(X)]^3=\frac{60}{\lambda^3}-3\frac{12}{\lambda^2}\cdot\frac{3}{\lambda}+2\left(\frac{3}{\lambda}\right)^3=\frac{6}{\lambda^3}.$$

Поэтому

$$A_s=\mu_3/\sigma^3=(6/\lambda^3):(\sqrt{3}\cdot 1/\lambda)^3=2\sqrt{3}/3.$$

Ответ. $M(X)=\dfrac{3}{\lambda}$; $D(X)=\dfrac{3}{\lambda^2}$; $A_s=2\sqrt{3}/3$.

Задача 2.91. Случайная величина X имеет гамма-распределение с функцией плотности вероятности (2.17.9). Найдите $M(X)$, $D(X)$ и коэффициент асимметрии A_s. В нечетных вариантах $\alpha=2$, в четных $\alpha=1$. (См. пример 2.91 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 2.91.

№	λ	№	λ	№	λ	№	λ	№	λ	№	λ
1	1/2	**6**	1	**11**	3/4	**16**	3	**21**	2	**26**	2/9
2	1/3	**7**	1/3	**12**	1/5	**17**	1/10	**22**	1/8	**27**	5
3	1/5	**8**	2	**13**	2/5	**18**	4	**23**	3	**28**	1/9
4	2/3	**9**	2/3	**14**	1/4	**19**	1	**24**	2/5	**29**	6
5	1/4	**10**	1/2	**15**	1/8	**20**	5	**25**	4	**30**	1/10

Пусть $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ — последовательность независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с преобразованием Лапласа

$$\varphi_x(s)=M(e^{-sX})=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x),$$

и пусть N — неотрицательная целочисленная случайная величина, независящая от величин X_i, и имеющая производящую функцию

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n = M(z^N).$$

Найдем преобразование Лапласа от величины $W = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$. По определению

$$\varphi_w(s) = M(e^{-sW}) = M[M(e^{-s(X_1+X_2+\ldots+X_n)} / N = n)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(s) P(N = n) = g[\varphi(z)]. \qquad (2.17.14)$$

Пример 2.92. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с функцией плотности вероятности $f(x) = \mu \exp(-\mu x)$, $\mu > 0$, $x \geq 0$. И пусть N — неотрицательная целочисленная случайная величина, независящая от величин X_i, и имеющая пуассоновский закон распределения с параметром λ. Для случайной величины $W = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ требуется найти $M(W)$ и $D(W)$.

Решение. Производящая функция пуассоновского закона распределения равна

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^n}{n!} = e^{\lambda(z-1)}.$$

Преобразование Лапласа показательного распределения равно

$$\varphi_x(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \mu e^{-\mu x} dx = \frac{\mu}{s+\mu}.$$

Поэтому по формуле (2.17.14) имеем

$$\varphi_w(s) = g[\varphi(z)] = \exp\left[\lambda\left(\frac{\mu}{s+\mu} - 1\right)\right] = \exp\left(-\frac{\lambda s}{s+\mu}\right).$$

Так как $\varphi'_w(s) = \exp\left(-\frac{\lambda s}{s+\mu}\right)\left(\frac{-\lambda\mu}{(s+\mu)^2}\right)$, а

$$\varphi''_w(s) = \exp\left(-\frac{\lambda s}{s+\mu}\right)\left(\frac{\lambda^2\mu^2}{(s+\mu)^4} + \frac{2\lambda\mu}{(s+\mu)^3}\right),$$

то

$$M(W) = -\varphi'_w(0) = \lambda/\mu \text{ и } D(W) = \varphi''_w(s) - [\varphi'_w(0)]^2 = \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} + \frac{2\lambda}{\mu^2}\right) - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 = \frac{2\lambda}{\mu^2}.$$

Ответ. $M(W) = \dfrac{\lambda}{\mu}$, $D(W) = \dfrac{2\lambda}{\mu^2}$.

Задача 2.92. Размеры выплат страховой компании образуют последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин с функцией плотности вероятности

$$f(x) = a^2 x \exp(-ax), \quad a > 0,\ x \ge 0.$$

Пусть N — число таких выплат имеет распределение Пуассона с параметром λ. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы этих выплат. (См. пример 2.92, a — номер варианта.)

2.17.3. Характеристические функции

Замена z на e^{-s} в определении производящей функции позволила рассматривать непрерывные неотрицательные величины. Выгода от такой замены состоит в мультипликативном свойстве: $e^{-s(x+y)} = e^{-sx}e^{-sy}$. Таким же свойством обладает и показательная функция чисто мнимого аргумента, которая для действительных x определяется равенством:

$$e^{ixz} = \cos(xz) + i\sin(xz).$$

Характеристической функцией $\varphi(z)$ случайной величины X называется комплексно-значная функция, определенная при $z \in R$ соотношением

$$\varphi(z) = M(e^{izX}) = M[\cos(zX) + i\sin(zX)].$$

Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины X, то

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x). \qquad (2.17.15)$$

Существование интеграла, определяющего характеристическую функцию, вытекает из непрерывности функции e^{izx} и ее ограниченности: $|e^{izx}| \le 1$. Для дискретной случайной величины X с возможными значениями x_k и их вероятностями p_k запись (2.17.15) расшифровывается как

$$\varphi(z) = \sum_k e^{ix_k z} p_k. \qquad (2.17.16)$$

Для непрерывной случайной величины X с функцией плотности вероятности $f(x)$

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f(x)\, dx. \qquad (2.17.17)$$

Пример 2.93.1. Пусть случайная величина X имеет пуассоновский закон распределения, т.е. $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\ldots$. Тогда по формуле (2.17.11)

$$\varphi(z) = M(e^{izk}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{izk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{iz})^k}{k!} = \exp\{\lambda(e^{iz} - 1)\}. \qquad (2.17.18)$$

Пример 2.93.2. Пусть $X \sim N(0,1)$. Тогда в соответствии с формулой (2.17.12)

$$\varphi(z) = M(e^{izk}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(izx)\exp(-x^2/2)\,dx.$$

Вместо непосредственного вычисления интеграла, которое требует специальной математической техники, найдем его величину косвенным способом. Заметим, что

$$\varphi'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ix \exp(izx - x^2/2)\,dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(izx)\, d\{\exp(-x^2/2)\}.$$

Полученный интеграл берем по частям, полагая $u = \exp(izx)$ и $dv = d\{\exp(-x^2/2)\}$:

$$\varphi'(z) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \exp(izx)\exp(-x^2/2)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(izx - x^2/2)\,dx = -z\varphi(z),$$

(первое слагаемое равно нулю так как $|\exp(izx)| \le 1$, а $\exp(-\infty) = 0$).

В итоге для искомой характеристической функции получаем уравнение, которое при начальном условии $\varphi(0) = 1$ имеет решение

$$\varphi(z) = \exp(-z^2/2). \qquad (2.17.19)$$

Подобным же образом можно показать, что закон распределения $N(m;\sigma^2)$ имеет характеристическую функцию

$$\varphi(z) = \exp(imz - z^2\sigma^2/2). \qquad (2.17.20)$$

Свойства характеристических функций.

1. $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(z)| \le 1$ для всех вещественных z.

2. Если существует $M(X^n)$ — момент порядка n, то функция $\varphi(z)$ имеет n непрерывных производных и

$$\varphi^{(n)}(0) = i^n M(X^n).$$

3. Пусть $Y = aX + b$, где a и b — постоянные величины, а X имеет характеристическую функцию φ (z). Тогда характеристическая функция случайной величины Y имеет вид

$$\psi(z) = M(e^{izY}) = M(e^{iz(aX+b)}) = e^{izb}M(e^{iazX}) = e^{izb}\varphi(az).$$

4. Характеристическая функция однозначно определяет распределение случайной величины.

5. Если X_1 и X_2 — независимые случайные величины, а $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — их характеристические функции, то характеристическая функция суммы $Y = X_1 + X_2$ равна произведению характеристических функций слагаемых:

$$\psi(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z).$$

Это следует из того, что в силу независимости слагаемых

$$\psi(z) = M\{\exp[iz(X_1 + X_2)]\} = M\{\exp(izX_1)\exp(izX_2)\}$$
$$= M\{\exp(izX_1)\}M\{\exp(izX_2)\} = \varphi_1(z)\varphi_2(z).$$

Можно показать, что для любого конечного числа независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ характеристическая функция их суммы $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ равна произведению характеристических функций слагаемых.

Пример 2.93.3. Случайные величины X и Y независимы и имеют пуассоновские законы распределения с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно: $P(X = k) = \dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}$, $P(Y = k) = \dfrac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Требуется найти закон распределения случайной величины $X + Y$.

Решение. Согласно формуле (2.17.18) характеристические функции случайных величин X и Y имеют вид:

$$\varphi_1(z) = M(e^{izX}) = \exp[\lambda_1(e^{iz} - 1)] \quad \text{и} \quad \varphi_2(z) = M(e^{izY}) = \exp[\lambda_2(e^{iz} - 1)].$$

Сумме независимых случайных величин соответствует произведение характеристических функций слагаемых. Поэтому $X + Y$ имеет характеристическую функцию

$$\exp[\lambda_1(e^{iz} - 1)]\exp[\lambda_2(e^{iz} - 1)] = \exp[(\lambda_1 + \lambda_2)(e^{iz} - 1)].$$

Ответ. $X + Y$ имеет пуассоновский закон распределения с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

Полученный результат известен как факт *устойчивости пуассоновского закона распределения.* Этот результат можно обобщить на сумму любого конечного числа пуассоновских случайных величин.

Теорема. *Если случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют соответственно нормальные законы распределения $N(m_1;\sigma_1^2)$ и $N(m_2;\sigma_2^2)$, то их сумма $X_1 + X_2$* имеет тоже нормальный закон распределения

$$N(m_1 + m_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Доказательство. Пусть $X_1 \sim N(m_1;\sigma_1^2)$ и $X_2 \sim N(m_2;\sigma_2^2)$. Их характеристические функции в соответствии с формулой (2.17.15) имеют вид

$$\varphi_1(z) = \exp(im_1 z - \sigma_1^2 z^2 / 2) \quad \text{и} \quad \varphi_2(z) = \exp(im_2 z - \sigma_2^2 z^2 / 2).$$

Тогда характеристическая функция суммы $X_1 + X_2$:

$$\psi(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z) = \exp(im_1 z - \sigma_1^2 z^2 / 2)\exp(im_2 z - \sigma_2^2 z^2 / 2) =$$
$$= \exp\{i(m_1 + m_2)z - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)z^2 / 2\}.$$
А это и означает, что $X_1 + X_2 \sim N(m_1 + m_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Задача 2.93. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности: в вариантах 1, 6, 11, 16, 21, 26 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ (закон распределения Лапласа или двойное экспоненциальное распределение); в вариантах 2, 7, 12, 17, 22, 27 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (закон распределения Коши); в вариантах 3, 8, 13, 18, 23, 28 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$ (показательный закон распределения). Дискретная случайная величина имеет распределение: в вариантах 4, 9, 14, 19, 24, 29 $P(X = k) = pq^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (геометрический закон распределения); в вариантах 5, 10, 15, 20. 25, 30 $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (биномиальный закон распределения).

Найдите характеристическую функцию случайной величины X и характеристическую функцию случайной величины $Y = aX + b$, где a и b — постоянные. (В вариантах с 1 по 9 величины a и b — номер варианта, в вариантах с 11 по 30 a — первая цифра номера варианта, b — последняя цифра номера варианта.) (См. примеры 2.93.1, 2.93.2, 2.93.3.)

Пример 2.94. Случайная величина X_i имеет закон распределения.

X_i	–5	0	5
P	0,25	0,5	0,25

Требуется найти характеристическую функцию этой случайной величины. Используя свойства характеристических функций, найти характеристическую функцию случайной величины $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, полагая слагаемые независимыми. Используя запись характеристической функции, найти $M(Y)$ и $D(Y)$.

Решение. По формуле (2.17.16)
$$\varphi_x(z) = e^{-5iz} \cdot 0,25 + e^{0iz} \cdot 0,5 + e^{5iz} \cdot 0,25 = 0,5[1 + (e^{5iz} + e^{-5iz}) / 2] = (1 + \cos 5z) / 2.$$
Поэтому характеристическая функция случайной величины Y имеет вид
$$\varphi_Y(z) = (1 + \cos 5z)^n / 2^n.$$
Для вычисления $M(Y)$ находим
$$\frac{d\varphi_Y(z)}{dz} = n(1 + \cos 5z)^{n-1}(-\sin 5z)\, 5 / 2^n.$$

Последнее выражение при $z=0$ равно нулю. По свойству 2 это означает, что $M(Y)=0.$ Так как вторая производная характеристической функции по z равна

$$\frac{d^2\varphi_Y(z)}{dz^2}=-\frac{5n}{2^n}\Big((n-1)(1+\cos 5z)^{n-2}(-\sin 5z)^2+(1+\cos 5z)^{n-1}\cos 5z\cdot 5\Big).$$

при $z=0$ равна $-25n/2=(i)^2 25n/2$, то из свойства 2 следует, что $M(Y^2)=25n/2.$ Поэтому

$$D(Y)=M(Y^2)-[M(Y)\ ]^2=25n/2.$$

Ответ. $\varphi_Y(z)=(1+\cos 5z)^n/2^n$, $M(Y)=0$, $D(Y)=25n/2.$

Задача 2.94. Производятся независимые опыты, в каждом из которых $P(A)=p$, а $P(\overline{A})=1-p=q.$ Пусть J_i — индикатор появления события A в i-м опыте, т.е. J_i имеет закон распределения:

J_i	0	1
P	q	p

Пусть требуется найти характеристическую функцию случайной величины X, которая равна числу появлений события A в n независимых опытах. Найдите характеристическую функцию случайной величины J_i. Используя ее свойства, найдите характеристическую функцию случайной величины X (X можно представить в виде суммы индикаторов, т.е. $X=J_1+J_2+J_3+\ldots+J_n$. С помощью характеристической функции найдите $M(X)$ и $D(X)$. (См. пример 2.94, n — номер варианта плюс 3.)

Пример 2.95. Требуется найти характеристическую функцию случайной величины $Y=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2$, где все X_i имеют закон распределения $N(0,1)$ независимы в совокупности. С помощью характеристической функции найти $M(Y)$ и $D(Y)$.

Решение. Найдем сначала характеристическую функцию для X_i^2. В соответствии с формулой (2.17.7)

$$\varphi(z)=Me^{iX^2z}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix^2z}e^{-x^2/2}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(iz-1/2)x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(1-2iz)x^2/2}dx.$$

После замены переменных $\sqrt{1-2iz}\,x=t$, $dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-2iz}}$ получаем

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{1-2iz}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=(1-2iz)^{-1/2},$$

так как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}dt = 1$. Из свойства 5 характеристических функций следует, что случайная величина $Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ имеет характеристическую функцию

$$\varphi_Y(z) = (1-2iz)^{-n/2}.$$

Для вычисления числовых характеристик случайной величины Y найдем сначала перевую и вторую производные характеристической функции при $z = 0$:

$$\varphi_Y'(z) = in(1-2iz)^{-\frac{n}{2}-1}\Big|_{z=0} = in,$$

$$\varphi_Y''(z) = i^2 n(n+2)(1-2iz)^{-\frac{n}{2}-2}\Big|_{z=0} = i^2(n^2+n).$$

Это означает, что $M(Y) = n$, $D(Y) = 2n$.

Ответ. $\varphi_Y(z) = (1-2iz)^{-n/2}$, $M(Y) = n$, $D(Y) = 2n$

Задача 2.95.1. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(0,\sigma^2)$. Найдите характеристическую функцию этой случайной величины. Найдите характеристическую функцию случайной величины $Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$, где все X_i имеют закон распределения $N(0,\sigma^2)$ и независимы в совокупности. По характеристической функции случайной величины Y найдите ее математическое ожидание и дисперсию. (См. пример 2.95, σ^2 — номер варианта плюс один.)

Задача 2.95.2. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности $f(x) = \lambda\exp(n-\lambda x)$ при $x \geq n$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$. Найдите характеристическую функцию этой случайной величины. С помощью характеристической функции найдите $M(X)$ и $D(X)$. (См. пример 2.95, n — номер варианта в нечетных вариантах и номер варианта со знаком минус в четных вариантах.)

Пример 2.96. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}\exp\{-\lambda|x|\}, \quad \text{где } \lambda > 0. \qquad (2.17.21)$$

Требуется найти характеристическую функцию этой случайной величины и ее $M(X)$ и $D(X)$. Требуется также найти характеристическую функцию случайной величины $Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$, где величины X_i независимы и имеют распределение (2.17.21).

Решение. Найдем сначала характеристическую функцию:

$$\varphi_X(z) = M(e^{iX^2 z}) = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixz} e^{-\lambda|x|}\,dx =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{ixz} e^{\lambda x} dx + \frac{\lambda}{2}\int_{0}^{\infty} e^{ixz} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda + iz}\, e^{ixz} e^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{0}\right) + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{iz - \lambda}\, e^{ixz} e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}\right) =$$

(так как $|e^{ixz}| \le 1$, то равенство можно продолжить следующим образом)

$$= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda + iz} - 0\right) + \frac{\lambda}{2}\left(0 - \frac{1}{iz - \lambda}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda + iz} + \frac{1}{\lambda - iz}\right) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + z^2}.$$

Тогда $\varphi'_X(z) = -\dfrac{2\lambda^2 z}{(\lambda^2 + z^2)^2}$, $\varphi''_X(z) = \dfrac{6\lambda^2 z^2 - 2\lambda 4}{(\lambda^2 + z^2)^3}$. Откуда $\varphi'_X(0) = 0 = iM(X)$, $\varphi''_X(0) = \dfrac{-2}{\lambda^w} = i^2 \dfrac{2}{\lambda^2} = i^2 M(X^2)$, поэтому $D(X) = 2/\lambda^2$.

Характеристическая функция случайной величины $Y = X_1^2 + X_2^2 + {}$ $+ \ldots + X_n^2$ имеет вид:

$$[\varphi_X(z)]^n = \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + z^2}\right)^n = \left(1 + \frac{z^2}{\lambda^2}\right)^{-n}.$$

Ответ. $\varphi_X(z) = \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2 + z^2}$, $M(X) = 0$, $D(X) = 2/\lambda^2$,

$$\varphi_Y(z) = \left(1 + \frac{z^2}{\lambda^2}\right)^{-n}.$$

Задача 2.96. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}\exp\{-\lambda|x - a|\}, \text{ где } \lambda > 0,\ a \in (-\infty, \infty). \qquad (2.17.22)$$

Найдите характеристическую функцию этой случайной величины, ее $M(X)$ и $D(X)$. Найдите также характеристическую функцию случайной величины $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, где величины X_i независимы и имеют распределение (17.22). (См. пример 2.96, a — номер варианта.)

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3.1. Точечные оценки

3.1.1. Свойства оценок

Пусть случайная величина имеет неизвестную характеристику a. Такой характеристикой может быть, например, закон распределения, математическое ожидание, дисперсия, параметр закона распределения, вероятность определенного значения случайной величины и т.д. Пронаблюдаем случайную величину n раз и получим выборку из ее возможных значений $X_1, X_2, \ldots, X_n$. В выборке скрыта информация об интересующей нас характеристике. Для получения этой информации необходимо подвергнуть результаты наблюдений соответствующей обработке.

Существует два подхода к решению этой задачи. Можно по результатам наблюдений вычислить приближенное значение характеристики, а можно указать целый интервал ее значений, согласующихся с опытными данными. В первом случае говорят о точечной оценке, во втором — об интервальной.

Определение. Функция результатов наблюдений $\tilde{a} = \tilde{a}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, значения которой близки к неизвестному значению характеристики a, называется *точечной оценкой* этой характеристики.

Для одной и той же характеристики можно предложить разные точечные оценки. Необходимо иметь критерии сравнения оценок, для суждения об их качестве. Оценка $\tilde{a}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, как функция случайных результатов наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$, сама является случайной величиной. Значения $\tilde{a}$, найденные по разным сериям наблюдений, могут отличаться от истинного значения характеристики a в ту или другую сторону. Естественно потребовать, чтобы оценка систематически не завышала и не занижала оцениваемое значение, а с ростом числа наблюдений становилась более точной. Формализация названных требований приводит к следующим понятиям.

Определение. Оценка называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемой величине: $M(\tilde{a}) = a$. В противном случае оценку называют смещенной.

Определение. Оценка называется *состоятельной*, если при увеличении числа наблюдений она сходится по вероятности к оцениваемой величине, т.е. для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$P(|\,\tilde{a}(X_1, X_2, \ldots, X_n) - a\,| < \varepsilon) \xrightarrow{n \to \infty} 1.$$

Если известно, что оценка $\tilde{a}$ несмещенная, то для ее состоятельности достаточно, чтобы

$$D(\tilde{a}(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Последнее условие удобно для проверки.

В качестве меры разброса значений оценки $\tilde{a}$ относительно a можно рассматривать величину $M(\tilde{a}-a)^2$. Из двух оценок предпочтительней та, для которой эта величина меньше. Если оценка имеет наименьшую меру разброса среди всех оценок характеристики, построенных по n наблюдениям, то оценку называют *эффективной.*

Следует отметить, что несмещенность и состоятельность являются желательными свойствами оценок, но не всегда разумно требовать наличия этих свойств у оценки. Например, может оказаться предпочтительней оценка хотя и обладающая небольшим смещением, но имеющая значительно меньший разброс значений, нежели несмещенная оценка. Более того, есть характеристики, для которых нет одновременно несмещенных и состоятельных оценок.

3.1.2. Оценки для математического ожидания и дисперсии

Пусть случайная величина имеет неизвестные математическое ожидание и дисперсию, причем $D(X) < \infty$. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты n независимых наблюдений случайной величины, то в качестве оценки для математического ожидания можно предложить среднее арифметическое наблюдаемых значений

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n. \tag{3.1.1}$$

Несмещенность такой оценки следует из равенств

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n} = \frac{nM(X)}{n} = M(X).$$

В силу независимости наблюдений

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{n\,D(X)}{n^2} = \frac{D(X)}{n}. \tag{3.1.2}$$

При условии $D(X) < \infty$ имеем $D(\bar{X}) = \dfrac{D(X)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, что означает состоятельность оценки $\bar{X}$.

Доказано, что для математического ожидания нормально распределенной случайной величины оценка $\bar{X}$ еще и эффективна.

Оценка математического ожидания посредством среднего арифметического наблюдаемых значений наводит на мысль предложить в качестве оценки для дисперсии величину

$$\tilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Преобразуем величину $\tilde{D}$, обозначая для краткости $M(X)$ через m:

$$\tilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i - m - (\bar{X} - m)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - \frac{2}{n}(\bar{X} - m)\sum_{i=1}^{n}(X_i - m) + \frac{n(\bar{X} - m)^2}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - (\bar{X} - m)^2.$$

В силу (3.1.2) имеем $M(\bar{X} - m)^2 = D(\bar{X}) = \frac{1}{n}D(X)$. Поэтому

$$M(\tilde{D}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i - m)^2 - \frac{D(X)}{n} = D(X) - \frac{D(X)}{n} = \frac{n-1}{n}D(X).$$

Последняя запись означает, что оценка $\tilde{D}$ имеет смещение. Она систематически занижает истинное значение дисперсии. Для получения несмещенной оценки введем поправку в виде множителя $\frac{n}{n-1}$ и полученную оценку обозначим через s^2:

$$\frac{n}{n-1}\tilde{D} = \frac{n}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = s^2.$$

Величина

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \qquad (3.1.3)$$

является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии.

Пример 3.1. Оценить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X по результатам ее независимых наблюдений: 7, 3, 4, 8, 4, 6, 3.

Решение. По формулам (3.1.1) и (3.1.3) имеем

$$M(X) \approx \bar{X} = \frac{7+3+4+8+4+6+3}{7} = 5;$$

$$D(X) \approx s^2 = \frac{(7-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + \ldots + (3-5)^2}{6} = \frac{25}{6} \approx 4{,}17.$$

Ответ. $M(X) \approx 5$; $D(X) \approx 4{,}17$.

Задача 3.1. Оцените математическое ожидание и дисперсию случайной величины X по результатам ее независимых наблюдений. (См. пример 3.1; в качестве исходных данных возьмите данные к задаче 3.22.)

Пример 3.2. Данные 25 независимых наблюдений случайной величины представлены в сгруппированном виде:

Границы интервалов	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15
Число наблюдений	2	4	9	7	3

Требуется оценить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Представителем каждого интервала можно считать его середину. С учетом этого формулы (3.1.1) и (3.1.3) дают следующие оценки:

$$M(X) \approx \overline{X} = \frac{6\cdot 2 + 8\cdot 4 + 10\cdot 9 + 12\cdot 7 + 14\cdot 3}{25} = \frac{260}{25} = 10{,}4;$$

$$D(X) \approx s^2 = \frac{(6-10{,}4)^2\cdot 2 + (8-10{,}4)^2\cdot 4 + \ldots + (14-10{,}4)^2 3}{24} = \frac{120}{24} = 5.$$

Ответ. $M(X) \approx 10{,}5$; $D(X) \approx 5$.

Задача 3.2. По сгруппированным данным результатов наблюдений случайной величины оцените математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. (См. пример 3.2; в качестве исходных данных возьмите данные к задаче 3.12.)

3.1.3. Метод наибольшего правдоподобия для оценки параметров распределений

В теории вероятностей и ее приложениях часто приходится иметь дело с законами распределения, которые определяются некоторыми параметрами. В качестве примера можно назвать нормальный закон распределения $N(m, \sigma^2)$. Его параметры m и σ^2 имеют смысл математического ожидания и дисперсии соответственно. Их можно оценить с помощью $\overline{X}$ и s^2. В общем случае параметры законов распределения не всегда напрямую связаны со значениями числовых характеристик. Поэтому практический интерес представляет следующая задача.

Пусть случайная величина X имеет функцию распределения $F(x,\theta)$, причем тип функции распределения F известен, но неизвестно значение параметра θ. По данным результатов наблюдений нужно оценить значение параметра. Параметр может быть и многомерным.

Продемонстрируем идею метода наибольшего правдоподобия на упрощенном примере. Пусть по результатам наблюдений, отмеченных на рис. 3.1.1 звездочками, нужно отдать предпочтение одной из двух функций плотности вероятности $f(x,\theta_1)$ или $f(x,\theta_2)$.

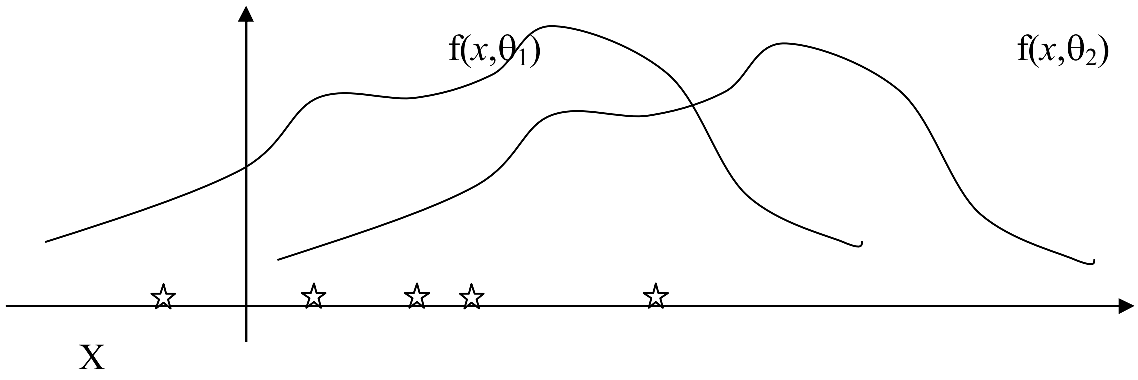


Рис. 3.1.1

Из рисунка видно, что при значении параметра θ_2 такие результаты наблюдений маловероятны и вряд ли бы реализовались. При значении же θ_1 эти результаты наблюдений вполне возможны. Поэтому значение параметра θ_1 более правдоподобно, чем значение θ_2. Такая аргументация позволяет сформулировать принцип наибольшего правдоподобия: *в качестве оценки параметра выбирается то его значение, при котором данные результаты наблюдений наиболее вероятны.*

Этот принцип приводит к следующему способу действий. Пусть закон распределения случайной величины X зависит от неизвестного значения параметра θ. Обозначим через $P(x,\theta)$ для непрерывной случайной величины плотность вероятности в точке x, а для дискретной случайной величины — вероятность того, что $X = x$. Если в n независимых наблюдениях реализовались значения случайной величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то выражение

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta) = P(X_1,\theta) P(X_2,\theta) \cdot \ldots \cdot P(X_n,\theta) \tag{3.1.4}$$

называют *функцией правдоподобия*. Величина L зависит только от параметра θ при фиксированных результатах наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$. При каждом значении параметра θ функция L равна вероятности именно тех значений дискретной случайной величины, которые получены в процессе наблюдений. Для непрерывной случайной величины L равна плотности вероятности в точке выборочного пространства $\vec{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Сформулированный принцип предлагает в качестве оценки значения параметра выбрать такое $\theta = \tilde{\theta}$ при котором L принимает наибольшее значение. Величина $\tilde{\theta}$, будучи функцией от результатов наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$, называется *оценкой наибольшего правдоподобия.*

Во многих случаях, когда L дифференцируема, оценка наибольшего правдоподобия находится как решение уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \tag{3.1.5}$$

которое следует из необходимого условия экстремума. Поскольку $\ln L$ достигает максимума при том же значении θ, что и L, то можно решать относительно θ эквивалентное уравнение

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0. \tag{3.1.6}$$

Это уравнение называют *уравнением правдоподобия.* Им пользоваться удобнее, чем уравнением (3.1.5), так как функция L равна произведению, а $\ln L$ — сумме, а дифференцировать $\ln L$ проще.

Если параметров несколько (многомерный параметр), то следует взять частные производные от функции правдоподобия по всем параметрам, приравнять частные производные нулю и решить полученную систему уравнений.

Оценку, получаемую в результате поиска максимума функции правдоподобия, называют еще оценкой *максимального правдоподобия.* Известно, что оценки максимального правдоподобия состоятельны. Кроме того, если для θ существует эффективная оценка, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение, совпадающее с этой оценкой. Оценка максимального правдоподобия может оказаться смещенной.

3.1.4. Метод моментов

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени этой величины, т.е. $M(X^k)$. Само математическое ожидание считается начальным моментом первого порядка.

Центральным моментом k-го порядка называется $M[X - M(X)]^k$. Очевидно, что дисперсия — это центральный момент второго порядка. Если закон распределения случайной величины зависит от некоторых параметров, то от этих параметров зависят и моменты случайной величины.

Для оценки параметров распределения по методу моментов находят на основе опытных данных оценки моментов в количестве, равном числу оцениваемых параметров. Эти оценки приравнивают к соответствующим теоретическим моментам, величины которых выражены через параметры. Из полученной системы уравнений можно определить искомые оценки.

Например, если X имеет плотность распределения $f(x,\theta)$, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,\theta)\,dx = \varphi(\theta).$$

Если воспользоваться величиной $\overline{X}$ как оценкой для $M(X)$ на основе опытных данных, то оценкой θ по методу моментов будет решение уравнения $\varphi(\theta) = \overline{X}$.

Пример 3.3.1. Найти оценку параметра показательного закона распределения по методу моментов.

Решение. Плотность вероятности показательного закона распределения имеет вид $f(x,\lambda) = \lambda\exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$. Поэтому $M(X) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx =$

$= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \dfrac{1}{\lambda}$ и $\dfrac{1}{\lambda} = \overline{X}$. Откуда $\lambda = \dfrac{1}{\overline{X}}$.

Ответ. $\lambda = \dfrac{1}{\overline{X}}$.

Пример 3.3.2. Пусть имеется простейший поток событий неизвестной интенсивности λ. Для оценки параметра λ проведено наблюдение потока и зарегистрированы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — длительности n последовательных интервалов времени между моментами наступления событий. Найти оценку для λ.

Решение. В простейшем потоке интервалы времени между последовательными моментами наступления событий потока имеют показательный закон распределения $F(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$, $x \geq 0$. Так как плотность вероятности показательного закона распределения равна $f(x,\lambda) = F'(x,\lambda) = \lambda\exp\{-\lambda x\}$, то функция правдоподобия (3.1.4) имеет вид

$$L = f(X_1,\lambda)f(X_2,\lambda)f(X_3,\lambda)\cdot\ldots\cdot f(X_n,\lambda) =$$
$$= \lambda\exp\{-\lambda X_1\}\cdot\lambda\exp\{-\lambda X_2\}\cdot\ldots\cdot\lambda\exp\{-\lambda X_n\} = \lambda^n\exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i\right\}.$$

Тогда $\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$ и уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \text{ имеет решение } \tilde{\lambda} \quad \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \quad \frac{1}{\overline{X}}. \; =$$

При таком значении $\lambda = \tilde{\lambda}$ функция правдоподобия действительно достигает наибольшего значения, так как $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$.

Ответ. $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$.

Определение. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты n независимых наблюдений случайной величины X. Если расставить эти результаты в порядке возрастания, то получится последовательность значений, которую называют *вариационным рядом* и обозначают:

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}.$$

В этой записи $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Величины $X_{(k)}$ называют *порядковыми статистиками.*

Пример 3.3.3. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[\theta - b; \theta + b]$, где θ и b неизвестны. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты n независимых наблюдений. Найти оценку параметра θ.

Решение. Функция плотности вероятности величины X имеет вид

$$f(x, b, \theta) = \begin{cases} 1/2b \text{ при } x \in [\theta - b; \theta + b], \\ 0 \text{ при остальных } x. \end{cases}$$

В этом случае функция правдоподобия $L = [1/2b]^n$ от θ явно не зависит. Дифференцировать по θ такую функцию нельзя и нет возможности записать уравнение правдоподобия. Однако легко видеть, что L возрастает при уменьшении b. Все результаты наблюдений лежат в $[\theta - b; \theta + b]$, поэтому можно записать:

$$\theta - b \le X_{(1)}, \quad X_{(n)} \le \theta + b,$$

где $X_{(1)}$ — наименьший, а $X_{(n)}$ — наибольший из результатов наблюдений. При минимально возможном b

$$\theta = \cancel{b} \quad X_{(1)}, \quad X_{(n)} \quad \theta + b,$$

откуда $\theta - b + \theta + b \quad \cancel{X}_{(1)} + X_{(n)}$ или $2\theta \quad X_{\overline{(1)}} + X_{(n)}$.

Оценкой наибольшего правдоподобия для параметра θ будет величина

$$\tilde{\theta} = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}.$$

Ответ. $\tilde{\theta} = \dfrac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}.$

Пример 3.3.4. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x < 0, \\ x^2 / a^2 \quad \text{при } x \in [0, a], \\ 1 \quad \text{при } x > a, \end{cases}$$

где $a > 0$ неизвестный параметр.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты n независимых наблюдений случайной величины X. Требуется найти оценку наибольшего правдоподобия для параметра a и найти оценку для $M(X)$.

Решение. Для построения функции правдоподобия найдем сначала функцию плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 2x / a^2 \quad \text{при } x \in [0, a], \\ 0 \quad \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Тогда функция правдоподобия:

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_n, a) = \frac{2X_1}{a^2} \cdot \frac{2X_2}{a^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2X_n}{a^2} = \frac{2^n}{a^{2n}} \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln[L(X_1, X_2, \ldots, X_n, a)] = n \ln 2 - 2n \ln a + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i.$$

Уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial a} = -\frac{2n}{a} = 0$$

не имеет решений. Критических точек нет. Наибольшее и наименьшее значения L находятся на границе допустимых значений a.

По виду функции L можно заключить, что значение L тем больше, чем меньше величина a. Но a не может быть меньше $X_{(n)}$. Поэтому наиболее правдоподобное значение $a = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = X_{(n)}$.

Так как $M(X) = \int_0^a x \cdot \dfrac{2x}{a^2}\, dx = \dfrac{2}{3} a$, то оценкой наибольшего правдоподобия для $M(X)$ будет величина $\dfrac{2}{3} X_{(n)}$.

Ответ. $a = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = X_{(n)},\ M(X) = \dfrac{2}{3} X_{(n)}.$

Пример 3.3.5. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(m,\sigma^2)$ с неизвестными параметрами m и σ. По результатам независимых наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ найти наиболее правдоподобные значения этих параметров.

Решение. В соответствии с (3.1.4) функция правдоподобия имеет вид

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_n, m, s) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{-(X_i - m)^2 / 2\sigma^2\right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 / 2\sigma^2\right\},$$

а логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln L(X_1, X_2, \ldots, X_n, m, s) = -n \ln\sigma - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2.$$

Необходимые условия экстремума дают систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(m,\sigma)}{\partial m} = -\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial (X_i - m)^2}{\partial m} = \dfrac{1}{\sigma^2}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - nm\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L(m,\sigma)}{\partial \sigma} = -\dfrac{n}{\sigma} + \dfrac{1}{\sigma^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 = 0. \end{cases}$$

Решения этой системы имеют вид: $\tilde{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$, $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

Отметим, что обе оценки являются состоятельными, причем оценка для m несмещенная, а для σ^2 смещенная (сравните с формулой (3.1.3)).

Ответ. $m = \bar{X}$, $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

Задача 3.3.1. *Для нечетных вариантов*. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = 1 - \exp\{-\lambda(x - a)\}, \quad x \ge a, \ \lambda > 0.$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты n независимых наблюдений случайной величины.

1) По результатам наблюдений построить оценки наибольшего правдоподобия для параметров a и λ.

2) Полагая значение параметра a равным номеру варианта, найдите оценку параметра λ по методу моментов.

Для четных вариантов. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности $f(x) = \frac{a}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{a+1}$ при $x_0 \le x$ и $f(x) = 0$ при $x < x_0$

($a > 0$ и $x_0 > 0$). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты n независимых наблюдений случайной величины.

1) По результатам наблюдений построить оценки наибольшего правдоподобия для параметров a и x_0.

2) Полагая значение параметра x_0 равным номеру варианта, найдите оценку параметра a по методу моментов.

(См. примеры 3.3.1–3.3.5.)

Задача 3.3.2. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x < 0, \\ \dfrac{\lambda^m}{(m-1)!}\, x^{m-1}\, e^{-\lambda x} \quad \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

По результатам независимых наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ постройте оценки наибольшего правдоподобия для параметра λ. (См. примеры 3.3.1–3.3.5; значение m возьмите равным номеру варианта плюс единица.)

Задача 3.3.3. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности $f(x)$. По результатам независимых наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ постройте оценки для параметра распределения.

В вариантах 1, 6, 11, 16, 21, 26: $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$, $\sigma > 0$ при $x \geq 0$ (одностороннее нормальное распределение). Оцените параметр σ.

В вариантах 2, 7, 12, 17, 22, 27: $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}(2\sigma^2)^{3/2}} x^2 \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$, $\sigma > 0$ при $x \geq 0$ (распределение Максвелла). Оцените параметр σ.

В вариантах 3, 8, 13, 18, 23, 28: $f(x) = \dfrac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$, $\sigma > 0$ при $x \geq 0$ (распределение Релея). Оцените параметр σ.

В вариантах 4, 9, 14, 19, 24, 29: $f(x) = \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $\sigma > 0$ при $x \geq 0$ (логарифмически нормальное распределение). Оцените параметр σ.

В вариантах 5, 10, 15, 29, 25, 30: $f(x) = 2ax\exp\{-ax^2\}$, $a > 0$ при $x \geq 0$ (распределение Вейбулла–Гнеденко). Оцените параметр a.

(См. примеры 3.3.1–3.3.5.)

Задача 3.3.4. Дискретная случайная величина X имеет распределение:
(*в вариантах 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28*)

$$P(X=k) = 0{,}5k(k+1)a^{k-1}(1-a)^3,\ a>0,\ k=1,2,3,\dots,$$

(*в вариантах 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29*)

$$P(X=k) = ka^{k-1}(1-a)^2,\ a>0,\ k=1,2,3,\dots,$$

(*в вариантах 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30*)

$$P(X=k)=\frac{k^2\ a^{k-1}\,(1-a)^3}{a+1},\ a>0,\ k=1,2,3,\dots.$$

По результатам независимых наблюдений $X_1, X_2, \dots, X_n$ постройте оценку для параметра *a*. (См. примеры 3.3.1–3.3.5.)

3.2. Доверительный интервал для вероятности события

Пусть вероятность $P(A)=p$ неизвестна. Проделаем n независимых опытов и определим k/n — частоту события A в данной серии опытов. Если опытов достаточно много ($n\to\infty$), то вероятность и частота события связаны соотношением:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}\right). \tag{3.2.1}$$

По заданному уровню надежности γ из таблицы функции Лапласа (см. прил., табл. П2) можно найти такое t_γ, что $2\Phi(t_\gamma)=\gamma$. Правая часть равенства (3.2.1) будет равна γ, если

$$t_\gamma=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}},$$

откуда $\varepsilon=t_\gamma\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$. При подстановке такого ε в (3.2.1) получается равенство

$$P\left(\frac{k}{n}-t_\gamma\sqrt{\frac{pq}{n}}<p<\frac{k}{n}+t_\gamma\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)=\gamma, \tag{3.2.2}$$

К сожалению, в формуле (3.2.2) доверительные границы для вероятности *p* выражаются через саму эту неизвестную вероятность. Это затруднение можно обойти, заметив, что $pq\le 1/4$. Тогда формулу (3.2.2) можно записать в виде

$$P\left(\frac{k}{n}-t_\gamma\frac{1}{2\sqrt{n}}<p<\frac{k}{n}+t_\gamma\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)=\gamma. \tag{3.2.3}$$

Оценка *pq* величиной 1/4 приемлема, если есть уверенность, что неизвестная вероятность *p* близка к 1/2. Но при значениях *p* близких к 0 или 1 такая оценка слишком груба. Например, при $p = 0{,}1$ получаем всего лишь $pq = 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}09$ вместо 0,25. Можно точный доверительный интервал заменить приближенным, если учесть, что при большом числе опытов $\frac{k}{n} \approx p$. Тогда из (3.2.2) следует, что

$$P\left(\frac{k}{n} - t_\gamma \sqrt{\frac{\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}{n}} < p < \frac{k}{n} + t_\gamma \sqrt{\frac{\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}{n}} \right) \quad \gamma. \qquad (3.2.4)$$

Пример 3.4. Для обследования большой партии изделий (несколько тысяч штук) наугад выбрано 160 изделий. Среди них оказалось 56 изделий низкого сорта. Оценить долю изделий низкого сорта в этой партии с надежностью 0,95.

Решение. Так как партия изделий крупная, то для упрощения можно считать, что по мере выбора изделий состав партии заметно не изменяется и вероятность выбрать наугад изделие низкого сорта равна доле низкосортных изделий в этой партии. Тогда задача сводится к построению доверительного интервала для вероятности выбрать из этой партии изделие низкого сорта. Частота изделий низкого сорта в выборке равна $\frac{k}{n} = \frac{56}{160} = 0{,}35.$ Из таблицы функции Лапласа (см. прил., табл. П2) следует, что $2\Phi(1{,}96) = 0{,}95.$ Поэтому

$$0{,}35 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{160}} < p < 0{,}35 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{160}}$$

или $0{,}27 < p < 0{,}42.$ Итак, по данной выборке можно с вероятностью 0,95 утверждать, что во всей партии содержится от 27% до 42% изделий низкого сорта.

Ответ. От 27% до 42%.

Задача 3.4. В серии из n выстрелов по мишени было зафиксировано k попаданий. Постройте доверительный интервал для вероятности попадания в цель при одном выстреле. Уровень надежности возьмите равным γ. (См. пример 3.8 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.4.

№	n	k	γ	№	n	k	γ	№	n	k	γ
1	100	75	0,95	**11**	100	55	0,98	**21**	144	90	0,96
2	144	54	0,98	**12**	144	100	0,96	**22**	400	120	0,95
3	150	30	0,96	**13**	400	80	0,98	**23**	180	162	0,97
4	256	128	0,99	**14**	200	40	0,99	**24**	320	64	0,97

5	90	81	0,95	**15**	180	162	0,96	**25**	169	52	0,99
6	100	80	0,96	**16**	100	75	0,95	**26**	100	36	0,95
7	144	36	0,95	**17**	144	80	0,97	**27**	144	70	0,96
8	150	96	0,97	**18**	400	40	0,98	**28**	400	180	0,97
9	324	108	0,99	**19**	300	50	0,96	**29**	320	256	0,98
10	125	25	0,05	**20**	100	64	0,05	**30**	360	72	0,99

Пример 3.5. Было проведено 400 испытаний механизма катапультирования. В этих испытания не зарегистрировано ни одного отказа. С надежностью 0,95 оценить вероятность отказа механизма катапультирования.

Решение. В данной серии испытаний частота появления отказа $k/400=0.$ Поэтому непосредственно использовать формулу (3.2.4) нельзя. Заметим, что $pq \le 1/4,$ так как $p+q=1.$ Функция Лапласа Ф(х) строго возрастает. Поэтому меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. В расчете на худший вариант можно воспользоваться формулой (3.2.3). По таблице функции Лапласа (см. прил., табл. П2) находим, что $2\Phi(1,65)=0,95.$ Поэтому $t_\gamma=1,65$ и $0<p<1,65\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{400}}=0,041.$

Еще раз подчеркнем, что доверительный интервал (3.2.3) построен в расчете на худший вариант, когда вероятность события близка к 1/2. Но большое число опытов ($n=400$) и нулевая частота события в них позволяют с уверенностью утверждать, что вероятность события близка к нулю. Если несколько ухудшить статистику испытаний и посчитать что один отказ все-таки наблюдался, то $pq\approx\dfrac{1}{400}\cdot\dfrac{399}{400}=0,0025.$ Тогда по формуле (3.2.4) получаем приближенный доверительный интервал

$$\frac{1}{400}-1,65\sqrt{\frac{\frac{1}{400}\cdot\frac{399}{400}}{400}}<p<\frac{1}{400}+1,65\sqrt{\frac{\frac{1}{400}\cdot\frac{399}{400}}{400}}$$

или $0<p<0,0066$. Это приближенный доверительный интервал, но он определенно более точен, чем грубая оценка по формуле (3.2.3).

Ответ. $p<0,0066$.

Задача 3.5.1. В серии из *n* испытаний технического устройства не было зарегистрировано ни одного отказа. Постройте верхнюю доверительную границу для вероятности отказа при уровне надежности γ. (См. пример 3.5 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.5.1.

№	n	γ	№	n	γ	№	n	γ	№	n	γ	№	n	γ
1	100	0,9	**7**	100	0,95	**13**	900	0,95	**19**	625	0,95	**25**	576	0,95
2	196	0,95	**8**	196	0,97	**14**	100	0,96	**20**	900	0,90	**26**	625	0,96

3	324	0,96	**9**	256	0,96	**15**	196	0,97	**21**	100	0,97	**27**	900	0,97
4	576	0,97	**10**	324	0,98	**16**	256	0,98	**22**	196	0,98	**28**	100	0,98
5	625	0,98	**11**	576	0,99	**17**	324	0,99	**23**	256	0,99	**29**	196	0,99
6	900	0,99	**12**	625	0,90	**18**	576	0,90	**24**	324	0,90	**30**	256	0,90

Задача 3.5.2. Из крупной партии изделий было наугад проверено n изделий. Бракованных изделий среди проверенных не оказалось. С надежностью γ оценить нижнюю доверительную границу для доли годных изделий в этой партии. (См. пример 3.5 и исходные данные к задаче 3.5.1.)

Пример 3.6. При штамповке 70% деталей выходит первым сортом, 20% — вторым и 10% — третьим. Определить, сколько нужно взять деталей, чтобы с вероятностью равной 0,997 можно было утверждать, что доля первосортных среди них будет отличаться от вероятности изготовления первосортной детали не более чем на 0,05 в ту или другую сторону? Ответить на тот же вопрос, если процент первосортных деталей неизвестен.

Решение. Изготовление каждой детали можно считать независимым испытанием с вероятностью «успеха» $p = 0{,}7.$ Нужно выбрать такое число испытаний n, чтобы по формуле (3.2.1):

$$P(|\,k/n - 0{,}7\,| < 0{,}05) \quad 2\Phi\left(\frac{0{,}05}{\sqrt{\dfrac{0{,}7\cdot 0{,}3}{n}}}\right) = 0{,}997.$$

По таблице функции Лапласа (см. прил., табл. П2) находим, что $2\Phi(2{,}97) = 0{,}997.$ Тогда $2{,}97 = \dfrac{0{,}05}{\sqrt{\dfrac{0{,}7\cdot 0{,}3}{n}}}$, откуда $n = 741.$ Если процент первосортных деталей неизвестен, то $2{,}97 = \dfrac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}.$

Учитывая, что $pq \le 1/4,$ и замену pq на 1/4 придется компенсировать некоторым увеличением n, получим $2{,}75 = 0{,}05\sqrt{n}\,/\,0{,}5$ или $n = 882$.

Ответ. 741; 882.

Задача 3.6.1. Вероятность события равна $P(A) = p.$ Сколько необходимо сделать независимых опытов, чтобы с вероятностью γ можно было утверждать, что частота события в этой серии опытов будет отличаться от вероятности события не более чем на α в ту или другую сторону? Ответить на тот же вопрос, если вероятность события p

неизвестна. (Иначе говоря, сколько нужно проделать независимых опытов, чтобы по их результатам можно было построить для неизвестной вероятности события доверительный интервал шириной 2α с надежностью γ?) (См. пример 3.6 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.6.1.

№	p	α	γ	№	p	α	γ	№	p	α	γ
1	0,55	0,02	0,95	**11**	0,69	0,02	0,99	**21**	0,41	0,02	0,97
2	0,56	0,03	0,96	**12**	0,71	0,03	0,90	**22**	0,40	0,03	0,98
3	0,58	0,04	0,97	**13**	0,72	0,04	0,95	**23**	0,39	0,04	0,99
4	0,59	0,05	0,98	**14**	0,73	0,05	0,96	**24**	0,38	0,05	0,90
5	0,60	0,06	0,99	**15**	0,74	0,06	0,97	**25**	0,37	0,06	0,95
6	0,62	0,07	0,9	**16**	0,75	0,07	0,98	**26**	0,36	0,07	0,96
7	0,64	0,08	0,95	**17**	0,45	0,08	0,99	**27**	0,35	0,08	0,97
8	0,65	0,09	0,96	**18**	0,44	0,09	0,9	**28**	0,34	0,09	0,98
9	0,66	0,10	0,97	**19**	0,43	0,10	0,95	**29**	0,33	0,10	0,99
10	0,68	0,01	0,98	**20**	0,42	0,01	0,96	**30**	0,32	0,01	0,95

Задача 3.6.2. Вероятность события равна $b/100$. Сколько нужно сделать независимых опытов, чтобы с надежностью γ можно было гарантировать, что частота события в этих опытах отличается от вероятности события не более, чем на α? (См. пример 3.6 и исходные данные к задаче 3.6.1, b — номер варианта.)

3.3. Проверка гипотезы о равенстве вероятностей

Пусть некоторое событие A в серии из n_1 независимых опытов произошло k_1 раз, а в серии из n_2 независимых опытов это событие появилось k_2 раза. Пусть каждая серия состоит из достаточно большого числа опытов (хотя бы несколько десятков опытов в каждой серии). Требуется проверить гипотезу о том, что вероятность появления события в каждой серии одинакова и равна p.

Если частоты появления события $\frac{k_1}{n_1}$ и $\frac{k_2}{n_2}$ в этих серия не принимают значений близких к 0 или 1, то по центральной предельной теореме частоты имеют близкие к нормальному законы распределения: $N\left(p;\frac{p(1-p)}{n_1}\right)$ и $N\left(p;\frac{p(1-p)}{n_2}\right)$ соответственно. Поэтому в силу устойчивости нормального закона распределения разность частот $\frac{k_1}{n_1} - \frac{k_2}{n_2}$ имеет закон распределения $N\left(0; p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$.

Заметим, что большие различия в частотах появления события свидетельствуют против гипотезы. Поэтому к критическим следует отнести те серии наблюдений, для которых $\left|\frac{k_1}{n_1} - \frac{k_2}{n_2}\right| > C$, где C — некоторая положительная постоянная. Если уровень значимости выбрать равным α, то постоянная C определяется из равенства

$$P\left(\left|\frac{k_1}{n_1} - \frac{k_2}{n_2}\right| > C\right) = 1 - 2\Phi\left(\frac{C}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}\right) = \alpha.$$

Если по таблице функции Лапласа (см. прил., табл. П2) найти t_α такое, чтобы $1 - 2\Phi(t_\alpha) = \alpha$, то следует выбрать $C = t_\alpha \sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$. К критическим следует отнести те серии наблюдений, в которых модуль разности частот больше величины $t_\alpha \sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$. В последнем равенстве в качестве оценки неизвестной вероятности p можно взять величину $\tilde{p} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$.

Пример 3.7. В 225 независимых опытах событие A появилось 78 раз. В контрольной серии из 64 независимых опытов было зарегистрировано 12 появлений события. Можно ли считать, что вероятность события A одинакова в обеих сериях опытов при уровне значимости $\beta = 0{,}04$?

Решение. Предположим, что вероятности события в этих опытах одинаковы. По таблице функции Лапласа (см. прил., табл. П2) находим, что $1 - 2\Phi(2{,}06) = 0{,}04$. Оценкой неизвестной вероятности в предположении, что гипотеза о равенстве вероятностей верна, может служить величина $\tilde{p} = \frac{78 + 12}{225 + 64} = 0{,}31$. Поэтому критическую область составят те серии опытов, в которых модуль разности частот превысит величину

$$2{,}06 \cdot \sqrt{0{,}31 \cdot 0{,}69\left(\frac{1}{225}+\frac{1}{64}\right)} = 0{,}135.$$

Реальная разность частот равна $\dfrac{78}{225}-\dfrac{12}{64} = 0{,}09 < 0{,}135.$

Предположение о равенстве вероятностей не противоречит опытным данным.

Ответ. Предположение о равенстве вероятностей правдоподобно.

Задача 3.7. В серии из n_1 независимых опытов событие A появилось k_1 раз, а в серии из n_2 независимых опытов это событие появилось k_2 раз. При уровне значимости β можно ли считать, что вероятность появления события A в этих сериях одинакова? (См. пример 3.71 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.7.

№	n_1	k_1	n_2	k_2	β	№	n_1	k_1	n_2	k_2	β
1	75	14	181	50	0,05	**16**	76	8	132	21	0,05
2	65	26	50	31	0,05	**17**	61	9	120	14	0,02
3	80	22	35	7	0,02	**18**	68	8	96	21	0,05
4	120	19	40	12	0,05	**19**	92	27	36	9	0,05
5	100	29	60	22	0,02	**20**	112	8	400	64	0,02
6	72	18	90	13	0,05	**21**	45	7	300	25	0,05
7	95	19	70	9	0,05	**22**	30	2	80	12	0,05
8	80	11	30	2	0,02	**23**	400	35	600	76	0,02
9	400	112	160	50	0,05	**24**	196	29	64	4	0,05
10	140	21	50	4	0,05	**25**	175	25	38	3	0,05
11	56	14	120	41	0,02	**26**	160	57	400	111	0,02
12	64	13	256	76	0,0	**27**	110	24	50	4	0,05
13	52	20	140	81	0,05	**28**	140	81	52	20	0,02
14	130	71	48	33	0,02	**29**	60	22	100	27	0,05
15	82	14	56	4	0,05	**30**	140	23	50	4	0,05

3.4. Доверительный интервал для математического ожидания

3.4.1. Случай большой выборки

Пусть закон распределения случайной величины X неизвестен. Неизвестны так же $M(X)$ и $D(X)$, причем $D(X) < \infty$. Над случайной величиной проделано n независимых наблюдений и получена выборка значений $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Построим доверительный интервал для математического ожидания на основе точечной оценки $\overline{X}$.

Если число наблюдений n достаточно велико (хотя бы несколько десятков), то

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}$$

представляет из себя сумму большого числа одинаково распределенных независимых слагаемых с ограниченной дисперсией. На основании центральной предельной теоремы можно утверждать, что $\bar{X}$ имеет близкий к нормальному закон распределения. Параметры этого нормального закона определяются тем, что $M(\bar{X}) = M(X)$ и $D(\bar{X}) = D(X)/n$. Поэтому окончательно можно утверждать, что

$$\bar{X} \sim N\left(M(X), \frac{D(X)}{n}\right). \qquad (3.4.1)$$

Запись формулы (2.9.3) для этого закона распределения имеет вид

$$P(|\bar{X} - M(X)| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{D(x)}{n}}}\right). \qquad (3.4.2)$$

Зададим вероятность γ и по таблице функции Лапласа (см. прил. 1, табл. П2) выберем такое t_γ, чтобы $2\Phi(t_\gamma) = \gamma$. Тогда $t_\gamma = \varepsilon / \sqrt{\frac{D(x)}{n}}$, откуда $\varepsilon = t_\gamma \sqrt{\frac{D(x)}{n}}$. Если такое ε подставить в (3.4.2), то получим

$$P\left(\bar{X} - t_\gamma \sqrt{\frac{D(X)}{n}} < M(X) < \bar{X} + t_\gamma \sqrt{\frac{D(X)}{n}}\right) = \gamma, \qquad (3.4.3)$$

Если дисперсия случайной величины известна, то формула (3.4.3) решает задачу.

Если вместе с $M(X)$ неизвестна и $D(X)$, то из тех же опытных данных можно получить несмещенную и состоятельную оценку для дисперсии по формуле:

$$D(X) \approx s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}. \qquad (3.4.4)$$

Тогда (3.4.3) имеет вид

$$P\left(\bar{X} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{X} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma. \qquad (3.4.5)$$

В выводе формул (3.4.3) и (3.4.5) ключевую роль играет тот факт, что при большом числе независимых наблюдений среднее арифметическое их результатов имеет близкий к нормальному закон распределения. Эту формулу можно использовать для любой случайной величины с ограниченной дисперсией, лишь бы число наблюдений было достаточно велико (хотя бы несколько десятков).

Пример 3.8. По результатам 100 наблюдений случайной величины X найдены оценки математического ожидания и дисперсии, равные $\overline{X} = 20,4$ и $s^2 = 3,62$. Требуется построить доверительный интервал для математического ожидания последовательно для уровней надежности $\gamma = 0,9$, $\gamma = 0,99$ и $\gamma = 0,999$.

Решение. По таблице функции Лапласа (см. прил., табл. П2) находим, что $2\Phi(1,65) = 0,9$, откуда t_γ=1,65. Для уровня надежности $\gamma = 0,99$ соответствующее значение t_γ=2,58, а для $\gamma = 0,999$ имеем t_γ=3,28. Подставляя полученные значения в (3.4.5) можем утверждать, что $20,09 < M(X) < 20,71$ при уровне надежности $\gamma = 0,9$; $19,91 < M(X) < 20,89$ при уровне надежности $\gamma = 0,99$; $19,78 < M(X) < 21,02$ при уровне надежности $\gamma = 0,999$.

Ответ. $19,78 < M(X) < 21,02$ при $\gamma = 0,999$.

Задача 3.8. По результатам n независимых наблюдений получены оценки математического ожидания ($\overline{X}$) и дисперсии (s^2) случайной величины X. Постройте доверительные интервалы для математического ожидания этой случайной величины при уровнях надежности $\gamma = 0,95$ и $\gamma = 0,98$. (См. пример 3.8 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.8.

№	n	$\overline{X}$	s^2	№	n	$\overline{X}$	s^2	№	n	$\overline{X}$	s^2	№	n	$\overline{X}$	s^2
1	64	1,2	4,5	**9**	100	2,5	1,4	**17**	75	3,2	1,44	**25**	64	5,3	4,8
2	81	–1	2,25	**10**	70	1,4	1,96	**18**	60	–2	1,96	**26**	70	–1	2,25
3	90	4,8	3,2	**11**	64	1,3	4,2	**19**	55	3,4	4,8	**27**	64	4,8	3,2
4	85	–2	4	**12**	81	2,1	2,25	**20**	64	4,8	4	**28**	81	–2	4
5	60	3,5	1,96	**13**	100	2,4	1,6	**21**	81	–2	1,96	**29**	100	3,5	1,96
6	55	4,2	3,6	**14**	64	4,2	1,44	**22**	90	3,5	3,6	**30**	64	2,5	1,4
7	68	2,8	2,25	**15**	90	3,5	4	**23**	85	4,2	2,25	**31**	90	1,4	1,96
8	56	1,6	2,56	**16**	81	4,2	2,56	**24**	60	2,8	2,56	**32**	81	1,3	4,2

Пример 3.9. По сгруппированным данным наблюдений случайной величины построить доверительный интервал для ее математического ожидания, соответствующий уровню надежности $\gamma = 0,98$.

Интервалы	(0;4)	(4;8)	(8;12)	(12;16)	(16;20)
Число наблюдений	12	29	42	21	16

Решение. Представителем каждого интервала можно считать его середину. В данной серии из 120 наблюдений

$$\overline{X} = \frac{2 \cdot 12 + 6 \cdot 29 + 10 \cdot 42 + 14 \cdot 21 + 18 \cdot 1690}{120} = 10.$$

По формуле (3.1.3) оценим дисперсию случайной величины:

$$\sigma^2 \approx s^2 =$$

$$= \frac{(2-10)^2 \cdot 12 + (6-10)^2 \cdot 29 + (10-10)^2 \cdot 42 + (14-10)^2 21 + (18-10)^2 \cdot 16}{119} = 21,78,$$

$$s \approx 4,67.$$

Общее число наблюдений велико. Поэтому, безотносительно к закону распределения случайной величины, можно воспользоваться формулой (3.4.3). Из таблицы функции Лапласа (см. прил., табл. П2) находим, что $2\Phi(2,33) = 0,98$, т.е. $t_\gamma = 2,33$. Поэтому

$$10 - 2,33\frac{4,67}{\sqrt{120}} < M(X) < 10 + 2,33\frac{4,67}{\sqrt{120}},$$

или $9,01 < M(X) < 10,99$.

Ответ. $9,01 < M(X) < 10,99$.

Задача 3.9. Результаты наблюдений случайной величины X представлены в виде статистического ряда. Постройте доверительные интервалы для математического ожидания этой величины для уровней надежности $\gamma = 0,9$ и $\gamma = 0,95$. (См. пример 3.9 и исходные данные к задаче 3.12.)

Указание. Иногда результаты наблюдений случайной величины предварительно группируют и представляют в виде статистического ряда

X	$(x_1; x_2)$	$(x_2; x_3)$	…	$(x_k; x_{k+1})$
Число наблюдений	ν_1	ν_2	…	ν_k

В этом случае для оценки математического ожидания и дисперсии используют формулы:

$$M(X) \approx \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i \nu_i}{n} \text{ и } D(X) \approx s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (u_i - \overline{X})^2 \nu_i}{n-1},$$

где $u_i = (x_{i+1} + x_i)/2$ — середина i-го интервала. Считается, что величина u_i наблюдалась ν_i раз.

3.4.2. Случай малой выборки

При небольшом числе наблюдений для построения доверительного интервала необходима информация о типе закона распределения случайной величины. Рассмотрим задачу в практически важном случае, когда случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(m;\sigma^2)$.

Если σ^2 известно, а неизвестно лишь m, то при независимых наблюдениях можно воспользоваться свойством устойчивости нормального закона распределения. Согласно этому свойству сумма независимых случайных величин, подчиненных нормальному закону распределения, сама имеет нормальный закон распределения. Поэтому в названных условиях и при небольшом числе наблюдений можно утверждать, что $\bar{X}$ имеет нормальный закон распределения и использовать формулу (3.4.3).

Если дисперсия σ^2 неизвестна, то при небольшом числе наблюдений ее оценка на основе опытных данных получается грубой и формула (3.4.5) не решает задачи построения доверительного интервала. В этом случае

$$P\left(\bar{X} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \quad \gamma \qquad (3.4.6)$$

где соответствующее t_γ при заданном уровне надежности γ находят по таблице распределения Стьюдента (см. прил., табл. П3) для $n-1$ степени свободы.

Формула (3.4.6) по структуре похожа на формулу (3.4.5), но t_γ в этих формулах определяется по разным таблицам.

Пример 3.10. Измерения сопротивления резистора дали следующие результаты (в омах): $X_1 = 592$, $X_2 = 595$, $X_3 = 594$, $X_4 = 592$, $X_5 = 593$, $X_6 = 597$, $X_7 = 595$, $X_8 = 589$, $X_9 = 590$. Известно, что ошибки измерения имеют нормальный закон распределения. Систематическая ошибка отсутствует. Построить доверительный интервал для истинного сопротивления резистора с надежностью 0,99 в предположении:

а) дисперсия ошибки измерения известна и равна четырем;

б) дисперсия ошибки измерения неизвестна.

Решение. В данной серии из девяти наблюдений

$$\bar{X} = \frac{592 + 595 + \ldots + 590}{9} = 593.$$

а) Если дисперсия ошибки измерения известна, то можно воспользоваться формулой (3.4.3). Для этого из таблицы функции Лапласа (см. прил., табл. П2) находим, что $2\Phi(2,58) = 0,99$, т.е. уровню надежности 0,99 соответствует значение $t_\gamma = 2,58$. Тогда по формуле (3.4.3)

$$593 - 2,58 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}} < M(X) < 593 + 2,58 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}}$$

или $591,28 < M(X) < 594,72$ с вероятностью 0,99.

б) В случае неизвестной дисперсии ее можно оценить на основе тех же опытных данных:

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{(592-593)^2 + (595-593)^2 + \ldots + (590-593)^2}{8} = 6,5,$$

$$s = \sqrt{6,5} \approx 2,55.$$

По таблице распределения Стьюдента (см. прил., табл. П3) для $n-1=9-1=8$ степеней свободы и заданной вероятности $\gamma = 0,99$ находим t_γ=3,355. Тогда по формуле (3.4.6)

$$593 - 3,355 \cdot \frac{2,55}{\sqrt{9}} < M(X) < 593+3,355 \cdot \frac{2,55}{\sqrt{9}}$$

или $590,15 < M(X) < 595,85$ с вероятностью 0,99.

Ответ. а) $591,28 < M(X) < 594,72$; б) $590,15 < M(X) < 595,85$.

Задача 3.10. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения. Построить доверительный интервал для математического ожидания этой случайной величины при уровне надежности $\gamma = 0,9$ в предположении, что:

а) дисперсия случайной величины неизвестна;

б) дисперсия случайной величины известна и равна 1,44.

(См. пример 3.10 и исходные данные к задаче 3.11.)

3.5. Доверительный интервал для дисперсии

Пусть случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(m,\sigma^2)$, где m и σ^2 неизвестны. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты n независимых наблюдений этой случайной величины.

В этих условиях, согласно теореме Фишера, величина $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ имеет распределение χ^2 (распределение «хи-квадрат») с $n-1$ степенью свободы.

Назначим уровень надежности γ и подберем числа ν_1 и ν_2 так, чтобы

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \nu_1\right) = \frac{1-\gamma}{2} \text{ и } P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \ge \nu_2\right) = \frac{1-\gamma}{2}.$$

Тогда $P\left(\nu_1 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \nu_2\right) = \gamma$.

Величины ν_1 и ν_2 удовлетворяют равенствам

$$\int_0^{\nu_1} f_{n-1}(x)dx = \frac{1-\gamma}{2} \text{ и } \int_{\nu_2}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1-\gamma}{2},$$

где $f_{n-1}(x)$ плотность распределения «хи-квадрат» с $n-1$ степенью свободы.

Решения этих уравнений находят с помощью таблиц (см. прил., табл. П4).

Для ν_1 входы таблицы: $r = n-1$ и $\beta = (1+\gamma)/2$. Для ν_2 входы таблицы: $r = n-1$ и $\beta = (1-\gamma)/2$.

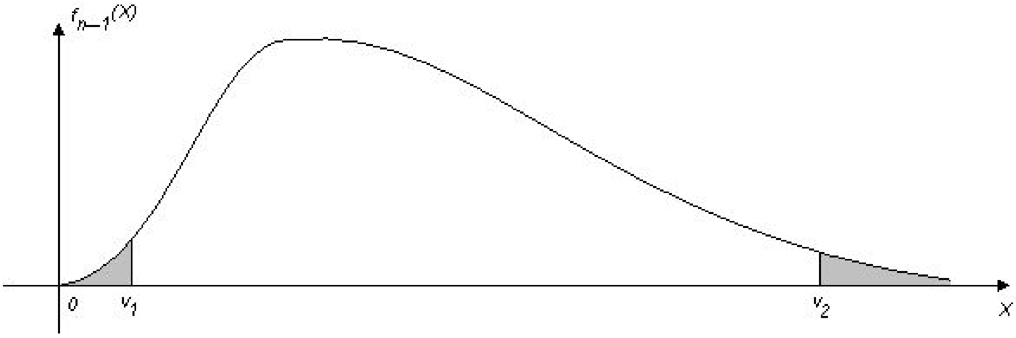


Рис. 3.5.1

Если ν_1 и ν_2 (см. рис. 3.5.1) найдены, то

$$\nu_1 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \nu_2 \tag{3.5.1}$$

или

$$\frac{(n-1)s^2}{\nu_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\nu_1}. \tag{3.5.2}$$

Это и есть доверительный интервал для дисперсии, соответствующий уровню надежности γ.

Пример 3.11. Даны результаты наблюдений случайной величины, имеющей нормальный закон распределения с неизвестными параметрами: $X_1 = 0{,}7$, $X_2 = 3{,}1$, $X_3 = -0{,}9$, $X_4 = 1{,}8$, $X_5 = 2{,}2$, $X_6 = -0{,}3$, $X_7 = 1{,}9$, $X_8 = 4{,}2$, $X_9 = 1{,}5$, $X_8 = 2{,}8$. Требуется построить доверительный интервал для дисперсии при уровне надежности $\gamma = 0{,}9$.

Решение. Оценим сначала математическое ожидание:

$$M(X) \approx \overline{X} = \frac{0{,}7+3{,}1-0{,}9+1{,}8+2{,}2-0{,}3+1{,}9+4{,}2+1{,}5+2{,}8}{10} = 1{,}7.$$

По формуле (3.1.3) оценим дисперсию

$$D(X) \approx s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{(0{,}7-1{,}7)^2 + (3{,}1-1{,}7)^2 + \ldots + (2{,}8-1{,}7)^2}{9} \approx 2{,}39.$$

Обратимся к таблице распределения «хи-квадрат» (см. прил., табл. П4).

Для величины ν_1 входы таблицы: $r = n - 1 = 10 - 1 = 9$ и $\beta = (1 + \gamma)/2 =$ $= (1 + 0,9)/2 = 0,95.$ По таблице находим $\nu_1 = 3,32.$ Для ν_2 входы таблицы: $r = n - 1 = 9$ и $\beta = (1 - \gamma)/2 = 0,05.$ По таблице находим $\nu_2 = 16,92.$

В итоге с вероятностью $\gamma = 0,9$ имеем, в соответствии с формулой (3.5.1),

$$3,32 < \frac{9 \cdot 2,39}{\sigma^2} < 16,92 \text{ или } 1,27 = \frac{9 \cdot 2,32}{16,92} < \sigma^2 < \frac{9 \cdot 2,39}{3,32} = 6,29.$$

Для среднего квадратического отклонения имеем с той же надежностью $\gamma = 0,9$ доверительный интервал $1,13 < \sigma < 2,5.$

Ответ. (1,27;6,29).

Задача 3.11. По приведенным данным наблюдений случайной величины *X*, имеющей нормальный закон распределения, постройте доверительный интервал для дисперсии при уровне надежности $\gamma = 0,96$ в нечетных вариантах и $\gamma = 0,8$ в четных вариантах. (См. пример 3.11 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.11.

№	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
1	1,9	0,4	3,3	1,5	0,9	2,6	2,4	1,4	2,7
2	3,5	2,1	2,4	2,8	0,5	2,5	2,8	0,5	2,5
3	3,7	2,9	3,6	6,3	4,4	3,2	5,1	4,8	2,1
4	2,6	1,5	3,3	2,5	0,9	4,9	2,2	3,1	4,2
5	1,7	0,2	3,1	1,3	2,4	0,7	1,2	2,5	2,2
6	2,8	1,5	1,7	2,7	1,1	5,1	2,2	4,5	3,3
7	3,6	6,2	5,1	4,4	3,2	4,8	2,1	3,7	2,9
8	1,6	0,1	3,0	1,2	0,6	2,3	2,1	1,1	2,4
9	3,2	2,4	0,8	4,8	2,1	3,0	4,1	2,5	1,4
10	1,5	2,9	0,1	1,1	0,4	2,2	2,0	1,0	2,3
11	2,3	0,7	4,7	2,0	2,9	4,0	2,4	1,3	3,1
12	0,3	1,4	0,0	2,8	1,0	2,1	1,9	0,9	2,2
13	5,0	3,4	2,6	1,0	2,3	3,2	1,6	4,3	2,7
14	2,2	3,6	0,6	1,1	2,7	1,7	2,6	1,5	2,9
15	3,6	2,3	1,2	0,7	2,9	1,8	2,7	3,0	1,6
16	2,0	3,4	0,4	2,7	0,9	2,5	1,5	1,3	2,4
17	6,1	3,1	4,3	5,0	4,7	2,0	3,6	2,8	3,5
18	2,6	0,3	3,2	1,4	0,8	1,3	1,8	2,5	2,3
19	0,9	2,6	2,4	1,4	2,7	1,9	0,4	3,3	1,5
20	2,8	0,5	2,5	2,8	0,5	2,5	3,5	2,1	2,4
21	6,3	4,4	3,2	3,7	2,9	3,6	5,1	4,8	2,1
22	4,9	2,2	3,1	4,2	2,6	1,5	3,3	2,5	0,9
23	0,2	3,1	1,3	2,4	1,7	0,7	1,2	2,5	2,2
24	1,7	2,7	1,1	5,1	2,2	2,8	1,5	4,5	3,3
25	3,2	4,8	2,1	3,7	2,9	3,6	6,2	5,1	4,4
26	2,3	2,1	1,1	2,4	1,6	0,1	3,0	1,2	0,6

27	0,8	4,8	2,1	3,0	4,1	2,5	1,4	3,2	2,4
28	2,9	0,1	1,1	0,4	2,2	2,0	1,0	2,3	1,5
29	4,0	2,4	1,3	3,1	4,7	2,0	2,3	0,7	2,9
30	2,6	1,0	2,3	3,2	1,6	4,3	2,7	5,0	3,4

3.6. Проверка статистических гипотез

3.6.1. Основные понятия

Статистической гипотезой называется гипотеза, которая относится к виду функции распределения, к параметрам функции распределения, к числовым характеристикам случайной величины и т.д., и которую можно проверить на основе опытных данных. Например, предположение о том, что отклонение истинного размера детали от расчетного имеет нормальный закон распределения, является статистической гипотезой. Предположение о наличии жизни на Марсе статистической гипотезой не является, так как оно не выражает какого-либо утверждения о законе распределения или иных характеристиках случайной величины.

Рассмотрим упрощенный пример. Пусть выдвинута гипотеза о том, что плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X имеет вид, изображенный на рис. 3.3.

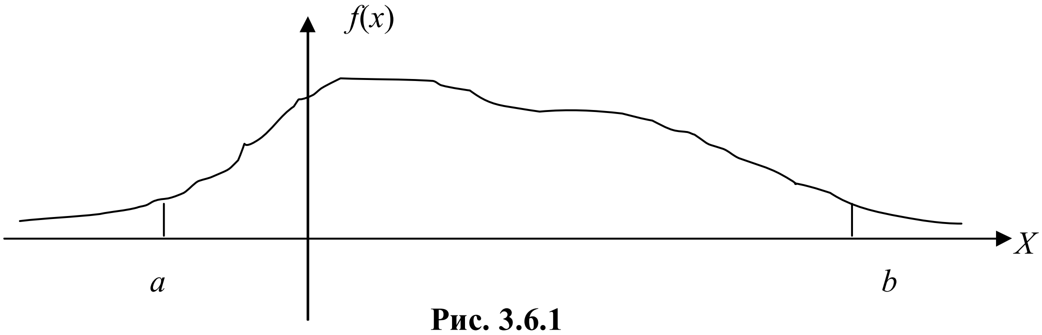


Рис. 3.6.1

Есть возможность произвести только одно наблюдение. В этом случае выборочным пространством служит числовая ось. Из рис. 3.6.1 видно, что значения случайной величины из отрезка $[a,b]$ имеют относительно большую плотность вероятности и попадание наблюдаемого значения в этот отрезок не противоречит гипотезе. Напротив, значения вне этого отрезка в соответствии с гипотезой маловероятны, и реализация одного из этих значений говорит не в пользу гипотезы. В этом упрощенном примере важно следующее: выборочное пространство W мы разбили на две части. Одну из них, точки вне отрезка $[a,b]$, обозначим через W_0 и назовем критической областью. Если наблюдение попадает в W_0, то гипотезу отвергаем, а если не попадет, то будем считать гипотезу не противоречащей опытным данным или правдоподобной.

В случае выборки объема n по тому же принципу разбивают выборочное пространство на две части. Одну их них, выборки самые маловероятные при данной гипотезе, обозначают через W_0 и называют *критической областью*. В случае попадания выборки в критическую область гипотезу отвергают. В противном случае признают гипотезу не противоречащей опытным данным. Если говорить о проверке гипотез с точки зрения статистических решающих функций, то, приписав каждой выборке определенное решение, принять или отвергнуть гипотезу, мы тем самым разбиваем выборочное пространство на две части: область принятия гипотезы и критическую область.

Статистическим критерием называют правило, указывающее, когда статистическую гипотезу следует принять, а когда отвергнуть. Построение статистического критерия сводится к выбору в выборочном пространстве *критической области* W_0, при попадании выборки в которую гипотеза отвергается. Обычно в критическую область включают самые маловероятные при данной гипотезе выборки.

Даже при верной гипотезе наблюдения могут сложиться неблагоприятно, в итоге выборка может попасть в критическую область и гипотеза будет отвергнута. Вероятность такого исхода $\beta \quad P(\vec{X} \in W_0)$ мала, так как к критической области отнесены самые маловероятные при данной гипотезе выборки. Вероятность β можно рассматривать как вероятность ошибки, когда гипотеза отвергается. Эту вероятность называют *уровнем значимости* критерия. Критерии для проверки гипотезы о законе распределения случайной величины обычно называют *критериями согласия.*

Статистический критерий в описанном виде может быть сложным, и трудно будет установить, принадлежит ли выборка критической области или нет. Поэтому предпочитают на выборочном пространстве задать некоторую функцию, которая каждой выборке ставит в соответствие определенное число. Значения функции, которые соответствуют критической области, естественно считать критическими значениями. Проверка гипотезы тогда сводится к вычислению по выборке значения этой функции и проверке, является ли оно критическим. Есть функции, не зависящие от вида проверяемой гипотезы. Одна из таких функций дает знаменитый критерий «хи-квадрат».

3.6.2. Критерий согласия «хи-квадрат»

Пусть выдвинута гипотеза о законе распределения случайной величины X. Требуется проверить, насколько эта гипотеза правдоподобна. Для этого разобьем множество возможных значений случайной величины на k разрядов $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$. Для непрерывной случайной величины роль разрядов играют интервалы значений, для дискретной — отдельные возможные значения или группы таких значений. В соответствии с выдвинутой гипотезой каждому разряду соответствует определенная вероятность

$$p_1 = P(X \in \Omega_1), p_2 = P(X \in \Omega_2), \dots, p_k = P(X \in \Omega_k). \qquad (3.6.1)$$

Например, если выдвинута гипотеза, что случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$, а в качестве Ω_i выбраны интервалы $(x_{i,} x_{i+1})$, то

$$p_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i).$$

Нужно проверить, согласуется ли наша гипотеза с опытными данными.

Идея проверки гипотезы состоит в сравнении теоретических вероятностей разрядов (3.6.1) с фактически наблюдаемыми частотами попадания в эти разряды. Для этого производится n независимых наблюдений случайной величины и определяется число попаданий в каждый из разрядов. Пусть в i-й разряд попало ν_i наблюдений. Если гипотеза верна и каждому разряду действительно соответствует вероятность (3.6.1), то при большом числе наблюдений в силу закона больших чисел частоты ν_i / n будут приблизительно равны теоретическим вероятностям p_i. Тогда величина

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \left(\frac{\nu_i}{n} - p_i \right)^2, \qquad (3.6.2)$$

где c_i — некоторые коэффициенты, должна быть малой.

Если же гипотеза ложная, то при больших n частоты разрядов будут близки к вероятностям, отличным от p_i, и величина (3.6.2) будет относительно большой. Значит, по величине (3.6.2) можно судить о том, насколько гипотеза согласуется с опытными данными. Критическую область составят те выборки, для которых эта величина велика.

Английский статистик К. Пирсон (1900 г.) показал, что при выборе коэффициентов $c_i = \frac{n}{p_i}$ случайная величина

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} \left(\frac{\nu_i}{n} - p_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \chi^2 \qquad (3.6.3)$$

имеет распределение, которое не зависит от выдвинутой гипотезы и определяется функцией плотности вероятности

$$\Psi_r(u) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \int\limits_0^\infty t^{\frac{r}{2}-1} e^{-t} dt} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, \quad u \le 0,$$

где r — число, называемое *числом степеней свободы*. Число r равно разности между числом разрядов и числом связей, наложенных на величины ν_i. Связью называется всякое соотношение, в которое входят величины ν_i.

При данной гипотезе и фиксированном числе наблюдений величина χ^2 зависит от $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$. Каждому ν_i соответствует свое слагаемое, но не все ν_i могут изменяться свободно, так как они связаны соотношением $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k = n$. Значит, величина n вместе с величинами $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{k-1}$ однозначно определяют величину ν_k, которая поэтому свободно меняться не может. Число степеней свободы соответствует числу свободно меняющихся величин ν_i. На ν_i могут быть наложены и другие связи. Если всего связей m, то независимо меняющихся величин ν_i будет $r = k - m$. Связь $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k = n$ налагается всегда. Другие связи могут возникнуть, например, если при выдвижении гипотезы с помощью величин ν_i оцениваются параметры предполагаемого закона распределения. Чем больше r, тем сильнее график $\Psi_r(u)$ вытянут вдоль горизонтальной оси (рис. 3.6.2).

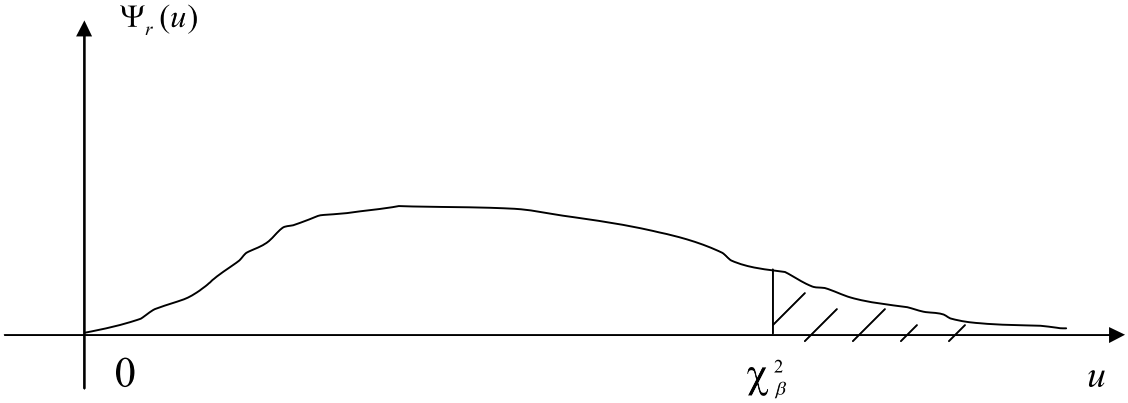


Рис. 3.6.2

Составлены специальные таблицы (см. прил., табл. П4), в которых для любого r и заданной вероятности β указаны такие значения χ^2_β, что

$$P(\chi^2 \geq \chi^2_\beta) = \int_{\chi^2_\beta}^{\infty} \Psi_r(u)\,du = \beta.$$

На рис. 3.6.2 заштрихованная площадь равна β. Вероятность $P(\chi^2 \geq \chi^2_\beta)$ можно понимать, как вероятность того, что в силу чисто случайных причин, за счет наблюдения тех, а не других значений случайной величины, мера расхождения между гипотезой и результатами наблюдений будет больше или равна χ^2_β. Эти вероятности можно использовать для проверки гипотезы о законе распределения случайной величины следующим образом.

Предположим, что гипотеза верна. Выберем вероятность β настолько малой, чтобы ее можно было считать вероятностью практически невозможного события. Для выбранного β и числа степеней свободы r из таблицы распределения величины χ^2 находим χ^2_β. Если гипотеза верна, то значения $\chi^2 \ge \chi^2_\beta$ являются практически невозможными, их следует отнести к критической области.

Итак, построена критическая область: $W_0 = [\chi^2_\beta, \infty)$. В предположении, что гипотеза верна, на основе опытных данных вычисляется χ^2. Обозначим это вычисленное значение через $\chi^2_\text{в}$. Если $\chi^2_\text{в} \ge \chi^2_\beta$, то произошло событие, которое практически невозможно при верной гипотезе. Это дает повод в гипотезе усомниться и объяснить такое большое значение $\chi^2_\text{в}$ неудачным выбором гипотезы, поскольку расхождения между ν_i / n и p_i случайными признать нельзя. При $\chi^2_\text{в} \ge \chi^2_\beta$ гипотеза отвергается.

Если же окажется, что $\chi^2_\text{в} < \chi^2_\beta$, то расхождение между гипотезой и опытными данными можно объяснить случайностями выборки. В этом случае можно заключить, что гипотеза *не противоречит опытным данным,* или что *гипотеза правдоподобна.* Это, конечно, не означает, что гипотеза верна. Скромность вывода в последнем случае можно объяснить тем, что согласующиеся с гипотезой факты гипотезы не доказывают, а делают ее лишь правдоподобной. В то же время всего один факт, противоречащий гипотезе, ее отвергает.

Замечание 1. Хотя и маловероятно, чтобы χ^2 при верной гипотезе превзошло уровень χ^2_β, но это все-таки может случиться и верная гипотеза будет отвергнута. Вероятность такого события равна β и ее можно рассматривать как вероятность ошибки, как вероятность отвергнуть гипотезу, когда она верна. Напомним, что вероятность ошибки, когда гипотеза отвергается, называют уровнем значимости критерия. Не следует думать, что чем меньше уровень значимости, тем лучше. При слишком малых β критерий ведет себя перестраховочно и бракует гипотезу только при кричаще больших значениях χ^2_β.

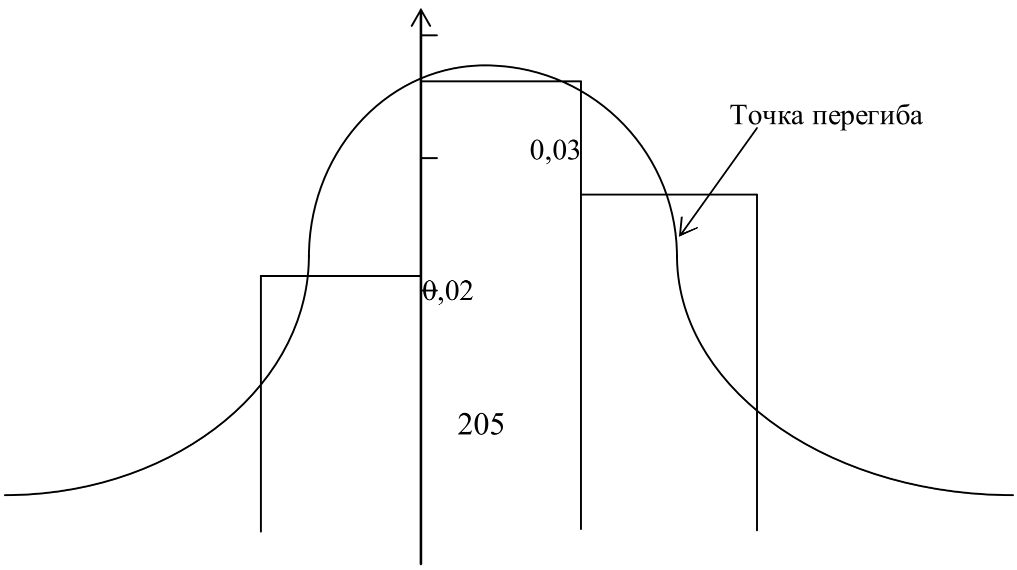
Замечание 2. Каждый разряд вносит в величину χ^2 вклад, равный $\dfrac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$, где np_i — среднее число попаданий в данный разряд, если гипотеза верна. При малых значениях np_i велика роль каждого отдельного наблюдения. Например, если $np_i = 0{,}1$ и в этот разряд попало одно наблюдение, то вклад в χ^2 этого разряда равен $\frac{(1-0,1)^2}{0,1} = 8,1.$ При $np_i = 0,5$ этот вклад будет равен всего лишь $\frac{(1-0,5)^2}{0,5} = 0,5.$ В итоге при малом np_i от попадания или непопадания в этот разряд наблюдаемого значения существенно зависит окончательный вывод. Чтобы снизить роль отдельных наблюдений, обычно рекомендуется сделать разбивку на разряды так, чтобы все np_i были достаточно большими. На практике это сводится к требованию иметь в каждом разряде не менее пяти – десяти наблюдений. Для этого разряды, содержащие мало наблюдений, рекомендуется объединять с соседними разрядами.

Пример 3.12. Были исследованы 200 изготовленных деталей на отклонение истинного размера от расчетного. Сгруппированные данные исследований приведены в виде статистического ряда:

Границы отклонений (в микронах)	(–20;–10)	(–10;0)	(0;10)	(10;20)	(20;30)
Число деталей с данной величиной отклонения	19	42	71	56	12

Требуется по данному статистическому ряду построить гистограмму. По виду гистограммы выдвинуть гипотезу о типе закона распределения отклонений. Подобрать параметры закона распределения (равные их оценкам на основе опытных данных). Построить на том же графике функцию плотности вероятности, соответствующую выдвинутой гипотезе. С помощью критерия согласия проверить согласуется ли выдвинутая гипотеза с опытными данными. Уровень значимости взять, например, равным 0,05.

Решение. Для того чтобы получить представление о виде закона распределения изучаемой величины, построим гистограмму. Для этого над каждым интервалом построим прямоугольник, площадь которого численно равна частоте попадания в интервал (рис. 3.6.3).



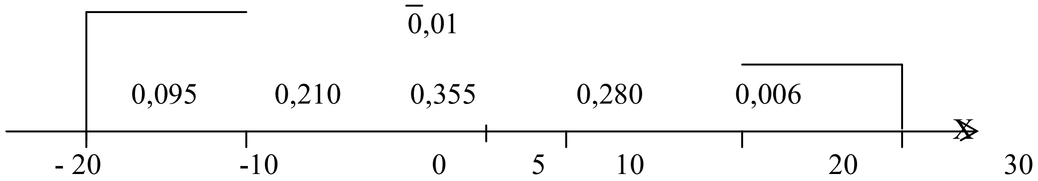


Рис. 3.6.3

По виду гистограммы можно выдвинуть предположение о том, что исследуемая случайная величина имеет нормальный закон распределения. Параметры нормального закона (математическое ожидание и дисперсию) оценим на основе опытных данных, считая в качестве представителя каждого интервала его середину:

$$M(X) \approx \bar{X} = \frac{-15\cdot 19 - 5\cdot 42 + 5\cdot 71 + 15\cdot 56 + 25\cdot 12}{200} = 5,$$

$$D(X) \approx s^2 = \frac{(-15-5)^2\cdot 19 + (-5-5)^2\cdot 42 + \ldots + (25-5)^2\cdot 12}{199} = 111{,}6;$$

$$\sigma \approx s = \sqrt{111{,}6} \approx 10{,}6.$$

Итак, выдвинем гипотезу, что исследуемая случайная величина имеет нормальный закон распределения $N(5;111{,}6)$, т.е. имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 10{,}6}\exp\left\{-\frac{(x-5)^2}{2\cdot 111{,}6}\right\}.$$

График $f(x)$ удобно строить с помощью таблицы функции $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ (см. прил., табл. П1):

$$f(x) = \frac{1}{10{,}6}\varphi\left(\frac{x-5}{10{,}6}\right).$$

Например, точка максимума и точки перегиба имеют ординаты соответственно

$$f(5) = \frac{1}{10{,}6}\varphi\left(\frac{5-5}{10{,}6}\right) = \frac{1}{10{,}6}\varphi(0) = \frac{1}{10{,}6}\cdot 0{,}3989 \approx 0{,}0376;$$

$$f(5\pm 10{,}6) = \frac{1}{10{,}6}\varphi\left(\frac{5-5\pm 10{,}6}{10{,}6}\right) = \frac{1}{10{,}6}\varphi(\pm 1) = \frac{1}{10{,}6}\cdot 0{,}2420 \approx 0{,}0228.$$

График функции $f(x)$ приведен на рис. 3.6.3.

Вычислим меру расхождения между выдвинутой гипотезой и опытными данными, т.е. величину χ^2. Для этого сначала вычислим вероятности, приходящиеся на каждый интервал в соответствии с гипотезой:

$$p_1 = P(-20 < X < -10) = \Phi\left(\frac{-10-5}{10,6}\right) - \Phi\left(\frac{-20-5}{10,6}\right) =$$

$$= -\Phi(1,42) + \Phi(2,36) = -0,422 + 0,491 = 0,069;$$

$$p_2 = P(-10 < X < 0) = \Phi\left(\frac{0-5}{10,6}\right) - \Phi\left(\frac{-10-5}{10,6}\right) = -0,1808 + 0,4222 = 0,241.$$

Аналогично: $p_3 = P(0 < X < 10) = 0,362$; $p_4 = P(10 < X < 20) = 0,242$; $P_5 = P(20 < X < 30) = 0,069$.

Вычисление χ^2 удобно вести, оформляя запись в виде таблицы.

ν_i	p_i	np_i	$\nu_i - np_i$	$(\nu_i - np_i)^2$	$\frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$
19	0,069	13,8	5,2	27,04	1,96
42	0,241	48,2	–6,2	38,44	0,78
71	0,362	72,4	–1,4	1,96	0,02
56	0,241	48,2	7,8	60,84	1,26
12	0,069	23,8	–1,8	3,24	0,23

$$\Sigma = \chi^2_{\text{в}} = 4,25.$$

Итак, мера расхождения между гипотезой и опытными данными равна $\chi^2_{\text{в}} = 4,25.$

Построим критическую область для уровня значимости $\beta = 0,05.$ Число степеней свободы для χ^2 равно двум. Так как число интервалов равно пяти, а на величины ν_i наложены три связи: $\Sigma\nu_i = 200$; $\overline{X} = 5$; $s^2 = 111,6$. В итоге $r = 5 - 3 = 2$. Для заданного уровня значимости β и числа степеней свободы $r = 2$ находим из таблицы распределения χ^2 (см. прил., табл. П4) критическое значение $\chi^2_\beta = 5,99.$

Критическая область для проверки гипотезы имеет вид $[5,99; +\infty)$. Значение $\chi^2_{\text{в}} = 4,25$ в критическую область не входит. Вывод: гипотеза опытным данным не противоречит. Меру расхождения $\chi^2_{\text{в}} = 4,25$ можно объяснить случайностями выборки.

Ответ. Гипотеза опытным данным не противоречит.

Задача 3.12. Для данного статистического ряда.

1. Постройте гистограмму.

2. По виду гистограммы подберите выравнивающую кривую (многоугольник распределения), т.е. выдвинете гипотезу о типе закона распределения случайной величины. Подберите параметры закона распределения (равные их оценкам на основе опытных данных). Постройте сглаживающую кривую в той же системе координат.

3. С помощью критерия согласия «хи-квадрат» проверьте, согласуется ли данная гипотеза с опытными данными при уровне значимости $\beta = 0,05$.

(См. пример 3.12 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.12.

Вар. 1	Интервалы	–25 ÷ –15	–15 ÷ –5	–5 ÷ 5	5 ÷ 15	15 ÷ 25
	Число набл.	13	17	36	25	9
Вар. 2	Интервалы	–22 ÷ –12	–12 ÷ –2	–2 ÷ 8	8 ÷ 18	18 ÷ 28
	Число набл.	15	39	90	43	13

Вар. 3	Интервалы	–20 ÷ –10	–10 ÷ 0	0 ÷ 10	10 ÷ 20	20 ÷ 30
	Число набл.	14	55	68	43	20
Вар. 4	Интервалы	4 ÷ 6	6 ÷ 8	8 ÷ 10	10 ÷ 12	12 ÷ 14
	Число набл.	12	25	29	19	15
Вар. 5	Интервалы	– 20 ÷ –10	–10 ÷ 0	0 ÷ 10	10 ÷ 20	20 ÷ 30
	Число набл.	9	23	39	17	12
Вар. 6	Интервалы	–10 ÷ –6	– 6 ÷ – 2	– 2 ÷ 2	2 ÷ 6	6 ÷ 10
	Число набл.	10	20	39	22	9
Вар. 7	Интервалы	– 20 ÷ – 10	– 10 ÷ 0	0 ÷ 10	10 ÷ 20	20 ÷ 30
	Число набл.	10	25	33	19	13
Вар. 8	Интервалы	– 10 ÷ – 6	– 6 ÷ – 2	– 2 ÷ 2	2 ÷ 6	6 ÷ 10
	Число набл.	12	21	33	23	11
Вар. 9	Интервалы	– 20 ÷ – 10	– 10 ÷ 0	0 ÷ 10	10 ÷ 20	20 ÷ 30
	Число набл.	12	23	33	17	15
Вар. 10	Интервалы	– 10 ÷ – 6	– 6 ÷ – 2	– 2 ÷ 2	2 ÷ 6	6 ÷ 10
	Число набл.	12	19	36	23	10
Вар. 11	Интервалы	– 4 ÷ – 2	– 2 ÷ 0	0 ÷ 2	2 ÷ 4	4 ÷ 6
	Число набл.	11	19	39	21	10
Вар. 12	Интервалы	– 8 ÷ – 4	– 4 ÷ 0	0 ÷ 4	4 ÷ 8	8 ÷ 12
	Число набл.	10	22	37	20	11
Вар. 13	Интервалы	– 2 ÷ 2	2 ÷ 6	6 ÷ 10	10 ÷ 14	14 ÷ 18
	Число набл.	10	20	39	22	9
Вар. 14	Интервалы	– 4 ÷ 0	0 ÷ 4	4 ÷ 8	8 ÷ 12	12 ÷ 16
	Число набл.	11	19	39	21	10
Вар. 15	Интервалы	– 2 ÷ 0	0 ÷ 2	2 ÷ 4	4 ÷ 6	6 ÷ 8
	Число набл.	12	21	33	23	11
Вар. 16	Интервалы	0 ÷ 2	2 ÷ 4	4 ÷ 6	6 ÷ 8	8 ÷ 10
	Число набл.	12	19	37	21	11
Вар. 17	Интервалы	– 4 ÷ – 2	– 2 ÷ 0	0 ÷ 2	2 ÷ 4	4 ÷ 6
	Число набл.	10	22	37	20	11
Вар. 18	Интервалы	– 5 ÷ – 3	– 3 ÷ –1	– 1 ÷ 1	1 ÷ 3	3 ÷ 5
	Число набл.	11	19	39	21	10
Вар. 19	Интервалы	– 6 ÷ – 2	– 2 ÷ 2	2 ÷ 6	6 ÷ 10	10 ÷ 14
	Число набл.	12	22	30	26	10
Вар. 20	Интервалы	0 ÷ 2	2 ÷ 4	4 ÷ 6	6 ÷ 8	8 ÷ 10
	Число набл.	13	21	30	25	11

Вар. 21	Интервалы	– 5 ÷ – 3	– 3 ÷ – 1	–1 ÷ 1	1 ÷ 3	3 ÷ 5
	Число набл.	14	20	30	24	12
Вар. 22	Интервалы	– 4 ÷ – 2	– 2 ÷ 0	0 ÷ 2	2 ÷ 4	4 ÷ 6
	Число набл.	23	45	60	53	19
Вар. 23	Интервалы	– 4 ÷ 0	0 ÷ 4	4 ÷ 8	8 ÷ 12	12 ÷ 16
	Число набл.	21	46	62	54	17
Вар. 24	Интервалы	0 ÷ 2	2 ÷ 4	4 ÷ 6	6 ÷ 8	8 ÷ 10
	Число набл.	22	45	62	53	18
Вар. 25	Интервалы	– 5 ÷ – 3	– 3 ÷ – 1	– 1 ÷ 1	1 ÷ 3	3 ÷ 5
	Число набл.	20	46	64	54	16
Вар. 26	Интервалы	– 10 ÷ – 6	– 6 ÷ – 2	– 2 ÷ 2	2 ÷ 6	6 ÷ 10
	Число набл.	18	45	70	53	14
Вар. 27	Интервалы	– 6 ÷ – 2	– 2 ÷ 2	2 ÷ 6	6 ÷ 10	10 ÷ 14
	Число набл.	23	41	65	55	16
Вар. 28	Интервалы	– 8 ÷ – 4	– 4 ÷ 0	0 ÷ 4	4 ÷ 8	8 ÷ 12
	Число набл.	24	40	65	54	17
Вар. 29	Интервалы	– 10 ÷ – 6	– 6 ÷ – 2	– 2 ÷ 2	2 ÷ 6	6 ÷ 10
	Число набл.	12	20	35	22	11
Вар. 30	Интервалы	– 2 ÷ 0	0 ÷ 2	2 ÷ 4	4 ÷ 6	6 ÷ 8
	Число набл.	19	46	74	38	23

Пример 3.13. В виде статистического ряда приведены сгруппированные данные о времени безотказной работы 400 приборов.

Время безотказной работы в часах	от 0 до 500	от 500 до 1000	от 1000 до 1500	от 1500 до 2000
Число приборов	257	78	49	16

Согласуются ли эти данные с предположением, что время безотказной работы прибора имеет функцию распределения $F(x) = 1 - \exp(-x/500)$? Уровень значимости взять, например, равным 0,02.

Решение. Вычислим вероятности, приходящиеся в соответствии с гипотезой на интервалы:

$$p_1 = P(0 < x < 500) \quad F(500) - F(0) \quad 1 - e^{-1} - 1 + e^{0} \quad 1 - 1/e \approx 0,6324;$$

$$p_2 = P(500 < x < 1000) \quad 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} \quad 0,3676 - 0,1351 \approx 0,2325;$$

$$p_3 = P(1000 < x < 1500) \quad 1 - e^{-3} - 1 + e^{-2} \quad 0,1351 - 0,0499 \approx 0,0852;$$

$$p_4 = P(1500 < x < 2000) \quad 1 - e^{-4} - 1 + e^{-3} \quad 0,0499 - 0,0182 \approx 0,0317.$$

Вычислим χ^2.

ν_i	p_i	np_i	$\nu_i - np_i$	$(\nu_i - np_i)^2$	$\frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$
257	0,6324	252,96	4,04	16,32	0,06
0,06	0,2325	93	–15	225	2,42

49 16	0,0852 0,0317	34,08 12,68	14,92 3,32	222,6 11,02	6,53 0,97

$$\Sigma = \chi^2_{в} = 9,88.$$

Число степеней свободы равно трем, так как на четыре величины ν_i наложена только одна связь $\Sigma\nu_i = n$. Для трех степеней свободы и уровня значимости $\beta = 0,02$ находим из таблицы распределения «хи-квадрат» (см. прил., табл. П4) критическое значение $\chi^2_{\beta} = 9,84$. Значение $\chi^2_{в} = 9,88$ входит в критическую область. Вывод: гипотеза противоречит опытным данным. Гипотезу отвергаем и вероятность того, что мы при этом ошибаемся, равна 0,02.

Ответ. Гипотеза опытным данным противоречит.

Задача 3.13.1. Для изучения потока посетителей в систему массового обслуживания (например, магазин, сбербанк и т.д.) был произведен хронометраж интервалов между приходами посетителей Результаты измерений были представлены в виде статистического ряда.

Интервалы в минутах	(0;2)	(2;4)	(4;6)	(6;8)
Число наблюдений	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4

Согласуются ли эти результаты с предположением о том, что наблюдался простейший поток событий. (В простейшем потоке интервалы между моментами появления событий независимы и имеют показательный закон распределения: $F(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}, \ \ x \ge 0, \ \lambda > 0.$) Уровень значимости возьмите равным 0,05. (См. пример 3.13 и исходные данные.)

Указание. Считая представителем каждого интервала его середину, найдите сначала оценку λ на основе результатов наблюдений.

Исходные данные к задаче 3.13.1.

№	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	№	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4
1	135	39	17	9	**16**	165	54	22	9
2	170	48	19	13	**17**	175	49	27	9
3	167	51	22	10	**18**	164	56	21	9
4	196	68	26	10	**19**	182	52	25	11
5	193	73	25	9	**20**	194	71	26	0
6	136	37	18	9	**21**	183	51	24	12
7	196	69	24	11	**22**	165	41	23	11
8	166	52	23	9	**23**	158	40	21	11
9	164	42	24	10	**24**	163	43	25	9
10	168	50	21	11	**25**	256	99	34	11
11	177	47	25	11	**26**	157	41	22	10
12	169	49	20	12	**27**	181	53	26	10

13	195	70	25	10	**28**	257	98	33	12
14	160	52	23	9	**29**	212	81	37	10
15	176	48	26	10	**30**	180	54	27	9

Задача 3.13.2. В результате n наблюдений случайной величины X оказалось, что в интервалы $(x_0; x_0+2)$, $(x_0+2; x_0+4)$, $(x_0+4; x_0+6)$, $(x_0+6; x_0+8)$, $(x_0+8; x_0+10)$ попало соответственно k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 наблюдений. При уровне значимости β согласуются ли эти результаты с мнением, что наблюдаемая случайная величина имеет распределение Парето с плотностью вероятности $f(x) = \dfrac{a}{x_0}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{a+1}$ при $x_0 \le x$ и $f(x) = 0$ при $x < x_0$ ($a > 0$ и $x_0 > 0$). (См. пример 3.13 и исходные данные; x_0 — номер варианта.)

Указание. Найдите оценку параметра a по методу моментов.

Исходные данные к задаче 3.13.2.

№	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	№	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	№	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
1	34	17	7	9	3	**11**	47	18	10	8	7	**21**	134	43	13	9	1
2	47	25	14	9	5	**12**	42	30	24	19	15	**22**	136	39	15	9	1
3	51	29	15	9	6	**13**	79	37	19	15	10	**23**	71	42	29	12	6
4	41	20	17	12	0	**14**	217	41	24	11	7	**24**	126	29	15	9	1
5	61	24	17	10	8	**15**	118	45	16	11	10	**25**	102	40	23	11	4
6	55	24	14	10	7	**16**	96	47	28	19	10	**26**	98	43	31	17	11
7	47	22	17	12	2	**17**	61	40	27	22	10	**27**	128	89	61	34	28
8	39	26	24	18	13	**18**	54	29	25	22	20	**28**	132	46	12	10	0
9	75	33	19	13	10	**19**	45	25	18	9	3	**29**	96	47	28	19	10
10	44	22	10	8	6	**20**	134	42	14	10	0	**30**	96	47	29	17	11

Пример 3.14. Монету подбросили 50 раз. Герб выпал 32 раза. С помощью критерия «хи-квадрат» проверить, согласуются ли эти результаты с предположением, что подбрасывали симметричную монету.

Решение. Выдвинем гипотезу, что монета была симметричной. Это означает, что вероятность выпадения герба при каждом броске равна 1/2. В описанном опыте герб выпал 32 раза и 18 раз выпала цифра. Вычисляем $\chi^2_{\text{в}}$.

ν_i	p_i	np_i	$\nu_i - np_i$	$(\nu_i - np_i)^2$	$\dfrac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$
32	0,5	25	7	49	1,96
18	0,5	25	–7	49	1,96

$$\Sigma = \chi^2_{\text{в}} = 3{,}92.$$

Число степеней свободы для χ^2 равно $r = 2 - 1 = 1$, так как слагаемых два, а связь на величины ν_i наложена одна: $\nu_1 + \nu_2 = 50$. Для числа степеней свободы $r = 1$ и уровня значимости, например, равного $\beta = 0,05$ находим из таблицы распределения «хи-квадрат» (см. прил., табл. П4), что $P(\chi^2 \geq 3,84) = 0,05$. Это означает, что при уровне значимости $\beta = 0,05$ критическую область для величины χ^2 составляют значения $[3,84; +\infty)$. Вычисленное значение $\chi^2_{\text{в}} = 3,92$ попадает в критическую область, гипотеза отвергается. Вероятность того, что мы при таком выводе ошибаемся, равна 0,05.

Ответ. Предположение о симметричности монеты не согласуется с опытными данными.

Задача 3.14. Результаты подбрасывания игрального кубика представлены в виде статистического ряда:

Грань кубика	«1»	«2»	«3»	«4»	«5»	«6»
Число выпадений грани	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5	ν_6

Можно ли считать (при уровне значимости 0,05), что подбрасывали однородный и симметричный кубик? (См. пример 3.14 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.14.

№	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	№	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
1	17	30	11	25	15	22	**16**	21	20	13	17	30	19
2	18	27	23	12	27	13	**17**	11	21	14	25	19	30
3	26	14	19	11	21	29	**18**	23	17	21	19	27	13
4	16	28	13	25	20	18	**19**	20	21	11	31	14	23
5	29	16	21	15	12	27	**20**	19	24	20	28	17	12
6	17	30	19	21	20	13	**21**	11	25	25	15	17	30
7	25	19	30	11	21	14	**22**	23	12	12	27	18	27
8	19	27	13	23	17	21	**23**	19	11	11	21	26	14
9	31	14	23	20	21	11	**24**	13	25	25	20	16	28
10	28	17	12	19	24	20	**25**	21	15	15	12	29	16
11	25	15	22	17	30	11	**26**	19	21	21	20	17	30
12	18	27	23	12	27	13	**27**	30	11	11	21	25	19
13	26	14	19	11	21	29	**28**	13	23	23	17	19	27
14	16	28	13	25	20	18	**29**	23	20	20	21	31	14
15	29	16	21	15	12	27	**30**	12	19	19	24	28	17

Пример 3.15. Для каждого из 100 телевизоров регистрировалось число выходов из строя в течение гарантийного срока. Результаты представлены в виде статистического ряда:

Число выходов из строя	0	1	2	3	4 и более
Число телевизоров	54	27	14	5	0

Согласуются ли эти данные с предположением о том, что число выходов из строя имеет пуассоновский закон распределения?

Решение. Если случайная величина X — число выходов из строя телевизора, имеет пуассоновский закон распределения, то

$$P_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots,$$

где параметр λ неизвестен.

Оценим параметр из опытных данных. В законе распределения Пуассона параметр λ равен математическому ожиданию случайной величины. Оценкой математического ожидания служит среднее арифметическое:

$$\overline{X} = \frac{0\cdot 54 + 1\cdot 27 + 2\cdot 14 + 3\cdot 5 + 4\cdot 0}{100} = 0,7 \approx \lambda.$$

Итак, выдвигаем гипотезу, что изучаемая случайная величина имеет закон распределения

$$P(X = k) = \frac{(0,7)^k}{k!}e^{-0,7}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots .$$

Для проверки выдвинутой гипотезы зададим уровень значимости, например, равный 0,02. Последние три разряда, содержащие мало наблюдений, можно объединить. В итоге имеем три разряда и число степеней свободы равно $r = 3 - 2 = 1$, так как на величины ν_i наложены две связи: $\Sigma\nu_i = 100$ и $\overline{X} = 0,7$. Из таблицы распределения «хи-квадрат» (см. прил., табл. П4) для заданного $\beta = 0,02$ и числа степеней свободы $r = 1$ находим, что критическая область имеет вид $[5,41;\infty)$.

Вычислим теперь $\chi^2_{в}$. В соответствии с выдвинутой гипотезой разряды имеют вероятности:

$$P_0 = P(X = 0) = \frac{(0,7)^0}{0!}e^{-0,7} = 0,5; \qquad P_1 = P(X = 1) = \frac{(0,7)^1}{1!}e^{-0,7} = 0,35;$$

$$P_2 = P(X = 2) = 0,12; \qquad P_3 + P_4 + \ldots = 1 - 0,5 - 0,35 - 0,12 = 0,03.$$

Вычисление $\chi^2_{в}$ произведем, фиксируя промежуточные результаты в таблице.

ν_i	p_i	np_i	$\nu_i - np_i$	$(\nu_i - np_i)^2$	$\frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$
54	0,5	50	4	16	0,32
27	0,35	35	–8	64	1,83
19	19	15	4	16	1,07

$$\Sigma = \chi^2_{\text{в}} = 3{,}22.$$

Вычисленное значение в критическую область не входит. Вывод: гипотеза о пуассоновском законе распределения изучаемой случайной величины опытным данным не противоречит.

Ответ. Гипотеза не противоречит опытным данным.

Задача 3.15. После набора текста книги корректор подсчитал число опечаток на каждой странице книги. Результаты подсчета представлены в виде статистического ряда.

Число опечаток	0	1	2	3	4
Число страниц	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4

Согласуется ли с этими данными (при уровне значимости $\beta = 0{,}05$) утверждение о том, что число опечаток на странице имеет пуассоновский закон распределения? (См. пример 3.15 и исходные данные. Воспользуйтесь прил., табл. П5.)

Исходные данные к задаче 3.15.

№	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	№	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4
1	190	195	92	31	12	**16**	220	221	112	33	14
2	186	185	82	37	10	**17**	184	108	82	16	10
3	246	151	70	23	10	**18**	187	138	53	12	10
4	189	195	93	33	10	**19**	214	224	121	30	11
5	217	227	108	35	13	**20**	181	111	84	15	9
6	186	141	49	15	9	**21**	191	179	78	43	9
7	166	145	62	17	10	**22**	132	134	65	20	9
8	216	221	120	33	10	**23**	213	225	120	33	9
9	186	105	82	17	10	**24**	192	177	80	41	10
10	189	191	101	29	10	**25**	180	112	85	14	9
11	191	179	79	41	10	**26**	191	180	78	40	11
12	33	75	80	83	29	**27**	131	137	63	19	10
13	213	230	115	28	14	**28**	218	221	116	33	12
14	186	140	51	14	9	**29**	130	138	64	18	10
15	190	154	76	21	9	**30**	186	138	55	12	9

Пример 3.16. В течение пяти рабочих дней недели на контактный телефон фирмы поступило соответственно 69, 50, 59, 75, 47 звонков.

Можно ли считать при уровне значимости $\beta = 0,02$, что интенсивность звонков не зависит от дня недели?

Решение. Сначала построим критическую область. Общее количество звонков равно 300. Число степеней свободы равно $r = 5 - 1 = 4$, так как разрядов пять, а связей одна ($\sum_{i=1}^{5} \nu_i = 300$). По таблице распределения «хи-квадрат» находим для $r = 4$ и $\beta = 0,02$, что критическое значение $\chi^2_\beta = 11,67$. Итак, критическая область имеет вид $W_0 = [11,67; +\infty)$.

Выдвинем гипотезу, что интенсивность звонков не зависит от дня недели, т.е. с вероятностью 1/5 каждый вызов может поступить в любой рабочий день недели.

В предположении, что гипотеза верна, вычислим значение χ^2. Вычисление удобно оформить в виде таблицы.

ν_i	p_i	np_i	$\nu_i - np_i$	$(\nu_i - np_i)^2$	$\dfrac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$
69	1/5	60	9	81	1,35
50	1/5	60	–10	100	1,67
59	1/5	60	–1	1	0,017
75	1/5	60	15	225	3,75
47	1/5	60	–13	169	1,69

$$\Sigma \Rightarrow \chi^2_\text{в} = 8,4773.$$

Сумма элементов последнего столбца дает $\chi^2_\text{в} < 11,67$. Вывод: гипотеза опытным данным не противоречит.

Ответ. Гипотеза опытным данным не противоречит.

Задача 3.16. На шоссе между двумя городами расположены три автозаправочные станции. В течение часа на этих станциях заправилось соответственно k_1, k_2 и k_3 автомобилей. При уровне значимости $\beta = 0,05$ согласуется ли с этими данными предположение, что автозаправки одинаково популярны у автовладельцев? (См. пример 3.16 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.16.

№	k_1	k_2	k_3	№	k_1	k_2	k_3	№	k_1	k_2	k_3
1	52	73	76	**11**	61	81	59	**21**	51	40	65
2	78	69	54	**12**	69	53	79	**22**	64	39	50
3	53	70	57	**13**	54	69	57	**23**	47	62	38
4	50	39	52	**14**	38	52	60	**24**	61	46	38
5	48	63	39	**15**	46	61	38	**25**	60	35	52
6	38	53	61	**16**	35	52	60	**26**	55	60	38

7	38	49	63	**17**	60	55	38	**27**	62	44	56
8	40	65	51	**18**	55	62	45	**28**	45	66	54
9	39	50	64	**19**	56	44	62	**29**	66	54	45
10	47	38	62	**20**	46	59	60	**30**	45	55	62

3.6.3. Проверка гипотезы о независимости двух случайных величин

Постановка задачи. Можно ли по результатам наблюдений двух случайных величин сделать вывод об их зависимости или независимости.

В приложениях эта задача имеет следующую постановку. Пусть каждый элемент генеральной совокупности обладает двумя признаками *A* и *B,* признак *A* имеет градации (или уровни) $A_1, A_2, \ldots, A_k$, а признак *B* различается по уровням $B_1, B_2, \ldots, B_s$. Возникает вопрос, связаны ли друг с другом эти признаки?

Естественно считать, что *A* и *B* независимы, если при выборе любого элемента генеральной совокупности независимы события «*признак A принимает значение* A_i» и «*признак B принимает значение* B_j» при всех i и j. Формально это означает, что

$$P(A_iB_j) = P(A_i)P(B_j) \qquad (3.6.4)$$

для всех A_i и B_j. Проверить непосредственно выполнение соотношения (3.6.4) нет возможности, так как значения входящих в него вероятностей неизвестны.

Пусть у взятых наугад n членов генеральной совокупности определены величины признаков *A* и *B*. По этим результатам можно найти n_{ij} — число наблюдений пары значений признаков A_i и B_j. Тогда общее число наблюдений значений признака A_i равно

$$\sum_{j=1}^{s} n_{ij} = n_{i1} + n_{i2} + \ldots + n_{is} = n_{i*}. \qquad (3.6.5)$$

Аналогично, число наблюдений признака B_j равно

$$\sum_{i=1}^{r} n_{ij} = n_{1j} + n_{2j} + \ldots + n_{rj} = n_{*j}. \qquad (3.6.6)$$

Обычно результаты наблюдений оформляют в виде таблицы, которую называют *таблицей сопряженности признаков.*

Таблица сопряженности признаков

B \ A	A_1	A_2	$\cdots$	A_i	$\cdots$	A_k	
B_1	n_{11}	n_{21}	$\cdots$	n_{i1}	$\cdots$	n_{k1}	n_{*1}
B_2	n_{12}	n_{22}	$\cdots$	n_{i2}	$\cdots$	n_{k2}	n_{*2}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

B_j	n_{1j}	n_{2j}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{kj}	n_{*j}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
B_s	n_{1s}	n_{2s}	$\cdots$	n_{is}	$\cdots$	n_{ks}	n_{*s}
	n_{1*}	n_{2*}	$\cdots$	n_{i*}	$\cdots$	n_{k*}	n

Введем обозначения для вероятностей. Положим

$$p_{ij} = P(A_i B_j), \quad P(A_i) = \sum_{j=1}^{s} p_{ij} = p_{i*}, \quad P(B_j) = \sum_{i=1}^{r} p_{ij} = p_{*j}.$$

Необходимо проверить гипотезу H_0: $p_{ij} = p_{i*}p_{*j}$ для всех пар (i, j), $i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, s.$

Если наблюдений много (хотя бы несколько десятков), то по теореме Бернулли

$$\frac{n_{ij}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p_{ij}, \quad \frac{n_{i*}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p_{i*}, \quad \frac{n_{*j}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p_{*j}.$$

Критерий основан на сравнении наблюдаемых чисел появления комбинаций признаков с числами появлений, которые должны были бы быть, если бы признаки были независимы и не подвергались различным случайностям.

Поскольку вероятность наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, то за оценку вероятности совместного появления событий A_i и B_j можно принять произведение $\frac{n_{i*}}{n} \cdot \frac{n_{*j}}{n}$ (обе эти дроби — оценки соответствующих вероятностей). Тогда теоретическое число наблюдений пары A_i и B_j должно быть равным

$$n \cdot \frac{n_{i*}}{n} \cdot \frac{n_{*j}}{n} = \frac{n_{i*}n_{*j}}{n}.$$

Эту величину можно назвать теоретическим числом появлений пары A_i и B_j. При верной гипотезе величины $\frac{n_{i*}n_{*j}}{n}$ не должны значительно отличаться от n_{ij}. О степени расхождения между ними можно судить по величине

$$U^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i*}n_{*j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i*}n_{*j}}{n}}. \tag{3.6.7}$$

Если гипотеза H_0 о независимости верна, то при $n \to \infty$ величина U^2 имеет распределение «хи-квадрат» с $r = (k-1)(s-1)$ степенями свободы. Число степеней свободы определяется из следующих соображений. Всего слагаемых rs. На них накладываются связи. Прежде всего,

$$\sum_{ij} n_{ij} = n.$$

Определяя n_{i*}, мы воспользовались k равенствами (3.6.5), но в силу $\sum_{i=1}^{k} n_{i*} = n$, фактически независимых слагаемых будет $k-1$. Из тех же соображений в равенствах (3.6.6) только $s-1$ слагаемое является независимым. Поэтому число степеней свободы

$$r = ks - (k-1) - (s-1) - 1 = (k-1)(s-1).$$

В таблице распределения χ^2 по заданному уровню значимости β и числу степеней свободы $r = (k-1)(s-1)$ находим χ^2_β такое, что $P(U^2 \geq \chi^2_\beta)$. Критическая область для проверки гипотезы имеет вид $W_0 = [\chi^2_\beta, \infty)$. Остается вычислить фактическое значение U^2. Если оно попадает в критическую область, то гипотеза отвергается, при этом вероятность ошибочности этого вывода равна β. Если вычисленное значение U^2 не входит в критическую область, то гипотеза опытным данным не противоречит.

Пример 3.17. Данные о сдаче экзамена 246 студентами сгруппированы в зависимости от места окончания студентом средней школы.

Оценка	Москвичи	Ближнее Подмосковье	Иногородние	n_{*j}
Отлично	16	11	19	46
Хорошо	21	21	26	68
Удовл.	35	38	19	92
Неудовл.	13	10	17	40
n_{i*}	85	80	81	246

Можно ли по этим данным заключить, что успеваемость студентов практически не зависит от места получения ими среднего образования? (Уровень значимости взять, например, равным 0,05.)

Решение. Предположим, что успеваемость студентов не зависит от места получения среднего образования (это гипотеза, которую предстоит проверить). Число степеней свободы равно $r = (3-1)(4-1) = 6$. Для уровня значимости $\beta = 0{,}05$ и числа степеней свободы $r = 6$ из таблицы распределения «хи-квадрат» (см. прил., табл. П4) находим критическое значение $\chi^2_\beta = 12{,}59$. Критическую область W_0 составляют значения $U^2 \in [12{,}59; \infty)$. Вычислим фактическое значение U^2 по формуле (3.6.7):

$$U^2 = \left(16 - \frac{46 \cdot 85}{246}\right)^2 \Bigg/ \frac{46 \cdot 85}{246} + \left(11 - \frac{46 \cdot 80}{246}\right)^2 \Bigg/ \frac{46 \cdot 80}{246} +$$

$$+\left(19-\frac{46\cdot 81}{246}\right)^2 \Bigg/ \frac{46\cdot 81}{246}+\left(21-\frac{68\cdot 85}{246}\right)^2 \Bigg/ \frac{68\cdot 85}{246}+\ldots+$$

$$+\left(17-\frac{40\cdot 81}{246}\right)^2 \Bigg/ \frac{40\cdot 81}{246}=11,047.$$

Вычисленное значение $U^2=11,047<12,59$, т.е. не является критическим. Расхождения в данных по успеваемости можно объяснить случайными факторами (случайный отбор студентов, случайности при выборе билета на экзамене и т.д.).

Ответ. Предположение о независимости успеваемости студентов от места получения ими среднего образования не противоречит опытным данным.

Задача 3.17. Приведены данные о возрасте и уровне образования (среднее, среднее профессиональное, высшее) у работников некоторой фирмы. При уровне значимости 0,05 проверьте гипотезу о том, что уровень образования и возраст независимы.

Образование / Возраст	Среднее	Среднее профессиональное	Высшее	
до 30 лет	n_{11}	n_{21}	n_{31}	n_{*1}
больше 30 лет	n_{12}	n_{22}	n_{32}	n_{*2}
	n_{1*}	n_{2*}	n_{3*}	n

(См. пример 3.17 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.17.

№	n_{11}	n_{21}	n_{31}	n_{12}	n_{22}	n_{32}	№	n_{11}	n_{21}	n_{31}	n_{12}	n_{22}	n_{32}
1	20	13	18	23	20	26	**16**	21	25	20	29	21	28
2	36	32	21	14	11	16	**17**	28	32	19	30	21	31
3	25	18	21	19	22	15	**18**	15	22	19	21	18	25
4	19	22	15	25	18	21	**19**	24	20	29	22	26	35
5	17	18	12	22	14	17	**20**	16	11	14	21	32	36
6	31	21	30	19	32	28	**21**	21	18	25	15	22	19
7	16	20	33	21	14	26	**22**	28	30	17	32	22	21
8	21	22	32	17	30	28	**23**	26	28	22	35	27	32
9	35	26	22	29	20	24	**24**	26	14	21	33	20	16
10	28	21	29	20	25	21	**25**	25	21	27	34	35	38
11	32	27	35	22	28	26	**26**	18	23	16	17	14	22
12	38	35	34	27	21	25	**27**	23	14	25	15	10	13
13	13	10	15	25	14	23	**28**	26	20	23	18	13	20
14	39	35	34	27	19	26	**29**	26	19	27	34	35	38
15	22	14	17	16	23	18	**30**	29	25	28	37	40	41

3.6.4. Проверка параметрических гипотез

Критерий для проверки гипотезы формируют за счет отнесения к критической области выборок, которые при данной гипотезе наименее вероятны. Но может оказаться, что одинаково маловероятных выборок при данной гипотезе больше, чем это необходимо для формирования критерия данного уровня значимости. Тогда трудно решить какие именно выборки следует включать в критическую область. Этих трудностей можно избежать, если вместе с проверяемой гипотезой рассматривать и альтернативные гипотезы.

Пусть случайная величина X имеет функцию распределения $F(x,\theta)$, тип которой известен. Значение параметра θ неизвестно, но для θ определено множество допустимых значений Ω. Обычно гипотеза об истинном значении параметра θ_0 сводится к утверждению, что θ_0 принадлежит некоторому множеству $\omega \in \Omega$. Например, в качестве ω может быть названо одно из допустимых значений.

Определение. *Параметрической статистической гипотезой* H_0 называется утверждение, что $\theta_0 \in \omega$, против альтернативы H_1, что $\theta_0 \in \Omega \setminus \omega$.

Гипотезу H_0 называют *нулевой гипотезой* и считают, что она истинна, если действительно $\theta_0 \in \omega$. При $\theta_0 \notin \omega$ нулевую гипотезу называют *ложной*.

Гипотеза, однозначно определяющая вероятностное распределение, называется *простой*. В противном случае гипотезу называют сложной. Например, гипотеза о симметричности и однородности игрального кубика проста, так как однозначно определяет вероятности всех исходов при подбрасывании кубика. Гипотеза о том, что ошибка измерений имеет нормальный закон распределения, является сложной, так как при разных значениях параметров получаются разные нормальные законы распределения.

Простая параметрическая гипотеза против простой альтернативы может быть описана указанием одной точки θ_0 в ω и одной точки θ_1 в $\Omega \setminus \omega$.

Параметрическую гипотезу проверяют по обычной схеме. Производят n наблюдений случайной величины, в результате которых получают некоторые результаты $\vec{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. В выборочном пространстве W формируется критическая область W_0, при попадании выборки в которую гипотеза отвергается. Но выбор критической области при наличии альтернативной гипотезы имеет свои особенности.

При любом критерии проверки статистической гипотезы по результатам наблюдений возможны ошибки двух типов: *ошибка первого* *рода* возникает при отклонении гипотезы H_0, когда она верна, а *ошибка второго рода* совершается, если принимается ложная гипотеза H_0.

Обозначим через $P(\vec{X} \in W_0 / \theta)$ вероятность того, что выборка $\vec{X}$ попадет в критическую область, если значение параметра равно θ. Эта вероятность как функция параметра называется *функцией мощности* критерия W_0. При каждом θ эта функция показывает с какой вероятностью статистический критерий W_0 отклоняет гипотезу, если на самом деле X имеет функцию распределения $F(x,\theta)$.

Заметим, что $\alpha = P(\vec{X} \in W_0 / \theta_0)$ при $\theta_0 \in \omega$ равна вероятности ошибки первого рода. Величина $\beta = 1 - P(\vec{X} \in W_0 / \theta_0)$ при $\theta_0 \in \Omega \setminus \omega$ равна вероятности ошибки второго рода. Это вероятность непопадания в критическую область, т.е. вероятность принятия гипотезы H_0: $\theta_0 \in \omega$, когда эта гипотеза ложная.

Разным критериям для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 сопутствуют разные вероятности α и β. Естественно желание сделать обе эти вероятности минимально возможными. Но обычно уменьшение одной из них влечет увеличение другой. Необходимо компромиссное решение, которое достигается следующим образом. Выбирают вероятность практически невозможного события в качестве уровня значимости α. Это и есть вероятность ошибки первого рода. Критическую область формируют так, чтобы при заданном уровне значимости α, вероятность ошибки второго рода была как можно меньше.

Учет ошибок первого и второго рода позволяет сравнивать между собой критерии. Пусть W_0^1 и W_0^2 — два критерия для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1, имеющие одинаковые уровни значимости α. Если при этом

$$P(\vec{X} \in W_0^2 / \theta_0) \le P(\vec{X} \in W_0^1 / \theta_0) \quad \text{при } \theta_0 \in \omega$$

и

$$P(\vec{X} \in W_0^2 / \theta_0) > P(\vec{X} \in W_0^1 / \theta_0) \quad \text{при } \theta_0 \in \Omega \setminus \omega,$$

то критерий W_0^2 называют *более мощным*, чем W_0^1. Из определения видно, что W_0^2 имеет большую вероятность отвергнуть ложную гипотезу при одинаковой с W_0^1 вероятности ошибки первого рода. Если W_0^2 мощнее любого другого критерия, имеющего уровень значимости α, то W_0^2 называют *наиболее мощным критерием.*

Пусть необходимо проверить гипотезу $H_0:\ \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1:\ \theta = \theta_1$. Для определенности рассмотрим непрерывную случайную величину X с функцией плотности вероятности $f(x,\theta)$, где параметр θ неизвестен. Если наблюдения независимы, то выборочная точка

$\vec{X}$, будучи многомерной случайной величиной, имеет функцию плотности вероятности

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta).$$

Согласно сформулированным требованиям относительно ошибок первого и второго рода, критическую область следует выбрать так, чтобы при заданном α вероятность

$$P(\vec{X} \in W_0 / \theta_0) = \int \underset{W_o}{\dots} \int f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_0) dx_1, \dots, dx_n = \alpha$$

и при этом вероятность

$$P(\vec{X} \in W_0 / \theta_1) = \int \underset{W_o}{\dots} \int f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1) dx_1, \dots, dx_n$$

была наибольшей.

Такую задачу впервые решили в начале тридцатых годов прошлого века Ю. Нейман и Э. Пирсон, и полученный ими результат носит их имя. Для формулировки этого результата понадобится понятие *взаимной абсолютной непрерывности* функций, которое состоит в том, что в каждой точке функции или обе равны нулю, или обе нулю не равны.

Лемма Неймана—Пирсона.

Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_0)$ и $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1)$ взаимно абсолютно непрерывны, то для любого α $(0 < \alpha < 1)$ можно указать такое $C > 0$, что точки выборочного пространства, в которых

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1) \geq C f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_0) \tag{3.6.8}$$

образуют критическую область W_0, для которой $P(\vec{X} \in W_0 / \theta_0) = \alpha$. При этом W_0 будет наиболее мощным критерием для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1.

Замечание. Для дискретных величин в неравенстве (3.6.8) роль $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ играет вероятность именно тех результатов наблюдений, которые получены, т.е.

$$P\big((X_1, X_2, \dots, X_n) / \theta\big) = P(X = X_1 / \theta) P(X = X_2 / \theta) \cdot \ldots \cdot P(X = X_n / \theta).$$

Пример 3.18. Известно, что при тщательном перемешивании теста изюмины распределяются в нем примерно по закону Пуассона, т.е. вероятность наличия в булочке k изюмин равна приблизительно $\lambda^k e^{-\lambda} / k!$, где λ — среднее число изюмин, приходящихся на булочку. При выпечке булочек полагается по стандарту на 1000 булочек 9000 изюмин. Имеется подозрение, что в тесто засыпали изюмин меньше, чем полагается по стандарту. Для проверки выбирается одна булочка и пересчитываются изюмины в ней.

Построить критерий для проверки гипотезы о том, что $\lambda_0 = 9$ против альтернативы $\lambda_1 < \lambda_0$. Вероятность ошибки первого рода взять приблизительно 0,02.

Решение. Для проверки гипотезы $\lambda_0 = 9$ против альтернативы $\lambda_1 < \lambda_0$ по лемме Неймана—Пирсона в критическую область следует включить те значения k, для которых

$$\frac{\lambda_1^k \exp(-\lambda_1) / k!}{\lambda_0^k \exp(-\lambda_0) / k!} \geq C,$$

где C — некоторая постоянная.

Тогда $(\lambda_1 / \lambda_0)^k \exp(\lambda_0 - \lambda_1) \geq C$. Логарифмирование этого неравенства приводит к неравенству $k \ln(\lambda_1 / \lambda_0) + \lambda_0 - \lambda_1 \geq \ln C$. Так как $\lambda_1 / \lambda_0 < 1$, то $\ln(\lambda_1 / \lambda_0) < 0$ и $k \leq (\ln C + \lambda_1 - \lambda_0) / \ln(\lambda_1 / \lambda_0) = k_1$.

Итак, в критическую область следует включить значения $\{0, 1, 2, \ldots, k_1\}$, где значение k_1 зависит от ошибки первого рода. При $\lambda_0 = 9$ по формуле Пуассона получаем вероятности:

$$P(0) = 0{,}000129, \qquad P(1) = 0{,}001111, \qquad P(2) = 0{,}004998,$$

$$P(3) = 0{,}014996, \qquad P(4) = 0{,}033735.$$

Отсюда следует, что если включить в критическую область значения для числа изюмин $k = 0, 1, 2, 3$, то вероятность ошибки первого рода будет равна $0{,}000129 + 0{,}001111 + 0{,}004998 + 0{,}014996 = 0{,}021228$. Итак, если изюмин в булке окажется три или меньше гипотезу следует отвергнуть в пользу ее альтернативы.

Заметим, что при добавлении в критическую область значения $k = 4$ вероятность ошибки первого рода останется достаточно малой $\approx 0{,}05$.

Ответ. $W_0 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Задача 3.18. Пусть p — вероятность того, что взятый наугад человек обладает некоторой особенностью (например, дальтоник, или имеет редкую группу крови). Построить критерий уровня значимости $\approx \alpha$ для проверки гипотезы H_0: $p = p_0$ против альтернативы H_1: $p = p_1 > p_0$ по результатам обследования n наугад взятых людей.

Указание. Обследование каждого человека можно считать независимым опытом. Так как в условиях задачи вероятность появления события в каждом опыте p мала, а опытов много, то можно считать, что число людей с особенностью распределено приблизительно по закону Пуассона с параметром $\lambda = np$.

(См. пример 3.18, исходные данные и прил., табл. П5.)

Исходные данные к задаче 3.18.

№	p_0	n	α	№	p_0	n	α	№	p_0	n	α

1	0,015	20	0,03	**11**	0,04	20	0,05	**21**	0,01	80	0,02
2	0,01	30	0,03	**12**	0,045	20	0,02	**22**	0,01	90	0,03
3	0,01	40	0,05	**13**	0,05	100	0,02	**23**	0,015	40	0,05
4	0,01	50	0,02	**14**	0,05	20	0,02	**24**	0,01	100	0,02
5	0,01	60	0,01	**15**	0,05	40	0,02	**25**	0,015	20	0,05
6	0,01	70	0,01	**16**	0,02	30	0,02	**26**	0,03	20	0,05
7	0,02	20	0,02	**17**	0,02	40	0,02	**27**	0,04	25	0,02
8	0,025	20	0,03	**18**	0,02	50	0,03	**28**	0,015	40	0,05
9	0,035	20	0,05	**19**	0,025	40	0,03	**29**	0,03	100	0,04
10	0,04	15	0,01	**20**	0,025	32	0,05	**30**	0,04	50	0,05

Пример 3.19. Изготовитель утверждает, что в данной большой партии изделий только 10% изделий низкого сорта. Было отобрано наугад пять изделий и среди них оказалось три изделия низкого сорта. С помощью леммы Неймана—Пирсона построить критерий и проверить гипотезу о том, что процент изделий низкого сорта действительно равен 10 ($H_0: \ p = p_0 = 0{,}1$) против альтернативы, что процент низкосортных изделий больше 10 ($H_1: \ p = p_1 > p_0$). Вероятность ошибки первого рода выбрать 0,01. Какова вероятность ошибки второго рода, если $p_1 = 0{,}6$?

Решение. Согласно проверяемой гипотезе $p_0 = 0{,}1$ при альтернативном значении $p_1 > p_0$. По лемме Неймана—Пирсона в критическую область следует включить те значения k, для которых

$$\frac{P_5(k / p_1)}{P_5(k / p_0)} = \frac{C_5^k (p_1)^k (1-p_1)^{5-k}}{C_5^k (p_0)^k (1-p_0)^{5-k}} \geq C,$$

где C — некоторая постоянная.

После сокращения на C_5^k неравенство приводится к виду

$$(p_1 / p_0)^k \left[(1-p_1)/(1-p_0)\right]^{5-k} \geq C.$$

Прологарифмируем обе части неравенства

$$k \ln(p_1 / p_0) + (5-k)\ln\left[(1-p_1)/(1-p_0)\right] \geq \ln C$$

или

$$k\left[\ln(p_1 / p_0) - \ln\left[(1-p_1)/(1-p_0)\right]\right] \geq \ln C - 5\ln\left[(1-p_1)/(1-p_0)\right].$$

Так как $p_1 / p_0 > 1$, а $(1-p_1)/(1-p_0) < 1$, то выражение в скобке неотрицательно. Поэтому

$$k \geq \frac{\ln C - 5\ln\left[(1-p_1)/(1-p_0)\right]}{\ln(p_1 / p_0) - \ln\left[(1-p_1)/(1-p_0)\right]} = k_1$$

Значит, в критическую область следует включить те из значений $\{0,1,2,3,4,5\}$, которые больше некоторого k_1, зависящего от уровня значимости (от вероятности ошибки первого рода). Для определения k_1, в предположении, что гипотеза верна, вычисляем вероятности:

$$P_5(5) = C_5^5(0,1)^5(0,9)^0 = 0,00001, \qquad P_5(4) = C_5^4(0,1)^4(0,9)^1 = 0,00045,$$

$$P_5(3) = C_5^3(0,1)^3(0,9)^2 = 0,0081, \qquad P_5(2) = C_5^2(0,1)^2(0,9)^3 = 0,0729.$$

Если к критической области отнести значения $\{3,4,5\}$, то вероятность ошибки первого рода будет равна $\alpha = 0,00001 + 0,00045 + {}$ $+ 0,0081 = 0,00856 < 0,01$.

В условиях задачи оказалось, что среди пяти проверенных три изделия бракованных. Значение $k = 3$ входит в критическую область. Гипотезу $p_0 = 0,1$ отвергаем в пользу альтернативы. Вероятность того, что мы это делаем ошибочно, меньше 0,01.

Вероятностью ошибки второго рода называется вероятность принять ложную гипотезу. Гипотеза $p_0 = 0,1$ будет принята при $k = 0,1,2$. Если вероятность изготовления бракованного изделия на самом деле равна $p_1 = 0,6$, то вероятность принять ложную гипотезу $p_0 = 0,1$ равна

$$C_5^0(0,6)^0(0,4) + C_5^1(0,6)(0,4)^4 + C_5^2(0,6)^2(0,4)^3 = 0,31744 \approx 1/3.$$

Вероятность ошибки второго рода велика потому, что критерий построен на скудном статистическом материале (всего пять наблюдений!).

Ответ. При уровне значимости 0,01 нулевую гипотезу отвергаем.

Задача 3.19.1. Изготовитель утверждает, что в крупной партии доля изделий высшего сорта равна p_0. Контракт предусматривает проверку взятых наугад n изделий. В зависимости от их качества решается вопрос о приемке партии, или отказе от нее. Построить критерий для проверки гипотезы $H_0: p = p_0$ против альтернативы $H_1: p = p_1 < p_0$. Вероятность ошибки первого рода взять равной 0,05. (См. пример 3.19 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.19.1.

№	p_0	n	№	p_0	n	№	p_0	n	№	p_0	n	№	p_0	n
1	0,9	6	**7**	0,85	9	**13**	0,9	9	**19**	0,85	6	**25**	0,9	14
2	0,8	7	**8**	0,95	10	**14**	0,8	10	**20**	0,95	7	**26**	0,95	12
3	0,85	8	**9**	0,9	8	**15**	0,85	7	**21**	0,9	12	**27**	0,8	14
4	0,95	9	**10**	0,8	9	**16**	0,95	8	**22**	0,95	14	**28**	0,85	12
5	0,9	7	**11**	0,85	10	**17**	0,9	10	**23**	0,8	12	**29**	0,9	11
6	0,8	8	**12**	0,95	6	**18**	0,8	6	**24**	0,85	14	**30**	0,95	11

Задача 3.19.2. Устроители лотереи утверждают, что в среднем каждый k-й билет выигрышный. Вы приобрели n билетов. Из них выигрышными оказались m билетов. При уровне значимости β, есть ли

основания Вам сетовать на свою особую невезучесть («Мне всегда не везет»), или стоит усомниться в правдивости устроителей лотереи?

Указание. Пусть p — вероятность купить выигрышный билет. Проверить гипотезу $H_0: \quad p = p_0 = 1/k$ против альтернативы $H_1: \ p = p_1 < p_0$.

(См. пример 3.19 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.19.2.

№	k	n	m	β	№	k	n	m	β	№	k	n	m	β
1	3	10	1	0,05	**11**	4	12	1	0,05	**21**	3	12	2	0,03
2	2	8	0	0,05	**12**	5	10	1	0,03	**22**	2	10	1	0,05
3	4	9	0	0,03	**13**	3	12	1	0,03	**23**	4	12	1	0,05
4	5	10	1	0,04	**14**	2	8	1	0,05	**24**	5	9	1	0,02
5	3	12	0	0,02	**15**	4	10	1	0,02	**25**	3	10	1	0,02
6	2	10	1	0,05	**16**	5	12	1	0,05	**26**	2	9	1	0,05
7	4	12	1	0,02	**17**	3	10	0	0,02	**27**	4	12	1	0,04
8	5	9	1	0,03	**18**	2	12	2	0,05	**28**	5	10	0	0,03
9	3	10	0	0,05	**19**	4	9	1	0,03	**29**	3	12	1	0,05
10	2	9	2	0,04	**20**	5	10	0	0,02	**30**	4	10	1	0,05

Пример 3.20. Количество первосортных изделий в крупной партии не должно быть менее 90%. Для проверки выбрали наугад 100 изделий. Среди них оказалось только 87 изделий первого сорта. Можно ли считать при вероятности ошибки первого рода, равной 0,05, что в данной партии менее 90 % первосортных изделий?

Решение. Построим критическую область для проверки гипотезы $H_0: \quad p = p_0 = 0{,}9$ против альтернативы $H_1: \quad p = p_1 < 0{,}9$ и посмотрим, попадает ли значение 87 в критическую область. Из леммы Неймана—Пирсона следует (см. рассуждения в примере 3.19 только с учетом неравенства $p_1 < p_0$), что существует такое k_0, что меньшее или равное k_0 число первосортных изделий следует отнести к критической области. Так как независимых опытов проделано много $(n = 100)$, то можно воспользоваться интегральной теоремой Муавра—Лапласа, согласно которой

$$P_{100}(0 \le \mathrm{k} \le \mathrm{k}_0) = \Phi\left(\frac{k_0 - 100 \cdot 0{,}9}{\sqrt{100 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 100 \cdot 0{,}9}{\sqrt{100 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) = 0{,}05.$$

Откуда, с учетом нечетности функции Лапласа, имеем $\Phi\left(\frac{k_0 - 90}{3}\right) + 0{,}5 = 0{,}05$ или $\Phi\left(\frac{90 - k_0}{3}\right) = 0{,}45.$ Из таблицы функции Лапласа (см. прил., табл. П2) находим, что $\Phi(1,65) = 0,45$. Поэтому $\dfrac{90 - k_0}{3} = 1,65$ и $k_0 = 90 - 3 \cdot 1,65$. Так как k_0 — целое число, то $k_0 = 85$. Итак, критическую область для проверки нулевой гипотезы составляют значения $k \in [0;85]$. Число 87 в критическую область не попадает. Нет оснований сомневаться в том, что в данной партии не менее 90% первосортных изделий.

Ответ. Наличие в выборке менее 90% первосортных изделий можно объяснить случайностями выборки.

Задача 3.20. *В нечетных вариантах*: изготовитель крупной партии изделий утверждает, что в партии не более m% изделий со скрытым дефектом (брак). Для проверки выбрано наугад 100 изделий. Из них оказалось k изделий бракованных.

В четных вариантах: изготовитель крупной партии изделий утверждает, что в партии не менее m% изделий высшего качества. Для проверки выбрано наугад 80 изделий. Из них оказалось k изделий высшего качества.

При вероятности ошибки первого рода α можно ли согласиться с утверждением поставщика?

(См. пример 3.20 и исходные данные, $\alpha = 0,02$ в нечетных вариантах, $\alpha = 0,05$ в четных вариантах.)

Исходные данные к задаче 3.20.

№	*m*	*k*	№	*m*	*k*	№	*m*	*k*	№	*m*	*k*	№	*m*	*k*	№	*m*	*k*
1	10	15	**6**	60	53	**11**	6	11	**16**	40	31	**21**	7	13	**26**	40	31
2	50	41	**7**	9	15	**12**	50	42	**17**	9	14	**22**	70	63	**27**	8	15
3	8	14	**8**	70	62	**13**	5	9	**18**	55	48	**23**	5	10	**28**	45	38
4	40	32	**9**	10	16	**14**	45	36	**19**	10	17	**24**	50	43	**29**	5	11
5	7	12	**10**	55	46	**15**	8	13	**20**	60	52	**25**	9	13	**30**	70	64

Пример 3.21. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(m,\sigma^2)$, причем значение дисперсии σ^2 известно. Получены $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты n независимых наблюдений случайной величины. Построить критерий для проверки гипотезы $H_0: \ m = m_0$ против альтернативы $H_1: \ m = m_1 < m_0$, полагая вероятность ошибки первого рода $\alpha = 0,05$.

Решение. Так как наблюдения независимы, то n-мерная случайная величина $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ имеет плотность вероятности, равную произведению плотностей вероятности своих компонент:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n = \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Поэтому по лемме Неймана—Пирсона к критической области должны быть отнесены те выборки, для которых

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n, m_1)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n, m_0)} = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_0)^2}{2\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2}{2\sigma^2}\right) \geq C.$$

После логарифмирования неравенства получаем

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2 \geq 2\sigma^2 \ln C = C_1,$$

откуда

$$2(m_1 - m_0)\sum_{i=1}^{n} x_i \geq C_1 + n(m_0^2 + m_1^2) = C_2.$$

Так как по условию $m_1 < m_0$, то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{C_2}{2(m_1 - m_0)} = C_3.$$

Итак, в критическую область следует включать выборки, для которых $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq C_3$. Свяжем значение C_3 с величиной ошибки первого рода. Так как нормальный закон устойчив, то сумма $\sum_{i=1}^{n} x_i$ имеет тоже нормальный закон распределения $N(nm, n\sigma^2)$. Если гипотеза H: $m = m_0$ верна, то значение C_3 можно найти из условия

$$P\left(-\infty < \sum_{i=1}^{n} x_i < C_3\right) \quad \Phi\left(\frac{C_3 - n m_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - n m_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad \alpha = 0,05.$$

Отсюда $\Phi\left(\frac{C_3 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0,05 - \frac{1}{2} < 0$. Это означает, что аргумент функции Лапласа отрицателен. В силу нечетности функции Лапласа имеем $\Phi\left(\frac{n m_0 - C_3}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2} - 0,05 = 0,45$. По таблице функции Лапласа находим, что $\Phi(1,65) = 0,45$. Поэтому $\frac{n m_0 - C_3}{\sigma\sqrt{n}} = 1,65$. Значит, $C_3 = nm_0 - 1,65\sigma\sqrt{n}$. Итак, если сумма $\sum_{i=1}^{n} x_i$ окажется меньше величины $nm_0 - 1{,}65\sigma\sqrt{n}$, то гипотезу H_0 следует отвергнуть в пользу альтернативной гипотезы H_1.

Ответ. $W_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i < nm_0 - 1{,}65\sigma\sqrt{n} \right\}$.

Задача 3.21. Физическая величина a измеряется прибором, средний квадрат ошибки которого равен σ^2. Получены результаты n независимых измерений $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Здесь $X_i = a + Y_i$, где Y_i — ошибка прибора при i-м измерении.

Полагая, что ошибки измерений имеют нормальный закон распределения $N(0;\sigma^2)$, постройте наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $H_0:\ a = a_0$ против альтернативы: *для нечетных вариантов* $H_1:\ a = a_1 < a_0$; *для четных вариантов* $H_1:\ a = a_1 > a_0$.

Вероятность ошибки первого рода возьмите равной 0,02.

Указание. Так как $M(X_i) = M(a + Y_i) = M(a) + M(Y_i) = a + 0 = a$, а $D(X_i) = D(a + Y_i) = D(a) + D(Y_i) = 0 + \sigma^2$, то $X_i \sim N(a;\sigma^2)$.

(См. пример 3.21, a — номер варианта, n равно номеру варианта плюс 50).

3.6.5. Проверка гипотезы о значении медианы

Пусть X непрерывная случайная величина, а m — значение ее медианы, т.е. $P(X \le m) = P(X \ge m) = 1/2$. Проделано n независимых наблюдений над случайной величиной. Можно ли считать по их результатам $X_1, X_2, \ldots, X_n$, что значение медианы равно m_0 против альтернативы, что значение медианы равно m_1 (для определенности пусть $m_1 < m_0$)?

Предположим, что значение m действительно равно m_0 (т.е. верна нулевая гипотеза $H_0:\ m = m_0$) и рассмотрим последовательность величин

$$X_1 - m_0, X_2 - m_0, \ldots, X_n - m_0.$$

Если гипотеза верна, то $P(X - m_0 \ge 0) = P(X - m_0 \le 0) = 1/2$. Подсчитаем число положительных разностей $X - m_0$ в нашей выборке и обозначим его через S.

Величину S можно представить в виде $S = \sum_{i=1}^{n} I(X_i - m_0)$, где $I(x) = 1$ при $x > 0$ и $I(x) = 0$ при $x < 0$. Заметим, что случайная величина $I(x)$ принимает два значения 0 и 1 с вероятностями $p = 1/2$ каждое, если гипотеза верна. Поэтому при верной нулевой гипотезе величина S имеет биномиальное распределение:

$$P(S=k)=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Очевидно, что при медиане равной $m_1<m_0$ вероятность $P(X>m_0)=$ $=p_1<1/2$.В итоге задача сводится к проверке гипотезы $H_0:\quad p=p_0=1/2$ против альтернативы $H_1:\quad p=p_1<1/2$.

Согласно лемме Неймана—Пирсона для любого $0<\alpha<1$ существует такая постоянная величина $C>0$, что значения k, для которых

$$\frac{C_n^k p_1^k(1-p_1)^{n-k}}{C_n^k p_0^k(1-p_0)^{n-k}}\geq C$$

образуют критическую область наиболее мощного критерия. Так же как и в примере 3.19 легко показать, что в критическую область следует относить в первую очередь самые маленькие значения k. Остается только найти наибольшее k, для которого $\sum\limits_{i=1}^{k}C_n^k(1/2)^n\leq\alpha$, где α — вероятность ошибки первого рода.

Пример 3.22. По результатам независимых наблюдений случайной величины $X_1=3{,}05$; $X_2=2{,}9$; $X_3=3{,}4$; $X_4=2{,}3$; $X_5=4{,}7$; $X_6=3{,}27$; $X_7=2{,}35$; $X_8=1{,}54$; $X_9=4{,}1$; $X_{10}=2{,}8$; $X_{11}=3{,}9$; $X_{12}=1{,}8$ исследователь в отношении медианы m отверг гипотезу $H_0:\quad m=m_0=3{,}5$ и принял альтернативную гипотезу $H_1:\quad m=m_1<3{,}5$. Какова вероятность ошибки первого рода при таком выводе?

Решение. Ошибка первого рода совершается, когда отвергается верная гипотеза. Предположим, что нулевая гипотеза верна и медиана m действительно равна 3,5. Только в трех наблюдениях результаты превосходят 3,5. Как было показано выше, при альтернативе $m=m_1<3{,}5$ в критическую область следует включать в первую очередь малые значения k. Значение $k=3$ было отнесено исследователем к критической области. В предположении, что гипотеза верна имеем

$$P_{12}(0)=C_{12}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{1}{4096};\quad P_{12}(1)=C_{12}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{12}{4096};$$

$$P_{12}(2)=C_{12}^2\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{66}{4096};\quad P_{12}(3)=C_{12}^3\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{220}{4096}.$$

Откуда $\sum_{k=0}^{3} C_{12}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{299}{4096} \approx 0,07.$

Ответ. $\frac{299}{4096} \approx 0,07.$

Задача 3.22. По результатам независимых наблюдений случайной величины $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7,\ X_8,\ X_9,\ X_{10},\ X_{11},\ X_{12}$ исследователь в отношении медианы m отверг гипотезу $H_0:\quad m = m_0 = 3,5$ и принял альтернативную гипотезу $H_1:\quad m = m_1 < 3,5$. Какова вероятность ошибки первого рода при таком выводе? (См. пример 3.22 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.22.

№	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	med
1	1,3	–0,1	0,3	–0,9	1,9	1,1	0,8	2,1	1,5	1,2	2,0	1,4	1,6
2	0,7	2,1	–0,2	1,9	–0,4	2,4	1,8	1,9	–0,3	0,5	2,1	–0,5	1
3	–0,5	2,3	1,5	–0,3	2,9	2,1	0,7	1,2	1,8	3,3	1,4	1,6	1,5
4	1,3	2,7	0,2	2,5	3	2,4	0,4	2,5	0,3	0,9	0,7	2,3	1,7
5	3,5	0,9	3,2	3	1,8	3,1	0,8	2,8	1,7	1,9	1,2	2,1	2
6	1,2	3,7	2,3	4,2	1,4	3,2	4	3,6	1,3	1,6	1,1	1,2	2,5
7	3,9	1,7	4,5	2,5	1,9	4,7	4,1	1,8	3,7	3,2	2,5	1,4	3
8	4,4	3	2,2	2,4	5	4,2	2,3	4,6	5,2	2,6	3,3	2,8	3,2
9	2,9	5,5	4,9	2,7	3,5	4,7	5,7	2,8	5,1	4,2	2,8	3,2	4
10	5,3	3,1	3,9	6,1	5,9	5,1	3,3	3,2	5,5	3,8	3,3	3,1	4,5
11	3,6	5,8	4,5	6,6	5,4	6,4	3,8	6,1	3,7	4,1	2,9	3,5	4,8
12	4,1	6,3	4,9	7,6	5,9	6,9	4,3	6,7	4,2	3,4	4,5	3,2	5
13	8,1	4,5	6,7	5,2	6,4	7,3	4,9	7,1	4,7	4,4	5	4,1	5,5
14	7,2	5,1	8,5	6,9	5,7	7,8	5,4	7,6	5,2	5	4,8	5,2	6
15	7,7	6,3	5,6	8,9	8,3	5,9	7,4	5,7	8,1	5,3	5,9	6,1	6,5
16	5,5	9,4	8,2	7,4	8,8	7,9	8,6	6,2	6,4	6,8	5,8	6,2	7
17	7,1	5,7	5	8,3	7,7	6,8	5,3	7,5	5,1	6	5,4	5,9	6
18	5,2	7,8	6,6	7,2	4,5	6,3	7	4,8	4,6	5,2	5	4,8	5,3
19	6,2	4,1	4,9	7,5	5,8	6,8	4,2	6,7	4,2	4,1	4,4	5	4,8
20	5,7	3,5	6,5	4,4	5,3	3,7	6,3	3,6	6	4,5	3,4	4,2	4,5
21	3,8	5,2	2,6	5,4	5,8	5,9	3,3	5,4	3,1	3,5	4,1	2,9	4
22	5,3	2,7	4,7	2,5	3,3	5,5	4,5	2,6	4,9	3,1	3,8	3,3	3,5
23	2,8	4,2	1,9	5,1	2,2	4,8	4	2,1	4,4	2,8	3,2	4,2	3
24	3,7	1,5	4,3	1,7	3,9	2,3	1,6	4,5	3,5	3,3	2,8	2,6	2,5
25	3,4	1,1	3,7	2,1	1,2	3,8	2,9	3,4	0,9	2,6	1,4	3,2	2
26	0,7	3,3	2,8	3	1,6	2,9	0,5	0,6	2,6	1,6	1,1	1,2	1,5
27	2,5	1,1	2,3	–0,2	2,8	2,2	0,3	0,1	2,4	2,1	1,9	1,2	1

28	0,4	–0,8	2	1,2	–0,6	2,6	1,8	0,9	1,5	1,1	0,7	0,9	0,5
29	1,6	0,2	–0,7	1,4	–0,9	1,9	0,8	1,2	–1	1,4	3,3	1,6	0
30	0,5	1,1	–0,6	–1,8	1	0,2	–0,2	1,2	0,6	0,5	–0,5	2,1	–0,6

3.6.6. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий

Пусть над случайной величиной X проделано n независимых наблюдений, в которых получены результаты $X_1, X_2, \ldots, X_n$, а над величиной Y проделано m независимых наблюдений и получены значения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Предположим, что известны дисперсии $D(X) = \sigma_1^2$ и $D(Y) = \sigma_2^2$, но неизвестны математические ожидания $M(X) = a_1$ и $M(Y) = a_2$. Пусть, кроме того, каждая серия состоит из достаточно *большого* числа наблюдений (хотя бы несколько десятков в каждой серии). Построим критерий для проверки по результатам наблюдений гипотезы о том, что $a_1 = a_2$.

Предположим, что гипотеза верна. Так как серии опытов достаточно велики, то для средних арифметических имеем приближенные равенства $\bar{X} \approx a_1$ и $\bar{Y} \approx a_2$. Если гипотеза верна, то $\bar{X} \approx \bar{Y}$ и величина $|\bar{X} - \bar{Y}|$ должна быть относительно малой. Напротив, большие значения этой величины плохо согласуются с гипотезой. Поэтому критическую область составят те серии наблюдений, для которых $|\bar{X} - \bar{Y}| \geq C$, где C — некоторая постоянная величина.

Свяжем эту постоянную C с уровнем значимости β. Согласно центральной предельной теореме каждая из величин $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ распределена приблизительно нормально, как сумма большого числа одинаково распределенных независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями. С учетом того, что $M(\bar{X}) = M(X)$ и $D(\bar{X}) = D(X)/n$, можно утверждать, что $\bar{X}$ имеет распределение $N(a_1, \sigma_1^2/n)$, а $\bar{Y}$ — распределение $N(a_2, \sigma_2^2/n)$. Из факта устойчивости нормального закона распределения можно заключить, что при верной гипотезе $\bar{X} - \bar{Y}$ тоже имеет нормальный закон распределения с параметрами $M(\bar{X} - \bar{Y}) \quad a_1 = a_2 \quad 0$ и $D(\bar{X} - \bar{Y}) \quad \sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m$.

Запишем для нормального закона распределения $N(0, \sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m)$ стандартную формулу (????):

$$P(|\bar{X} - \bar{Y} - 0| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}\right)$$

или

$$P(|\bar{X}-\bar{Y}|\geq\varepsilon)=1-2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\right). \qquad (3.6.9)$$

По заданному β из таблицы функции Лапласа (см. прил., табл. П2) найдем такое t_β, чтобы $1-2\Phi(t_\beta)=\beta$ или $\Phi(t_\beta)=\frac{1-\beta}{2}$. Тогда при $\varepsilon=t_\beta\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}$ правая часть равенства (3.6.9) будет равна β. Поэтому при уровне значимости β критическую область для проверки гипотезы о равенстве двух математических ожиданий составят те серии наблюдений, для которых

$$|\bar{X}-\bar{Y}|\geq t_\beta\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}. \qquad (3.6.10)$$

Замечание 1. Если дисперсии неизвестны, то большое число наблюдений в каждой серии позволяет достаточно точно оценить дисперсии по этим же опытным данным:

$$D(X)=\sigma_1^2\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1} \text{ и } D(Y)=\sigma_2^2\approx\frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2}{m-1}.$$

Пример 3.23. Среднее арифметическое результатов 25 независимых измерений некоторой постоянной величины равно 90,1. В другой серии из 20 независимых измерений получено среднее арифметическое, равное 89,5. Дисперсия ошибок измерения в обоих случаях одинакова и равна $\sigma^2=1{,}2$ ($\sigma\approx1{,}1$). Можно ли считать, что измерялась одна и та же постоянная величина?

Решение. Выдвигаем гипотезу, что в каждой из серий измерялась одна и та же постоянная величина. Зададимся, например, уровнем значимости $\beta=0{,}01$. По таблице значений функции Лапласа (см. прил., табл. П2) находим, что $\Phi(2{,}58)=\frac{1-0{,}01}{2}$.

Тогда критическая область для проверки гипотезы определяется неравенством $|\bar{X}-\bar{Y}|\geq 2{,}58\cdot1{,}1\cdot\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{20}}=0{,}85$. Так как в нашем случае $\bar{X}-\bar{Y}=90{,}1-89{,}5=0{,}6<0{,}85$, то сомневаться в том, что измерялась одна и та же постоянная величина, оснований нет. Расхождения в значениях средних арифметических можно объяснить ошибками измерений.

Ответ. Предположение о равенстве математических ожиданий не противоречит опытным данным.

Задача 3.23.1. При уровне значимости $\beta = 0,05$ проверьте гипотезу о равенстве математических ожиданий в двух сериях наблюдений. Воспользуйтесь исходными данными к задаче 3.12. Используйте данные своего варианта и следующего за ним варианта. В 30-м варианте сравните математическое ожидание с математическим ожиданием в первом варианте. (См. пример 3.23.)

Замечание 2. Критерий (3.6.10) можно использовать и при небольшом числе наблюдений в каждой серии, но только при условии, что X и Y имеют нормальные законы распределения с известными дисперсиями. В этом случае нормальность распределения средних арифметических результатов наблюдений следует не из центральной предельной теоремы, а из факта устойчивости нормального закона распределения (сумма независимых нормально распределенных величин тоже имеет нормальный закон распределения).

Задача 3.23.2. В предположении, что наблюдались случайные величины X и Y с нормальным законом распределения и дисперсиями $\sigma_x = \sigma_y = 1,3$, при уровне значимости $\beta = 0,05$ проверьте гипотезу о равенстве математических ожиданий в двух сериях наблюдений. Воспользуйтесь исходными данными к задаче 3.22. Используйте цифровые данные своего варианта в качестве значений случайные величины X и следующего за ним варианта. В 30-м варианте сравните математическое ожидание с математическим ожиданием в первом варианте. (См. пример 3.23.)

3.7. Регрессионный анализ. Оценки по методу наименьших квадратов

Регрессионным анализом называется раздел математической статистики, объединяющий практические методы исследования корреляционной зависимости между случайными величинами по результатам наблюдений над ними. Сюда включаются методы выбора модели изучаемой зависимости и оценки ее параметров, методы проверки статистических гипотез о зависимости.

Пусть между случайными величинами X и Y существует линейная корреляционная зависимость. Это означает, что математическое ожидание Y линейно зависит от значений случайной величины X. График этой зависимости (линия регрессии Y на X) имеет уравнение $M(Y) = \rho X + b$, где ρ и b некоторые постоянные.

Линейная модель пригодна в качестве первого приближения и в случае нелинейной корреляции, если рассматривать небольшие интервалы возможных значений случайных величин.

Пусть параметры линии регрессии ρ и b неизвестны, неизвестна и величина коэффициента корреляции r_{xy}. Над случайными величинами X и Y проделано n независимых наблюдений, в результате которых получены n пар значений: $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$. Эти результаты могут служить источником информации о неизвестных значениях ρ, b, r_{xy}, надо только уметь эту информацию извлечь оттуда.

Неизвестная нам линия регрессии $y = \rho x + b$, как и всякая линия регрессии, имеет то отличительное свойство, что средний квадрат отклонений значений Y от нее минимален. Поэтому в качестве оценок для ρ и b можно принять те их значения, при которых имеет минимум функция

$$F(\rho, b) = F(\rho, b) = \sum_{k=1}^{n} (\rho X_k + b - Y_k)^2.$$

Такие значения ρ и b, согласно необходимым условиям экстремума, находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} (\rho X_k + b - Y_k) X_k = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} (\rho X_k + b - Y_k) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \rho \sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2 + b \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k Y_k, \\ \rho \sum\limits_{k=1}^{n} X_k + bn = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k. \end{cases}$$

Решения этой системы уравнений дают оценки

$$\tilde{\rho} = \frac{n\sum\limits_{k=1}^{n} X_k Y_k - \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k}{n\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \right)^2} \qquad (3.7.1)$$

и

$$\tilde{b} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \sum_{k=1}^{n} Y_k - \sum_{k=1}^{n} X_k \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k}{n\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2}, \qquad (3.7.2)$$

называемые *оценками по методу наименьших квадратов.*

Известно, что оценки по методу наименьших квадратов являются несмещенными и, более того, среди всех несмещенных оценок обладают наименьшей дисперсией.

Для оценки коэффициента корреляции можно воспользоваться тем, что $r_{xy} = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$, где σ_x и σ_y средние квадратические отклонения случайных величин X и Y соответственно. Обозначим через s_x и s_y оценки этих средних квадратических отклонений на основе опытных данных. Оценки можно найти, например, по формуле (3.1.3). Тогда для коэффициента корреляции имеем оценку

$$\tilde{r}_{xy} = \tilde{\rho}\frac{s_x}{s_y}. \qquad (3.7.3)$$

По методу наименьших квадратов можно находить оценки параметров линии регрессии и при нелинейной корреляции. Например, для линии регрессии вида $M(Y) = aX^2 + bX + c$ оценки параметров a, b и c находятся из условия минимума функции

$$F(a,b,c) = \sum_{k=1}^{m}\left(aX_k^2 + bX_k + c - Y_k\right)^2.$$

Пример 3.24. По данным наблюдений двух случайных величин найти коэффициент корреляции и уравнение линии регрессии Y на X.

X	3	8	4	4	7	8	2	5	6	3
Y	4	5	2	5	6	8	3	4	5	5

Решение. Вычислим величины, необходимые для использования формул (3.7.1)–(3.7.3):

$$\sum_{k=1}^{10} X_k = 3+8+4+4+\ldots+3 = 50; \qquad \sum_{k=1}^{10} Y_k = 4+5+2+5+\ldots+5 = 47;$$

$$\sum_{k=1}^{10} X_k^2 = 3^3 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + \ldots + 3^2 = 292;$$

$$\sum_{k=1}^{10} X_k Y_k = 3\cdot 4 + 8\cdot 5 + 4\cdot 2 + \ldots + 3\cdot 5 = 257.$$

По формулам (3.7.1) и (3.7.2) получим

$$\tilde{\rho} = \frac{10 \cdot 257 - 50 \cdot 47}{10 \cdot 292 - (50)^2} = \frac{11}{21} \approx 0{,}52; \qquad \tilde{b} = \frac{292 \cdot 47 - 50 \cdot 257}{10 \cdot 292 - (50)^2} \approx 2{,}08.$$

Итак, оценка линии регрессии имеет вид $Y = 0{,}52X + 2{,}08.$ Так как $\overline{X} = \frac{50}{10} = 5,$ то по формуле (3.1.3)

$$s_x^2 = \frac{(3-5)^2 + (8-5)^2 + (4-5)^2 + \ldots + (3-5)^2}{9} = 4{,}67; \; s_x = \sqrt{4{,}67} \approx 2{,}16.$$

Аналогично, $s_y = 1{,}64.$ Поэтому в качестве оценки коэффициента корреляции имеем по формуле (3.7.3) величину $\tilde{r}_{xy} = 0{,}52 \cdot \frac{2{,}16}{1{,}64} = 0{,}68.$

Ответ. $Y = 0{,}52X + 2{,}08; \; \tilde{r}_{xy} = 0{,}68.$

Задача 3.24. По данным наблюдений двух случайных величин X и Y найти коэффициент корреляции этих величин и уравнение линии регрессии Y на X. (См. пример 3.24 и исходные данные. В качестве значений X используйте данные своего варианта, в качестве значений Y воспользуйтесь данными следующего за Вашим вариантом. В варианте 30 в качестве значений Y возьмите данные первого варианта.)

Исходные данные к задаче 3.24.

№	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
1	1,2	2,3	2,9	4,1	4,7	6,1	7,0	7,9	8,1	8,8
2	3,1	2,9	2,2	4,9	5,8	5,0	7,2	6,2	7,0	7,1
3	1,4	2,0	1,5	5,1	6,9	6,1	8,9	6,8	7,7	8,9
4	2,5	4,1	3,2	6,0	5,1	4,9	7,7	6,7	7,3	8,7
5	3,9	4,2	4,1	4,8	6,0	4,3	6,1	7,2	6,9	7,3
6	2,5	5,0	3,2	6,1	5,2	5,4	7,9	6,0	6,1	9,1
7	0,5	3,9	4,0	5,3	6,3	6,5	8,1	7,3	5,2	8,3
8	1,5	2,8	5,1	4,5	5,5	7,2	7,5	6,6	8,0	7,5
9	2,9	3,1	4,8	5,6	4,9	6,5	7,9	5,1	5,2	7,1
10	2,1	4,0	4,2	6,2	4,3	7,1	7,6	3,9	4,5	7,8
11	1,2	3,5	3,7	6,5	3,7	7,3	8,2	3,1	4,0	6,1
12	2,2	4,3	4,9	5,5	4,2	6,7	6,3	2,4	4,2	6,9
13	1,0	5,2	3,9	4,8	5,1	6,2	7,1	3,6	5,1	5,8
14	–0,8	3,5	4,3	4,1	4,7	5,9	7.5	3,2	4,8	6,1
15	1,1	4,2	4,9	3,9	3,7	5,5	6,1	3,5	5,9	4,8
16	–1,2	3,8	5,0	4,1	3,2	6,2	5,5	3,1	7,1	5,4
17	0,5	4,5	4,2	3,8	2,7	4,9	6,0	4,2	7,7	4,6
18	1,8	3,9	4,9	2,9	4,1	5,5	5,1	3,9	6,1	5,2
19	–0,3	2,4	5,4	1,9	3,5	6,1	4,6	4,4	7,2	4,7
20	0,9	3,2	6,2	3,3	4,0	6,9	5,3	4,0	7,8	6,1
21	–1,5	1,9	6,8	2,0	4,3	7,1	5,1	4,2	8,8	7,2

22	–2,0	–0,5	7,3	0,3	3,9	8,2	6,5	3,7	9,1	8,3
23	0,8	1,6	6,8	1,9	4,8	7,4	7,1	4,9	8,5	7,0
24	–1,3	0,1	7,4	1,1	3,9	6,9	7,8	5,7	9,1	6,7
25	0,5	1,2	6,8	1,7	4,6	6,5	7,3	4,1	8,8	7,2
26	–0,2	0,4	5,5	1,2	5,1	7,5	8,0	3,5	0,6	6,7
27	0,9	0,8	3,9	2,8	4,6	5,8	7,9	4,4	8,7	6,1
28	1,6	1,2	4,2	2,1	2,9	4,9	8,2	3,7	6,2	6,9
29	2,1	1,9	4,1	3,5	2,6	3,5	7,5	4,8	5,8	6,0
30	1,5	2,4	3,7	3,1	3,5	4,9	6,8	6,5	7,1	7,9

Пример 3.25. Получена выборка значений величин *X* и *Y*.

X	2	3	4	4	6	7	8	10
Y	8	5	2	6	3	2	1	2

Для представления зависимости между величинами предполагается использовать модель $Y = \dfrac{a}{X} + b$. Найти оценки параметров *a* и *b*.

Решение. Рассмотрим сначала задачу оценки параметров этой модели в общем виде. Линия $Y = \dfrac{a}{X} + b$ играет роль линии регрессии и поэтому параметры ее можно найти из условия минимума функции (сумма квадратов отклонений значений *Y* от линии должна быть минимальной по свойству линии регрессии)

$$F(a,b) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{a}{X_k} + b - Y_k \right)^2 .$$

Необходимые условия экстремума приводят к системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{a}{X_k} + b - Y_k \right) \dfrac{1}{X_k} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{a}{X_k} + b - Y_k \right) = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} a\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X_k^2} + b\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{Y_k}{X_k}, & (3.7.4) \\ a\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X_k} + bn = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k . & (3.7.5) \end{cases}$$

Решения системы уравнений (3.7.4) и (3.7.5) и будут оценками по методу наименьших квадратов для параметров *a* и *b*.

На основе опытных данных вычисляем:

$$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{X_k^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{10^2}=0,56; \qquad \sum_{k=1}^{8}\frac{1}{X_k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{10}=1,87;$$

$$\sum_{k=1}^{8}\frac{Y_k}{X_k}=\frac{8}{2}+\frac{5}{3}+\ldots+\frac{2}{10}=8,82; \qquad \sum_{k=1}^{8}Y_k=8+5+2+\ldots+2=29.$$

В итоге получаем систему уравнений (?????) и (?????) в виде

$$0,56a+1,87b=8,82 \text{ и } 1,87a+8b=29.$$

Эта система имеет решения $\tilde{a}=16,7$ и $\tilde{b}=-0,25$.

Ответ. $\tilde{a}=16,7$; $\tilde{b}=-0,25$.

Задача 3.25. Из теоретических соображений следует, что между случайными величинами X и Y существует зависимость

$$Y=\frac{X}{\beta_0 X+\beta_1}, \tag{3.7.6}$$

где параметры β_0 и β_1 неизвестны.

По результатам наблюдений пары этих случайных величин найдите оценки параметров β_0 и β_1 по методу наименьших квадратов. (См. пример 3.25 и исходные данные.)

Указание. Запишите равенство (3.7.6) в виде $\frac{1}{Y}=\frac{\beta_0 X+\beta_1}{X}=\beta_0+\frac{\beta_1}{X}$ и введите обозначение $1/Y$ через Z.

Исходные данные к задаче 3.25.

№	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
1	2,1	4,2	4,8	0,9	3,8	5,8	6,7	0,8	1,1	0,5	1,25	1,0
2	0,5	4,0	1,8	6,1	3,5	5,2	0,25	0,68	0,56	1,25	0,77	0,83
3	0,6	5,2	3,5	3,2	6,0	1,9	0,4	0,85	0,68	0,71	0,9	0,73
4	0,8	1,6	4,8	2,7	4,5	5,5	2,0	0,56	0,85	0,68	0,85	1,1
5	2,5	5,2	6,5	0,5	1,8	4,4	0,6	0,71	1,0	0,4	0,55	0,85
6	2,2	0.5	4,8	1,0	3,9	5,7	1,2	0,2	1,6	1,1	1,75	1,5
7	3,2	4,8	2,!	4,2	0,8	6,1	0,68	0,7	0,4	0,65	0,24	1,2
8	4,9	0,9	3,8	7,0	2,1	3,5	0,5	0,29	0,8	0,68	0,4	0,5
9	6,1	3,0	4,5	2,1	5,2	1,1	0,4	0,6	0,36	0,3	0,5	0,23
10	3,5	5,9	4,2	7,2	1,3	2,7	–9,0	–2,0	2,5	–2,1	0,68	3,4
11	0,5	2,5	3,5	4,8	3,1	5,4	0,35	–2,0	–1,25	–1,3	–1,5	–1,0
12	4,3	0,6	2,2	3,1	4,0	1,2	0,6	0,28	0,56	0,8	0,5	0,6
13	5,1	2,9	0,5	1,0	1,9	3,9	0,84	0,75	0,3	0,45	0,6	0,77
14	0,6	3,2	2,3	1,5	2,6	4,5	0,2	0,3	0,29	0,25	0,4	0,36
15	5,2	3,9	0,9	2,1	2,8	1,5	4,0	0,5	0,4	0,8	1,7	0,56
16	0,4	4,1	1,6	1,9	5,0	3,2	0,2	4,5	1,25	1,8	5,4	3,0
17	2,3	2,8	0,5	3,7	0,8	5,1	0,4	0,7	0,2	0,45	0,35	0,43
18	1,6	4,0	1,1	2,4	3,2	2,9	0,35	0,46	0,36	0,4	0,43	0,38
19	2,1	0,5	3,2	1,6	0,9	2,9	–2,0	–2,5	–4,2	–2,1	–0,6	–2,8

20	0,5	3,2	1,4	5,1	4,5	1,9	–1,1	0,52	0,7	0,47	0,54	0,66
21	2,5	0,9	3,5	2,1	4,2	5,2	0,6	1,3	0,6	0,71	0,59	0,48
22	3,2	6,0	1,9	0,6	5,2	3,5	0,71	0,9	0,73	0,4	0,85	0,68
23	6,1	3,5	5,2	0,5	4,0	1,8	1,25	0,77	0,83	0,25	0,68	0,56
24	0,9	3,8	5,8	2,1	4,2	4,8	0,5	1,25	1,0	6,7	0,8	1,1
25	2,7	4,5	5,5	0,8	1,6	4,8	0,68	0,85	1,1	2,0	0,56	0,85
26	1,0	3,9	5,7	2,2	0,5	4,8	1,1	1,75	1,5	1,2	0,2	1,6
27	4,2	0,8	6,1	3,2	4,8	2,1	0,65	0,24	1,2	0,68	0,7	0,4
28	7,0	2,1	3,5	4,9	0,9	3,8	0,68	0,4	0,5	0,5	0,29	0,8
29	2,1	5,2	1,1	6,1	3,0	4,5	0,3	0,5	0,23	0,4	0,6	0,36
30	7,2	1,3	2,7	3,5	5,9	4,2	–2,1	0,68	3,4	–9,0	–2,0	2,5

Если наблюдений много, то результаты их обычно группируют и представляют в виде корреляционной таблицы.

Y \ X	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	$\dots$	(x_k, x_{k+1})	n_{*y}
(y_1, y_2)	n_{11}	n_{21}	$\dots$	n_{k1}	n_{*1}
(y_2, y_3)	n_{12}	n_{22}	$\dots$	n_{k2}	n_{*2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
(y_m, y_{m+1})	n_{1m}	n_{2m}	$\dots$	n_{km}	n_{*m}
n_{x*}	n_{1*}	n_{2*}	$\dots$	n_{k*}	n

В этой таблице n_{ij} равно числу наблюдений, для которых X находится в интервале (x_i, x_{i+1}), а Y — в интервале (y_j, y_{j+1}). Через n_i обозначено число наблюдений, при которых $X \in (x_i, x_{i+1})$, а Y произвольно. Число наблюдений, при которых $Y \in (y_j, y_{j+1})$, а X произвольно, обозначено через n_{*j}.

Если величины дискретны, то вместо интервалов указывают отдельные значения этих величин. Для непрерывных случайных величин представителем каждого интервала считают его середину и полагают, что $\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ и $\frac{1}{2}(y_j + y_{j+1})$ наблюдались n_{ij} раз.

При больших значениях X и Y можно для упрощения вычислений перенести начало координат и изменить масштаб по каждой из осей, а после завершения вычислений вернуться к старому масштабу.

Пример 3.26. Проделано 80 наблюдений случайных величин X и Y. Результаты наблюдений представлены в виде таблицы. Найти линию регрессии Y на X. Оценить коэффициент корреляции.

Y \ X		–2 0,5–1,5	–1 1,5–2,5	0 2,5–3,5	1 3,5–4,5	2 4,5–5,5	n_{*y}
–1	14–16	—	—	—	5	7	12

0	16–18	4	7	10	7	4	32
1	18–20	11	8	6	6	1	32
2	20–22	3	—	1	—	—	4
n_{x^*}		18	15	17	18	12	80

Решение. Представителем каждого интервала будем считать его середину. Перенесем начало координат и изменим масштаб по каждой оси так, чтобы значения X и Y были удобны для вычислений. Для этого перейдем к новым переменным $\breve{X} = X - 3$ и $\breve{Y} = \dfrac{Y-17}{2}$. Значения этих новых переменных указаны соответственно в самой верхней строке и самом левом столбце таблицы.

Чтобы иметь представление о виде линии регрессии, вычислим средние значения $\breve{Y}$ при фиксированных значениях $\breve{X}$:

$$\breve{Y}_{-2} = \frac{0\cdot 4 + 1\cdot 11 + 2\cdot 3}{18} = 1{,}56; \qquad \breve{Y}_{-1} = \frac{0\cdot 7 + 1\cdot 8}{15} = 0{,}53;$$

$$\breve{Y}_0 = \frac{0\cdot 10 + 1\cdot 6 + 2\cdot 1}{17} = 0{,}47; \qquad \breve{Y}_1 = 0{,}06; \qquad \breve{Y}_2 = -\,0{,}5.$$

Нанесем эти значения на координатную плоскость, соединив для наглядности их отрезками прямой (рис. 3.7.1).

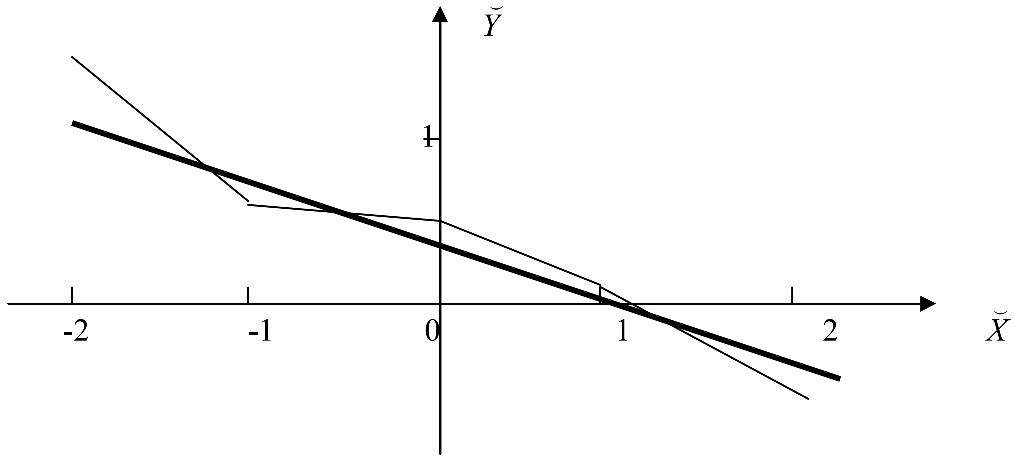


Рис. 3.7.1

По виду полученной ломанной линии можно предположить, что линия регрессии Y на X является прямой. Оценим ее параметры. Для этого сначала вычислим с учетом группировки данных в таблице все величины, необходимые для использования формул (3.31–3.33):

$$\sum_{k=1}^{n} \breve{X}_k \breve{Y}_k = \sum_{i,j} n_{ij} \breve{X}_i \breve{Y}_j \quad 1\cdot(1)\cdot 5 + 2\cdot(-1)\cdot 7 + \ldots + 2\cdot(-2)\cdot 3 = -53;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \breve{X}_k = \sum_{i} n_i \breve{X}_i \quad (-2)\cdot 18 + (-1)\cdot 15 + 0\cdot 17 + 1\cdot 18 + 2\cdot 12 = -9;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \breve{X}_k^2 = \sum_i n_i \breve{X}_i^2 = 4\cdot 18 + 1\cdot 15 + 1\cdot 18 + 4\cdot 12 = 153;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \breve{Y}_k = \sum_j n_j \breve{Y}_j = (-1)\cdot 12 + 0\cdot 32 + 1\cdot 32 + 2\cdot 4 = 28.$$

Тогда

$$\tilde{\rho} = \frac{80\cdot(-53) - (-9)\cdot 28}{80\cdot 153 - (-9)^2} = -0{,}33, \qquad \tilde{b} = \frac{153\cdot 28 - (-9)\cdot(-53)}{80\cdot 153 - (-9)^2} = 0{,}31.$$

В новом масштабе оценка линии регрессии имеет вид $\breve{Y} = -0{,}33\breve{X} + 0{,}31.$ График этой прямой линии изображен на рис. 3.7.1.

Для оценки σ_x по корреляционной таблице можно воспользоваться формулой (3.1.3):

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_i (\breve{X}_i - \bar{X})^2 n_i}{n-1}} = 1{,}38.$$

Подобным же образом можно оценить σ_y величиной $s_y = 0{,}75.$ Тогда оценкой коэффициента корреляции может служить величина $\tilde{r}_{xy} = -0{,}33\cdot\dfrac{1{,}38}{0{,}75} = -0{,}58.$

Вернемся к старому масштабу:

$$\frac{Y-17}{2} = -0{,}33(X-3) + 0{,}31 \text{ или } Y = -0{,}66X + 19{,}6.$$

Коэффициент корреляции пересчитывать не нужно, так как это величина безразмерная и от масштаба не зависит.

Ответ. $\tilde{r}_{xy} = -0{,}58;\ Y = -0{,}66X + 19{,}6.$

Пусть некоторые физические величины X и Y связаны неизвестной нам функциональной зависимостью $y = f(x)$. Для изучения этой зависимости производят измерения Y при разных значениях X. Измерениям сопутствуют ошибки и поэтому результат каждого измерения случаен. Если систематической ошибки при измерениях нет, то $y = f(x)$ играет роль линии регрессии и все свойства линии регрессии приложимы к $y = f(x)$. В частности, $y = f(x)$ обычно находят по методу наименьших квадратов.

Задача 3.26. Результаты наблюдений случайных величин X и Y представлены в виде таблицы. Найдите линию регрессии Y на X. Оцените коэффициент корреляции. Оцените точность прогноза случайной величины Y по известному значению X. (См. пример 3.26 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.26.

Вар. 1

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(8,10)	4	—	—	—	—	—	4
(6,8)	2	3	1	1	—	—	7
(4,6)	1	1	4	2	1	—	9
(2,4)	—	2	3	3	3	3	14
(0,2)	—	—	—	1	2	3	6
n_x	7	6	8	7	6	6	$n=40$

Вар. 2

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(8,10)	4	—	—	—	—	—	4
(6,8)	2	3	1	1	—	—	7
(4,6)	2	1	3	2	1	—	9
(2,4)	—	2	4	2	3	3	14
(0,2)	—	—	—	1	3	2	6
n_x	8	6	8	6	7	5	$n=40$

Вар. 3

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(8,10)	5	—	—	—	—	—	5
(6,8)	3	4	1	1	—	—	9
(4,6)	2	3	4	2	1	—	12
(2,4)	—	2	3	4	3	3	15
(0,2)	—	—	—	1	4	4	9
n_x	10	9	8	8	8	7	$n=50$

Вар. 4

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(6,8)	—	—	—	2	4	4	10
(4,6)	1	3	2	5	4	3	18
(0,2)	2	6	5	3	2	—	18
(–2,0)	5	4	5	1	—	—	15
(–4,–2)	4	—	—	—	—	—	4
n_x	12	13	12	11	10	7	$n=65$

Вар. 5

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(10,12)	—	—	—	1	4	5	10
(8,10)	—	2	3	4	3	3	15
(6,8)	2	3	5	2	2	—	14
(4,6)	3	4	2	1	—	—	10
(2,4)	5	1	—	—	—	—	6
n_x	10	9	8	8	8	7	$n=65$

Вар. 6

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(10,12)	4	—	—	—	—	—	4
(8,10)	2	3	1	1	—	—	7
(6,8)	1	1	4	2	1	—	9
(4,6)	—	2	3	3	3	3	15
(2,4)	—	—	—	1	2	2	5
n_x	7	6	8	7	6	5	$n=40$

Вар. 7

	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	(12,14)	n_y
(8,10)	4	—	—	—	—	—	4
(6,8)	2	3	1	1	—	—	7
(4,6)	2	1	3	2	1	—	9
(2,4)	—	2	4	2	3	3	14
(0,2)	—	—	—	1	3	2	6
n_x	8	6	8	6	7	5	$n=40$

Вар. 8

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(10,12)	5	—	—	—	—	—	5
(8,10)	3	4	1	1	—	—	9
(6,8)	2	3	4	2	1	—	12
(4,6)	—	2	3	4	3	3	15
(2,4)	—	—	—	1	4	4	9
n_x	10	9	8	8	8	7	$n=50$

Вар. 9

	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	(12,14)	n_y
(8,10)	6	—	—	—	—	—	6
(6,8)	4	4	2	1	—	—	11
(4,6)	1	4	3	3	1	—	12
(2,4)	—	1	3	2	4	3	13
(0,2)	—	—	—	1	3	4	8
n_x	11	9	8	7	8	7	$n=50$

Вар. 10

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(8,10)	3	—	—	—	—	—	3
(6,8)	2	3	1	1	—	—	7
(4,6)	1	3	4	3	1	—	12
(2,4)	—	2	3	3	3	2	13
(0,2)	—	—	—	1	2	2	5
n_x	6	8	8	8	6	4	$n=40$

Вар. 11

	(0,4)	(4,8)	(8,12)	(12,16)	(16,20)	(20, 24)	n_y
(6,8)	3	—	—	—	—	—	3
(4,6)	2	3	1	1	—	—	7
(2,4)	3	1	4	2	1	—	11
(0,2)	—	2	3	3	3	3	14
(–2,0)	—	—	—	1	2	2	5
n_x	8	6	8	7	6	5	$n=40$

Вар. 12

	(–2,0)	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	n_y
(10,12)	4	—	—	—	—	—	4
(8,10)	3	3	1	1	—	—	8
(6,8)	2	3	4	3	3	—	15
(4,6)	—	2	3	3	4	3	15
(2,4)	—	—	—	1	3	4	8
n_x	9	8	8	8	10	7	$n=50$

Вар. 13

	(–2,0)	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	n_y
(8,10)	4	—	—	—	—	—	4
(6,8)	2	3	2	1	—	—	8
(4,6)	3	5	4	2	1	—	15
(2,4)	—	2	3	3	4	4	16
(0,2)	—	—	—	1	2	4	7
n_x	9	10	9	7	7	8	$n=50$

Вар. 14

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(4,6)	6	—	—	—	—	—	6
(2,4)	3	4	2	1	—	—	10
(0,2)	2	4	3	2	2	—	13
(–2,0)	—	1	3	3	4	4	15
(–4,–2)	—	—	—	1	2	3	6
n_x	11	9	8	7	8	7	$n=50$

Вар. 15

	(–2,0)	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	n_y
(8,10)	5	—	—	—	—	—	5
(6,8)	4	4	2	1	—	—	11
(4,6)	2	3	3	2	1	—	11
(2,4)	—	2	3	3	3	3	14
(0,2)	—	—	—	1	4	4	9
n_x	11	9	8	7	8	7	$n=50$

Вар. 16

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(8,10)	3	—	—	—	—	—	3
(6,8)	7	4	2	1	—	—	14
(4,6)	4	5	10	6	1	—	26
(2,4)	—	3	3	3	4	7	20
(0,2)	—	—	—	2	3	2	7
n_x	14	12	15	12	8	9	$n=70$

Вар. 17

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(6,8)	3	—	—	—	—	—	3
(4,6)	4	3	1	1	—	—	9
(0,2)	1	5	4	3	1	—	14
(–2,0)	—	2	4	5	4	3	18
(–4,–2)	—	—	—	1	3	2	6
n_x	8	10	9	10	8	5	$n=50$

Вар. 18

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(10,12)	—	—	—	1	4	4	9
(8,10)	—	2	3	4	3	3	15
(6,8)	2	3	4	2	1	—	12
(4,6)	3	4	1	1	—	—	9
(2,4)	5	—	—	—	—	—	5
n_x	10	9	8	8	8	7	$n=50$

Вар. 19

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(4,6)	—	—	—	1	2	3	6
(2,4)	—	1	3	3	4	4	15
(0,2)	2	4	3	2	2	—	13
(–2,0)	3	4	2	1	—	—	10
(–4,–2)	6	—	—	—	—	—	6
n_x	11	9	8	7	8	7	$n=50$

Вар. 20

	(–2,0)	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	n_y
(8,10)	—	—	—	1	4	4	5
(6,8)	—	2	3	3	3	3	11
(4,6)	2	3	3	2	1	—	11
(2,4)	4	4	2	1	—	—	14
(0,2)	5	—	—	—	—	—	9
n_x	11	9	8	7	8	7	$n=50$

Вар. 21

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(4,6)	—	—	—	2	2	5	9
(2,4)	—	1	3	3	5	4	16
(0,2)	3	5	4	4	2	—	18
(–2,0)	4	4	2	1	—	—	11
(–4,–2)	6	—	—	—	—	—	6
n_x	13	10	9	10	9	9	$n = 60$

Вар. 22

	(–2,0)	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	n_y
(4,6)	—	—	—	1	2	3	6
(2,4)	—	1	3	3	4	4	15
(0,2)	2	3	3	2	2	—	12
(–2,0)	4	5	2	1	—	—	12
(–4,-2)	5	—	—	—	—	—	5
n_x	11	9	8	7	8	7	$n = 50$

Вар. 23

	(–2,0)	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	n_y
(4,6)	—	—	—	1	2	2	6
(2,4)	—	2	3	3	3	3	14
(0,2)	1	1	4	2	1	—	9
(-2,0)	2	3	1	1	—	—	7
(-4,-2)	4	—	—	—	—	—	4
n_x	7	6	8	7	6	5	$n = 40$

Вар. 24

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(8,10)	—	—	—	1	3	4	8
(6,8)	—	1	3	2	4	3	13
(4,6)	1	4	3	3	1	—	12
(2,4)	4	4	2	1	—	—	11
(0,2)	6	—	—	—	—	—	6
n_x	11	9	8	7	8	7	$n = 50$

Вар. 25

	(–2,0)	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	n_y
(8,10)	—	—	—	1	2	4	7
(6,8)	—	2	3	3	4	4	16
(4,6)	3	5	4	2	1	—	15
(2,4)	2	3	2	1	—	—	8
(0,2)	4	—	—	—	—	—	4
n_x	9	10	9	7	7	8	$n = 50$

Вар. 26

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(8,10)	—	—	—	2	3	2	7
(6,8)	—	3	3	3	4	7	20
(4,6)	4	5	10	6	1	—	26
(2,4)	7	4	2	1	—	—	14
(0,2)	3	—	—	—	—	—	3
n_x	14	12	15	12	8	9	$n=70$

Вар. 27

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(10,12)	—	—	—	1	4	4	9
(8,10)	—	2	3	4	3	3	15
(6,8)	2	3	4	2	1	—	12
(4,6)	3	4	1	1	—	—	9
(2,4)	5	—	—	—	—	—	5
n_x	10	9	8	8	8	7	$n=50$

Вар. 28

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(4,6)	—	—	—	1	2	4	7
(2,4)	—	1	3	4	5	4	17
(0,2)	2	5	3	2	2	1	15
(–2,0)	3	4	2	1	—	—	10
(–4,–2)	6	—	—	—	—	—	6
n_x	11	10	8	8	9	9	$n=55$

Вар. 29

	(–2,0)	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	n_y
(10,12)	4	—	—	—	—	—	4
(8,10)	3	3	2	1	1	—	10
(6,8)	2	6	7	4	6	2	27
(4,6)	—	2	3	4	5	5	19
(2,4)	—	—	—	2	3	5	10
n_x	9	11	12	11	15	12	$n=70$

Вар. 30

	(0,2)	(2,4)	(4,6)	(6,8)	(8,10)	(10,12)	n_y
(4,6)	—	—	—	2	3	7	12
(2,4)	—	1	3	5	7	4	20
(0,2)	2	5	6	4	2	—	19
(–2,0)	4	5	2	1	—	—	12
(–4,–2)	6	1	—	—	—	—	7
n_x	12	12	11	12	12	11	$n=60$

3.8. Статистические решающие функции

Пусть X — случайная величина, тип закона распределения которой $F(x,\theta)$ — известен, но неизвестно значение параметра θ этого закона. Есть основания полагать только, что $\theta \in \Xi$ — некоторому множеству значений.

Пусть $\vec{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ — результаты n наблюдений случайной величины X.

Удобно рассматривать выборку $\vec{X}$ как точку в выборочном пространстве W. Напомним, что W — совокупность всех возможных выборок данного объема из значений случайной величины.

По результатам наблюдений необходимо принять решение о значении параметра θ.

Если D — множество возможных решений (в нашем случае D совпадает с Ξ), то с формальной точки зрения необходимо найти отображение $d(\vec{X})$ выборочного пространства W на пространство решений D (см. рис. 3.8.1).

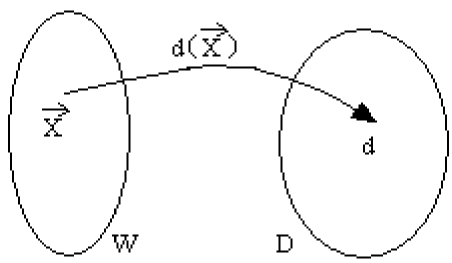


Рис. 3.8.1

Такое отображение называют *статистическим решающим правилом* или *стратегией.*

При каждом θ мы можем принять любое решение $d \in D$. Принятие решения d, когда истинное значение параметра равно θ, приводит к *потере* $L(\theta, d)$. Величина $L(\theta, d)$ может быть и отрицательной — тогда это выигрыш.

Для того чтобы выбрать оптимальное решающее правило, нужен критерий, по которому можно их сравнивать. Для этой цели вводится в рассмотрение так называемая *функция риска*, которая определяется как среднее значение функции потерь при значении параметра θ:

$R(\theta, d(\vec{X})) = M\{L[\theta, d(\vec{X})]\}$,

$R(\theta, d(\vec{X})) = \sum_{\vec{X}} L[\theta, d(\vec{X})] P(\vec{X}, \theta)$ для дискретной случайной величины,

$R(\theta, d(\vec{X})) = \int_{\vec{X} \in W} L[\theta, d(\vec{X})] dP(\vec{X}, \theta)$ для непрерывной случайной величины.

Функция риска дает возможность сравнивать стратегии между собой. В частности, стратегия d^* предпочтительнее стратегии d, если

$$R(\theta, d^*) \le R(\theta, d) \text{ при всех } \theta \in \Xi$$

и

$$R(\theta, d^*) < R(\theta, d) \text{ хотя бы при одном } \theta \in \Xi.$$

Иногда можно говорить о равномерно лучшей решающей функции. Такой, например, является решающая функция d_2 на рис. 3.8.2.

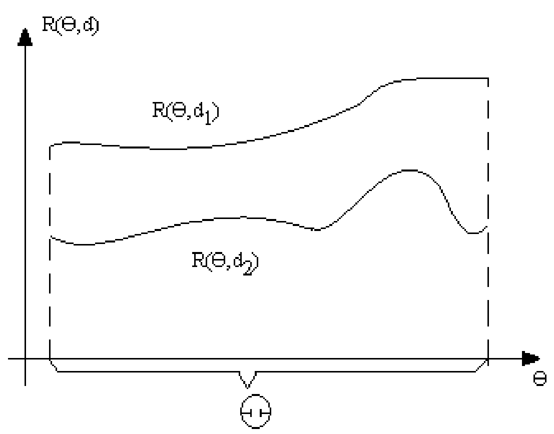


Рис. 3.8.2

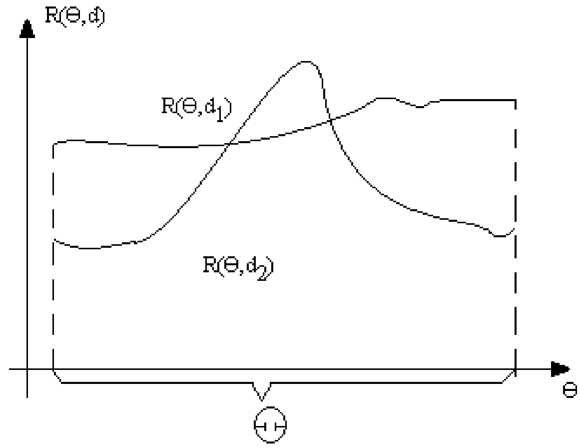


Рис. 3.8.3

В случае если правила в названном смысле несравнимы (рис. 3.8.3), возможны разные подходы:

1) можно сравнивать площади под кривыми изображающими риски;

2) можно сравнивать наибольшие значения рисков и т.д.

Для каждой решающей функции существует наибольшее значение функции риска

$$\max_{\theta} R(\theta, d).$$

Можно выбрать стратегию, при которой достигается

$$\min_{d} \max_{\theta} R(\theta, d).$$

Такую стратегию называют *минимаксной*. Идея такой стратегии проста: выбирается стратегия, при которой наибольший из возможных рисков минимален. Такая стратегия страхует от слишком больших потерь. В других отношениях это решающее правило может оказаться плохим. Например, стратегия d_1 (см. рис. 3.8.3) по этому принципу лучше стратегии d_2, хотя при подавляющем большинстве значений θ стратегия d_1 приводит к большему ущербу, чем d_2.

Для простоты рассмотрим случай, когда Ξ состоит из k элементов:

$$\Xi = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}.$$

Пусть на основе накопленного опыта значения $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ имеют вероятности $q_1, q_2, \ldots, q_k$ (априорное распределение). Тогда функцию риска можно определить как математическое ожидание функции потерь по отношению к этому априорному распределению:

$$R(\theta, d(\vec{X})) = \sum_{i=1}^{k} R[\theta_i, d(\vec{X})] q_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\vec{X}} L(\theta_i, d(\vec{X})) P(\vec{X} / \theta_i) q_i.$$

Стратегия, обращающая в минимум такую функцию риска, называется *байесовской стратегией,* отвечающей данному априорному распределению.

Различают два типа стратегий.

1. *Чистая* или *нерандомизованная* стратегия. При такой стратегии каждому результату наблюдений ставится в соответствие четко определенное решение.

Это означает, что выборочное пространство W разбивается на k взаимно непересекающихся областей $W_1, W_2, \ldots, W_k$, и если результаты наблюдений $\vec{X} \in W_i$, то принимается решение $\theta = \theta_i$.

2. *Рандомизованная* стратегия (от английского слова random — случайный). Для каждого $\vec{X}$ устанавливается набор вероятностей $\lambda_1(\vec{X}), \lambda_2(\vec{X}), \ldots, \lambda_k(\vec{X})$ такой, что $\sum_i \lambda_i(\vec{X}) = 1$. Тогда при получении результатов наблюдений $\vec{X}$ производится случайный эксперимент, в котором реализуется случайная величина, принимающая значения $1, 2, 3, \ldots, k$ с вероятностями соответственно $\lambda_1(\vec{X}), \lambda_2(\vec{X}), \ldots, \lambda_k(\vec{X})$. Если выпадает значение i, то принимается решение $\theta = \theta_i$.

Выявим особенности минимаксной и байесовской стратегий. Ради наглядности изложения рассмотрим случай

$$\Xi = \{\theta_1, \theta_2\}, \quad D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}.$$

Тогда роль функции риска будет играть *вектор риска*

$$\{R(\theta_1, d(\vec{X})), R(\theta_2, d(\vec{X}))\}.$$

Каждой чистой стратегии d_i соответствует на плоскости точка с координатами

$$\{R(\theta_1, d_i), R(\theta_2, d_i)\}.$$

Если рассмотреть рандомизованную стратегию с набором вероятностей

$$\lambda_1(\vec{X}), \lambda_2(\vec{X}), \ldots, \lambda_k(\vec{X}),$$

то каждой такой стратегии соответствует вектор риска с координатами

$$\lambda_1 R(\theta_1, d_1) + \lambda_2 R(\theta_1, d_2) + \ldots + \lambda_n R(\theta_1, d_n)$$

и

$$\lambda_1 R(\theta_2, d_1) + \lambda_2 R(\theta_2, d_2) + \ldots + \lambda_n R(\theta_2, d_n).$$

Геометрически это координаты центра тяжести масс $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, в сумме равных единице и расположенных в точках, соответствующих чистым решениям. Каждой чистой стратегии соответствует масса равная единице, расположенная в соответствующей этой стратегии точке (остальные массы равны нулю). Если перебрать все возможные наборы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то получим выпуклую оболочку точек, соответствующих чистым стратегиям. На плоскости такая оболочка выглядит как многоугольник (см. рис. 3.8.4), в общем случае — как многомерный многогранник.

Рассмотрим минимаксную стратегию. Нам необходимо для каждого вектора риска выбрать максимальную координату, а затем среди них выбрать наименьшую, т. е.

$$\min_d \max[\underbrace{R(\theta_1,d)}_x, \underbrace{R(\theta_2,d)}_y]$$

Заметим, что функция $\max(x,y)=c$ имеет график, изображенный на рис. 3.8.4 пунктирной линией.

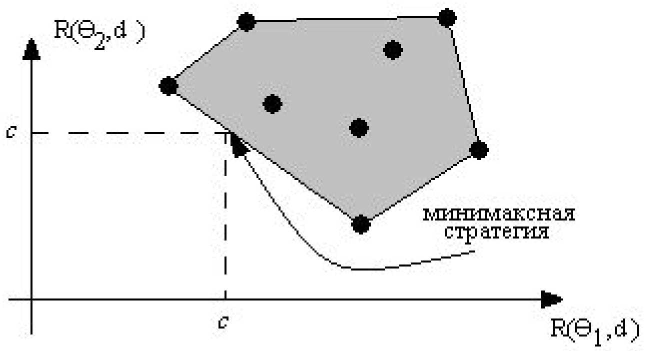


Рис. 3.8.4

Необходимо выбрать наименьшее c, при котором график этой функции имеет общую точку с линейной оболочкой (см. рис. 3.8.4). Из этого рисунка видно, что минимаксная стратегия почти наверное будет рандомизированной.

Из тех же геометрических соображений выявим характер байесовской стратегии. Опять обратимся к случаю двух значений θ_1 и θ_2. Пусть $P(\theta_1)=q_1$, $P(\theta_2)=q_2$, $(q_1+q_2=1)$. Тогда функция риска имеет вид

$$q_1 \underbrace{R(\theta_1,d)}_x + q_2 \underbrace{R(\theta_2,d)}_y = R(d) = c. \qquad (3.8.1)$$

По структуре это уравнение $q_1x+q_2y=c$ — уравнение прямой линии, а коэффициенты q_1 и q_2 определяют ее наклон. В многомерном случае это будет уравнение плоскости (гиперплоскости). Нам необходима стратегия, при которой левая часть выражения (3.8.1) минимальна. Будем увеличивать c, пока прямая не коснется линейной оболочки (см. рис. 3.8.5).

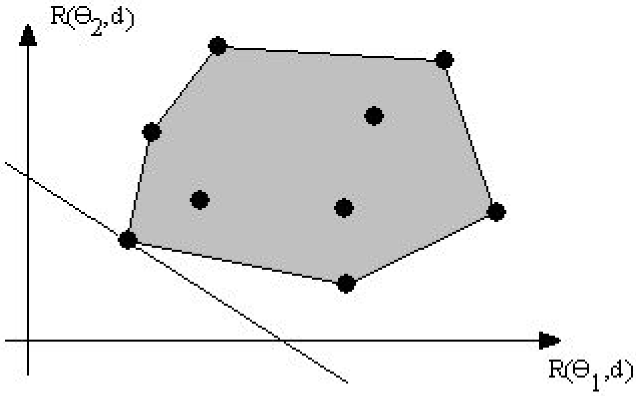


Рис. 3.8.5

В любом случае (и при касании в вершине, и при касании по стороне многоугольника) среди точек касания будет хотя бы одна вершина выпуклой оболочки, а вершина соответствует чистой стратегии. Тем самым мы проиллюстрировали утверждение о том, что при конечном числе исходных стратегий всегда существует *чистая байесовская стратегия*.

Минимаксная и байесовская стратегии связаны между собой: минимаксная стратегия является байесовской по отношению к наименее благоприятному априорному распределению. Наименее благоприятным оказывается распределение, при котором максимально возможный коэффициент $q=1$ в выражении $q_1x+q_2y=c$ соответствует наибольшей координате (другой коэффициент тогда равен нулю). В этом случае получаются линии $x=c$ или $y=c$ (см. рис. 3.8.6).

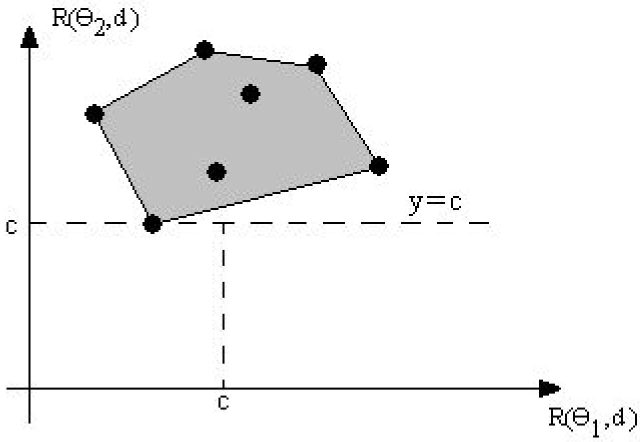


Рис. 3.8.6

Замечание. Введенные понятия можно связать с теорией игр. Окружающий нас мир (природу) можно считать одним из игроков, а исследователя другим игроком (только в этом случае природа, в качестве участника игры, не злонамеренна по отношению к исследователю). Природа использует один из возможных ходов $\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n\}$, а исследователь в ответ на ход природы принимает решение $d \in D$. Величина $L(\theta, d(\vec{X}))$ указывает потерю исследователя, выбравшего по результатам наблюдений $\vec{X}$ стратегию $d(\vec{X})$, когда природа выбрала θ. Величина $R(\theta, d(\vec{X}))$ характеризует средние потери исследователя, использующего стратегию d.

Пример 3.27. Наблюдается работа некоторого устройства в течение времени T. Положим $X = 0$, если устройство не вышло из строя за это время, и $X = 1$ в противном случае. Пусть

$$P(X = i / \theta) = \theta^i (1 - \theta)^{1-i},$$

т.е. $P(X = 0) = \theta$, $P(X = 1) = 1 - \theta$.

В отношении θ есть два предположения: $\theta = \theta_1 = 1/4$ и $\theta = \theta_2 = 1/2$. Иначе говоря, возможны два решения $a_1 = \theta_1$ и $a_2 = \theta_2$.

Функция потерь определяется таблицей.

	a_1	a_2
θ_1	1	4
θ_2	3	2

Требуется найти минимаксную стратегию и байесовскую стратегию по отношению к априорному распределению $P(\theta_1) = P(\theta_2) = 1/2$.

Решение. В этой ситуации возможны следующие чистые решающие правила:

$d_1:\ d_1(0) = a_1,\quad d_1(1) = a_1;$ $\qquad d_2:\ d_2(0) = a_1,\quad d_2(1) = a_2;$

$d_3:\ d_3(0) = a_2,\quad d_3(1) = a_1;$ $\qquad d_4:\ d_4(0) = a_2,\quad d_4(1) = a_2.$

Решающие правила d_1 и d_4 соответствуют «предвзятому мнению».

Определим вектор риска для каждого решающего правила.

Для d_1 имеем вектор с координатами $\begin{cases} R(\theta_1, d_1) = 1 \cdot 3/4 + 1 \cdot 1/4 = 1, \\ R(\theta_2, d_1) = 3 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/2 = 3. \end{cases}$

Для d_2 имеем вектор $\begin{cases} R(\theta_1, d_3) = 1 \cdot 3/4 + 4 \cdot 1/4 = 1{,}75, \\ R(\theta_2, d_3) = 2 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/2 = 2{,}5. \end{cases}$

Для d_3 — $\begin{cases} R(\theta_1, d_2) = 1 \cdot 1/4 + 4 \cdot 3/4 = 3{,}25, \\ R(\theta_2, d_2) = 3 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/2 = 2{,}5. \end{cases}$

Для d_4 — $\begin{cases} R(\theta_1, d_4) = 4 \cdot 3/4 + 4 \cdot 1/4 = 4, \\ R(\theta_2, d_4) = 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/2 = 2. \end{cases}$

На рис. 3.8.7 жирными точками отмечены концы векторов риска, выделена закраской линейная оболочка векторов. Из этого рисунка видно, что оптимальной байесовской стратегией является стратегия d_1. Для минимаксной стратегии точка касания линейной оболочки примерно в три раза ближе к точке d_2, чем к точке d_4. Поэтому следует λ взять обратно пропорциональным расстояниям до названных точек, т.е. равным $\lambda_2 = 3/4$, $\lambda_2 = 3/4$, $\lambda_4 = 1/4$, а $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.

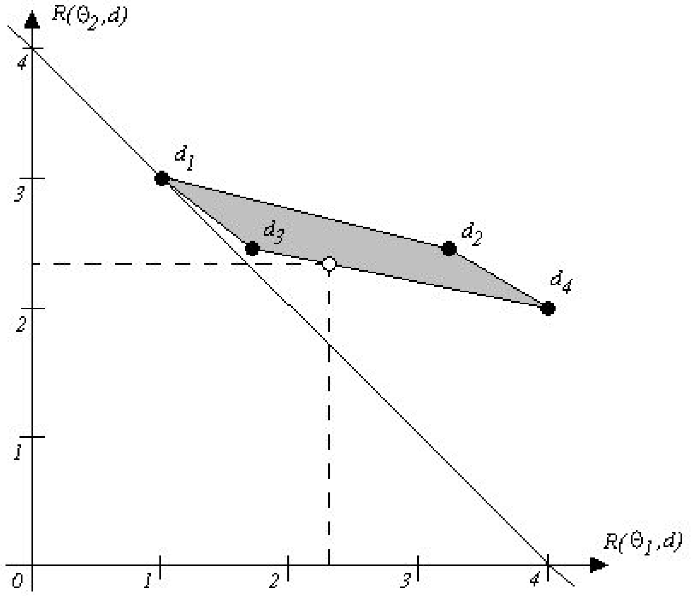


Рис. 3.8.7

Ответ. Оптимальной байесовской стратегией является стратегия d_1. Оптимальная минимаксная стратегия реализуется при наборе вероятностей $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3/4$, $\lambda_4 = 1/4$.

Задача 3.27.1. Пусть θ — вероятность выхода из строя устройства при одном цикле испытаний. Обозначим через X — число циклов испытаний до выхода из строя устройства. Величина X может принимать значения 1, 2, 3, ... с вероятностями

$$P(X = k) \quad (1-\theta)^{k-1} q.$$

В отношении θ есть два предположения: θ_1 и θ_2 (пространство решений состоит из двух элементов $a_1 = \theta_1$ и $a_2 = \theta_2$). Функция потерь задана таблицей.

	a_1	a_2
θ_1	L_{11}	L_{12}
θ_2	L_{21}	L_{22}

Предлагаются четыре возможных чистых стратегии:

$d_1 : d_1 = a_1$, если $X = 1$, и $d_1 = a_1$, если $X = 2,3,4,5,\ldots$;

$d_2 : d_2 = a_1$, если $X = 1,2$, и $d_2 = a_2$, если $X = 3,4,5,\ldots$;

$d_3 : d_3 = a_1$, если $X = 1,2,3$, и $d_3 = a_1$, если $X = 4,5,6,\ldots$;

$d_4 : d_4 = a_1$, если $X = 1,2,3,4$, и $d_4 = a_2$, если $X = 5,6,\ldots$.

Найдите минимаксную стратегию и байесовскую стратегию по отношению к априорному распределению $P(\theta_1) = P(\theta_2) = 1/2$. (См. пример 3.27 и исходные данные.)

Исходные данные к задачам 3.27.1.

№	θ_1	θ_2	L_{11}	L_{12}	L_{21}	L_{22}	№	θ_1	θ_2	L_{11}	L_{12}	L_{21}	L_{22}
1	1/8	1/4	0	1	2	0	**16**	1/8	1/4	0	1	2	0
2	1/10	1/5	0	3	2	1	**17**	1/10	1/5	0	3	2	1
3	1/10	1/6	1	3	2	0	**18**	1/10	1/4	1	3	2	0
4	1/8	1/2	1	2	3	0	**19**	1/8	1/6	1	2	3	0
5	1/10	1/4	0	2	3	1	**20**	1/2	2/5	0	2	3	1
6	1/5	2/5	0	1	2	0	**21**	1/8	1/2	0	1	2	0
7	1/10	1/6	0	3	2	1	**22**	1/4	1/2	0	3	2	1
8	1/4	1/2	1	3	2	0	**23**	1/8	1/4	1	3	2	0
9	1/5	1/10	1	2	3	0	**24**	1/10	1/5	1	2	3	0
10	1/2	1/4	0	2	3	1	**25**	1/10	1/6	0	2	3	1
11	1/2	1/3	0	1	2	0	**26**	1/8	1/2	0	1	2	0
12	1/3	1/4	0	3	2	1	**27**	1/10	1/4	0	3	2	1
13	1/4	1/5	1	3	2	0	**28**	1/5	2/5	1	3	2	0
14	1/10	1/3	1	2	3	0	**29**	2/5	1/4	1	2	3	0
15	1/4	1/3	0	2	3	1	**30**	1/3	1/4	0	2	3	1

Задача 3.27.2. Подвергаются испытанию три образца изделий и регистрируется число прошедших испытание образцов X. В отношении вероятности выхода из строя образца при испытании есть два предположения: θ_1 и θ_2. Так как проводятся независимые испытания, то $P(X = i/\theta) = C_3^i (1-\theta)^i \, \theta^{3-i}$. Множество решений состоит из двух элементов $a_1 = \theta_1$ и $a_2 = \theta_2$. Есть три решающих правила:

$$d_1 = \{a_1 \text{ при } X = 0 \text{ и } a_2 \text{ при } X = 1,2,3\};$$

$$d_2 = \{a_1 \text{ при } X = 0,1 \text{ и } a_2 \text{ при } X = 2,3\};$$

$$d_3 = \{a_1 \text{ при } X = 0,1,2 \text{ и } a_2 \text{ при } X = 3\}.$$

Для заданной функции потерь найти:

1) минимаксную стратегию;

2) байесовскую стратегию, если оба значения θ представляются равновероятными. (См. пример 3.27 и исходные данные к задаче 3.27.1.)

Пример 3.28. В двух внешне одинаковых урнах находятся шары. В первой урне пять белых и пять черных шаров, а во второй три белых и шесть черных. Урну выбирают наугад, и из нее производится повторная выборка четырех шаров. По результатам выбора необходимо принять решение относительно содержания урны, из которой производился выбор шаров, т.е. пространство решений состоит из двух решений:

— решение a_1 — шары выбирались из первой урны (вероятность выбора белого шара равна $\theta_1 = 1/2$);

— решение a_2 — шары выбирались из второй урны (вероятность выбора белого шара равна $\theta_2 = 3/9 = 1/3$).

Необходимо найти минимаксную и байесовскую стратегии принятия решений, если функция потерь определяется таблицей:

	a_1	a_2
θ_1	0	5
θ_2	4	–1

Решение. В условиях задачи возможны следующие чистые стратегии:

— d_1 — принимается решение a_1, если все четыре раза выбирались белые шары, и принимается решение a_2, если белых шаров было выбрано три, два, один или ноль;

— d_2 — принимается решение a_1, если из урны было выбрано три или четыре белых шара, и принимается решение a_2, если белых шаров было два, один или ноль;

— d_3 — принимается решение a_1, если из урны было выбрано два, три или четыре белых шара, и принимается решение a_2, если белых шаров было один или ноль;

— d_4 — принимается решение a_1, если в выборке один, два, три или четыре белых шара, и принимается решение a_2, если белых шаров в выборке нет.

Случаи «предвзятого мнения», когда при любой выборке принимается всегда одно из решений a_1 или a_2, исключим из рассмотрения.

Вероятности выбора того или иного числа белых шаров можно вычислить по формуле Бернулли (2.6.1). При $\theta_1 = 1/2$ они равны $P_4(0) = 1/16$, $P_4(1) = 4/16$, $P_4(2) = 6/16$, $P_4(3) = 4/6$, $P_4(4) = 1/16$. При $\theta_2 = 1/3$ эти вероятности равны $P_4(0) = 16/81$, $P_4(1) = 32/81$, $P_4(2) = 24/81$, $P_4(3) = 8/81$, $P_4(4) = 1/81$.

Учитывая эти вероятности, определим векторы риска для каждой стратегии:

— для d_1 имеем вектор с координатами $\begin{cases} R(\theta_1, d_1) = 0 \cdot \dfrac{1}{16} + 5 \cdot \dfrac{15}{16} \approx 4{,}69, \\ R(\theta_2, d_1) = 4 \cdot \dfrac{1}{81} - 1 \cdot \dfrac{80}{81} \approx -0{,}94; \end{cases}$

— для d_2 имеем вектор с координатами $\begin{cases} R(\theta_1, d_2) = 0 \cdot \frac{5}{16} + 5 \cdot \frac{11}{16} \approx 3{,}44, \\ R(\theta_2, d_2) = 4 \cdot \frac{9}{81} - 1 \cdot \frac{72}{81} \approx -0{,}44; \end{cases}$

— для d_3 имеем вектор с координатами $\begin{cases} R(\theta_1, d_3) = 0 \cdot \frac{11}{16} + 5 \cdot \frac{5}{16} \approx 1{,}56, \\ R(\theta_2, d_3) = 4 \cdot \frac{33}{81} - 1 \cdot \frac{48}{81} \approx 1{,}044 \end{cases}$

— для d_4 имеем вектор с координатами $\begin{cases} R(\theta_1, d_4) = 0 \cdot \frac{11}{16} + 5 \cdot \frac{1}{16} \approx 0{,}31, \\ R(\theta_2, d_4) = 4 \cdot \frac{65}{81} - 1 \cdot \frac{16}{81} \approx 3{,}01. \end{cases}$

На рис. 3.8.8 жирными точками отмечены концы векторов риска, а закраской выделена линейная оболочка векторов.

Так как с равными шансами могла быть выбрана любая урна, то имеем априорное распределение: $P(\theta_1) = P(\theta_2) = 1/2.$ Байесовский риск в соответствии с соотношением (3.8.1) принимает вид

$$0{,}5R(\theta_1, d) + 0{,}5R(\theta_2, d) = c.$$

Из рис. 3.8.8 видно, что оптимальной байесовской стратегией является стратегия d_3

Максимальные координаты векторов риска равны соответственно 4,69, 3,44, 1,56 и 3,01. Минимальная из них координата 1,56 у решающего правила d_3. Поэтому из названных *чистых* стратегий минимальный наибольший риск обеспечивает стратегия d_3. Найдем координаты точки A, которая соответствует минимаксной стратегии. Координаты этой точки x и y равны (она лежит на прямой $y = x$). Как известно, уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1, y_2) и (x_2, y_2), имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Поэтому прямая, проходящая через точки d_3 и d_4, имеет уравнение

$$\frac{y - 1{,}04}{x - 1{,}56} = \frac{3{,}01 - 1{,}04}{0{,}31 - 1{,}56} \text{ или } 1{,}97x + 1{,}25y = 4{,}37.$$

Полученное уравнение вместе с равенством $y = x$ дает возможность определить координаты точки A: $y = x = 1{,}36.$

Расстояние от точки d_3 до точки A равно

$$\sqrt{(1{,}36 - 1{,}56)^2 + (1{,}36 - 1{,}04)^2} \approx 0{,}38,$$

а расстояние от точки до точки A равно

$$\sqrt{(0{,}31 - 1{,}36)^2 + (3{,}01 - 1{,}36)^2} \approx 1{,}96.$$

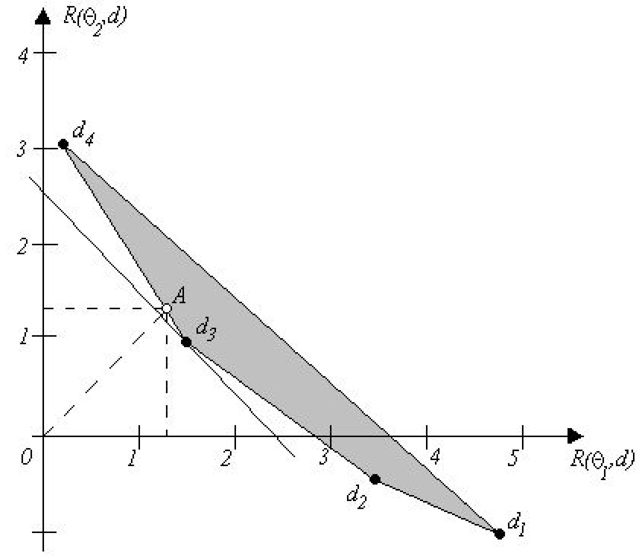


Рис. 3.8.8

Первое расстояние примерно в пять раз меньше второго. Это означает, что решению d_3 следует приписать вероятность $\lambda_3 = 5/6$, решение d_4 использовать с вероятностью $\lambda_4 = 1/6$, а λ_1 и λ_2 взять равными нулю. Далее следует поступать следующим образом. Подбрасываем игральный кубик. Если на нем выпадает заданная грань (например, цифра один), то используем стратегию d_4. Если же заданная грань не выпадает, то принимаем решение в соответствии с правилом d_3.

Ответ. Оптимальной байесовской стратегией является стратегия d_3. Оптимальная минимаксная стратегия реализуется при наборе вероятностей $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 5/6,\ \lambda_4 = 1/6.$

Задача 3.28. В трех внешне одинаковых урнах находятся шары. В первой и второй урнах по k_1 белых и по k_2 черных шара, а в третьей урне k_3 белых шаров и k_4 черных. Урну выбирают наугад и из нее производится повторная выборка четырех шаров. По результатам выбора необходимо принять решение относительно содержания урны, из которой производился выбор шаров, т. е. пространство решений состоит из двух решений:

— решение a_1 — шары выбирались из первой или второй урны (вероятность выбора белого шара равна θ_1);

— решение a_2 — шары выбирались из третьей урны (вероятность выбора белого шара равна θ_2).

Функция потерь имеет следующий вид.

	a_1	a_2
θ_1	L_{11}	L_{12}
θ_2	L_{21}	L_{22}

Перечислите возможные чистые стратегии. Найдите байесовскую и минимаксную стратегии. (См. пример 3.28 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 3.28.

№	L_{11}	L_{12}	L_{21}	L_{22}	k_1	k_2	k_3	k_4	№	L_{11}	L_{12}	L_{21}	L_{22}	k_1	k_2	k_3	k_4
1	0	2	4	–1	4	2	3	3	**16**	1	3	4	–1	3	3	4	2
2	1	3	4	–1	4	2	2	4	**17**	–1	4	3	1	2	4	4	2
3	–1	4	3	1	2	6	5	5	**18**	1	5	4	–1	5	5	2	6
4	1	5	4	–1	2	4	6	2	**19**	0	3	4	1	2	6	2	4
5	0	3	4	1	4	6	3	2	**20**	–1	5	4	1	3	2	2	6
6	–1	5	4	1	3	3	4	2	**21**	0	2	5	1	4	2	3	3
7	0	2	5	1	2	4	4	2	**22**	0	2	4	–1	4	2	2	4
8	0	2	4	–1	5	5	2	6	**23**	0	2	4	–1	2	6	5	5
9	1	3	4	–1	2	6	2	4	**24**	1	3	4	–1	2	4	6	2
10	–1	4	3	1	3	2	2	6	**25**	–1	4	3	1	4	6	3	2
11	1	5	4	–1	4	2	3	3	**26**	1	5	4	–1	4	2	3	3
12	0	3	4	1	4	2	2	4	**27**	0	3	4	1	4	2	2	4
13	–1	5	4	1	2	6	5	5	**28**	–1	5	4	1	2	6	5	5
14	0	2	5	1	2	4	6	2	**29**	0	2	5	1	2	4	6	2
15	0	2	4	–1	4	6	3	2	**30**	0	2	4	–1	4	6	3	2

4. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Пусть T — некоторое множество действительных чисел. *Случайной функцией* называется совокупность случайных величин $\{X(t)\}$, зависящих от параметра $t \in T$. При каждом фиксированном значении параметра $t = t_0 \in T$ имеем дело со случайной величиной $X(t_0)$, которую называют *сечением случайной функции* при данном значении параметра $t = t_0$. Роль параметра чаще всего играет время или координата. Параметр может быть и многомерным. Если параметр многомерный, то говорят о случайных полях. Примером двумерного случайного поля может служить поверхность волнующегося моря.

При наблюдении случайной функции мы получаем одну из возможных ее реализаций — неслучайную функцию. Поэтому случайную функцию можно рассматривать как совокупность всех ее возможных реализаций (см. рис. 4.1, на котором жирной линией выделена одна из возможных реализаций, а точками отмечены возможные значения случайной величины $X(t_0)$).

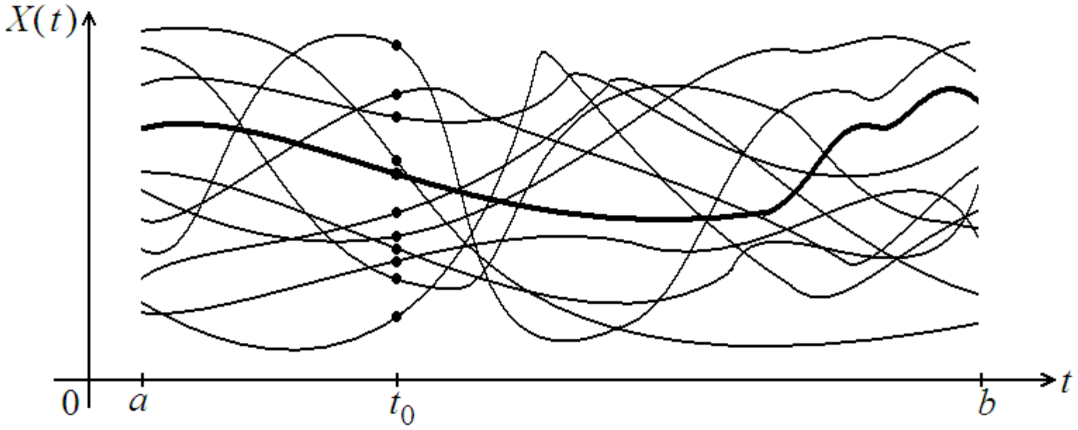


Рис. 4.1

Если роль параметра t играет время, то случайную функцию называют *случайным процессом.* Если параметр дискретный, то соответствующие ему случайные величины образуют *случайную последовательность.*

С изменением параметра t изменяется и закон распределения случайной величины $X(t)$. Этот закон распределения можно задать в виде функции распределения

$$F(x/t) = P\{X(t) < x\}.$$

Если функция распределения $F(x/t)$ дифференцируема, то

$$f(x/t) = \frac{\partial F(x/t)}{\partial x}$$

называется *функцией плотности вероятности*.

Для дискретной случайной величины одномерный закон распределения задается перечислением возможных значений и соответствующих им вероятностей

$$P\{X(t)=x_k\} \quad p_k(t), \quad \sum_k p_k(t) \quad 1.$$

Конечномерным законом распределения случайной функции $X(t)$ называется закон распределения *n* сечений случайной функции

$$\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\}, \quad n \in N, \; t_1, t_2, \ldots, t_n \in T.$$

Проследить за изменениями всех возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей, как правило, практически невозможно. Поэтому обычно ограничиваются анализом числовых характеристик случайной величины $X(t)$. В первую очередь интересуются математическим ожиданием (начальным моментом первого порядка), дисперсией (центральным моментом второго порядка) и для анализа взаимосвязи между значениями процесса при разных значениях параметра *t* рассматривают коэффициент ковариации (ковариационный момент).

Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию $m_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении параметра *t* равно математическому ожиданию сечения процесса при этом значении параметра, т.е.

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию $D_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении параметра *t* равно дисперсии сечения процесса при этом значении параметра, т.е.

$$D_x(t) = D[X(t)].$$

На рис. 4.2 и рис. 4.3 изображены несколько реализаций соответственно случайных процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$, которые имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии. Однако характер протекания этих процессов существенно различен. У процесса $X_1(t)$ реализации плавные. Это свидетельствует о зависимости значений процесса, отделенных небольшими промежутками времени. Процесс же $X_2(t)$ меняется быстро и влияние предыдущих значений процесса быстро иссякает.

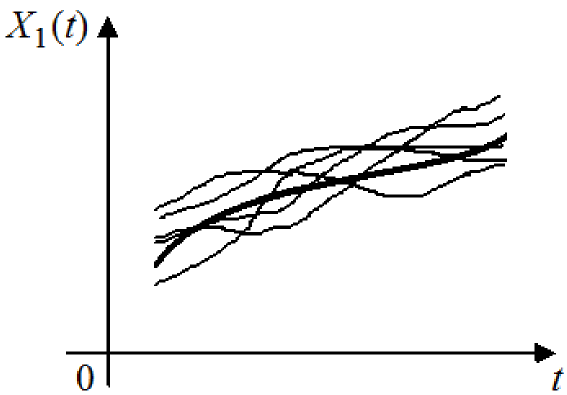


Рис. 4.2

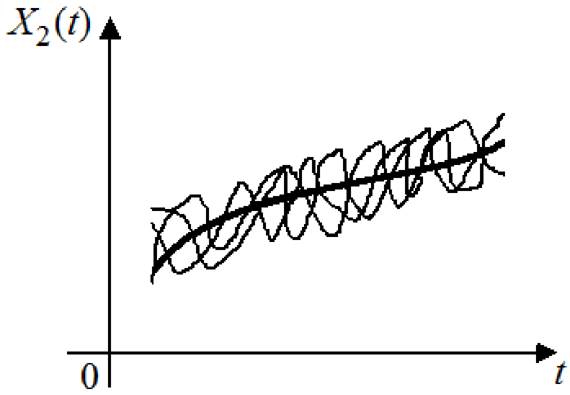


Рис. 4.3

Для описания этих особенностей процесса существует специальная характеристика, которая называется *корреляционной функцией* (иногда говорят об *автокорреляционной функции)*.

Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию $K_x(t_1,t_2)$, значение которой при каждых фиксированных значениях параметра t_1 и t_2 равно коэффициенту ковариации величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$, т.е.

$$K_x(t_1,t_2) = M[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))].$$

При равных между собой аргументах $t_1 = t_2 = t$ корреляционная функция равна дисперсии случайного процесса:

$$K_x(t,t) = M[X(t) - m_x(t)]^2 = D_x(t).$$

Отметим некоторые *свойства корреляционной функции*:

1. При перестановке аргументов корреляционная функция не меняется:

$$K_x(t_1,t_2) = K_x(t_2,t_1).$$

2. Прибавление к случайной функции $X(t)$ неслучайной функции $\varphi(t)$ не меняет ее корреляционной функции. Если $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, то

$$K_y(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2).$$

3. При умножении случайной функции $X(t)$ на неслучайную функцию $\varphi(t)$ корреляционная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$. Если $Y(t) = \varphi(t)X(t)$, то

$$K_y(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_x(t_1,t_2).$$

При решении некоторых научно-технических задач приходится иметь дело со случайными процессами, которые удается описать комбинацией простых (элементарных) функций, в которые в качестве параметров входят случайные величины. Такие случайные функции называют *элементарными случайными функциями*.

Например, $W(t) = X\sin(Yt + Z)$, где случайными величинами являются амплитуда *X*, частота *Y* и фаза *Z* гармонических колебаний.

Пример 4.1. Элементарная случайная функция имеет вид $Z(t) = X\sin(Yt)$, где X и Y независимы, причем X имеет плотность вероятности $f(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$, $\lambda > 0$, $x \geq 0$ (показательный закон распределения с параметром λ), а случайная величина Y равномерно распределена в отрезке $[0, a]$. Требуется найти для $Z(t)$ математическое ожидание, дисперсию и автокорреляционную функцию.

Решение. Обозначим $\sin(Y\,t)$ через $W(t)$. Учитывая, что случайная величина Y равномерно распределена на $[0, a]$ с постоянной плотностью $f(y) = 1/a$, имеем

$$m_w(t) = M[\sin(Yt)] = \frac{1}{a}\int_0^a \sin(yt)dy = \frac{1-\cos at}{at}.$$

Поэтому

$$m_z(t) = M(X)M[\sin(Yt)] = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1-\cos at}{at},$$

так как для показательного закона распределения $m_x = M(X) = 1/\lambda$. Вычислим

$$K_Z(t_1,t_2) = M\{[X\sin(Yt_1) - m_x m_w(t_1)][X\sin(Yt_2) - m_x m_w(t_2)]\} =$$
$$= M\{X^2\sin(Yt_1)\sin(Yt_2) - m_x m_w(t_1)X\sin(Yt_2) - m_x m_w(t_2)X\sin(Yt_1) +$$
$$+(m_x)^2 m_w(t_1)m_w(t_2)\} = M(X^2)M[\sin(Yt_1)\sin(Yt_2)] - (m_x)^2 m_w(t_1)m_w(t_2) -$$
$$-(m_x)^2 m_w(t_2)m_w(t_1) + (m_x)^2 m_w(t_1)m_w(t_2) =$$
$$= M(X^2)M[\sin(Yt_1)\sin(Yt_2)] - (m_x)^2 m_w(t_1)m_w(t_2).$$

Для показательного закона распределения двукратное интегрирование по частям дает

$$M(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda\, e^{-\lambda x}dx = 2/\lambda^2,$$

а $M[\sin(Yt_1)\sin(Yt_2)] = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a \sin(yt_1)\sin(yt_2)\,dy =$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^a \{\cos[y(t_1-t_2)] - \cos[y(t_1+t_2)]\}\,dy = \frac{1}{2a}\left[\frac{\sin a(t_1-t_2)}{t_1-t_2} - \frac{\sin a(t_1+t_2)}{t_1+t_2}\right].$$

Поэтому и при $t_1 < t_2$ и при $t_1 > t_2$

$$K_Z(t_1, t_2) = \frac{1}{a\lambda^2}\left[\frac{\sin a(t_1-t_2)}{t_1-t_2} - \frac{\sin a(t_1+t_2)}{t_1+t_2}\right] - \frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{1-\cos at_1}{at}\cdot\frac{1-\cos at_2}{at}.$$

Для вычисления дисперсии возьмем в полученном выражении $t_1 = t_2 = t$:

$$D_z(t) = \frac{1}{a\lambda^2}\left[a - \frac{\sin 2at}{2t}\right] - \frac{(1-\cos at)^2}{(at\lambda)^2}.$$

Ответ. $m_z(t) = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1-\cos at}{at}$, $D_z(t) = \frac{1}{a\lambda^2}\left[a - \frac{\sin 2at}{2t}\right] - \frac{(1-\cos at)^2}{(at\lambda)^2}$.

Задача 4.1. Элементарная случайная функция задана равенством

$$Z(t) = X\exp(Yt),$$

где X и Y независимы, причем X имеет $M(X) = m$, $D(X) = \sigma^2$, а случайная величина Y равномерно распределена в отрезке $[0, a]$. Найдите математическое ожидание $m_z(t)$, дисперсию $D_z(t)$ и автокорреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$. (См. пример 4.1, a — номер варианта.)

Пример 4.2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с функцией плотности вероятности

$$f(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)} \text{ при } x \geq 1 \text{ и } f(x) = 0 \text{ при } x < 1,\ \alpha > 0.$$

Говорят, что последовательность $\{X_i\}$ превышает уровень u (выходит за уровень u) в момент j, если $X_j > u$. Рассмотрим $N(u) = \min\{i \geq 1 : X_i > u\}$ — момент первого выхода последовательности (случайного процесса с дискретным временем) за уровень u. Требуется найти распределение случайной величины $N(u)$ и ее математическое ожидание.

Решение. Вычислим

$$p = P(X_i > u) = \int_u^\infty \alpha x^{-\alpha-1}dx = -x^{-\alpha}\Big|_u^\infty = \frac{1}{u^\alpha}.$$

Тогда $P(X_i \leq u) = 1 - 1/u^\alpha$ и

$$P(N(u) = k) = \left(1 - \frac{1}{u^\alpha}\right)^{k-1}\frac{1}{u^\alpha}$$

— это геометрический закон распределения.

Но для геометрического закона распределения $P(X = k) = pq^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, $M(X) = p\sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{k-1} = 1/p$. В нашем случае роль p играет величина $1/u^\alpha$. Поэтому

$$M(N(u)) = \frac{1}{1/u^\alpha} = u^\alpha.$$

Ответ. $P(N(u)=k)=\left(1-\dfrac{1}{u^{\alpha}}\right)^{k-1}\dfrac{1}{u^{\alpha}}$, $k=1,2,3,\ldots;$ $M(N(u))=u^{\alpha}$.

Задача 4.2. Пусть $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ — последовательность независимых случайных величин с функцией плотности вероятности

$$f(x)=2\alpha^2 x\exp\{-(\alpha x)^2\},\quad x\geq 0,\ \alpha>0.$$

Обозначим момент первого выхода последовательности за уровень u через $N(u)=\min\{i\geq 1: X_i>u\}$. Найдите распределение случайной величины $N(u)$ и ее математическое ожидание. (См. пример 4.2, α — номер варианта.)

Пример 4.3. Пусть $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ — последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и равными дисперсиями $D(X_i)=D$. Требуется найти корреляционную функцию для случайной последовательности $Y_n=X_n+X_{n+1},\quad n=0,1,2,\ldots$.

Решение. Так как математические ожидания случайных величин равны нулю, то $\overset{\circ}{X}=X$. Поэтому

$$K_y(s)=M[\overset{\circ}{Y}_n\overset{\circ}{Y}_{n+s}]=M[Y_nY_{n+s}]=M[(X_n+X_{n+1})(X_{n+s}+X_{n+s+1})].$$

При $s=0$

$$K_y(0)=M[(X_n+X_{n+1})(X_n+X_{n+1})]=$$

$$=M[(X_n{}^2)+M[X_nX_{n+1}]+M[X_{n+1}X_n]+M[X_{n+1}^2]=D+D=2D.$$

При $s=1$

$$K_y(1)=M[(X_n+X_{n+1})(X_{n+1}+X_{n+2})]=$$

$$=M[X_nX_{n+1}]+M[X_nX_{n+2}]+M[X_{n+1}^2]+M[X_{n+1}X_{n+2}]=D.$$

При остальных $s=2,3,\ldots$ величина $K_y(s)=0$.

Ответ. $K_y(0)=2D$, $K_y(1)=D$, при остальных $s=2,3,\ldots$ величина $K_y(s)=0$.

Задача 4.3. Пусть $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ — последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и равными дисперсиями $D(X_i)=D$. Найдите корреляционную функцию для случайной последовательности

$$Y_n=X_n+aX_{n+1}+bX_{n+2},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

где a и b — постоянные величины. (См. пример 4.3, a — последняя цифра номера варианта, $b=a+1$.)

Пример 4.4. Все положения случайной точки (X,Y) равновозможны в области $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$. Для случайного процесса

$$Z(t)=X\cos\omega t+Y\sin\omega t, \text{ постоянная } \omega>0,$$

требуется найти математическое ожидание $m_z(t)$, дисперсию $D_z(t)$ и корреляционную функцию $K_z(t_1,t_2)$.

Решение. По свойствам математического ожидания

$$M[Z(t)]=\cos\omega t\cdot M(X)+\sin\omega t\cdot M(Y).$$

Так как площадь области D равна $\pi/4$, а все положения случайной точки (X,Y) в этой области равновозможны, то плотность вероятности случайной точки $f(x,y)=4/\pi$ при $(x,y)\in D$ и $f(x,y)=0$ при остальных (x,y).

Маргинальная плотность вероятности случайной величины X равна

$$f(x)=\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4/\pi\, dy = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

Поэтому

$$M(X)=\frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}d(1-x^2)\,dx=-\frac{4}{3\pi}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{4}{3\pi}.$$

Аналогично, $M(Y)=\dfrac{4}{3\pi}$. Поэтому

$$m_z(t)=M[Z(t)]=\frac{4}{3\pi}(\cos\omega t+\sin\omega t),$$

а $\overset{\circ}{Z}(t)=X\cos\omega t+Y\sin\omega t-\dfrac{4}{3\pi}\cos\omega t-\dfrac{4}{3\pi}\sin\omega t=$

$$=\left(X-\frac{4}{3\pi}\right)\cos\omega t+\left(Y-\frac{4}{3\pi}\right)\sin\omega t=\overset{\circ}{X}\cos\omega t+\overset{\circ}{Y}\sin\omega t.$$

Вычислим дисперсию X. Так как

$$M(X^2)=\frac{4}{\pi}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\left\{\begin{matrix} x=\sin t, & dx=\cos t\,dt \\ x=0\Rightarrow t=0, & x=1\Rightarrow t=\pi/2\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt=1/4,$$

то $D(X)=\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{4}{3\pi}\right)^2=\dfrac{9\pi^2-64}{36\pi^2}$. Аналогично находим, что $D(Y)=\dfrac{9\pi^2-64}{36\pi^2}$.

Вычислим теперь корреляционную функцию процесса:

$$K_z(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{Z}(t_1)\overset{\circ}{Z}(t_2)]=M[(\overset{\circ}{X}\cos\omega t_1+\overset{\circ}{Y}\sin\omega t_1)(\overset{\circ}{X}\cos\omega t_2+\overset{\circ}{Y}\sin\omega t_2)]=$$

$$=\cos\omega t_1\cos\omega t_2 M(\overset{\circ}{X^2})+\sin\omega t_1\sin\omega t_2 M(\overset{\circ}{Y^2})+\cos\omega t_1\sin\omega t_2 M(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y})+$$

$$+\cos\omega t_2 \sin\omega t_1 M(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}) = \frac{9\pi^2-64}{36\pi^2}(\cos\omega t_1\cos\omega t_2+\sin\omega t_1\sin\omega t_2)+$$

$$+\operatorname{cov}(X,Y)(\cos\omega t_1\sin\omega t_2+\cos\omega t_2\sin\omega t_1)=$$

$$=\frac{9\pi^2-64}{36\pi^2}\cos\omega(t_1-t_2)+\operatorname{cov}(X,Y)\sin\omega(t_1+t_2).$$

Вычислим $\operatorname{cov}(X,Y)=M\left[\left(X-\frac{4}{3\pi}\right)\right]\left(Y-\frac{4}{3\pi}\right)=$

$$=M(XY)-\frac{4}{3\pi}M(X)-\frac{4}{3\pi}M(Y)+\frac{16}{9\pi^2}=M(XY)-\frac{16}{9\pi^2}.$$

Но $M(XY)=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 x(1-x^2)\,dx=\frac{1}{2\pi}$. Поэтому

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{2\pi}-\frac{16}{9\pi^2}=\frac{9\pi-32}{18\pi^2}.$$

С учетом этого получаем

$$K_z(t_1,t_2)=\frac{9\pi^2-64}{36\pi^2}\cos\omega(t_1-t_2)+\frac{9\pi-32}{18\pi^2}\sin\omega(t_1+t_2),$$

$$D_z(t)=K_z(t,t)=\frac{9\pi^2-64}{36\pi^2}+\frac{9\pi-32}{18\pi^2}\sin 2\omega t.$$

Ответ. $m_z(t)=\frac{4}{3\pi}(\cos\omega t+\sin\omega t),$

$$D_z(t)=\frac{9\pi^2-64}{36\pi^2}+\frac{9\pi-32}{18\pi^2}\sin 2\omega t,$$

$$K_z(t_1,t_2)=\frac{9\pi^2-64}{36\pi^2}\cos\omega(t_1-t_2)+\frac{9\pi-32}{18\pi^2}\sin\omega(t_1+t_2).$$

Задача 4.4. Все положения случайной точки (X,Y) равновозможны в области *D*, ограниченной прямыми линиями: $x+y=a$, $x=0$, $y=0$. Для случайного процесса

$$Z(t)=X\cos\omega t+Y\sin\omega t,\quad \omega>0$$

требуется найти математическое ожидание $m_z(t)$, дисперсию $D_z(t)$ и корреляционную функцию $K_z(t_1,t_2)$. (См. пример 4.4, *a* — номер варианта.)

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию $R_{xy}(t_1,t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, значения которой равны корреляционному моменту случайных величин $X(t_1)$ и $Y(t_2)$:

$$R_{xy}(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)].$$

Коррелированными называют две случайные функции, если их взаимная корреляционная функция не равна тождественно нулю. В противном случае говорят о *некоррелированных* случайных функциях.

Если рассматривать многомерный случайный процесс $\vec{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\}$, то он имеет характеристики

$$m_i(t) = M(X_i), \quad K_i(t_1,t_2) \quad M[\overset{\circ}{X}_i(t_1)\overset{\circ}{X}_i(t_2)], \quad (i \quad 1,2,3,\ldots,n).$$

Эти характеристики описывают поведение отдельно взятых координат случайного процесса, но не учитывают взаимодействие между ними. В качестве характеристики взаимозависимости координат случайного процесса используют взаимную корреляционную функцию $R_{ij}(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}_i(t_1)\overset{\circ}{X}_j(t_2)]$. В общем случае взаимная корреляционная функция $R_{ij}(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}_i(t_1)\overset{\circ}{X}_j(t_2)]$ не равна $R_{ij}(t_2,t_1) = M[\overset{\circ}{X}_i(t_2)\overset{\circ}{X}_j(t_1)]$, так как ковариация между сечениями $X_i(t_1)$ и $X_j(t_2)$ (точки 1 и 2 на рис. 2.4.4), вообще говоря, не равна ковариации между сечениями $X_j(t_1)$ и $X_i(t_2)$ (на рис. 4.4 точки 3 и 4).

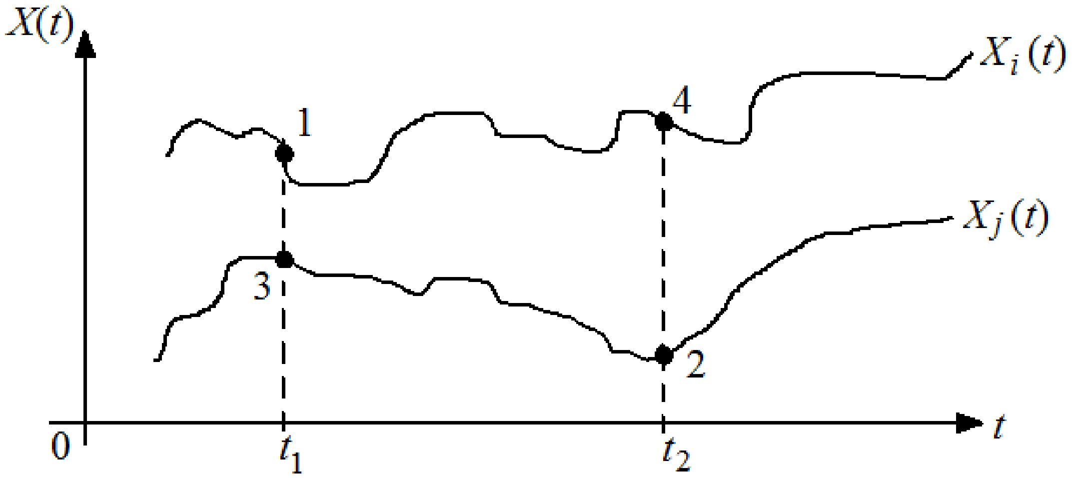


Рис. 4.4

В терминах характеристик второго порядка, например, двумерный случайный процесс $\{X_1(t), X_2(t)\}$ описывают вектором средних значений $\{M[X_1(t)], M[X_2(t)]\}$ и матрицей корреляционных функций

$$\begin{pmatrix} R_{11}(t_1,t_2) & R_{12}(t_1,t_2) \\ R_{21}(t_1,t_2) & R_{22}(t_1,t_2) \end{pmatrix}.$$

Наглядным примером двумерного случайного процесса (или случайного поля) может служить поверхность моря.

Пример 4.5. Даны два случайных процесса

$$X(t) = U\cos t + V\sin t \text{ и } Y(t) = U\cos t - V\sin t,$$

где случайные величины U и V независимы и имеют равные дисперсии $D(U) = D(V) = D.$ Требуется найти взаимную корреляционную функцию этих процессов.

Решение. Так как $M(X) = M(U)\cos t + M(V)\sin t,$ то

$$\mathring{X}(t) = U\cos t + V\sin t - M(U)\cos t - M(V)\sin t = \mathring{U}\cos t + \mathring{V}\sin t.$$

Аналогично, $\mathring{Y}(t) = \mathring{U}\cos t - \mathring{V}\sin t.$ Тогда

$$R_{xy}(t_1,t_2) = M[\mathring{X}(t_1)\mathring{Y}(t_2)] = M[(\mathring{U}\cos t_1 + \mathring{V}\sin t_1)(\mathring{U}\cos t_2 - \mathring{V}\sin t_2)] =$$

$$= \cos t_1 \cos t_2 M(\mathring{U}^2) + \sin t_1 \cos t_2 M(\mathring{V}\mathring{U}) - \cos t_1 \sin t_2 M(\mathring{U}\mathring{V}) - \sin t_1 \sin t_2 M(\mathring{V}^2).$$

Величины U и V независимы, а значит и некоррелированы. Поэтому $\operatorname{cov}(U,V) = M(\mathring{U}\mathring{V}) = 0.$ С учетом того, что $M(\mathring{U}^2) = D(U) = D,$ а $M(\mathring{V}^2) = D(V) = D,$ получаем

$$R_{xy}(t_1,t_2) = D(\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2) = D\cos(t_1 + t_2).$$

Ответ. $R_{xy}(t_1,t_2) = D\cos(t_1 + t_2).$

Задача 4.5. Даны два случайных процесса

$$X(t) = bU\cos t + V\sin t \text{ и } Y(t) = U\cos t - bV\sin t,$$

где случайные величины U и V независимы и имеют равные дисперсии $D(U) = D(V) = D.$ Найдите взаимную корреляционную функцию этих процессов. (См. пример 4.5, b — номер варианта.)

Пример 4.6. Даны два случайных процесса $X(t) = Ut$ и $Y(t) = U + Vt,$ где U и V независимы, имеют $M(U) = M(V) = 0$ и $D(U) = D(V) = D.$ Требуется найти взаимную корреляционную функцию этих процессов.

Решение. Так как $M[X(t)] = M(Ut) = tM(U) = 0$ и $M[Y(t)] =$

$$= M[U + Vt] = M(U) + tM(V) = 0, \text{ то } R_{xy}(t_1,t_2) = M[(\mathring{X}(t_1)\mathring{Y}(t_2)] =$$

$$= M[(Ut_1)(U + Vt_2)] = t_1 M(U^2) + t_2 M(UV) = t_1 D.$$

Ответ. $R_{xy}(t_1,t_2) = t_1 D.$

Задача 4.6. Даны два случайных процесса $X(t) = Ut + aV$ и $Y(t) = bU + Vt,$ где U и V независимы, имеют $M(U) = M(V) = 0$ и $D(U) = D(V) = D.$ Найдите взаимную корреляционную функцию этих процессов. (См. пример 4.6, a — номер варианта, $b = a + 1$.)

Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ — две случайные функции, а случайная функция $Z(t)$ равна $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Выразим характеристики $Z(t)$ через характеристики $X(t)$ и $Y(t)$.

Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий этих функций:

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t).$$

Заметим, что $\overset{\circ}{Z}(t) = M(Z(t) - m_z(t)) = M[X(t) + Y(t) - m_x(t) - m_y(t)] =$

$$= M[X(t) - m_x(t)] + M[Y(t) - m_y(t)] = \overset{\circ}{X}(t) + \overset{\circ}{Y}(t).$$

Поэтому $K_z(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{Z}(t_1)\overset{\circ}{Z}(t_2)] = M\{[\overset{\circ}{X}(t_1) + \overset{\circ}{Y}(t_1)][\overset{\circ}{X}(t_2) + \overset{\circ}{Y}(t_2)]\} =$

$$= M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] + M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] + M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] + M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] =$$

$$= K_x(t_1,t_2) + K_y(t_1,t_2) + R_{xy}(t_1,t_2) + R_{yx}(t_1,t_2). \qquad (4.1)$$

Легко видеть, что для процесса $Z(t) = X(t) - Y(t)$ корреляционная функция имеет вид:

$$K_z(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2) + K_y(t_1,t_2) - R_{xy}(t_1,t_2) - R_{yx}(t_1,t_2). \qquad (4.2)$$

Пример 4.7. Случайный процесс $X(t) = \sin(t + a)$, а $Y(t) = a \sin t$, где a — случайная величина с равномерным законом распределения на $[-\pi, \pi]$. Необходимо найти корреляционную функцию случайного процесса $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Решение. Прежде всего вычислим математические ожидания случайных процессов. Случайная величина a равномерно распределена на $[-\pi, \pi]$ с плотностью вероятности равной $1/2\pi$. Поэтому

$$M[X(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t + a)\, da = -\frac{1}{2\pi}\cos(t + \omega)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$M[Y(t)] = \frac{\sin t}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a\, da = \frac{\sin t}{2\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right] = 0.$$

Вычислим величины необходимые для использования формулы (4.1):

$$K_x(t_1,t_2) = M[\sin(t_1 + a)\cdot\sin(t_2 + a)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t_1 + a)\sin(t_2 + a)\, da =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(t_1 - t_2) - \cos(t_1 + t_2 + 2a)]\, da = \frac{1}{2}\cos(t_1 - t_2);$$

$$K_y(t_1,t_2) = M[a\sin t_1 \cdot a\sin t_2] = \sin t_1 \sin t_2 M(a^2) = \frac{\pi^2}{3}\sin t_1 \sin t_2;$$

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M[\sin(t_1+a)\cdot a\sin t_2]=\sin t_2\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}a\sin(t_1+a)\,da=$$

$$=\sin t_2\frac{1}{2\pi}\left[-a\cos(t_1+a)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(t_1+a)\,da\right]=$$

$$=\sin t_2\frac{1}{2\pi}\Big[-\pi\cos(t_1+\pi)-\pi\cos(t_1-\pi)+\sin(t_1+a)\Big|_{-\pi}^{\pi}\Big]=\sin t_2\cos t_1.$$

Аналогично, $R_{yx}(t_1,t_2)=\sin t_1\cos t_2$. По формуле (4.1)

$$K_z(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\cos(t_1-t_2)+\frac{\pi^2}{3}\sin t_1\sin t_2+\sin t_2\cos t_1+\sin t_1\cos t_2=$$

$$=\frac{1}{2}\cos(t_1-t_2)+\sin(t_1+t_2)+\frac{\pi^2}{3}\sin t_1\sin t_2.$$

Ответ. $\frac{1}{2}\cos(t_1-t_2)+\sin(t_1+t_2)+\frac{\pi^2}{3}\sin t_1\sin t_2.$

Задача 4.7. Случайный процесс $X(t)=\cos(\omega t+a)$, а $Y(t)=a\sin t$, где a — случайная величина с равномерным законом распределения на $[-\pi,\pi]$. Необходимо найти корреляционную функцию случайного процесса $Z(t)=X(t)+Y(t)$ в нечетных вариантах и для случайного процесса $Z(t)=X(t)-Y(t)$ в четных вариантах. (См. пример 4.7, a — номер варианта.)

4.1 Стационарные случайные процессы

Случайный процесс называется *стационарным*, если все его характеристики не зависят от времени.

Определение. Случайная функция $X(t)$ называется *строго стационарной* (*стационарной в узком смысле*), если все ее конечномерные законы распределения не изменяются от сдвига параметра (времени) на произвольную величину t_0. Это в частности означает, что ее математическое ожидание и дисперсия постоянны, а корреляционная функции зависит только от разности аргументов.

Определение. Случайная функция $X(t)$ называется *стационарной в широком смысле*, если ее математическое ожидание постоянно, а корреляционная функции зависит только от разности аргументов т.е.

$$m_x(t)=\text{const},\quad K_x(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_1+\tau)=k_x(\tau). \tag{4.1.1}$$

Так как $K_x(t,t)=D(X)$, то условие (4.1.1) означает и постоянство дисперсии.

Пример 4.8. Дан случайный процесс $X(t)=\cos(t+\varphi)$, где φ — случайная величина, равномерно распределенная в отрезке $[0,2\pi]$. Требуется доказать, что этот случайный процесс стационарен в широком смысле.

Решение. Для доказательства необходимо проверить выполнение условий (4.1.1). Найдем математическое ожидание

$$m_x(t)=M[X(t)]=M[\cos(t+\varphi)]=M[\cos t\cos\varphi-\sin t\sin\varphi]=$$
$$=\cos t\cdot M[\cos\varphi]-\sin t\cdot M[\sin\varphi]=0,$$

так как

$$M[\cos\varphi]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}=0$$

и

$$M[\sin\varphi]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi=-\frac{1}{2\pi}\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}=0,$$

где $1/2\pi$ — плотность вероятности случайной величины φ. Заметим, что $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)=\cos(t+\varphi)-0=\cos(t+\varphi)$. Поэтому

$$K_x(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]=M[\cos(t_1+\varphi)\cos(t_2+\varphi)]=$$
$$=\frac{1}{2}M[\cos(t_2+\varphi-t_1-\varphi)+\cos(t_1+\varphi+t_2+\varphi)]=$$
$$=\frac{1}{2}\cos(t_2-t_1)+M[\cos(t_1+t_2+2\varphi)]=\frac{1}{2}\cos(t_2-t_1),$$

так как $M[\cos(t_1+t_2+2\varphi)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(t_1+t_2+2\varphi)\,d\varphi=\dfrac{1}{4\pi}\sin(t_1+t_2+2\varphi)\Big|_0^{2\pi}=$

$$=\frac{1}{4\pi}[\sin(t_1+t_2+4\pi)-\sin(t_t+t_2)]=0.$$

Итак, $m_x(t)=0$, а $K_x(t_1,t_2)=\dfrac{1}{2}\cos(t_2-t_1)$, т.е. зависит только от разности $t_2-t_1=\tau$. Корреляционная функция оказалась независящей от величины φ, которую в приложениях обычно трактуют как «фазу».

Ответ. Процесс стационарен в широком смысле.

Задача 4.8. Докажите, что случайный процесс $X(t)=\sin(at+\varphi)$, где φ — случайная величина, равномерно распределенная в отрезке $[-\pi,\pi]$, стационарен в широком смысле. (См. пример 4.8, *a* — номер варианта.)

Пример 4.9. Значения случайного процесса $X(t)$ изменяются скачками в случайные моменты времени t_k, $k=0,1,3,\ldots$. Моменты скачков образуют простейший (пуассоновский) поток событий интенсивности μ, т.е. вероятность того, что за время τ произойдет k скачков равна

$$\frac{(\mu\tau)^k}{k!}e^{-\mu\tau}. \qquad (4.1.2)$$

В интервале $(t_{k,}t_{k+1})$ между двумя скачками $X(t)$ может принимать лишь два значения 0 или 1 с вероятностями соответственно $1-p=q$ и p. Значения $X(t)$ в различных интервалах независимы. (Такой процесс называют *фототелеграфным сигналом*.)

Необходимо найти $m_x(t),\ D[X(t)],\ K_x(t_1,t_2)$, и выяснить, является ли этот процесс $X(t)$ стационарным в широком смысле.

Решение. В произвольный момент времени t значения процесса имеют распределение

$X(t)$	0	1
P	q	p

Поэтому $m_x(t)=M[X(t)]=0\cdot q+1\cdot p=p$;

$$D[X(t)]=(0-p)^2q+(1-p)^2p=p^2q+q^2p=pq(p+q)=pq.$$

Заметим, что если между моментами t_1 и t_2 не было скачков процесса (вероятность чего по формуле (4.1.2) равна $e^{-\mu|\tau|}$, где $\tau=|t_1-t_2|$), то значения процесса $X(t_1)$ и $X(t_2)$ совпадают и

$$M[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}(t_2)]=M[\mathring{X}(t_1)^2]=D[X(t)]=pq.$$

Если же между моментами t_1 и t_2 скачки были, то величины $X(t_1)$ и $X(t_2)$ независимы и $M[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}(t_2)]=0$. Поэтому

$$K_x(t_1,t_2)=M[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}(t_2)]=pqe^{-\mu|\tau|}+0\cdot(1-e^{-\mu|\tau|})=pqe^{-\mu|\tau|}.$$

Итак, математическое ожидание и дисперсия процесса постоянны, а корреляционная функция зависит только от разности значений аргументов. Это означает, что процесс стационарен в широком смысле.

Ответ. $m_x(t)=p,\quad D[X(t)]=pq,\quad K_x(t_1,t_2)=pqe^{-\mu|\tau|}$. Процесс стационарен в широком смысле.

Задача 4.9. Значения случайного процесса $X(t)$ изменяются скачками в случайные моменты времени t_k, $k=0,1,3,\ldots$. Моменты скачков образуют простейший (пуассоновский) поток событий интенсивности μ. В интервале $(t_{k,}t_{k+1})$ между двумя скачками $X(t)$ имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Значения $X(t)$ в различных интервалах независимы.

Найдите $m_x(t),\ D[X(t)],\ K_x(t_1,t_2)$ и выясните, является ли этот процесс $X(t)$ стационарным в широком смысле. (См. пример 4.9, в нечетных вариантах $n=3$, в четных вариантах $n=4$, значение p возьмите из исходных данных к задаче 2.76.)

Пример 4.10. Случайный процесс $X(t)$ строится следующим образом. В некоторый случайный момент времени T появляется прямоугольный импульс длительности t_0 и случайной амплитудой A_1. В момент времени $T+t_0$ этот импульс сменяется новым импульсом той же длительности и случайной амплитуды A_2, и т. д. Величины $A_1, A_2, \ldots$ независимы, и каждая с равными вероятностями принимает одно из двух значений «+1» или «–1». Одна из возможных реализаций процесса $X(t)$ показана на рис. 4.1.1.

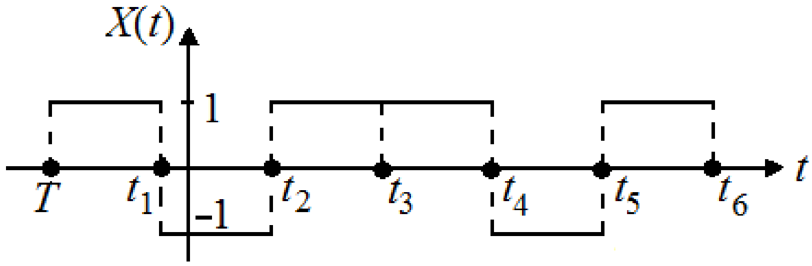


Рис. 4.1.1

Требуется найти $m_x(t)$, $D[X(t)]$, $K_x(t_1, t_2)$ и выяснить, является ли этот процесс $X(t)$ стационарным в широком смысле.

Решение. Для любого момента времени t:

$$m_x(t) = M[X(t)] = -1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 0,$$

$$D[X(t)] = (-1)^2 \cdot 1/2 + 1^2 \cdot 1/2 = 1.$$

Обозначим $t_1 = t$ и $t_2 = t + \tau$. Так как равновозможны все положения точки t в $[t_k, t_{k+1})$, то t имеет равномерное распределение в $[0, t_0)$ с функцией плотности вероятности $f(t) = 1/t_0$.

Случайный процесс центрирован ($m_x(t) = 0$), поэтому

$$K_x(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)] = M[X(t)X(t+\tau)].$$

Если вместе t_1 и $t_2 = t + \tau$ принадлежит промежутку $[t_k, t_{k+1})$, то

$$M[X(t_1)X(t_2)] = M(A^2) = 1.$$

Вероятность этого

$$P(\tau < t_0 - t) = P(t < t_0 - \tau) = M(A_i^2) = 1 - \tau/t_0.$$

Если же $\tau > t_0 - t$, вероятность чего равна τ/t_0, то

$$M[X(t_1)X(t_2)] = 0$$

в силу независимости случайных величин A_i. Поэтому $K_x(t_1, t_2) = M(A^2) \cdot$ $\cdot P(\tau < t_0 - t) = 1 - \tau/t_0$ при $0 < \tau < t_0$ и $K_x(t_1, t_2) = 0$ при $\tau > t_0$ (см. рис. 4.1.2).

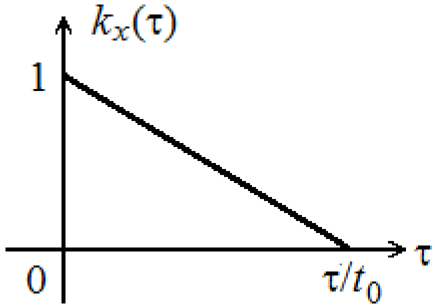


Рис. 4.1.2

Постоянное значение математического ожидания процесса и зависимость корреляционной функции $K_x(t_1,t_2)=k_x(\tau)$ только от разности аргументов $\tau=t_2-t_1$ свидетельствуют о том, что процесс стационарен в широком смысле.

Ответ. $m_x(t)=0$, $D[X(t)]=1$, $K_x(t_1,t_2)=1-\tau/t_0$ при $0<\tau<t_0$ и $K_x(t_1,t_2)=0$ при $\tau>t_0$. Процесс стационарен в широком смысле.

Задача 4.10. Случайный процесс $X(t)$ строится следующим образом. В некоторый случайный момент времени T появляется прямоугольный импульс длительности t_0 и случайной амплитудой A_1. В момент времени $T+t_0$ этот импульс сменяется новым импульсом той же длительности и случайной амплитуды A_2, и т.д. Величины $A_1,A_2,\ldots$ независимы и одинаково распределены. Одна из возможных реализаций процесса представлена на рис. 4.1.3. В нечетных вариантах величины A равномерно распределены в отрезке $[-a,a]$. В четных вариантах величины A имеют плотность вероятности $f(x)=\dfrac{2\,a}{\pi(a^2+x^2)}$ при $x\in[-a,a]$ и $f(x)=0$ при остальных x.

Найдите $m_x(t)$, $D[X(t)]$, $K_x(t_1,t_2)$ и выясните, является ли этот процесс $X(t)$ стационарным в широком смысле. Постройте график корреляционной функции. (См. пример 4.10, a — номер варианта.)

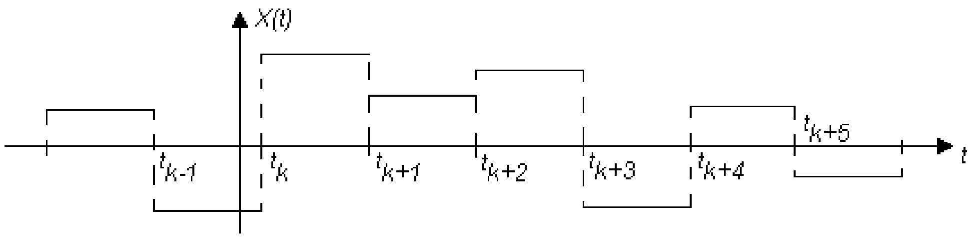


Рис. 4.1.3

Пример 4.11. Случайный процесс $X(t)$ строится следующим образом. На числовой оси Ot реализуется простейший поток событий интенсивности λ. Случайный процесс $X(t)$ принимает попеременно случайные значения *a* и *–a*. При наступлении события простейшего потока $X(t)$ скачком меняет свое значение с *a* на *–a* или наоборот. Одна из реализаций процесса показана на рис. 4.1.4, где точками на оси отмечены события простейшего потока.

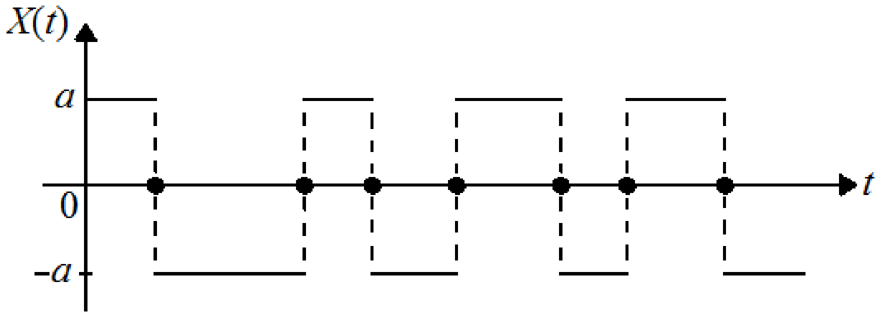


Рис. 4.1.4

Требуется найти математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию этого случайного процесса.

Решение. Так как моменты изменения знака никак не связаны со значениями процесса $X(t)$, нет оснований считать, что какое либо из значений (*a* или *–a*) более вероятно, чем другое. Следовательно,

$$m_x(t) = -a \cdot 0{,}5 + a \cdot 0{,}5 = 0.$$

Рассмотрим значения процесса в произвольные моменты времени t_1 и t_2. Так как $m_x(t) = 0,$ то

$$K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] = M[X(t_1)X(t_2)].$$

Произведение $X(t_1)X(t_2) = -a^2,$ если в интервале (t_1,t_2) происходит нечетное число событий (тогда значения процесса $X(t_1)$ и $X(t_2)$ будут разных знаков). Если же в интервале (t_1,t_2) происходит четное число событий, то $X(t_1)X(t_2) = a^2.$

Вероятность появления за время $\tau = t_2 - t_1$ $(t_1 < t_2)$ четного числа событий простейшего потока равна

$$P_{\text{чет}} = P[X(t_1)X(t_2) = a^2] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!}$$

$$= e^{-\lambda\tau} \operatorname{ch} \lambda\tau = e^{-\lambda\tau} \frac{e^{\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}}{2} = (1 + e^{-2\lambda\tau}) / 2.$$

Тогда

$$\mathrm{P}_{\text{нечет}} = P[X(t_1)X(t_2) = -a^2] = 1 - (1 + e^{-2\lambda\tau}) / 2 = (1 - e^{-2\lambda\tau}) / 2.$$

Следовательно,

$$K_x(t_1,t_2) = k_x(\tau) = a^2(1 + e^{-2\lambda\tau}) / 2 - a^2(1 - e^{-2\lambda\tau}) / 2 = a^2 e^{-2\lambda\tau}.$$

Аналогично, при $t_2 < t_1,$ т.е. при $\tau = t_2 - t_1 < 0,$

$$K_x(t_1,t_2) = k_x(\tau) = a^2 e^{-2\lambda(-\tau)}.$$

Полученные выражения для $k_x(\tau)$ можно объединить в одну запись:

$$K_x(t_1,t_2)=k_x(\tau)=a^2e^{-2\lambda|\tau|}.$$

График этой функции изображен на рис. 4.1.5.

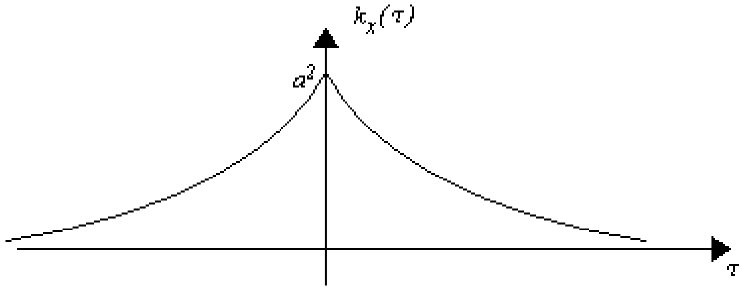


Рис. 4.1.5

Дисперсия процесса равна $D[X(t)]=k_x(0)=a^2$.

Ответ. $m_x(t)=0$, $D[X(t)]=a^2$, $K_x(t_1,t_2)=a^2e^{-2\lambda|\tau|}$. Процесс стационарен в широком смысле.

Задача 4.11. На числовой оси Ot реализуется простейший поток событий интенсивности λ. Случайный процесс $X(t)$ принимает попеременно случайные значения A и $-A$. При наступлении события простейшего потока $X(t)$ скачком меняет свое значение с A на $-A$ или наоборот (значения A и $-A$ независимы). Случайная величина A имеет распределение: $P(A=1)=p$, $P(A=2)=1-p=q$.

Одна из реализаций этого процесса приведена на рис. 4.1.6, где точками на оси отмечены события простейшего потока.

Найдите математическое ожидание $m_x(t)$, дисперсию $D[X(t)]$ и корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)$ этого случайного процесса. (См. пример 4.11, $p=0,b$, где b — номер варианта.)

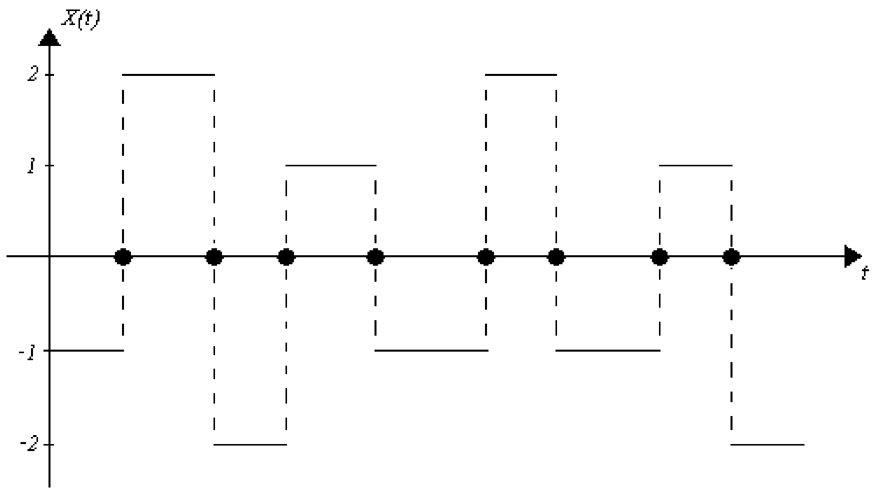


Рис. 4.1.6

Пример 4.12. Случайный процесс $X(t)$ устроен следующим образом. На оси времени реализуется простейший поток событий интенсивности λ. При появлении события этого потока процесс $X(t)$ скачком возрастает на единицу. Между скачками он убывает линейно под углом минус 45°. Одна из реализаций процесса приведена на рис. 4.1.7, где точками на оси отмечены моменты появления событий простейшего потока.

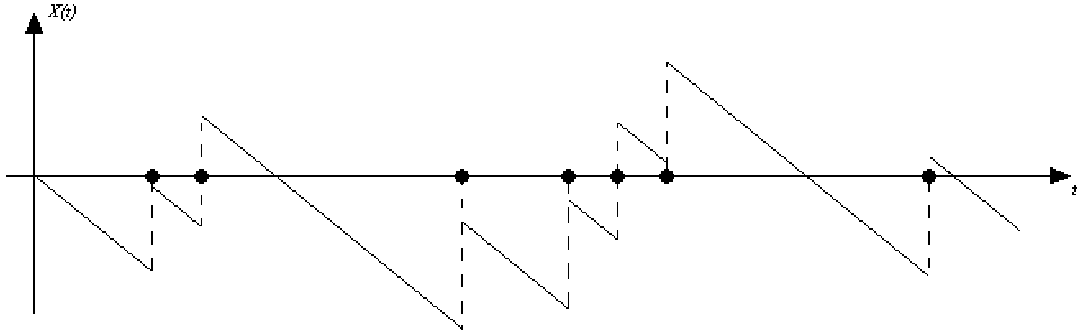


Рис. 4.1.7

Требуется найти математическое ожидание $m_x(t)$, дисперсию $D[X(t)]$ и корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)$ этого случайного процесса и его нормированную корреляционную функцию.

Решение. Каждый скачок процесса равен единице. Поэтому значение процесса в момент времени *t* можно записать в виде

$$X(t) = N(t) - t,$$

где $N(t)$ — число скачков за время *t*.

Случайная величина $N(t)$ имеет пуассоновский закон распределения, причем

$$M[N(t)] = D[N(t)] = \lambda t, \quad M[N^2(t)] = (\lambda t)^2 - \lambda t.$$

Поэтому $M[X(t)] = M[N(t)] - t = \lambda t - t = (\lambda - 1)t$,

$$D[X(t)] = D[N(t) - t] = D[N(t)] = \lambda t.$$

Так как $M(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}) = M[(X - M(X))(Y - M(Y))] = M(XY) - M(X)M(Y)$, то при $t_1 < t_2$

$$K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] = M[X(t_1)X(t_2)] - M[X(t_1)]M[X(t_2)] =$$
$$= M[X(t_1)X(t_2)] - (\lambda - 1)t_1(\lambda - 1)t_2 = M[X(t_1)X(t_2)] - (\lambda - 1)^2 t_1 t_2.$$

Но $M[X(t_1)X(t_2)] = M[(N(t_1) - t_1)(N(t_2) - t_2)] =$

$$= M[N(t_1)N(t_2) - t_1N(t_2) - t_2N(t_1) + t_1t_2] =$$
$$= M[N(t_1)N(t_2)] - t_1M[N(t_2)] - t_2M[N(t_1)] + t_1t_2$$
$$= M[N(t_1)N(t_2)] - t_1\lambda t_2 - t_2\lambda t_1 + t_1t_2 = M[N(t_1)N(t_2)] - 2\lambda t_1t_2 + t_1t_2.$$

В свою очередь

$$M[N(t_1)N(t_2)] = M[N(t_1)(N(t_1) + N(t_2 - t_1))] = M[N^2(t_1)] + M[N(t_1)N(t_2 - t_1)].$$

Так как случайные величины $N(t_1)$ и $N(t_2 - t_1)$ независимы, а для распределения Пуассона $M(X^2) = \lambda^2 + \lambda$, если параметр распределения равен λ, то $M[N(t_1)N(t_2)] = (\lambda t_1)^2 + \lambda t_1 + \lambda t_1 \lambda(t_2 - t_1) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2$.

В итоге имеем

$$K_x(t_1,t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 - 2\lambda t_1 t_2 + t_1 t_2 - (\lambda - 1)^2 t_1 t_2 = \lambda t_1.$$

Аналогично, при $t_2 < t_1$ получаем $K_x(t_1,t_2) = \lambda t_2$. Поэтому

$$K_x(t_1,t_2) = \lambda \min(t_1,t_2).$$

Нормированная корреляционная функция:

$$r(t_1,t_2) = \frac{\lambda \min(t_1,t_2)}{\sqrt{\lambda t_1}\sqrt{\lambda t_2}} = \frac{\min(t_1,t_2)}{\sqrt{t_1 t_2}}.$$

Если $t_1 < t_2$, то $r(t_1,t_2) = \sqrt{t_1/t_2}$, если же $t_2 < t_1$, то $r(t_1,t_2) = \sqrt{t_2/t_2}$. Величины $X(t_1)$ и $X(t_2)$ коррелированы положительно.

Ответ. $M[X(t)] = (\lambda - 1)t$, $D_x(t) = \lambda t$, $K_x(t_1,t_2) = \lambda \min(t_1,t_2)$.

Задача 4.12.1. Случайный процесс $X(t)$ убывает скачками в случайные моменты времени, образующие на числовой оси простейший поток событий интенсивности λ. При появлении события простейшего потока процесс скачком убывает на величину $k/10\lambda$. Между скачками $X(t)$ линейно возрастает с угловым коэффициентом $k/10$. Одна из реализаций процесса показана на рис. 4.1.8.

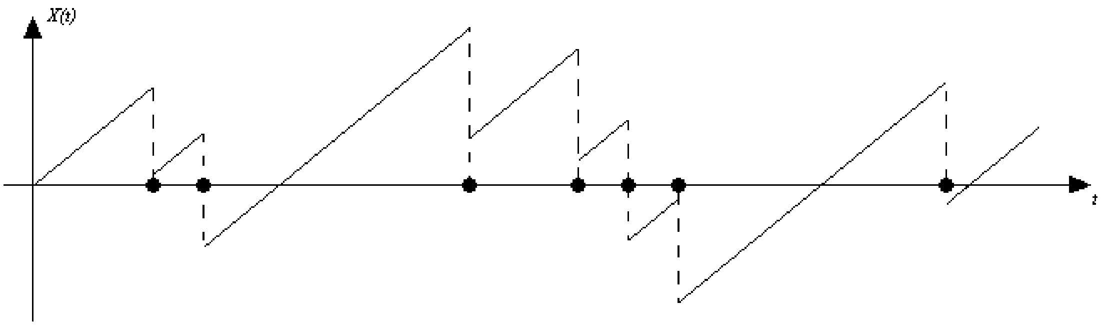


Рис. 4.1.8

Найдите математическое ожидание $m_x(t)$, дисперсию $D[X(t)]$ и корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)$ этого случайного процесса и его нормированную корреляционную функцию. (См. пример 4.12, k — номер варианта.)

Задача 4.12.2. На числовой оси реализуется простейший поток событий интенсивности λ. В момент появления события простейшего потока случайный процесс $X(t)$ становится равным нулю и до появления следующего события потока растет линейно с угловым коэффициентом $k/10$. Затем все повторяется сначала. Одна из реализаций процесса $X(t)$ приведена на рис. 4.1.9.

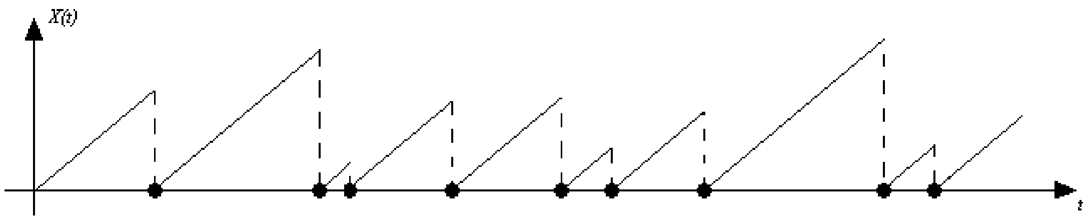


Рис. 4.1.9

Найдите математическое ожидание $m_x(t)$, дисперсию $D[X(t)]$ и корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)$ этого случайного процесса и его нормированную корреляционную функцию. (См. пример 4.12, k — номер варианта.)

Пример 4.13. Случайный процесс $X(t)$ изменяет свое состояние в моменты времени, которые образуют простейший поток интенсивности λ. В каждой точке скачка процесс $X(t)$ возрастает на единицу, а затем убывает по экспоненте с показателем –1 до точки следующего скачка. Одна из реализаций такого процесса приведена на рис. 4.1.10. Требуется найти математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию этого случайного процесса.

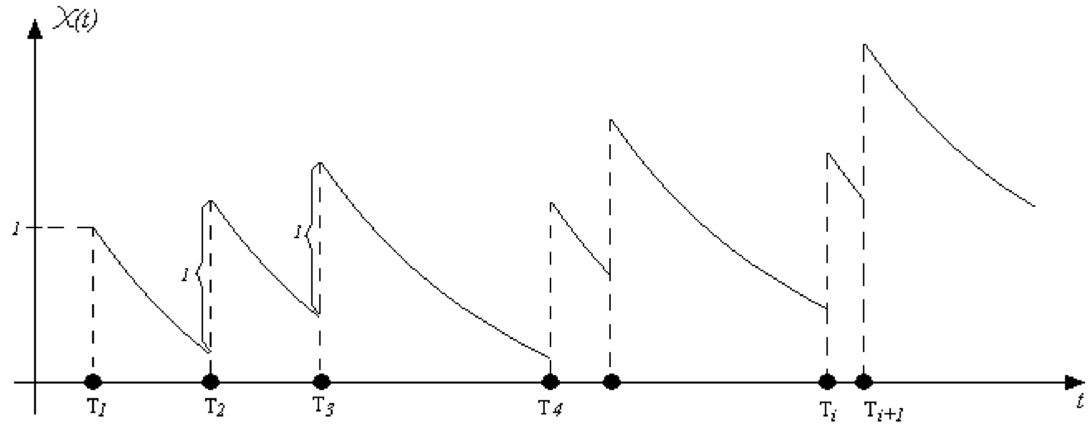


Рис. 4.1.10

Замечание. Описанный процесс может служить простейшей математической моделью воздействия потока электронов на анод. Поток электронов от катода к аноду близок к простейшему потоку некоторой интенсивности λ. При попадании электрона на анод напряжение на нем

$X(t)$ возрастает на некоторую единицу, а затем убывает по экспоненте, показатель которой зависит от характеристик электронной схемы.

Решение. Результат воздействия *i*-го скачка, происшедшего в момент времени T_i, имеет вид: $X_i(t) = 0$ при $t < T_i$ и $X_i(t) = \exp\{-(t - T_i)\}$ при $t \geq T_i$, или

$$X_i(t) = \eta(t - T_i)\exp\{-(t - T_i)\},$$

где $\eta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$.

Так как поток скачков простейший, то за время t произойдет случайное число скачков N, распределенных по закону Пуассона с параметром λt. Поэтому $X(t)$ является суммой случайного числа N случайных слагаемых $X_i(t)$:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N} X_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \eta(t - T_i)\exp\{-(t - T_i)\}. \qquad (4.1.3)$$

Воспользуемся следующим фактом: Простейший поток событий на $(0,t)$ можно представить как совокупность случайного числа точек, каждая из которых равномерно распределена на $(0,t)$ независимо от других точек. Поэтому (4.1.3) можно переписать в виде

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N} \exp\{-(t - \theta_i)\}, \quad t > 0, \; q_i < t, \qquad (4.1.4)$$

где все θ_i равномерно распределены на $(0,t)$, а N не зависит от θ_i. Из (4.1.4) следует, что

$$M[X(t)] = M[N]M[\exp\{-(t - \theta_i)].$$

(Здесь мы воспользовались тем, что математическое ожидание суммы случайного числа одинаково распределенных случайных величин равно произведению математического ожидания числа этих величин на математическое ожидание одной из них.)

Так как число слагаемых N распределено по закону Пуассона, то

$$M(N) = D(N) = \lambda t. \qquad (4.1.5)$$

Каждая из величин равномерно распределена в $(0,t)$. Поэтому

$$M[\exp\{-(t - \theta_i)\}] = \frac{1}{t}\int_0^t e^{x-t}dx = (1 - e^{-t})/t.$$

В итоге

$$M[X(t)] = \lambda t (1 - e^{-t})/t = \lambda(1 - e^{-t}).$$

Кроме того,

$$M[(\exp\{-(t - \theta_i)\})^2] = \frac{1}{t}\int_0^t e^{2(x-t)}dx = \frac{1 - e^{-2t}}{2t}. \qquad (4.1.6)$$

Рассмотрим два момента времени t_1 и t_2 $(t_1 < t_2)$. Значение $X(t_2)$ равно значению $X(t_1)$, умноженному на $\exp\{-(t_2 - t_1)\}$, плюс вклад $V(t_2 - t_1)$ от скачков процесса на интервале (t_1, t_2):

$$X(t_2) = X(t_1)\exp\{-(t_2 - t_1)\} + V(t_2 - t_1).$$

Величины $X(t_1)$ и $V(t_2 - t_1)$ независимы, так как они связаны со скачками процесса в непересекающихся интервалах времени $(0, t_1)$ и (t_1, t_2). Поэтому при $t_1 < t_2$

$$K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] \quad M[\overset{\circ}{X}(t_1)(\overset{\circ}{X}(t_1)e^{-(t_2-t_1)} + \overset{\circ}{V}(t_2 - t_1))] =$$

$$= M[(\overset{\circ}{X}(t_1))^2 e^{-(t_2-t_1)}] + M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{V}(t_2 - t_1)] = D_x(t_1)e^{-(t_2-t_1)}.$$

Аналогично, при $t_2 < t_1$ получим

$$K_x(t_1,t_2) = D_x(t_2)e^{-(t_1-t_2)}.$$

Поэтому $K_x(t_1,t_2) = D_x(\min(t_1,t_2))e^{-|t_2-t_1|}$. Остается вычислить:

$$D_x(t) = M(N)D(e^{t-\theta_i}) + D(N)[M(e^{-(t-\theta_i)})]^2.$$

С учетом (4.1.5), (4.1.6) и того, что $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ получаем

$$D_x(t) = \lambda t\{D(e^{-(t-\theta_i)}) + M(e^{-(t-\theta_i)})^2\} \quad \lambda t M\{(e^{-(t-\theta_i)})^2\} \quad \frac{\lambda}{2}(1 - e^{-2t}).$$

В итоге, $K_x(t_1,t_2) = \dfrac{\lambda}{2}(1 - \exp\{-2\min(t_1,t_2)\})\exp\{-|t_2 - t_1|\}$.

Ответ. $M[X(t)] = \lambda(1 - e^{-t})$, $D_x(t) = \dfrac{\lambda}{2}(1 - e^{-2t})$,

$$K_x(t_1,t_2) = \frac{\lambda}{2}(1 - \exp\{-2\min(t_1,t_2)\})\exp\{-|t_2 - t_1|\}.$$

Задача 4.13. Электроны от катода на анод поступают группами. Моменты поступления групп образуют простейший поток интенсивности λ. Обозначим через W_i — случайное число электронов в i-й группе. Случайные величины W_i независимы и имеют одинаковое распределение. (Подобная ситуация возникает при работе линейного детектора, когда на его вход в случайные моменты времени подаются случайные импульсы величины W_i). Скачок напряжения от прихода очередной партии электронов суммируется с остаточным напряжением на аноде, которое между поступлениями импульсов убывает по экспоненциальному закону с показателем α. Пусть $X(t)$ — напряжение на аноде в момент t. Одна из реализаций случайного процесса приведена на рис. 4.1.11.

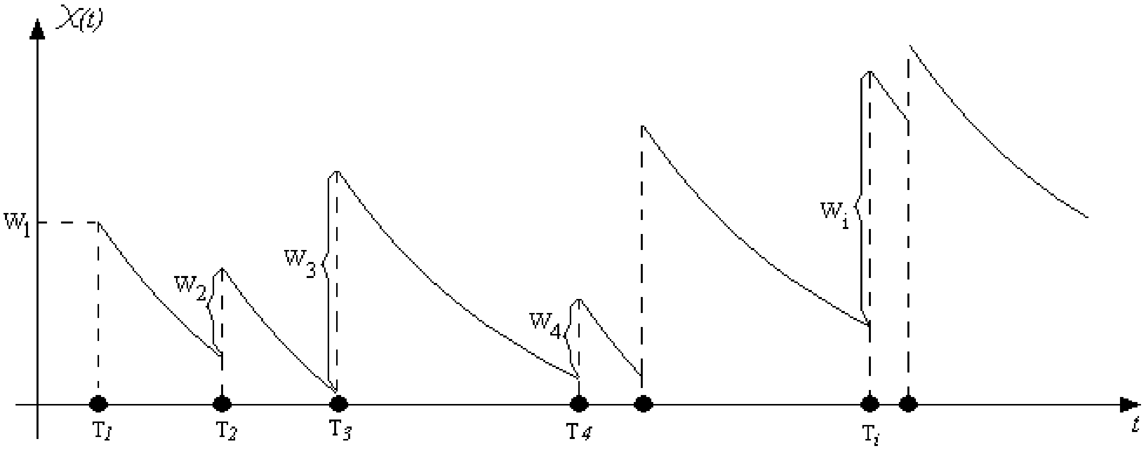


Рис. 4.1.11

Найдите математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса $X(t)$. (См. пример 4.13. Величины W_i имеют биномиальное распределение: $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Значения n и p возьмите из исходных данных к задаче 2.59.)

Стационарная в широком смысле функция $X(t)$, представимая во всей области определения в виде

$$X(t) = m_x + \sum_{k=1}^{n} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \tag{4.1.7}$$

где U_k и V_k — центрированные случайные величины, удовлетворяющие условиям $M[U_i U_i] = M[V_i V_i] = D_i$, $M[U_i U_j] = M[V_i V_j] = 0$ при $i \neq j$, $M[U_i V_j] = 0$ при всех i и j, называется *случайной функцией с дискретным спектром*.

Такая случайная функция имеет автокорреляционную функцию

$$k_x(\tau) = \sum_{k=1}^{n} D_k \cos \omega_k \tau. \tag{4.1.8}$$

Равенство (4.1.7) называют спектральным разложением случайного процесса, а равенство (4.1.8) спектральным разложением корреляционной функции. Представление (4.1.8) показывает, что дисперсия процесса является суммой дисперсий отдельных гармоник на частотах ω_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$:

$$D_x = k_x(0) = \sum_{k=1}^{n} D_k.$$

Говорят, что стационарная случайная функция $X(t)$ является *случайной функцией с непрерывным спектром*, если существует такая действительная неотрицательная функция $S_x(\omega)$, определенная при всех $\omega \in (-\infty; \infty)$, что

$$k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega)\cos\omega\tau \, d\omega, \tag{4.1.9}$$

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} k_x(\tau)\cos\omega\tau \, d\tau. \tag{4.1.10}$$

Функцию $S_x(\omega)$ называют спектральной плотностью, а формулы (4.1.9) и (4.1.10) называют формулами Винера—Хинчина. Из этих формул и свойств корреляционной функции следует, что $S_x(\omega)$ — функция четная, т.е. $S_x(\omega) = S_x(-\omega)$. Поэтому $S_x(\omega)$ изображают обычно только для неотрицательных ω. Случайные функции, обладающие конечной дисперсией, имеют спектральные плотности, которые стремятся к нулю на бесконечности быстрее, чем $1/\omega$.

В силу четности корреляционной функции стационарного процесса и его спектральной плотности формулы (4.1.9) и (4.1.10) можно записать в виде:

$$k_x(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega)\, d\omega, \tag{4.1.11}$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} k_x(\tau)\, d\tau. \tag{4.1.12}$$

Формулы (4.1.11) и (4.1.12) означают, что корреляционная функция и спектральная плотность связаны взаимно обратными преобразованиями Фурье. Выражения вида (4.1.11) называют *интегралом Фурье*. Интеграл Фурье является обобщением разложения в ряд Фурье для случая непериодической функции на бесконечном интервале. Это разложение функции на сумму простых гармонических колебаний с непрерывным спектром.

Заметим, что дисперсию стационарного случайного процесса с непрерывным спектром можно выразить в виде интеграла от спектральной плотности:

$$D_x = k_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega.$$

Пример 4.14. Корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$k_x(\tau) = \exp\{-|\tau|\}(1+|\tau|).$$

Требуется найти спектральную плотность процесса.

Решение. В соответствии с формулой (4.1.12)

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}(1+|\tau|)\, e^{-|\tau|}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega\tau}(1-\tau)\, e^{\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau}(1+\tau)\, e^{-\tau} d\tau$$

Вычислим сначала первый интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)\tau}(1-\tau)\,d\tau = \left\{ \begin{matrix} u = 1-\tau, & du = -d\tau, \\ dv = e^{(1-i\omega)\tau}d\tau, & v = e^{(1-i\omega)\tau}/(1-i\omega) \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1-\tau}{1-i\omega} e^{(1-i\omega)\tau}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{1-i\omega}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)\tau}\,d\tau = \frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{(1-i\omega)^2} e^{(1-i\omega)\tau}\Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{(1-i\omega)^2}.$$

Аналогично

$$\int_{0}^{\infty} e^{-i\omega\tau}(1+\tau)\,e^{-\tau}d\tau = \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{(1+i\omega)^2}.$$

Поэтому

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{(1-i\omega)^2} + \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{(1+i\omega)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{1+\omega^2} + \frac{2}{(1+\omega^2)^2}\right] = \frac{2+\omega^2}{\pi(1+\omega^2)^2}.$$

Ответ. $S_x(\omega) = \dfrac{2+\omega^2}{\pi(1+\omega^2)^2}$.

Задача 4.14.1. Найдите спектральную плотность стационарного случайного процесса $X(t)$, если его корреляционная функция имеет вид

$$k_x(\tau) = \sigma^2 \exp\{-a|\tau|\}(1-a|\tau|).$$

(См. пример 4.14, a — номер варианта.)

Задача 4.14.2. Корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$k_x(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1-|\tau|/a), & |\tau| \le a, \\ 0, & |\tau| > a. \end{cases}$$

Требуется найти спектральную плотность процесса. (См. пример 4.14, a — номер варианта.)

Спектральная плотность *производной* от случайной функции $X(t)$ связана со спектральной плотностью этой функции $S_x(\omega)$ соотношением

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega). \qquad (4.1.13)$$

Пример 4.15. Спектральная плотность случайной функции $X(t)$ имеет вид $1/(\omega^2+4)^3$. Требуется найти дисперсию производной этой случайной функции.

Решение. Согласно (4.1.13) спектральная плотность производной $X'(t)$ имеет вид $\omega^2/(\omega^2+4)^3$. Тогда

$$D(X'(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2+4)^3}\,d\omega = \left\{\begin{aligned} &u=\omega,\ du = d\omega;\\ &dv = \frac{\omega\,d\omega}{(\omega^2+4)^3},\ v = -\frac{1}{4}(\omega^2+4)^{-2}\end{aligned}\right\} =$$

$$= -\frac{\omega}{4(\omega^2+4)^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(\omega^2+4)^2} = \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2+4-\omega^2}{(\omega^2+4)^2}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega^2+4} - \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2}{(\omega^2+4)^2}\,d\omega = \frac{1}{32}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2}{(\omega^2+4)^2}\,d\omega =$$

$$= \left\{\begin{aligned} &u=\omega,\ du = d\omega;\\ &dv = \frac{\omega\,d\omega}{(\omega^2+4)^2},\ v = -\frac{1}{2}(\omega^2+4)^{-1}\end{aligned}\right\} = \frac{\pi}{32} - \frac{1}{16}\left(-\frac{\omega}{2(\omega^2+4)}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega^2+4}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{32} - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty}\right) = \frac{\pi}{32} - \frac{\pi}{64} = \frac{\pi}{64}.$$

Ответ. $D(X'(t)) = \pi/64$.

Задача 4.15. Найдите дисперсию производной от случайной функции $X(t)$, спектральная плотность которой $S_x(\omega) = \dfrac{b}{(\omega^2+a^2)^2}$. (См. пример 4.15, a — номер варианта.)

Пусть $k_x(t)$ — автокорреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найдем взаимную корреляционную функцию процессов $X'(t)$ и $X(t)$. Так как процесс $X(t)$ стационарен, то $m_x = 0$ и $m_{x'} = 0$. Поэтому

$$R_{x'x}(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}{}'(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] = M[X'(t_1)X(t_2)] = M\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t_1+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}X(t_2)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{M[X(t_1+\Delta t)X(t_2)] - M[X(t_1)X(t_2)]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{K_x(t_1+\Delta t,t_2)-K_x(t_1,t_2)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \frac{\partial k_x(\tau)}{\partial t_1}.$$

Так как $\tau = t_2 - t_1$, то $R_{x'x}(t_1,t_2) = \dfrac{\partial k_x(\tau)}{\partial \tau}\cdot\dfrac{\partial \tau}{\partial t_1} = \dfrac{\partial k_x(\tau)}{\partial \tau}\cdot(-1) = -\dfrac{\partial k_x(\tau)}{\partial \tau}$.

Аналогично, $R_{xx'}(t_1,t_2) = \dfrac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2} = \dfrac{\partial k_x(\tau)}{\partial \tau}\cdot\dfrac{\partial \tau}{\partial t_2} = \dfrac{\partial k_x(\tau)}{\partial \tau}\cdot(1) = \dfrac{\partial k_x(\tau)}{\partial \tau}$.

Пример 4.16. Спектральная плотность случайного стационарного процесса $X(t)$ имеет вид: $S_x(\omega) = w^2$, если $|\omega| \in [3,6]$, и $S_x(\omega) = 0$ при остальных ω. Требуется найти автокорреляционную функцию этого процесса.

Решение. Так как функция $S_x(\omega)$ четная, то по формуле (4.1.11) получаем

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega)\, d\omega = 2\int_{3}^{6} w^2 \cos\omega\tau\, d\omega = 2w^2\left(\frac{-\sin\omega\tau}{\tau}\Big|_3^6\right) =$$

$$= \frac{2w^2}{\tau}(\sin 3\tau - \sin 6\tau) = \frac{2w^2 \sin 3\tau}{\tau}(1 - 2\cos 3\tau).$$

Ответ. $\dfrac{2w^2 \sin 3\tau}{\tau}(1 - 2\cos 3\tau).$

Задача 4.16.1. Случайный стационарный процесс $X(t)$ имеет спектральную плотность $S_x(\omega) = a^2$, если $|\omega \in [b, 2b]|$, и $S_x(\omega) = 0$ при остальных ω. Требуется найти автокорреляционную функцию этого процесса. (См. пример 4.16, a — номер варианта, b — первая цифра номера варианта.)

Задача 4.16.2. Спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$S_x(\omega) = a\exp\{-|\omega|/\omega_0\},\ a > 0,\ \omega_0 > 0.$$

Найдите автокорреляционную функцию этого процесса и его дисперсию. (См. пример 4.16, a — номер варианта.)

Пример 4.17. Задана спектральная плотность стационарного случайного процесса

$$S_x(\omega) = 2\exp\{-\beta\omega^2\},\ \beta > 0.$$

Требуется найти корреляционную функцию этого процесса.

Решение. По формуле (4.1.11) получим:

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} e^{-\beta\omega^2} d\omega.$$

Непосредственно вычислять такой интеграл трудно. Поэтому воспользуемся следующим приемом. Продифференцируем обе части равенства:

$$k_x'(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega\tau} e^{-\beta\omega^2} d\omega = \frac{i}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, 2\beta e^{-\beta\omega^2}\omega d\omega.$$

Проинтегрируем по частям: $u = e^{i\omega t}$, $du = i\tau e^{i\omega\tau} d\omega$, $dv = 2\beta e^{-\beta\omega^2}\omega d\omega$, $v = -e^{-\beta\omega^2}$. Тогда $k_x'(\tau) = \dfrac{i}{2\beta}\left(-e^{i\omega\tau} e^{-\beta\omega^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\tau\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\omega^2} e^{i\omega\tau} d\omega\right)$. Первое слагаемое в скобке равно нулю, так как $e^{-\infty}=0$, а $|e^{i\omega\tau}|=|\cos\omega\tau+i\sin\omega\tau|=$ $=\sqrt{\cos^2\omega\tau+\sin^2\tau}=1$. Интеграл во втором слагаемом совпадает с $k_x(\tau)$.

В итоге обнаружилась возможность найти $k_x(\tau)$, как решение дифференциального уравнения

$$k'_x(\tau)=-\frac{\tau}{2\beta}k_x(\tau).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение:

$$k_x(\tau)=C\exp\{-\tau^2/4b\}.$$

Для определения произвольной постоянной зададим начальное условие

$$k_x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\omega^2}d\omega=\{\text{замена }\omega=t/\sqrt{\beta}\}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}d\omega=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

(Напомним, что интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}d\omega=\sqrt{\pi}$.)

При таком начальном условии $C=\sqrt{\pi/\beta}$. Искомая корреляционная функция имеет вид:

$$k_x(\tau)=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\{-\tau^2/4b\}.$$

Заметим, что и спектральная плотность, и корреляционная функция этого процесса относятся к типу гауссовских кривых.

Ответ. $k_x(\tau)=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\{-\tau^2/4b\}$.

Задача 4.17. Стационарный случайный процесс имеет спектральную плотность

$$S_x(\omega)=W\exp\{-\omega^2/\beta^2\},\ W>0,\ \beta>0.$$

Найдите корреляционную функцию этого процесса. (См. пример 4.17, W — номер варианта, β — первая цифра номера варианта.)

4.2. Преобразование случайных процессов динамическими системами

Для случайных процессов оказалось целесообразным расширить трактовку некоторых понятий математического анализа.

Говорят, что случайная последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ сходится к числу b *в среднеквадратическом смысле*, если

$$\lim_{n\to\infty}M(X_n-b)^2=0.$$

(этот факт записывают кратко $X_n\xrightarrow{\text{с.к.}}b$).

Случайный процесс $X(t)$ называется *стохастически непрерывным* в точке $t=t_0$, если

$$\lim_{t\to t_0} M[X(t)-X(t_0)]^2=0.$$

Случайная величина $X'(t)$ называется *среднеквадратической производной* случайной функции $X(t)$ в точке $t_0\in[0,T]$, если

$$\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t}\xrightarrow{\text{с.к.}} X'(t_0).$$

Пусть имеется некоторая динамическая система. Под динамической системой понимается любое радиотехническое устройство, прибор, прицел, система автоматического управления, автопилот, вычислительное устройство и т.д.

На вход системы непрерывно подаются некоторые данные, система их перерабатывает и выдает результат этой переработки. Иногда входящие в систему данные называют «воздействием» или «сигналом», данные на выходе называют «реакцией» или «откликом» на воздействие. Обычно вместе с полезным сигналом поступают и случайные помехи, которые тоже перерабатываются динамической системой и влияют на отклик. Поэтому в общем виде ставится формальная задача о переработке динамической системой некоторого случайного процесса $X(t)$. На выходе тоже получается случайный процесс $Y(t)$. Схема описанной системы приведена на рисунке 4.2.1.

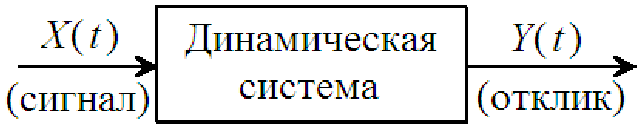


Рис. 4.2.1

Естественно возникает вопрос: как по характеристикам $X(t)$, с учетом особенностей динамической системы, найти характеристики сигнала на выходе?

С формальной точки зрения, каждая динамическая система задает некоторое соответствие между сигналами на входе и откликами на выходе.

Правило, по которому функция $X(t)$ на входе преобразуется в функцию $Y(t)$ на выходе, называется оператором. Символически это записывают в виде: $Y(t)=A\{X(t)\}$.

Оператор L называется *линейным однородным оператором*, если он обладает следующими *свойствами*:

1. $L\{X_1(t)+X_2(t)\} = L\{X_1(t)\}+L\{X_2(t)\}$;
2. $L\{CX(t)\}=CL\{X(t)\}$, где C — постоянная величина.

Примерами линейных операторов могут служить операторы

$$\frac{d}{dt},\ \int_0^t ... \, dt,\ L\{X(t)\} = \varphi(t)X(t),\ L\{X(t)\} = \int_0^t X(t)\varphi(t)\, dt,$$

где $\varphi(t)$ — некоторая функция.

Оператор называют линейным *неоднородным*, если он состоит из линейной части с прибавлением некоторой определенной функции:

$$\tilde{L}\{X(t)\} = L\{X(t)\} + \varphi(t).$$

Если случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_X(t)$ и корреляционной функцией $K_X(t_1,t_2)$ преобразуется линейным однородным оператором L в случайную функцию

$$Y(t) = L\{X(t)\},$$

то для нахождения математического ожидания $m_Y(t)$ нужно применить этот оператор к $m_X(t)$, т.е.

$$m_Y(t) = L\{m_X(t)\}. \qquad (4.2.1)$$

А для нахождения корреляционной функции $K_Y(t_1,t_2)$ необходимо применить этот оператор к корреляционной функции $K_X(t_1,t_2)$ сначала по одному аргументу, а затем по другому:

$$K_Y(t_1,t_2) = L^{(t_1)}L^{(t_2)}\{K_X(t_1,t_2)\}. \qquad (4.2.2)$$

Например, если линейный оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dt}$ применяется к случайному процессу $X(t)$ с математическим ожиданием $m_X(t)$ и корреляционной функцией $K_X(t_1,t_2)$, то для $Y(t) = \dfrac{d}{dt}X(t)$ математическое ожидание $m_Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$, а корреляционная функция $K_Y(t_1,t_2) = \dfrac{\partial^2 K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\, \partial t_2}$.

Пример 4.18. Задана $k_x(\tau)$ — корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Требуется найти корреляционную функцию процесса

$$Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (4.1) для корреляционной функции суммы случайных процессов. Вычислим необходимые для этого величины.

Так как процесс $X(t)$ стационарен, то его математическое ожидание и математическое ожидание его производной равны нулю. Поэтому

$$R_{\dot{X}X}(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{X}'(t_1)\,\overset{\circ}{X}(t_2)]=M\left[X'(t_1)X(t_2)\right]=$$

$$=M\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t_1+\Delta t)-X(t_1)}{\Delta t}\,X(t_2)\right]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M\left[X(t_1+\Delta t)X(t_2)\right]-M\left[X(t_1)X(t_2)\right]}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{K_X(t_1+\Delta t,t_2)-K_X(t_1,t_2)}{\Delta t}=\frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_1}.$$

Но так как $\tau=t_2-t_1$, то $\dfrac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\dfrac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}\cdot\dfrac{\partial\tau}{\partial t_1}=\dfrac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}\cdot(-1)=-\dfrac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}.$

Аналогично,

$$R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)=M[X(t_1)X'(t_2)]=M\left[X(t_1)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t_2+\Delta t)-X(t_2)}{\Delta t}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M[X(t_1)X(t_2+\Delta t)]-M[X(t_1)X(t_2)]}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{K_X(t_1,t_2+\Delta t)-K_X(t_1,t_2)}{\Delta t}$$

$$=\frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_2}=\frac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial t_2}=\frac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}\cdot(1)=\frac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}.$$

Так как $k_x(\tau)=K_x(t_1,t_2)$, где $\tau=t_2-t_1$, то $\dfrac{\partial\tau}{\partial t_1}=-1$, а $\dfrac{\partial\tau}{\partial t_2}=1$. Поэтому по формуле (4.2.1)

$$K_{\dot{X}}(t_1,t_2)=k_{\dot{x}}(\tau)=\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\frac{\partial\tau}{\partial t_1}\left[\frac{dk_x(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial t_2}\right]=$$

$$==\frac{\partial\tau}{\partial t_1}\left[\frac{dk_x(\tau)}{d\tau}\right]=\frac{d^2k_x(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial t_1}=\frac{d^2k_x(\tau)}{d\tau}\cdot(-1)=-k_x''(\tau).$$

В итоге по формуле (4.2)

$$k_y(t)=k_x(t)-k_x''(\tau)-\frac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}=k_x(t)-k_x''(\tau).$$

Ответ. $k_y(t)=k_x(t)-k_x''(\tau).$

Задача 4.18.1. Задана $Y(t)$ — корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найдите корреляционную функцию процесса

$$Y(t)=X(t)+a\frac{dX(t)}{dt}.$$

(См. пример 4.18, a — номер варианта.)

Задача 4.18.2. Задана $k_x(\tau)$ — корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найдите корреляционную функцию процесса

$$Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt} + \frac{d^2X(t)}{dt^2}.$$

Выведите формулу для корреляционной функции процесса $Y(t)$, а затем вычислите эту корреляционную функцию для $k_x(\tau) = \exp\{-\alpha\tau^2\}$. Вычислите дисперсию процесса $Y(t)$. (См. пример 4.18, a — номер варианта.)

Стационарной линейной динамической системой называется устройство, которое можно описать линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$a_0Y^{(n)}(t) + a_1Y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_nY(t) = b_0X^{(m)}(t) + b_1X^{(m-1)}(t) + \ldots + b_mX(t), \quad (4.2.3)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, \ldots, b_m$ — постоянные коэффициенты, $X(t)$ — входящий стационарный процесс (воздействие), а $Y(t)$ — случайный процесс на выходе из системы (отклик). Если динамическая система устойчива, то по окончании переходного периода процесс $Y(t)$ тоже стационарен.

Найдем характеристики $Y(t)$ по характеристикам $X(t)$. Возьмем математическое ожидание от правой и левой частей равенства (4.2.3).Так как $X(t)$ и $Y(t)$ стационарные процессы, то их математические ожидания m_x и m_y постоянны, а производные математических ожиданий равны нулю. Поэтому

$$a_n m_y = b_m m_x \text{ или } m_y = \frac{b_m}{a_n} m_x.$$

Обозначим оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ через p, оператор $\frac{d^2}{dt^2}$ через p^2 и т.д. Тогда уравнение (4.2.3) можно записать в виде

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)Y(t) = (b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m)X(t),$$

или

$$Y(t) = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n} X(t). \quad (4.2.4)$$

Выражение

$$\Phi(p) = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n} \quad (4.2.5)$$

называют *передаточной функцией*.

Уравнение (4.2.3) в операторной форме кратко записывается в виде

$$Y(t) = \Phi(p)X(t).$$

Частотной характеристикой линейной динамической системы называют функцию, которая получается заменой p на $i\omega$ в передаточной функции:

$$\Phi(i\omega) = \frac{b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_n}. \qquad (4.2.6)$$

Доказано, что спектральные плотности процессов $X(t)$ и $Y(t)$ связаны соотношением

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)\,|\,\Phi(i\omega)\,|^2\,. \qquad (4.2.7)$$

Это означает, что для получения спектральной плотности выходного случайного процесса необходимо умножить спектральную плотность входного процесса на квадрат модуля частотной характеристики динамической системы.

Пример 4.19. Динамическая система задана уравнением

$$3y'(t) + y(t) = 4x'(t) + x(t). \qquad (4.2.8)$$

На вход системы подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_x(\tau) = 3\exp\{-2\,|\,\tau\,|\}$. Требуется найти дисперсию процесса на выходе в установившемся режиме.

Решение. Вычислим спектральную плотность случайного процесса $X(t)$ по формуле (4.1.12)

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} k_x(\tau)\,d\tau = \frac{12}{\pi(\omega^2+4)}.$$

В операторной форме уравнение (4.2.8) имеет вид

$$Y(t) = \frac{4p+1}{3p+1}X(t).$$

Поэтому частотная характеристика $\Phi(i\omega) = \dfrac{4i\omega+1}{3i\omega+1}$. По формуле (4.2.7)

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)\,|\,\Phi(i\omega)\,|^2 = \frac{12}{\pi(\omega^2+4)}\cdot\left|\frac{4i\omega+1}{3i\omega+1}\right|^2 = \frac{12}{\pi(\omega^2+4)}\cdot\frac{16\omega^2+1}{9\omega^2+1}.$$

Поэтому

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)\,d\omega = \frac{12}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(16\omega^2+1)\,d\omega}{(\omega^2+4)(9\omega^2+1)} =$$

$$= \frac{24}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(16\omega^2+1)\,d\omega}{(\omega^2+4)(9\omega^2+1)} = \frac{24}{\pi}\left[\frac{81}{5}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{\omega^2+4} - \frac{1}{5}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{9\omega^2+1}\right] =$$

$$= \frac{24}{\pi}\left[\frac{81}{10}(\mathrm{arctg}(\infty) - \mathrm{arctg}(0)) - \frac{1}{15}(\mathrm{arctg}(\infty) - \mathrm{arctg}(0))\right] \approx 96{,}4.$$

Ответ. $D(Y) \approx 96{,}4.$

Задача 4.19.1. На вход динамической линейной системы, определяемой уравнением

$$a_0 y'(t) + y(t) \quad b_0 x'(t) + b_1 x(t),$$

подается случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_x(\tau) \quad a\exp\{-b\,|\,\tau\,|\}$. Найдите дисперсию процесса на выходе в установившемся режиме. (См. пример 4.19 и исходные данные, a — номер варианта, b — последняя цифра номера варианта плюс 1.)

Исходные данные к задаче 4.19.1.

№	a_0	b_0	b_1	№	a_0	b_0	b_1	№	a_0	b_0	b_1	№	a_0	b_0	b_1	№	a_0	b_0	b_1
1	2	3	1	**7**	4	1	1	**13**	5	2	1	**19**	5	1	2	**25**	5	4	0
2	2	5	1	**8**	2	1	4	**14**	3	5	0	**20**	2	5	0	**26**	4	2	4
3	3	2	0	**9**	3	2	1	**15**	2	4	0	**21**	2	4	1	**27**	2	3	0
4	4	2	1	**10**	4	2	3	**16**	5	3	1	**22**	3	4	2	**28**	2	1	5
5	2	4	2	**11**	3	5	1	**17**	4	2	0	**23**	2	5	1	**29**	5	2	0
6	2	1	4	**12**	2	3	2	**18**	4	1	2	**24**	5	3	0	**30**	2	1	3

Задача 4.19.2. Работу электрической цепи (рис. 4.2.2) описывает дифференциальное уравнение

$$y'(t) + \frac{R}{L} y(t) = x'(t).$$

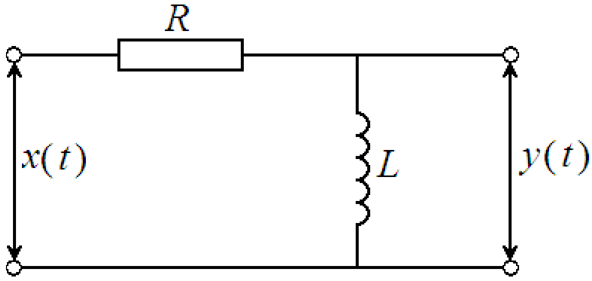


Рис. 4.2.2

На вход поступает низкочастотный белый шум $X(t)$, имеющий спектральную плотность $S_X(\omega) \quad D/\omega_0$ при $|\omega| \le \omega_0$ и $S_X(\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_0$. Найдите дисперсию процесса на выходе в стационарном режиме работы цепи. (См. пример 4.19, ω_0 равно номеру варианта.)

Задача 4.19.3. Работу линейной динамической системы описывает дифференциальное уравнение

$$y'(t) + ay(t) = x'(t).$$

На вход поступает случайный процесс $X(t)$, имеющий спектральную плотность $S_X(\omega) = D/(\omega^2 + a^2)$ при $\omega > 0$ и $S_X(\omega) = 0$ при $\omega \le 0$. Найдите дисперсию процесса на выходе в стационарном режиме работы. (См. пример 4.19, a — номер варианта.)

Пример 4.20. На вход линейной динамической системы, описываемой уравнением

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x'(t)+x(t), \tag{4.2.9}$$

подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)=m$ и корреляционной функцией $k_x(\tau)=5\exp\{-|\tau|\}$. Требуется найти математическое ожидание и дисперсию процесса на выходе.

Решение. Вычислим спектральную плотность случайного процесса $X(t)$. По формуле (4.1.12)

$$S_x(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}k_x(\tau)\,d\tau=\frac{5}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}e^{-|\tau|}d\tau=\frac{5}{\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{-i\omega\tau}e^{\tau}d\tau+\frac{5}{\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{-i\omega\tau}e^{-\tau}d\tau=$$

$$=\frac{5}{\pi}\left(\frac{1}{1-i\omega}\exp((1-\omega)\tau)\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{1+i\omega}\exp(-(1+i\omega)\tau)\Big|_{0}^{\infty}\right)$$

$$=\frac{5}{\pi}\left(\frac{1}{1-i\omega}+\frac{1}{1+i\omega}\right)=\frac{5}{\pi(1+\omega^2)}.$$

Обозначим оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dt}$ через p, а оператор $\dfrac{d^2}{dt^2}$ через p^2. Тогда уравнение (4.2.9) можно записать в виде

$$(p^2+3p+2)Y(t)=(p+1)X(t),$$

или

$$Y(t)=\frac{p+1}{p^2+3p+2}X(t).$$

Передаточная функция динамической системы имеет вид

$$\Phi(p)=\frac{p+1}{p^2+3p+2},$$

а ее частотная характеристика

$$\Phi(i\omega)=\frac{i\omega+1}{(i\omega)^2+3i\omega+2}=\frac{i\omega+1}{3i\omega+(2-\omega^2)}.$$

Спектральная плотность процесса на выходе системы равна, согласно (4.2.7),

$$S_y(\omega)=S_x(\omega)|\Phi(i\omega)|^2=\frac{5}{\pi(1+\omega^2)}\cdot\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+4}=\frac{5}{\pi(\omega^2+1)(\omega^2+4)}.$$

Дисперсия процесса на выходе равна

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}S_y(\omega)\,d\omega=\frac{5}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}=\frac{5}{3\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\omega^2+1}-\frac{1}{\omega^2+4}\right)d\omega=$$

$$=\frac{5}{3\pi}\left(\operatorname{arctg}\omega\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty}\right)=5/6.$$

Если динамическая система устойчива, то при достаточно больших значениях t (после переходного периода) функцию $Y(t)$ можно считать стационарной. Так как $X(t)$ и $Y(t)$ стационарны, то математические ожидания их производных равны нулю. Поэтому переход к математическим ожиданиям в равенстве (4.2.9) дает

$$-2m_y(t) = m_x(t) \text{ или } m_y(t) = -m/2.$$

Ответ. $m_y(t) = -m/2$, $D(Y) = 5/6$.

Задача 4.20. На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = x'(t) + cx(t),$$

поступает стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t) = m$ и ковариационной функцией $k_x(t) = D\exp\{-c\,|\,\tau\,|\}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию процесса на выходе. (См. пример 4.20 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 4.20.

№	a	b	c	D	m	№	a	b	c	D	m	№	a	b	c	D	m
1	5	4	3	2	1	**11**	8	12	2	3	1	**21**	5	4	3	5	2
2	5	6	4	4	3	**12**	9	14	3	2	2	**22**	5	6	4	3	1
3	10	16	3	2	1	**13**	10	16	2	4	1	**23**	10	16	3	4	1
4	6	5	2	1	3	**14**	11	18	4	2	1	**24**	6	5	2	2	3
5	6	8	1	3	2	**15**	7	12	3	4	2	**25**	6	8	1	4	2
6	7	6	2	4	1	**16**	8	15	2	5	1	**26**	7	6	2	5	3
7	4	3	2	5	1	**17**	9	18	4	5	2	**27**	4	3	2	4	3
8	8	7	3	4	2	**18**	9	20	1	4	2	**28**	8	7	3	2	6
9	9	8	2	2	1	**19**	11	24	2	3	4	**29**	9	8	2	2	7
10	7	10	4	3	2	**20**	10	21	2	4	5	**30**	7	10	4	4	5

Пример 4.21. Пусть X — случайная величина с $D(X) = D < \infty$. Случайный процесс $Y(t)$ определяется уравнением

$$Y'(t) + aY(t) = bX,\quad Y(0) = 0, \qquad (4.2.10)$$

где a и b — постоянные коэффициенты. Требуется найти дисперсию процесса $Y(t)$.

Решение. Решим линейное дифференциальное уравнение (4.2.10) методом Бернулли. Будем искать решение в виде $Y(t) = u(t)v(t)$. Тогда уравнение (4.2.10) можно переписать:

$$u'v + uv' + auv = bX \Rightarrow v(u' + au) + uv' = bX.$$

Подберем $u(t)$ так, чтобы $u' + au = 0$, т. е. $du/dt = -au \Rightarrow$ $\Rightarrow du/u = -adt \Rightarrow \ln u = -at \Rightarrow u(t) = \exp(-at)$. При таком $u(t)$ получаем уравнение $e^{-at}v' = bX$. Откуда $dv = bXe^{at}dt$ или $v = bX(e^{at}/a + c)$. В итоге получаем общее решение уравнения (4.3.2):

$$Y(t) = u(t)v(t) = e^{-at}bX(e^{at}/a + c) = bX(1/a + ce^{-at}).$$

При начальных условиях $Y(0) = 0$ имеем $0 = bX(1/a + c) \Rightarrow c = -1/a$. Частное решение уравнения (4.2.10) имеет вид $Y(t) = \dfrac{bX}{a}(1 - e^{-at})$. Поэтому

$$D(Y) = D[bX(1 - e^{-at})/a] = b^2(1 - e^{-at})^2 D/a^2.$$

Ответ. $D(Y) = b^2(1 - e^{-at})^2 D/a^2$.

Задача 4.21.1. Случайный процесс $Z(t)$ определяется уравнением

$$Z'(t) + aZ(t) = b(Xt + Y), \quad Z(0) = 0,$$

где a и b постоянные коэффициенты, а X и Y — независимые случайные величины с $D(X) = D(Y) = D < \infty$. Найдите дисперсию $Z(t)$. (См. пример 4.21, a — первая цифра варианта, b — номер варианта.)

Задача 4.21.2. Случайный процесс $Z(t)$ определяется уравнением

$$Z'(t) + aZ(t) = bX\sin t,$$

где a и b постоянные коэффициенты, а X — случайная величина с $D(X) = D < \infty$. Найдите дисперсию $Z(t)$. (См. пример 4.21, a — первая цифра варианта, b — номер варианта.)

Пример 4.22. На RC — цепь, схема которой изображена на рис. 4.2.3, подается случайное напряжение $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t) = m$ и ковариационной функцией $K_x(t_1, t_2) = \exp\{-|t_1 - t_2|\}$.

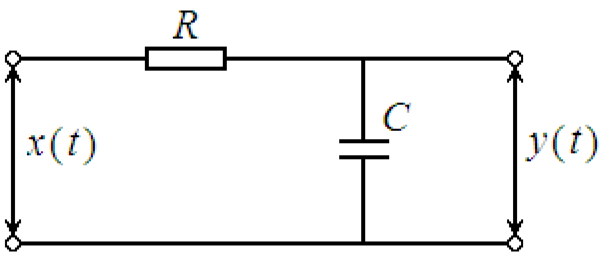


Рис. 4.2.3

Требуется найти математическое ожидание и дисперсию с напряжения $Y(t)$ на выходе.

Решение. Дифференциальное уравнение, связывающее сигнал на выходе $Y(t)$ с сигналом $X(t)$ на входе имеет вид

$$\frac{dY(t)}{dX} + \beta Y(t) = \beta X(t), \text{ где } \beta = \frac{1}{RC} > 0. \qquad (4.2.11)$$

Решение этого уравнения можно получить, например, методом вариации произвольной постоянной. Однородному уравнению $\dfrac{dY(t)}{dX} + \beta Y(t) = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k + \beta = 0$. Поэтому решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $Y_1(t) = C\exp\{-\beta t\}$. Вместо произвольной постоянной C подберем такую функцию $C(t)$, чтобы $Y(t) = C(t)\exp\{-\beta t\}$ стало решением уравнения (4.2.11). Тогда при подстановке этого $Y(t)$ в уравнение (4.2.11) получаем

$$C'(t)\exp\{-\beta t\} - \beta C(t)\exp\{-\beta t\} + \beta C(t)\exp\{-\beta t\} = \beta X(t).$$

Откуда следует, что

$$C'(t) = \beta\exp\{\beta t\}X(t) \text{ и } C(t) = \beta\int_0^t e^{\beta s}X(s)ds.$$

Поэтому решение уравнения (4.2.11) имеет вид

$$Y(t) = \beta\exp\{-\beta t\}\int_0^t e^{\beta s}X(s)ds. \tag{4.2.12}$$

Запись (4.2.12) означает, что $Y(t)$ является результатом действия на $X(t)$ линейного оператора: $L(X(t)) = \beta\ \exp\{-\beta t\}\int_0^t e^{\beta s}X(s)\,ds.$

В соответствии с (4.2.1)

$$m_y(t) = \beta\exp\{-\beta t\}\int_0^t e^{\beta s}mds = m\exp\{-\beta t\}[\exp\{\beta t\} - 1] = m[1 - \exp\{-\beta t\}].$$

По формуле (4.2.2) при $t_2 \le t_1$

$$K_y(t_1,t_2) = \beta^2\exp\{-\beta(t_1+t_2)\}\int_0^{t_1} e^{\beta s_1}ds_1\int_0^{t_2} e^{\beta s_2}e^{s_2-s_1}ds_2 =$$

$$= \beta^2\exp\{-\beta(t_1+t_2)\}\int_0^{t_1} e^{(\beta-1)s_1}\ ds_1\int_0^{t_2} e^{(\beta+1)s_2}ds_2 =$$

$$= \frac{\beta^2}{\beta^2-1}\exp\{-\beta(t_1+t_2)\}(e^{(\beta-1)t_1} - 1)(e^{(\beta+1)t_2} - 1) = \frac{\beta^2}{\beta^2-1}(e^{-t_1} - e^{-\beta t_1})(e^{t_2} - e^{-\beta t_2}).$$

Аналогично при $t_2 \ge t_1$:

$$K_y(t_1,t_2) = \frac{\beta^2}{\beta^2-1}(e^{-t_1} - e^{-\beta t_1})(e^{t_2} - e^{-\beta t_2}).$$

Поэтому дисперсия

$$D(Y(t)) = K_y(t,t) = \frac{\beta^2}{\beta^2-1}(e^{-t} - e^{-\beta t})(e^{t} - e^{-\beta t}).$$

Ответ. $m_y(t) = m[1 - \exp\{-\beta t\}]$, $D(Y) = \dfrac{\beta^2}{\beta^2 - 1}(e^{-t} - e^{-\beta t})(e^{t} - e^{-\beta t})$.

Задача 4.22. На RC — цепь, схема которой изображена на рис. 4.2.4, подается случайное напряжение $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t) = m$ и ковариационной функцией $K_x(t_1, t_2) = \gamma t_1 t_2$. Сигнал на выходе определяется уравнением

$$\frac{dY(t)}{dX} + \beta Y(t) = X'(t), \text{ где } \beta \equiv \frac{1}{RC} > 0.$$

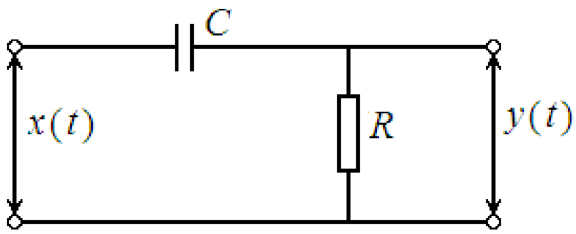


Рис. 4.2.4

Найдите математическое ожидание и дисперсию напряжения $Y(t)$ на выходе. (См. пример 4.22, γ — номер варианта.)

4.3. Процессы «гибели и рождения»

Пусть некоторый объект может в каждый момент времени может находиться в одном из состояний: $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots$, множество которых конечно или счетно. (Счетным называют множество, все элементы которого могут быть занумерованы с помощью натуральных чисел.) В случайные моменты времени возможны переходы из состояния в состояние. Особенность этих переходов состоит в том, что за бесконечно малый промежуток времени возможны переходы только в соседние состояния.

Формально это означает следующее. Если в момент времени t объект находится в состоянии E_n, то за малый промежуток времени h объект из состояния E_n может перейти в состояние E_{n+1} с вероятностью $\lambda_n h + o(h)$, а вероятность перехода в состояние E_{n-1} равна $\nu_n h + o(h)$. Напомним, что $o(h)$ означает величину бесконечно малую более высокого порядка малости по сравнению с h. Вероятность перехода из E_n в другие состояния за бесконечно малый промежуток времени h пренебрежимо мала $(o(h))$. Отсюда следует, что вероятность за время h сохранить состояние E_n равна

$$1 - \lambda_n h - \nu_n h + o(h). \tag{4.3.1}$$

Пусть постоянные λ_n и ν_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, не зависят от времени t и от способа прихода объекта в состояние E_n. Эти предположения позволяют нарисовать следующую схему возможных переходов (см. рис. 4.3.1).

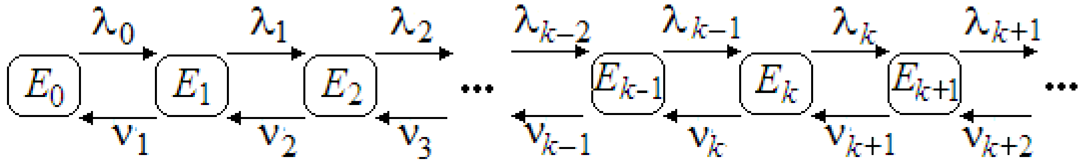


Рис. 4.3.1

Процесс изменения состояний объекта по приведенной схеме называется *процессом гибели и рождения.*

Эти процессы могут служить математической моделью для популяции живых организмов. В этом случае под состоянием E_n понимается наличие в популяции n особей, переход из E_n в состояние E_{n+1} означает рождение нового члена популяции, а переход из E_n в состояние E_{n-1} соответствует гибели одного из ее членов.

В терминах процессов гибели и размножения можно обсуждать многие технические задачи. Например, для математической модели транспортного предприятия под состоянием можно понимать число автомобилей, которые пригодны для эксплуатации. Тогда выход из стоя автомобиля означает переход в состояние с номером на единицу меньше (т.е. «гибель»), а восстановление машины после ремонта — переход в состояние с номером на единицу больше («рождение»).

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t объект находится в состоянии E_k и выведем уравнения для этих вероятностей. Сначала выведем уравнение при $k = 1, 2, 3, \ldots$. Для этого рассмотрим отрезок времени $[0, t+h]$ и учтем возможные изменения состояния объекта за малый промежуток времени h. Объект в момент времени $t+h$ будет находиться в состоянии E_k, вероятность чего равна $P_k(t+h)$, если в момент t он находился в состоянии E_{k-1}, вероятность чего равна $P_{k-1}(t)$, и за время h произошел переход в состояние E_k, вероятность чего равна $\lambda_{k-1}h + o(h)$, или в момент t он находился в состоянии E_k, вероятность чего равна $P_k(t)$, и за время h переходов не было, вероятность чего равна $1 - \lambda_k h + \nu_k h + o(h)$, или в момент t он находился в состоянии E_{k+1}, вероятность чего равна $P_{k+1}(t)$, и за время h произошел переход в состояние E_k, вероятность чего равна $\nu_{k+1}h + o(h)$.

Символическая запись этой фразы имеет вид

$$P_k(t+h) \quad \lambda_{k-1}hP_{k-1}(t) + (1 - \lambda_k h - \nu_k h)P_k(t) + \nu_{k+1}hP_{k+1}(t) + o(h).$$

Перенесем из правой части в левую $P_k(t)$ и разделим каждое слагаемое в равенстве на h:

$$\frac{P_k(t+h)-P_k(t)}{h}=\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)-(\lambda_k+\nu_k)P_k(t)+\nu_{k+1}P_{k+1}(t)+\frac{o(h)}{h}.$$

При $h\to 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$P_k'(t)=\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)-(\lambda_k+\nu_k)P_k(t)+\nu_{k+1}P_{k+1}(t) \text{ при } k=1,2,3,\dots . \quad (4.3.2)$$

Уравнение для $k=0$ получается из следующих рассуждений. Объект в момент времени $t+h$ будет находиться в состоянии E_0, вероятность чего равна $P_0(t+h)$, если в момент t он находился в состоянии E_0, вероятность чего равна $P_0(t)$, и за время h переходов не было, вероятность чего равна $1-\lambda_0 h+o(h)$, или в момент t он находился в состоянии E_1, вероятность чего равна $P_1(t)$, и за время h произошел переход в состояние E_0, вероятность чего равна $\nu_1 h+\mathrm{o}(h)$. Символически эта фраза может быть записана в виде

$$P_0(t+h) = (1-\lambda_0 h)P_0(t)+\nu_1 hP_1(t)+o\left(h\right).$$

Перенос слагаемого P_0 (t) в левую часть, деление правой и левой частей равенства на h, предельный переход при $h\to 0$ приводят к дифференциальному уравнению

$$P_0'(t)=-\lambda_0 P_0(t)+\nu_1 P_1(t). \quad (4.3.3)$$

Уравнения (4.3.2) и (4.3.3) называют системой *уравнений гибели и рождения.* В общем виде решение этой системы получить сложно, но в отдельных частных случаях это вполне обозримая работа.

Обычно с течением времени влияние начального состояния иссякает и процесс входит в стационарный режим, при котором переходы из состояния в состояние продолжаются, но сами вероятности состояний стабилизируются и перестают зависеть от времени (от начального состояния), т.е. $P_k(t)\xrightarrow{t\to\infty}P_k$. Но при этом $P_k'(t)\xrightarrow{t\to\infty}0$. В результате система дифференциальных уравнений (4.3.2) и (4.3.3) превращается в систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&-\lambda_0 P_0+\nu_1 P_1=0,\\
&\lambda_0 P_0-(\lambda_1+\nu_1)P_1+\nu_2 P_2=0,\\
&\lambda_1 P_1-(\lambda_2+\nu_2)P_2+\nu_3 P_3=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_{k-1}P_{k-1}-(\lambda_k+\nu_k)P_k+\nu_{k+1}P_{k+1}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Выбрать единственное решение системы позволяет условие нормировки $\Sigma P_i=1$. Для этого выразим все вероятности, например, через

P_0. Из первого уравнения $P_1 = \frac{\lambda_0}{\nu_1} P_0$. С учетом этого, из второго уравнения получаем $P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\nu_1 \nu_2} P_0$.

Третье уравнение дает равенство $P_3 = \frac{\lambda_0\, \lambda_1\, \lambda_2}{\nu_1\, \nu_2\, \nu_3} P_0$. Продолжая подобные действия, найдем, что $P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k} P_0$. Тогда по условию нормировки

$$P_0 + \frac{\lambda_0}{\nu_1} P_0 + \frac{\lambda_0\, \lambda_1}{\nu_1\, \nu_2} P_0 + \frac{\lambda_0\, \lambda_1\, \lambda_2}{\nu_1\, \nu_2\, \nu_3} P_0 + \ldots + \frac{\lambda_0\, \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_{k-1}}{\nu_1\, \nu_2\, \nu_3 \ldots \nu_k} P_0 + \ldots = 1;$$

$$P_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\nu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\nu_1 \nu_2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\nu_1 \nu_2 \nu_3} + \ldots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{k-1}}{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \ldots \nu_k} + \ldots \right) = 1;$$

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\nu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\nu_1 \nu_2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\nu_1 \nu_2 \nu_3} + \ldots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k} + \ldots \right)^{-1}.$$

В итоге получаем, что

$$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\nu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\nu_1 \nu_2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\nu_1 \nu_2 \nu_3} + \ldots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_{k-1}}{\nu_1 \nu_2 \nu_3 ... \nu_k} + \ldots \right)^{-1}. \qquad (4.3.4)$$

Замечание. Если ряд в знаменателе (4.3.4) расходится, то все $P_k = 0$. Это означает «взрыв» численности, т.е. за конечное время произойдем бесконечно много рождений. Сходимость ряда $1 + \frac{\lambda_0}{\nu_1} + \frac{\lambda_0\, \lambda_1}{\nu_1\, \nu_2} + \ldots$ является достаточным условием существования ненулевых вероятностей $P_0, P_1, P_2, \ldots$. Для сходимости ряда по признаку Даламбера требуется, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\nu_n} < 1,$$

т.е. начиная с некоторого номера *n* интенсивность гибели должна превосходить интенсивность рождений.

Пример 4.23. Система состоит из основного блока, одного блока в «горячем» резерве (т.е. работающего одновременно с основным) и одного блока в «холодном» резерве (т.е. этот резервный блок не работает). Длительность безотказной работы работающего блока распределена по показательному закону с параметром λ. Вышедший из строя блок практически мгновенно заменяется блоком из холодного резерва, а вышедший из строя блок незамедлительно начинают ремонтировать. Время ремонта распределено по показательному закону с параметром ν. Система прекращает свою работу, как только остается всего один работоспособный элемент. Требуется найти вероятность того, что система выйдет из строя до момента времени *t*.

Решение. 1. Состояния системы будем различать по числу вышедших из строя блоков. Обозначим через E_i — состояние, в котором *i* блоков вышли из строя. Тогда граф состояний системы имеет вид, изображенный на рис. 4.3.2.

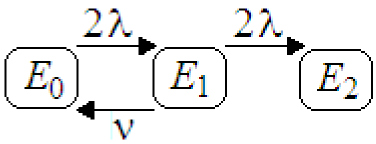


Рис. 4.3.2

Происходит переход $E_i \to E_{i+1}$, $i = 1,2,$ если один из двух работающих блоков выходит из строя. Интенсивность таких переходов равна 2λ. При окончании ремонта происходит переход $E_{i+1} \to E_i$ с интенсивностью ν. Состояние E_2 является «поглощающим» — если система попала в него, то она это состояние не покинет.

2. Обозначим через $P_i(t)$ вероятность того, что в момент времени *t* система будет находиться в состоянии E_i. Нас интересует $P_2(t)$ — вероятность того, что в момент времени *t* система уже вышла из строя. Выход из строя можно считать «рождением» неполадки, а ее устранение — «гибелью». Система уравнений гибели и размножения (4.3.2) и (4.3.3) в нашем случае имеет вид:

$$\begin{aligned} &P_0'(t) = -2\lambda P_0(t) + nP_1(t); \\ &P_1'(t) = 2\lambda P_0(t) - (2\lambda + n)P_1(t); \\ &P_2(t) = 2\lambda P_1(t). \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Любое из уравнений системы можно заменить условием нормировки

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1.$$

Пусть система начинает свою работу из состояния E_1, т.е. имеет начальные условия:

$$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) \quad P_2(0) \quad 0.$$

3. Перейдем в системе (4.3.5) к преобразованиям Лапласа:

$$\begin{aligned} &sP_0(s) - 1 = -2\lambda P_0(s) + \nu P_1(s), \\ &sP_1(s) = 2\lambda P_0(s) - (2\lambda + \nu)P_1(s), \\ &sP_2(s) = 2\lambda P_1(s) \end{aligned}$$

или

$$
\begin{aligned}
&(2\lambda + s)P_0(s) - nP_1(s) = 1,\\
&2\lambda P_0(s) - (s + 2\lambda + n)P_1(s) = 0, \qquad (4.3.6)\\
&2\lambda P_1(s) - sP_2(s) = 0.
\end{aligned}
$$

Решение системы (4.3.6), например, по формулам Крамера дает:

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 2\lambda + s & -\nu & 0 \\ 2\lambda & -(s + 2\lambda + \nu) & 0 \\ 0 & 2\lambda & -s \end{vmatrix} = s[s^2 + 4\lambda s + 4\lambda^2 + ns],
$$

$$
\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2\lambda + s & -\nu & 1 \\ 2\lambda & -(s + 2\lambda + \nu) & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \end{vmatrix} = 4\lambda^2;
$$

$$
P_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4\lambda^2}{s[s^2 + 4\lambda s + 4\lambda^2 + \nu s]}. \qquad (4.3.7)
$$

Остается найти обратное преобразование от $P_2(s)$. Например, при $\lambda = 1$ и $\nu = 1$ выражение (4.3.7) принимает вид

$$
P_2(s) = \frac{4}{s[s^2 + 5s + 4]} = \frac{4}{s(s+4)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+1} =
$$

$$
= \frac{A(s+4)(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s+4)}{s(s+4)(s+1)}.
$$

(Здесь мы пользуемся методом неопределенных коэффициентов для разложения на простые дроби). Имея две равные дроби с равными знаменателями, приравниваем числители этих дробей

$$
4 = A(s+4)(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s+4).
$$

Приравнивая в правой и левой частях равенства коэффициенты при равных степенях s, получим $A = 1$, $B = 1/3$, $C = -4/3$. В итоге имеем

$$
P_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{3(s+4)} - \frac{4}{3(s+1)}.
$$

Обращение преобразования Лапласа дает искомую вероятность

$$
P_2(t) = 1 + \frac{1}{3}e^{-4t} - \frac{4}{3}e^{-t}.
$$

Ответ. $P_2(t) = 1 + \frac{1}{3}e^{-4t} - \frac{4}{3}e^{-t}$.

Задача 4.23. Система состоит из одного работающего устройства и одного устройства в «холодном» резерве. Длительность безотказной работы работающего устройства распределена по показательному закону с параметром λ. Вышедшее из строя устройство практически мгновенно заменяется устройством из холодного резерва и незамедлительно начинается ремонт. Вышедшие из строя устройства ремонтируются в порядке их выхода из строя. Время ремонта распределено по показательному закону с параметром ν. Система прекращает свою работу, как только не останется работоспособных устройств. Требуется найти вероятность того, что система выйдет из строя до времени *t*. (См. пример 4.23, $\nu = 0, N$, где N — номер варианта, $\lambda = 2\nu$.)

Пример 4.24. На контактном многоканальном телефоне фирмы работает четыре оператора. Каждый свободный оператор независимо от других на интервале времени $[t, t+\Delta t]$ может с вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ начать отвечать на звонок. Оператор, отвечающий на звонок, с вероятностью $\nu\Delta t + o(\Delta t)$ на интервале времени $[t, t+\Delta t]$ может завершить ответ и освободиться. Требуется найти предельные вероятности того, что будут заняты *k* операторов.

Решение. Состояния контактного телефона будем различать по числу занятых операторов. Пусть E_k — означает, что заняты *k* из них. Тогда граф состояний имеет вид, изображенный на рис. 4.3.3.

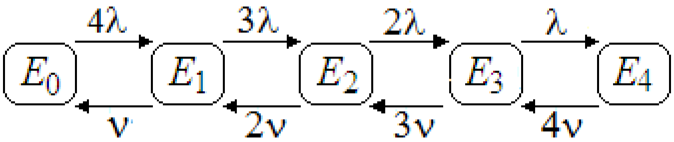


Рис 4.3.3

Составим уравнения для вероятностей $P_k(t)$. Сопоставим значения этих вероятностей в моменты времени *t* и $t+\Delta t$:

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1 - 4\lambda t + o(\Delta t)) + \nu\Delta t + o(\Delta t).$$

Перенос слагаемого $P_0(t)$ в левую часть, деление правой и левой частей равенства на Δt, предельный переход при $\Delta t \to 0$ приводят к дифференциальному уравнению

$$P_0'(t) = -4\lambda_0 P_0(t) + \nu P_1(t).$$

На контактном телефоне в момент времени $t+\Delta t$ будет занят один оператор, вероятность чего равна $P_1(t+\Delta t)$, если в момент *t* все операторы были свободны, вероятность чего равна $P_0(t)$, и за время Δt один из операторов включился в работу, вероятность чего равна $4\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, или в момент *t* был занят только один оператор, вероятность чего равна $P_1(t)$, и за время Δt переходов не было, вероятность чего равна $1 - 3\lambda\Delta t + \nu\Delta t + o(\Delta t)$, или в момент *t* были заняты два оператора, вероятность чего равна $P_2(t)$, и за время Δt один из операторов освободился $2\nu\Delta t + o(\Delta t)$.

Символическая запись этой фразы имеет вид

$$P_1(t+\Delta t) = 4\lambda\Delta t P_0(t) + (1 - 3\lambda\Delta t - \nu\Delta t)P_1(t) + 2\nu\Delta t P_2(t) + o(\Delta t).$$

Перенесем из правой части в левую $P_k(t)$ и разделим каждое слагаемое в равенстве на Δt:

$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t} = 4\lambda P_0(t) - (3\lambda+\nu)P_1(t) + 2\nu P_2(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \to 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$P_1'(t) = 4\lambda P_0(t) - (3\lambda+\nu)P_1(t) + 2\nu P_2(t).$$

Аналогично выводятся уравнения

$$P_2'(t) = 3\lambda P_1(t) - (2\lambda+2\nu)P_2(t) + 3\nu P_3(t),$$
$$P_3'(t) = 2\lambda P_2(t) - (\lambda+3\nu)P_3(t) + 4\nu P_4(t),$$
$$P_4'(t) = \lambda P_3(t) - 4\nu P_4(t).$$

С течением времени вероятности состояний стабилизируются и перестают зависеть от времени (от начального состояния), т.е.

$$P_k(t) \xrightarrow{t\to\infty} P_k.$$

Но при этом $P_k'(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$ В результате система дифференциальных уравнений превращается в систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$-4\lambda P_0 + \nu P_1 = 0,$$
$$4\lambda P_0 - (3\lambda+\nu)P_1 + 2\nu P_2 = 0,$$
$$3\lambda P_1 - (2\lambda+2\nu)P_2 + 3\nu P_3 = 0,$$
$$2\lambda P_2 - (\lambda+3\nu)P_3 + 4\nu P_4 = 0,$$
$$\lambda P_3 - 4\nu P_4 = 0.$$

Выбрать единственное решение системы позволяет условие нормировки $\Sigma P_i = 1$.Для этого выразим все вероятности, например, через P_0. Из первого уравнения $P_1 = \frac{4\lambda}{\nu}P_0$. С учетом этого, из второго уравнения получаем $P_2 = \frac{6\lambda^2}{\nu^2}P_0$.

Третье уравнение дает равенство $P_3 = \frac{4\lambda^3}{\nu^3}P_0$. Продолжая подобные действия, найдем, что $P_4 = \frac{\lambda^4}{\nu^4}P_0$. Тогда по условию нормировки

$$P_0 + \frac{4\lambda}{\nu}P_0 + \frac{6\lambda^2}{\nu^2}P_0 + \frac{4\lambda^3}{\nu^3}P_0 + \frac{\lambda^4}{\nu^4}P_0 = 1.$$

Обозначим λ/ν через ρ. Тогда

$$P_0 = \frac{1}{1+4\rho+6\rho^2+4\rho^3+\rho^4} = \frac{1}{(1+\rho)^4}.$$

Откуда

$$P_1 = \frac{4\rho}{(1+\rho)^4},\ P_2 = \frac{6\rho^2}{(1+\rho)^4},\ P_3 = \frac{4\rho^3}{(1+\rho)^4},\ P_4 = \frac{\rho^4}{(1+\rho)^4}.$$

Ответ. $P_1 = \dfrac{4\rho}{(1+\rho)^4},\ P_2 = \dfrac{6\rho^2}{(1+\rho)^4},\ P_3 = \dfrac{4\rho^3}{(1+\rho)^4},\ P_4 = \dfrac{\rho^4}{(1+\rho)^4}.$

Задача 4.24. К линии электропередач подключены n электромоторов, которые работают независимо друг от друга. Вероятность того, что неработающий электромотор в течение малого времени Δt будет подключен к сети, равна $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$. Вероятность отключения работающего электромотора в течение малого времени Δt равна $\beta\Delta t + o(\Delta t)$. Найдите стационарные вероятности числа электромоторов, работающих в данный момент.

(См. пример 4.24, в нечетных вариантах $n=5$, в четных $n=6$, $\alpha = 0,k$, где k — первая цифра номера варианта, β — в два раза больше α.)

Пример 4.25. Система массового обслуживания состоит из двух обслуживающих устройств. В систему поступает простейший поток требований на обслуживание интенсивности λ. Времена обслуживания требований независимы и имеют показательный закон распределения с параметром ν (ν — интенсивность обслуживания). Требование, заставшее все устройства занятыми, может встать в очередь или покинуть систему. Вероятность присоединения к очереди пропорциональна числу обслуживающих устройств и обратно пропорциональна числу требований в системе плюс один. Это означает, что интенсивность перехода $E_{2+m} \to E_{m+3}$ равна $2\lambda/(m+3)$. Требуется найти стационарные вероятности числа требований в системе.

Решение. Обозначим через E_k — состояние системы, когда в ней находятся k требований. Если в системе находится $2+m$ требований (два требования обслуживаются и m ожидают в очереди), то вероятность присоединения к очереди по условию задачи равна $2/(2+m+1) = 2/(m+3)$. Это означает, что интенсивность перехода $E_{2+m} \to E_{m+3}$ равна $2\lambda/(m+3)$. Граф состояний системы изображен на рис. 4.3.4.

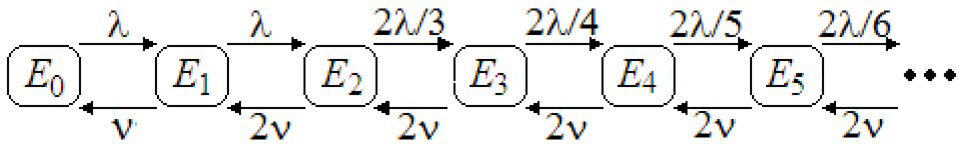


Рис. 4.3.4

Составим систему уравнений гибели и размножения

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t),$$

$$P_1'(t) = \lambda P_0(t) - (\lambda + \nu) P_1(t) + 2\nu P_2(t),$$
$$P_2'(t) = \lambda P_1(t) - (2\lambda/3 + 2\nu) P_2(t) + 2\nu P_3(t),$$
$$P_3'(t) = 2\lambda/3 P_2(t) - (2\lambda/4 + 2\nu) P_3(t) + 2\nu P_4(t),$$
$$P_4'(t) = 2\lambda/4 P_3(t) - (2\lambda/5 + 2\nu) P_4(t) + 2\nu P_5(t),$$
$$P_5'(t) = 2\lambda/5 P_4(t) - (2\lambda/6 + 2\nu) P_5(t) + 2\nu P_6(t),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Для стационарного режима ($P_n(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} P_n, \quad P_n'(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$) получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$-\lambda P_0 + \nu P_1 = 0,$$
$$\lambda P_0 - (\lambda + \nu) P_1 + 2\nu P_2 = 0,$$
$$\lambda P_1 - (2\lambda/3 + 2\nu) P_2 + 2\nu P_3 = 0,$$
$$2\lambda/3 P_2 - (2\lambda/4 + 2\nu) P_3 + 2\nu P_4 = 0,$$
$$2\lambda/4 P_3 - (2\lambda/5 + 2\nu) P_4 + 2\nu P_5 = 0,$$
$$2\lambda/5 P_4 - (2\lambda/6 + 2\nu) P_5 + 2\nu P_6 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Эту систему естественно дополнить условием нормировки $P_0 + P_1 + P_2 + \ldots = 1$. Из первого уравнения получаем, что $P_1 = \dfrac{\lambda}{\nu} P_0.$ Подставляя этот результат во второе уравнение, находим $P_2 = \dfrac{\lambda^2}{2!\nu^2} P_0.$ Из третьего уравнения, с учетом полученных для P_1 и P_2 выражений, имеем $P_3 = \dfrac{\lambda^3}{3!\nu^3} P_0.$ Продолжая действовать подобным образом, получим $P_k = \dfrac{\lambda^k}{k!\nu^k} P_0.$ Обозначим λ/ν через ρ. Воспользуемся условием нормировки:

$$P_0 + \rho P_0 + \frac{\rho^2}{2!} P_0 + \frac{\rho^3}{3!} P_0 + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} P_0 + \ldots = 1,$$

откуда $P_0 \left(1 + \rho + \dfrac{\rho^2}{2!} + \dfrac{\rho^3}{3!} + \ldots + \dfrac{\rho^k}{k!} + \ldots\right) = 1$ или $P_0 e^{\rho} = 1$. В итоге

$$P_0 = e^{-\rho},\ P_1 = \rho e^{-\rho},\ P_2 = \frac{\rho^2}{2!} e^{-\rho},\ \ldots,\ P_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho},\ \ldots,$$

где $\rho = \lambda/\nu$, т.е. стационарное распределение оказалось распределением Пуассона. Используя найденные стационарные вероятности можно вычислить разные характеристики системы. Например, при $\lambda = 1$ и $\nu = 1/2$ вычислим среднее число занятых обслуживающих устройств. Поскольку $\rho = 2$ и $P_0 = e^{-2}$, $P_1 = 2e^{-2}$, то математическое ожидание числа занятых приборов равно

$$0\cdot e^{-2}+1\cdot 2e^{-2}+2(1-e^{-2}-2e^{-2})=2-4e^{-2}\approx 1{,}46.$$

Вероятность того, что требование поступит на обслуживание без ожидания в очереди, равна $P_0+P_1=3e^{-2}\approx 0{,}41$. Вероятность наличия очереди в системе равна

$$1-P_0-P_1-P_2=1-5e^{-2}\approx 0{,}31.$$

Ответ. $P_k=\dfrac{\rho^k}{k!}e^{-r},\quad k=1,2,3,\ldots$.

Задача 4.25. Система массового обслуживания состоит из n обслуживающих устройств. (Например, прачечная-автомат, где посетители сами стирают белье в одной из n машин.) В систему поступает простейший поток требований на обслуживание интенсивности λ. Времена обслуживания требований независимы и имеют показательный закон распределения с параметром ν (ν — интенсивность обслуживания).

Требование, заставшее все устройства занятыми, может встать в очередь или покинуть систему. Если в системе находится $n+m$ требований (n — обслуживаются и m — ожидают в очереди), то вероятность присоединения к очереди пропорциональна числу обслуживающих устройств и обратно пропорциональна числу требований в системе плюс один, т.е. равна $n/(n+m+1)$. Это означает, что интенсивность перехода $E_{n+m}\to E_{n+m+1}$ равна $\lambda n/(n+m+1)$. Найдите:

1) стационарные вероятности числа требований находящихся в системе;

2) среднее число занятых устройств обслуживания;

3) вероятность того, что требование поступит на обслуживание без ожидания в очереди;

4) вероятность того, что в очереди будет находиться не менее k требований.

Ответ на первый пункт найдите в общем виде (для произвольных λ и ν), ответ на последующие пункты дайте для конкретных λ и ν, указанных в исходных данных. (См. пример 4.25 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 4.25.

№	n	λ	ν	k	№	n	λ	ν	k	№	n	λ	ν	k
1	3	1	1	2	**11**	4	3	3/4	3	**21**	6	2	1/2	2
2	4	2	1/2	3	**12**	5	3	2/3	2	**22**	3	2	3/4	3
3	5	4	1	2	**13**	3	1	4/5	3	**23**	4	2,5	1	2
4	3	1	1/2	3	**14**	4	4	1	2	**24**	6	3	2/3	2
5	4	3	1	2	**15**	5	3	0,8	3	**25**	3	1	0,4	3
6	5	4	1,2	3	**16**	3	1	1/3	4	**26**	4	3,5	1	3
7	3	1	2/3	4	**17**	4	4	1,5	3	**27**	6	4	1	2
8	4	3	4/5	3	**18**	6	5	1	2	**28**	3	1	0,5	4

9	5	3	1/2	2	**19**	3	2	1	2	**29**	4	4	5/4	2
10	3	1	3/4	2	**20**	4	5	1,5	2	**30**	6	4	3/4	2

Пример 4.26. Система массового обслуживания состоит из одного обслуживающего прибора и одного прибора в холодном резерве. Интенсивность выхода из строя работающего прибора равна λ. При выходе из строя работающего прибора его практически мгновенно заменяют резервным, а вышедший из строя прибор начинают ремонтировать. Вышедшие из строя приборы ремонтируются с интенсивностью ν в порядке очереди. После отказа устройства ремонт продолжается с прежней интенсивностью. При наличии в системе годного к работе прибора система возобновляет свою работу.

Требуется найти долю времени простоя системы из-за выхода из строя приборов. Найти наработку на отказ, т.е. среднее время работы системы между пребываниями в отказных состояниях.

Решение. Состояния системы будем различать по числу вышедших из строя приборов. Обозначим через E_i состояние системы, в котором i элементов системы находятся в нерабочем состоянии. Тогда состояние E_2 можно назвать отказным состоянием, поскольку оба элемента вышли из строя. Граф состояний системы изображен на рис. 4.3.5.

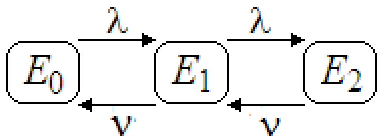


Рис. 4.3.5

Если считать выход из строя прибора рождением неполадки, а завершение ремонта ее гибелью, то система уравнений гибели и размножения по формулам (4.3.2), (4.3.3) для нашего случая принимает вид

$$\begin{aligned} &P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t), \\ &P_1'(t) = \lambda P_0(t) - (\lambda + \nu) P_1(t) + \nu P_2(t), \qquad (4.3.8) \\ &P_2'(t) = \lambda P_1(t) - \nu P_2(t). \end{aligned}$$

Это система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Любое уравнение системы можно заменить условием нормировки:

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1.$$

С учетом того, что $P_i(t) \xrightarrow{t\to\infty} P_i$ и при этом $P_i'(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$, для стационарных вероятностей состояний получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$-\lambda P_0 + \nu P_1 = 0,$$
$$\lambda P_0 - (\lambda + \nu) P_1 + \nu P_2 = 0,$$
$$\lambda P_1 - \nu P_2 = 0.$$

Эта система имеет бесконечно много решений. Для выбора приемлемого для нас решения одно из уравнений, например, второе заменим условием нормировки $P_0 + P_1 + P_2 = 1.$

Из первого уравнения имеем $P_0 = \dfrac{\nu}{\lambda} P_1,$ а из третьего уравнения $P_2 = \dfrac{\lambda}{\nu} P_1.$ Тогда по условию нормировки $\dfrac{\nu}{\lambda} P_1 + P_1 + \dfrac{\lambda}{\nu} P_1 = 1,$ откуда

$$P_1 = \frac{\lambda\nu}{\nu^2 + \lambda\nu + \lambda^2} = \frac{\rho}{1 + \rho + \rho^2},$$

где $\rho = \lambda / \nu.$ Тогда

$$P_0 = \frac{\nu^2}{\nu^2 + \lambda\nu + \lambda^2} = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2}, \qquad P_2 = \frac{\lambda^2}{\nu^2 + \lambda\nu + \lambda^2} = \frac{\rho^2}{1 + \rho + \rho^2}.$$

Стационарную вероятность P_2 можно понимать как долю времени, в течение которой система находится в нерабочем состоянии (оба прибора вышли из строя).

Для вычисления наработки на отказ сделаем состояние E_2 поглощающим, т.е. исключим переход $E_2 \to E_1$. Тогда граф состояний будет иметь вид, изображенный на рис. 4.3.6.

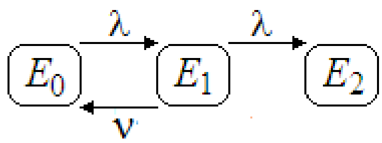


Рис. 4.3.6

Этому графу состояний соответствует система уравнений

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t),$$
$$P_1'(t) = \lambda P_0(t) - (\lambda + \nu) P_1(t), \qquad (4.3.9)$$
$$P_2'(t) = \lambda P_1(t).$$

Зададим начальное состояние. Пусть, например, $P_0(0) = 1,$ $P_1(0) = P_2(0) = 0.$ Обозначим через $P_i(s)$ преобразование Лапласа от $P_i(t)$ и запишем систему (4.3.9) в преобразованиях Лапласа:

$$sP_0(s) - 1 = \nu P_1(s) - \lambda P_0(s),$$
$$sP_1(s) = \lambda P_0(s) - (\lambda + n) P_1(s),$$
$$sP_2(s) = \lambda P_1(s)$$

или

$$
\begin{aligned}
&(\lambda + s)P_0(s) - \nu P_1(s) = 1,\\
&-\lambda P_0(s) + (s + \lambda + \nu)P_1(s) = 0,\\
&\lambda P_1(s) - sP_2(s) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.3.10}
$$

Найдем $P_2(s)$, например, по правилу Крамера. Вычислим определитель системы (4.3.10):

$$
\Delta = \begin{vmatrix} s+\lambda & -\nu & 0 \\ -\lambda & s+\lambda+\nu & 0 \\ 0 & \lambda & -s \end{vmatrix} = -s(s^2 + 2s\lambda + \lambda^2 + \nu s)
$$

и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} s+\lambda & -\nu & 1 \\ -\lambda & s+\lambda+\nu & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = -\lambda^2.$ Поэтому $P_2(s) = \Delta_2 / \Delta =$ $= \lambda^2 / s(s^2 + 2s\lambda + \lambda^2 + \nu s).$

Обозначим через $F(t) = 1 - P_2(t)$ — вероятность безотказной работы системы до момента t, а через $\Im(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-st}[1 - P_2(t)]\, dt$ — ее преобразование Лапласа. Тогда

$$
\Im(s) = 1/s - P_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{\lambda^2}{s(s^2 + 2s\lambda + \lambda^2 + s\nu)} = \frac{s + 2\lambda + \nu}{s^2 + 2s\lambda + \lambda^2 + s\nu}.
$$

Заметим, что $\Im(0) = \int\limits_0^\infty [1 - P_2(t)]dt = M(T),$ где T — время достижения отказного состояния, т.е. время безотказной работы системы.

Последний вывод основан на следующих соображениях. Пусть X — неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Интегрируя по частям, вычислим

$$
\int\limits_0^\infty [1 - F(x)]\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = 1 - F(x), & du = -F'(x)\, dx = -f(x)\, dx, \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right\} =
$$

$$
= x[1 - F(x)]\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty x\, f(x)\, dx = M(X).
$$

В нашем случае $M(T) = \Im(0) = \dfrac{2\lambda + \nu}{\lambda^2} = \dfrac{2}{\lambda} + \dfrac{\nu}{\lambda^2}.$ Первое слагаемое равно наработке на отказ за счет холодного резервирования, второе слагаемое возникло за счет ремонта.

Ответ. $M(T) = \dfrac{2}{\lambda} + \dfrac{\nu}{\lambda^2}.$

Задача 4.26. Система многопозиционной радиолокации состоит из n работающих радиолокационных станций и m станций в холодном резерве (для нечетных вариантов) или горячем резерве (для четных вариантов) Интенсивность выхода из строя каждой работающей станции равна λ. Каждая вышедшая из строя станция ремонтируется с интенсивностью ν (для нечетных вариантов). Для четных вариантов вышедшие из строя станции ремонтируются с интенсивностью ν в порядке их выхода из строя.

Система отказывает, если остается только k работоспособных станций. После отказа системы ремонт продолжается с прежней интенсивностью. При наличии в системе $k+1$ годных к работе станций система возобновляет свою работу.

1. Построить граф состояний системы.

2. Составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы в момент времени t.

3. Найти стационарные вероятности состояний системы. Найти долю времени простоя системы. Вычислить эти характеристики при $1/\lambda = a$ ч., $1/\nu = b$ ч.

4. Найти среднюю наработку на отказ. Вычислить ее при указанных λ и ν. Сравнить со средней наработкой при отсутствии ремонта.

(См. пример 4.26 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 4.26.

№	n	m	k	a	b	№	n	m	k	a	b	№	n	m	k	a	b
1	2	2	1	100	2	**11**	4	2	3	80	4	**21**	2	2	1	80	2
2	3	2	2	80	4	**12**	1	2	0	100	4	**22**	2	2	1	100	2
3	3	1	1	80	2	**13**	5	1	3	100	5	**23**	3	1	1	100	2
4	2	1	0	100	4	**14**	6	1	4	50	1	**24**	3	1	1	80	2
5	4	1	2	50	1	**15**	5	2	4	80	2	**25**	4	1	2	200	4
6	3	1	1	100	2	**16**	4	2	3	80	4	**26**	4	1	2	50	1
7	2	1	0	200	4	**17**	6	1	4	50	1	**27**	2	1	0	100	4
8	2	2	1	80	2	**18**	5	2	4	80	2	**28**	2	1	0	200	4
9	3	2	2	100	4	**19**	1	2	0	100	4	**29**	3	2	2	80	4
10	2	1	0	100	4	**20**	5	1	3	100	5	**30**	3	2	2	100	4

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает простейший поток требований интенсивности λ. Время обслуживания распределено показательно с параметром ν. Каждое требование при поступлении в систему начинает обслуживаться немедленно, если есть хотя бы один свободный прибор. Если требование застает все n приборов обслуживания занятыми, то оно получает отказ и теряется. Такую систему называют системой с потерями. Примером такой системы может служить телефонный узел.

Замечание. Пусть время обслуживания имеет показательное распределение с функцией распределения $F(x) = 1 - \exp\{-\nu x\}$ и пусть обслуживание уже продолжалось время x. Из характеристического свойства показательного распределения следует, что оставшаяся часть времени обслуживания имеет то же самое распределение. Поэтому вероятность того, что обслуживание завершится за последующее время Δx равна

$$F(\Delta x) - F(0) = 1 - \exp\{-\nu\Delta x\} - [1 - \exp\{0\}] = 1 - \exp\{-\nu\Delta x\} =$$
$$= 1 - (1 - \nu\Delta x + (\nu\Delta x)^2 / 2! - \ldots) = \nu\Delta x + o(\Delta x).$$

Под состоянием E_k можно полагать то состояние системы, при котором в ней находится (обслуживается) k требований. Тогда система может находиться только в состояниях $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_n$. Вероятность перехода из состояния E_k в состояние E_{k+1} при $k < n$ равна $\lambda\Delta x + o(\Delta x)$. Если в системе находится k требований, то интенсивность обслуживания равна $k\nu$ и вероятность перехода из E_k в E_{k-1} за малое время Δx равна $k\nu\Delta x + o(\Delta x)$. Мы имеем дело с процессом гибели и размножения, для которого $\lambda_k = \lambda$ при $k < n$ и $\lambda_k = 0$ при $k \geq n$, $\nu_k = k\nu$ при $1 \leq k \leq n$ и $\nu_k = 0$ при $k > n$. Если ввести обозначение $\rho = \lambda / \nu$, то формула (4.3.4) дает вероятности состояний системы при $0 \leq k \leq n$:

$$P_k = \frac{\frac{1}{k!}\rho^k}{1 + \rho + \frac{1}{2!}\rho^2 + \frac{1}{3!}\rho^3 + \ldots \frac{1}{n!}\rho^n}. \tag{4.3.11}$$

Формулы (4.3.11) называют формулами Эрланга, который их впервые вывел в 1917 г. В последующем оказалось, что для систем с потерями *формулы Эрланга сохраняют свою структуру при любом распределении длительности обслуживания, лишь бы среднее время обслуживания равнялось* $1/\nu$.

При $k = n$ формула (4.3.11) дает вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием и, следовательно, поступившее в такой момент требование получит отказ. Поэтому вероятность потери требования равна

$$P_n = \frac{\frac{1}{n!}\rho^n}{1 + \rho + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\rho^n}. \tag{4.3.12}$$

Пример 4.27. В систему массового обслуживания, состоящую из четырех каналов обслуживания, поступает простейший поток требований интенсивности $\lambda = 1$. Времена обслуживания требований независимы и каждое имеет распределение с функцией плотности вероятности

$$f(x)=\begin{cases} x\exp(-x) \quad \text{при } x \ge 0, \\ 0 \quad \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Требование, заставшее все каналы обслуживания занятыми, теряется. Необходимо найти вероятность потери требования и среднее число занятых обслуживанием каналов.

Решение. Пусть V — время обслуживания требования. Вычислим среднее время обслуживания

$$M(V)=\int_0^\infty x\cdot xe^{-x}dx = \{x^2 = u,\ du = 2xdx,\ dv = e^{-x}dx,\ v = -e^{-x}\} =$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-x}dx = 2\int_0^\infty xe^{-x}dx =$$

$$= \{x = u,\ du = dx,\ dv = e^{-x}dx,\ v = -e^{-x}\} = 2\{-xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx\} = 2.$$

В формулах Эрланга $\rho = \lambda/\nu$. Заменяя $1/\nu$ на $M(V)=2$, получаем $\rho = \lambda M(V) = 2$. По формуле (4.3.11) имеем:

$$P_0 = \frac{1}{1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}} = 3/21; \qquad P_1 = P_2 = \frac{2}{1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}} = 6/21; \qquad =$$

$P_3 = 4/21$ и $P_4 = 2/21$. Вероятность застать все каналы занятыми равна $P_4 = 2/21$. Это и есть вероятность потери требования.

Среднее число занятых каналов равно

$$0\cdot 6/21 + 1\cdot 6/21 + 2\cdot 6/21 + 3\cdot 4/21 + 4\cdot 2/21 = 38/21 \approx 1{,}81.$$

Ответ. 2/21; $38/21 \approx 1{,}81$.

Задача 4.27. В систему массового обслуживания, состоящую из n каналов обслуживания, поступает простейший поток требований интенсивности λ. Времена обслуживания требований независимы и каждое имеет распределение

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x \le 1, \\ \sqrt{(x-1)/b} \quad \text{при } 1 < x \le b+1, \\ 1 \quad \text{при } b+1 \le x. \end{cases}$$

Требование, заставшее все каналы обслуживания занятыми, теряется. Найдите вероятность потери требования и среднее число занятых обслуживанием каналов. (См. пример 4.27, b — номер варианта, в нечетных вариантах $n=5$, в четных вариантах $n=6$, λ — сумма цифр варианта.)

Пример 4.28. На многоканальный контактный телефон фирмы поступает простейший поток звонков интенсивности пять звонков в час. Время разговора с каждым клиентом в среднем занимает 10 минут. Звонки, заставшие все каналы занятыми, теряются. Сколько должно быть каналов для того, чтобы терялось не более 10% звонков?

Решение. Формулы Эрланга сохраняют свою структуру при любом распределении времени обслуживания и зависят только от среднего значения длительности обслуживания. В нашем случае $\lambda = 5$, среднее время обслуживания равно 1/6 ч. Поэтому $\rho = 5/6$. Явно решить неравенство

$$\frac{\frac{1}{n!}\rho^n}{1+\rho+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\rho^n} < 0{,}1,$$

даже при известном значении ρ, едва ли возможно. Поэтому естественно найти n простым перебором его значений. Начнем с $n = 2$. По формуле (4.3.12) при $n = 2$

$$P_2 = \frac{\frac{1}{2!}\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1+\frac{5}{6}+\frac{1}{2!}\left(\frac{5}{6}\right)^2} = 25/157 \approx 0{,}16 > 0{,}1.$$

По той же формуле при $n = 3$

$$P_3 = \frac{\frac{1}{3!}\left(\frac{5}{6}\right)^3}{1+\frac{5}{6}+\frac{1}{2!}\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{5}{6}\right)^3} \approx 0{,}05.$$

Вычисления показали, что при двух каналах теряется около 16% звонков, а уже при трех каналах потери составят около 5% звонков.

Ответ. Достаточно трех каналов.

Задача 4.28. В отдел заказов торгового центра поступает на многоканальный телефон простейший поток заявок интенсивности λ заявок в час. Времена обслуживания заявок независимы и имеют функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \le 1/b, \\ \ln bx \quad \text{при } 1/b < x \le e/b, \\ 1 \quad \text{при } e/b < x. \end{cases}$$

Заявка, заставшая все каналы занятыми, теряется. Сколько нужно иметь каналов, чтобы доля принятых заявок составляла не менее 90%? (См. пример 4.28 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 4.28.

№	λ	*b*	№	λ	*b*	№	λ	*b*	№	λ	*b*	№	λ	*b*	№	λ	*b*
1	3	7	**6**	8	8	**11**	6	9	**16**	5	10	**21**	4	12	**26**	4	10
2	4	8	**7**	9	7	**12**	7	8	**17**	6	8	**22**	5	11	**27**	5	12
3	5	9	**8**	3	9	**13**	8	7	**18**	7	9	**23**	6	7	**28**	3	8
4	6	10	**9**	4	7	**14**	3	10	**19**	8	9	**24**	3	12	**29**	6	11
5	7	7	**10**	5	8	**15**	4	9	**20**	3	11	**25**	4	11	**30**	3	9

4.4. Метод фаз Эрланга

Случайная величина X имеет распределение Эрланга порядка k с параметром $\lambda > 0$, если ее функция плотности вероятности имеет вид

$$f_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\; x^{k-1}\, e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

На рис. 4.4.1 приведены графики распределения Эрланга при значении параметра $\lambda = 1$ и разных значениях k.

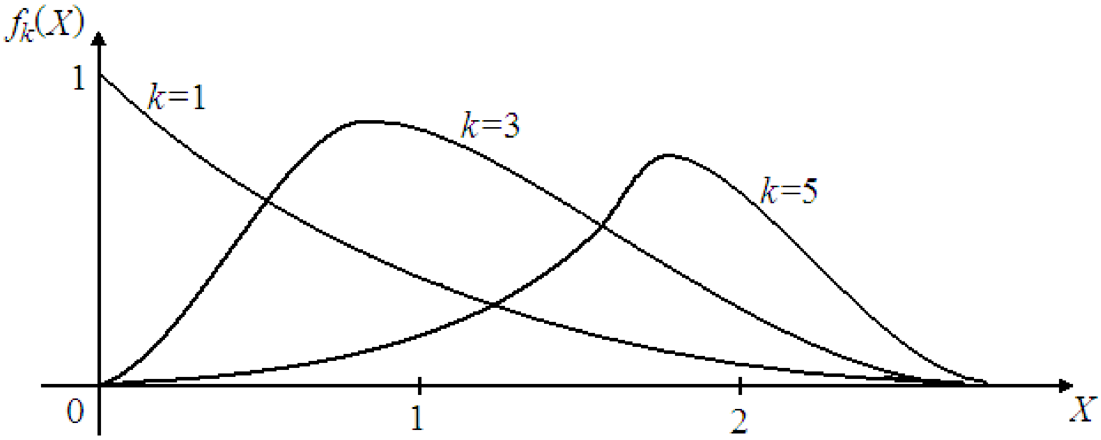


Рис. 4.4.1

При $k = 1$ получается *плотность показательного распределения*.

Метод фаз Эрланга применяется тогда, когда наряду с показательными распределениями в стохастической системе встречаются распределения Эрланга.

Математическое описание такой системы возможно с помощью Марковского процесса. Эта возможность основана на том, что случайную величину, имеющую распределение Эрланга порядка k с параметром λ, можно представить в виде суммы k независимых показательно распределенных случайных величин с параметром λ. Например, длительность обслуживания, имеющую распределение Эрланга порядка *k*, можно считать состоящей из k независимых «фаз», каждая из которых имеет одно и то же показательное распределение.

Оказывается, что многие функции распределения допускают хорошую аппроксимацию с помощью линейной комбинации функций распределения Эрланга.

Пример 4.29 (*система Энгсета с потерями*). Система обслуживания состоит из одного прибора. Из n независимых источников поступают требования. Время обслуживания любого требования имеет распределение Эрланга 3-го порядка с параметром μ. Из каждого источника поступает на обслуживание простейший поток заявок, интенсивности λ. Интервалы между приходами требований из данного источника назовем паузами. Если требование застает прибор свободным, то начинает сразу обслуживаться. Пока происходит это обслуживание, из данного источника новых требований не поступает. После завершения обслуживания начинается отсчет новой паузы на данном источнике. Требуется найти долю времени, в течение которой прибор будет занят.

Решение. Выделим состояния системы: E_0 — прибор свободен; E_i — прибор занят i-й фазой обслуживания. Граф состояний системы изображен на рис. 4.4.2.

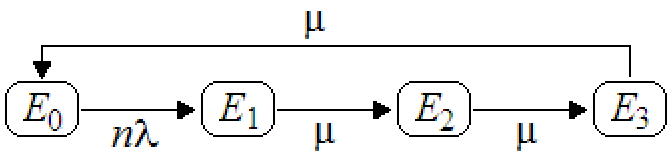


Рис. 4.4.2

Для вероятностей состояний системы в момент времени t можно составить систему уравнений:

$$P_0'(t) = -n\lambda P_0(t) + \mu P_3(t),$$
$$P_1'(t) = n\lambda P_0(t) - \mu P_1(t),$$
$$P_2'(t) = \mu P_1(t) - \mu P_2(t),$$
$$P_3'(t) = \mu P_2(t) - \mu P_3(t).$$

Тогда для стационарных вероятностей ($P_i(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} P_i$) получаем систему

$$-n\lambda P_0 + \mu P_3 = 0,$$
$$n\lambda P_0 - \mu P_1 = 0,$$
$$\mu P_1 - \mu P_2 = 0,$$
$$\mu P_2 - \mu P_3 = 0,$$

из которой $P_0 = \frac{\mu}{\lambda n} P_3$, $P_1 = P_2 = P_3$. Из условия нормировки $P_3\left(\frac{\mu}{\lambda n} + 3\right) = 1$.

Поэтому $P_3 = P_1 = P_2 = \frac{n\lambda}{\mu + 3n\lambda}$, $P_0 = \frac{\mu}{\mu + 3n\lambda}$. Вероятность того, что система занята равна $P_1 + P_2 + P_3 = \frac{3n\lambda}{\mu + 3n\lambda}$..

Ответ. $\frac{3n\lambda}{\mu + 3n\lambda}$.

Задача 4.29.1. В одноканальную систему массового обслуживания поступает простейший поток требований на обслуживание интенсивности λ. Времена обслуживания независимы и имеют распределение Эрланга порядка k с параметром μ (в четных вариантах $k = 2$, в нечетных $k = 3$). Требование, заставшее обслуживающий прибор занятым, теряется. Какова вероятность потери требования? Решите задачу в общем виде, а затем вычислите искомую вероятность при λ равном сумме цифр Вашего варианта, а μ возьмите равным $\lambda / 2$. (См. пример 4.29.)

Задача 4.29.2. Интервалы между приходами требований в одноканальную систему массового обслуживания имеют распределение Эрланга k-го порядка с параметром λ («входящий поток Эрланга k-го порядка»). Времена обслуживания независимы и имеют показательное распределение с параметром μ. Требование, заставшее обслуживающий прибор занятым, теряется. Какова вероятность потери требования? Решите задачу в общем виде, а затем вычислите искомую вероятность при λ равном сумме цифр Вашего варианта, а μ возьмите равным $\lambda / 2$. (См. пример 4.29.)

Задача 4.29.3. Для вариантов 1–16: На обслуживающий прибор поступает поток требований, интервалы между моментами прихода которых независимы и имеют распределение Эрланга порядка k с параметром λ. Времена обслуживания независимы и имеют распределение Эрланга порядка m с параметром μ. Требование, заставшее прибор занятым, получает отказ и теряется (в символике Кендалла имеется в виду система массового обслуживания $E_k \,|\, E_m \,|1|\, 0$). Найдите долю времени простоя системы и долю потерянных требований.

Для вариантов 17–30. Система обслуживания состоит из одного прибора. Из n независимых источников поступают требования. Время обслуживания любого требования имеет распределение Эрланга m-го порядка с параметром μ. Из каждого источника поступает на обслуживание простейший поток заявок, интенсивности λ. Интервалы между приходами требований из данного источника назовем паузами. Если требование застает прибор свободным, то начинает сразу обслуживаться. Пока происходит это обслуживание, из данного источника новых требований не поступает. После завершения обслуживания начинается отсчет новой паузы на данном источнике. Требуется найти долю времени, в течение которой прибор будет занят. (См. пример 4.29 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 4.29.3.

№	*k*	*m*	№	*k*	*m*	№	*k*	*m*	№	*k*	*m*	№	*k*	*m*	№	*k*	*m*
1	1	3	**6**	3	2	**11**	5	2	**16**	5	3	**21**	3	3	**26**	6	2
2	2	2	**7**	1	6	**12**	3	4	**17**	2	2	**22**	3	4	**27**	6	3
3	1	4	**8**	2	4	**13**	4	3	**18**	2	3	**23**	5	2	**38**	6	4
4	2	3	**9**	4	2	**14**	4	1	**19**	2	4	**24**	5	3	**29**	7	2
5	1	5	**10**	2	5	**15**	3	5	**20**	3	2	**25**	5	4	**30**	7	3

4.5. Марковские процессы с дискретным множеством состояний. Цепи Маркова

Случайным процессом $\{X(t)\}_{t\in T}$ называется семейство случайных величин $X(t)$, зависящих от параметра *t*, который пробегает некоторое множество значений *T*. Предполагается, что все эти случайные величины определены на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, A, P\}$ и принимают действительные значения. Множество значений будем называть пространством состояний, а под параметром *t* будем понимать время. Так что величина $X(t)$ указывает состояние системы в момент времени *t*. Множество значений *t* может быть дискретным $T=\{0,1,2,3,\ldots\}$, или непрерывным $T=[0,\infty)$. Иногда вместо $X(t)$ будем использовать обозначение X_t.

Определение. Случайный процесс X_t называется *марковским*, если для любого момента времени $t_0 \in T = [0,\infty)$ развитие процесса в последующие моменты времени (при $t > t_0$) зависит только от состояния процесса в момент времени t_0 и не зависит от того, когда и как процесс пришел в это состояние.

Пусть некоторый физический объект в каждый момент времени может находиться в одном из своих возможных состояний, число которых конечно или счетное. В этом случае иногда говорят о дискретном множестве состояний. Состояния могут быть качественными и описываться словами, или количественными и характеризоваться некоторыми числами. Представление о множестве состояний и о структуре переходов из состояния в состояние дает схема, которая называется *графом состояний.* Будем стрелками обозначать возможные переходы, а через E_i — возможные состояния.

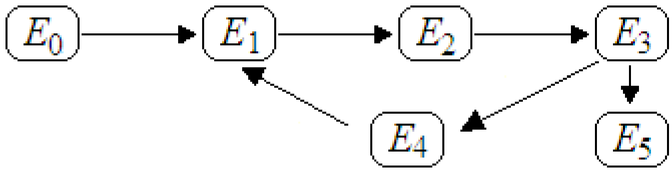


Рис. 4.5.1

Например, в графе состояний (рис. 4.5.1) E_0 означает, что устройство новое и не включено в работу, E_1 — устройство работает, E_2 — устройство неисправно, E_3 — происходит поиск причин неисправности, E_4 — производится ремонт, E_5 — устройство признано не подлежащим ремонту и утилизировано. Если ремонт удался, то происходит переход в состояние E_1.

Взаимное расположение состояний в графе позволяет их классифицировать следующим образом:

1. Состояние называется *источником,* если объект может выйти их него, но попасть вновь в него не может (в приведенном примере состояние E_0).

2. Состояние называется *поглощающим* (или концевым), если в него можно войти, но из него выйти нельзя (в приведенном примере состояние E_5).

3. Состояние E_i называется *соседним* к состоянию E_j, если возможен непосредственный переход из состояния E_j в состояние E_i. В приведенном примере E_3 соседнее состояние по отношению к E_2, но E_2 не соседнее состояние по отношению к E_3.

4. Подмножество состояний называется *эргодическим* (или связным), если из каждого состояния этого подмножества можно попасть в любое другое состояние этого подмножества.

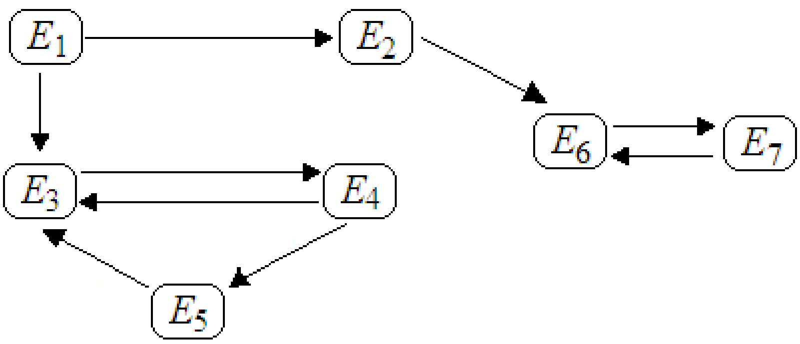


Рис. 4.5.2

Например, в графе (см. рис. 4.5.2)два эргодических подмножества состояний: $\{E_3, E_4, E_5\}$ и $\{E_6, E_7\}$.

Случайный процесс изменения состояний объекта можно понимать как процесс блуждания по множеству состояний графа.

С точки зрения описания объекта первостепенный интерес представляют вероятности состояний этого объекта. Обозначим через $P_i(t)$ — вероятность того, что в момент времени t объект находится в состоянии E_i. Очевидно, что $\sum_i P_i(t) = 1$.

Часто интерес представляет лишь установившийся режим работы (или стационарный режим), в который объект входит после достаточно долгого времени работы. При стационарном режиме процесс перехода из состояния в состояние продолжается, но вероятности состояний не изменяются. Обозначим эти вероятности через P_i. Так что $P_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t)$.

Величину P_i можно понимать как среднюю долю времени, в течение которой объект находится в состоянии E_i. В общем случае $P_i(t)$ зависят от всей предыстории переходов из состояния в состояние до момента времени t. Это чрезвычайно усложняет математическую модель такого процесса. В математическом плане наиболее просты марковские процессы, не обладающие «памятью» о прошлом.

Еще раз повторим, что случайный процесс с дискретным множеством состояний называется *марковским*, если для любого момента времени t_0 вероятность каждого из его состояний в будущем (при $t > t_0$) зависит только от его состояния в настоящий момент и не зависит от того, когда и как процесс пришел в это состояние.

Если переходы из состояния в состояние могут происходить только в определенные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \ldots$, то процесс называют *цепью Маркова.* Моменты переходов из состояния в состояние называют шагами процесса. Наглядным примером марковской цепи могут служить детские игры, в которых продвижение фишки зависит от выпадения той или иной грани игрального кубика.

Важными характеристиками марковской цепи являются условные вероятности перехода системы на k-м шаге в состояние E_j, если на предыдущем $(k-1)$-м шаге она была в состоянии E_i. Обозначим эти вероятности через $P_{ij}(k)$ и назовем их переходными вероятностями. Вероятность $P_{ii}(k)$ можно понимать, как вероятность сохранить свое состояние E_i на k-м шаге.

Переходные вероятности удобно записывать в виде прямоугольной таблицы (квадратной матрицы):

$$\| P_{ij} \| = \begin{pmatrix} P_{11}(k) & P_{12}(k) & \dots & P_{1n}(k) \\ P_{21}(k) & P_{22}(k) & \dots & P_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(k) & P_{n2}(k) & \dots & P_{nn}(k) \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют матрицей переходных вероятностей или просто *переходной матрицей.* Так как на каждом шаге система находиться в одном из своих возможных состояний, то для любой строки матрицы сумма ее элементов равна единице. Матрицы, обладающие этим свойством, называют *стохастическими.*

Для однозначного в вероятностном смысле описания процесса переходов из состояния в состояние нужно, помимо переходных матриц, указать начальное распределение состояний, т.е. вероятности $P_1(0), P_2(0)$, $P_3(0), \dots, P_n(0)$. Обычно процесс начинается из определенного состояния E_i. Тогда $P_i = 1$, а $P_j = 0$ при $j \neq i$.

Цепь Маркова называется *однородной*, если переходные вероятности не меняются от шага к шагу, т.е. $P_{ij}(k) = P_{ij}$, и мы имеем одну и ту же матрицу перехода $\| P_{ij} \|$ на каждом шаге.

Заметим, что каждому графу состояний для однородной цепи соответствует определенная переходная матрица.

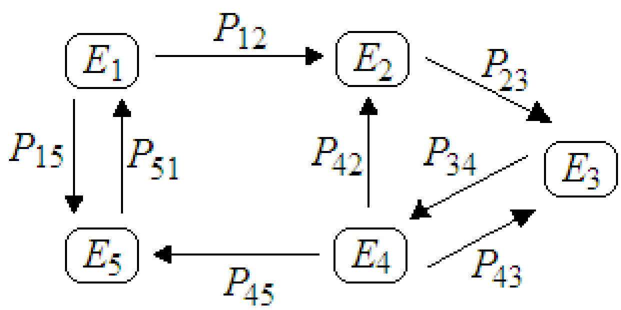


Рис. 4.5.3

Графу состояний (рис. 4.5.3) соответствует переходная матрица

$$\| P_{ij} \| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & P_{15} \\ 0 & P_{22} & P_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & P_{34} & 0 \\ 0 & P_{42} & P_{43} & P_{44} & P_{45} \\ P_{51} & 0 & 0 & 0 & P_{55} \end{pmatrix},$$

где $P_{11}=1-P_{12}-P_{15}$, $P_{22}=1-P_{23}$, $P_{33}=1-P_{34}$, $P_{44}=1-P_{42}-P_{43}-P_{45}$, $P_{55}=1-P_{51}$ (это вероятности сохранить свое состояние на очередном шаге).

Пусть задано распределение состояний в начальный момент времени: $P_1(0), P_2(0), P_3(0), \ldots, P_n(0)$. По формуле полной вероятности получаем распределение состояний после первого шага:

$$P_j(1)=P_1(0)P_{1j}(1)+P_2(0)P_{2j}(1)+\ldots+P_n(0)P_{nj}(1)=\sum_{i=1}^{n}P_i(0)P_{ij}(1),\ \ j=1,2,\ldots,n.$$

Используя полученные вероятности, можно по формуле полной вероятности вычислить вероятности состояний на втором шаге:

$$P_j(2)=P_1(1)P_{1j}(2)+P_2(1)P_{2j}(2)+\ldots+P_n(1)P_{nj}(2)=\sum_{i=1}^{n}P_i(1)P_{ij}(2),\ \ j=1,2,\ldots,n.$$

Продолжение этих рассуждений приводит к рекуррентному соотношению

$$P_j(k)=\sum_{i=1}^{n}P_i(k-1)\,P_{ij}(k),\ \ j=1,2,\ldots,n. \qquad (4.5.1)$$

При определенных условиях цепи Маркова входят в стационарный режим, при котором переходы из состояния в состояние продолжаются, но вероятности переходов не изменяются и не зависят от номера шага. Эти вероятности называют *финальными* или *предельными.* Будем обозначать финальные вероятности через

$$P_i=\lim_{k\to\infty}P_i(k).$$

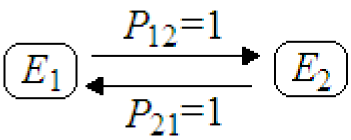
Условия существования финальных вероятностей:

1) множество всех состояний должно быть эргодическим;

2) цепь должна быть однородной (во всяком случае переходные вероятности должны удовлетворять условию: $P_{ij}(k)\xrightarrow[k\to\infty]{}P_{ij}$).

3) должно быть хорошее перемешивание состояний (не должно быть периодических циклов).

Например, для цепи с графом состояний



условие 3) не выполняется, так как при начале из состояния E_1 на нечетном шаге цепь будет находиться в состоянии E_2, а на четном — в состоянии E_1.

Если для однородной цепи финальное распределение существует, то

$$P_i=\lim_{k\to\infty}P_i(k),\ \ P_{ij}(k)=P_{ij}(k-1),$$

и равенства (4.5.1) имеют вид

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i P_{ij}, \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Иногда в этой записи выделяют слагаемые в правой части с P_{jj}. Тогда

$$\sum_{i=1(i\neq j)}^{n} P_i P_{ij} + P_j P_{jj} = P_j$$

или

$$\sum_{i=1(i\neq j)}^{n} P_i P_{ij} + P_j (P_{jj} - 1) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{4.5.2}$$

Для определения финальных вероятностей нужно решить систему линейных однородных уравнений (4.5.2). Такая система всегда совместна, (имеет тривиальное решение $P_i = 0$ при всех i). Если же есть нетривиальные решения, то их бесконечно много. Для выбора необходимого единственного решения следует добавить условие нормировки

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = 1.$$

Это равенство можно добавить вместо одного из уравнений системы (4.5.2). Итак, для нахождения финальных вероятностей состояний марковской цепи нужно решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1(i\neq j)}^{n} P_i P_{ij} + P_j (P_{jj} - 1) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n; \\ &P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = 1. \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Пример 4.30. Граф состояний марковской цепи изображен на рис. 4.5.4. При начальном распределении $P_1(0) = 1,\ \ P_2(0) = P_3(0) = 0$ найти наименее вероятное состояние на третьем шаге. Найти финальные вероятности состояний цепи.

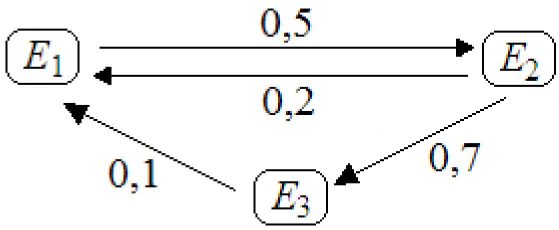


Рис. 4.5.4

Решение. Переходная матрица этой цепи имеет вид

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Найдем вероятности состояний цепи на первом шаге. Воспользуемся формулой (4.5.1), но учтем, что переходные вероятности нам каждом шаге одинаковы (цепь однородная) и поэтому $P_{ij}(k) = P_{ij}$:

$$P_1(1) = P_1(0)P_{11} + P_2(0)P_{21} + P_3(0)P_{31} = 1 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 = 0,5;$$
$$P_2(1) = P_1(0)P_{12} + P_2(0)P_{22} + P_3(0)P_{32} = 1 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0 = 0,5;$$
$$P_3(1) = P_1(0)P_{13} + P_2(0)P_{23} + P_3(0)P_{33} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0,7 + 0 \cdot 0,9 = 0.$$

На втором шаге имеем вероятности состояний:

$$P_1(2) = P_1(1)P_{11} + P_2(1)P_{21} + P_3(1)P_{31} = 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 = 0,35;$$
$$P_2(2) = P_1(1)P_{12} + P_2(1)P_{22} + P_3(1)P_{32} = 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0 = 0,3;$$
$$P_3(2) = P_1(1)P_{13} + P_2(1)P_{23} + P_3(1)P_{33} = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,7 + 0 \cdot 0,9 = 0,35.$$

Для третьего шага получаем вероятности:

$$P_1(3) = P_1(2)P_{11} + P_2(2)P_{21} + P_3(2)P_{31} = 0,35 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,35 \cdot 0,1 = 0,27;$$
$$P_2(2) = P_1(1)P_{12} + P_2(1)P_{22} + P_3(1)P_{32} = 0,35 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0 = 0,205;$$
$$P_2(2) = P_1(1)P_{12} + P_2(1)P_{22} + P_3(1)P_{32} = 0,35 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0,7 + 0,35 \cdot 0,9 = 0,525.$$

Можно, повторяя вывод уравнений (4.5.1), для определения финальных вероятностей записать систему равенств $P_j = P_1P_{1j} + P_2P_{2j} + P_3P_{3j}$, $j = 1,2,3$. Но проще составить систему (4.5.3):

$$\begin{cases} -0,5P_1 + 0,2P_2 + 0,1P_3 = 0, \\ 0,5P_1 - 0,9P_2 = 0, \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1. \end{cases}$$

Решая систему, например, по правилу Крамера, получим $P_1 = 9/49 \cong 1/5$, $P_2 = 5/49 \cong 1/10$, $P_3 = 35/49 \cong 5/7 \cong 0,7$. Эти результаты означают, что примерно 20% времени цепь проведет в состоянии E_1, 10% времени — состоянии E_2, 70% времени — в состоянии E_3.

Ответ. E_2 — наименее вероятное состояние на третьем шаге;

$P_1 = 9/49$, $P_2 = 5/49$, $P_3 = 35/49$.

Задача 4.30.1. По заданному графу состояний марковской цепи написать переходную матрицу вероятностей. При начальном распределении $P_1(0) = 1$, $P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$ найти наиболее вероятное состояние на третьем шаге. Найти предельные (финальные) вероятности состояний цепи. В вариантах 1, 7, 13, 19, 25 использовать граф № 1; в вариантах 2, 8, 14, 20, 26 — граф № 2; в вариантах 3, 9, 15, 21, 27 — граф № 3; в вариантах 4, 10, 16, 22, 28 – граф № 4; в вариантах 5, 11, 17, 23, 29 — граф № 5; в вариантах 6, 12, 18, 24, 30 — граф № 6. (См. пример 4.30 и исходные данные.)

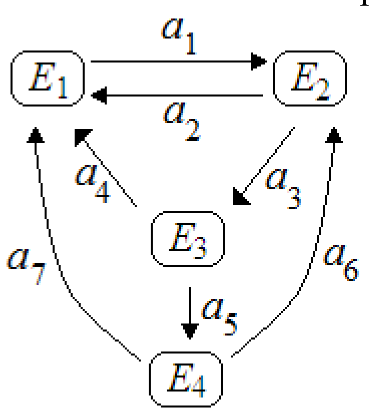
Исходные данные к задаче 4.30.1.

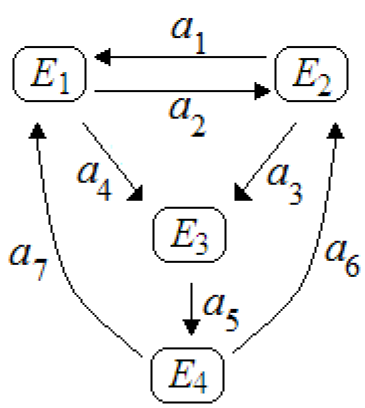
№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7

1	0,8	0,2	0,5	0,4	0,5	0,3	0,6	**16**	0,5	0,3	0,4	0,3	0,6	0,6	0,9
2	0,3	0,4	0,6	0,4	0,5	0,4	0,4	**17**	0,3	0,2	0,8	0,7	0,7	0,6	0,2
3	0,1	0,8	0,4	0,4	0,5	0,8	0,4	**18**	0,5	0,9	0,4	0,6	0,4	0,3	0,4
4	0,4	0,2	0,4	0,5	0,6	0,5	0,8	**19**	0,8	0,1	0,6	0,2	0,6	0,4	0,3
5	0,3	0,2	0,9	0,6	0,7	0,7	0,2	**20**	0,4	0,3	0,4	0,5	0,7	0,5	0,4
6	0,5	0,9	0,4	0,3	0,5	0,6	0,4	**21**	0,1	0,9	0,5	0,4	0,7	0,8	0,2
7	0,7	0,2	0,6	0,5	0,3	0,5	0,5	**22**	0,2	0,2	0,4	0,8	0,5	0,7	0,8
8	0,2	0,2	0,5	0,5	0,7	0,3	0,5	**23**	0,3	0,2	0,9	0,5	0,8	0,7	0,1
9	0,1	0,8	0,5	0,4	0,6	0,8	0,3	**24**	0,4	0,8	0,5	0,5	0,3	0,4	0,4
10	0,4	0,1	0,5	0,5	0,8	0,6	0,9	**25**	0,7	0,2	0,7	0,3	0,6	0,4	0,5
11	0,2	0,1	0,8	0,7	0,6	0,8	0,2	**26**	0,4	0,4	0,5	0,3	0,8	0,3	0,6
12	0,4	0,8	0,5	0,4	0,4	0,5	0,7	**27**	0,1	0,9	0,3	0,5	0,8	0,7	0,2
13	0,8	0,3	0,7	0,3	0,6	0,5	0,5	**28**	0,3	0,1	0,3	0,6	0,6	0,8	0,9
14	0,3	0,4	0,5	0,3	0,8	0,5	0,3	**29**	0,4	0,2	0,9	0,5	0,7	0,7	0,2
15	0,1	0,9	0,4	0,5	0,8	0,7	0,1	**30**	0,6	0,9	0,4	0,7	0,6	0,2	0,3

граф № 1

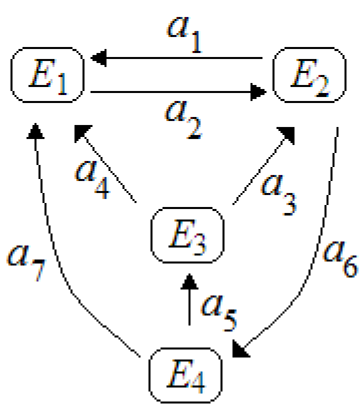
граф № 2

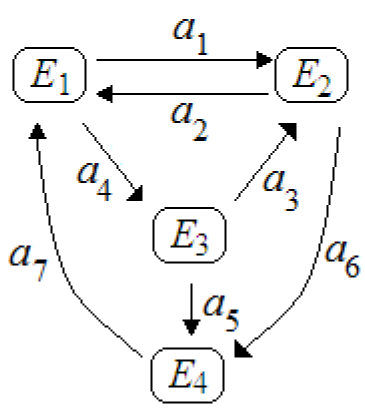




граф № 3

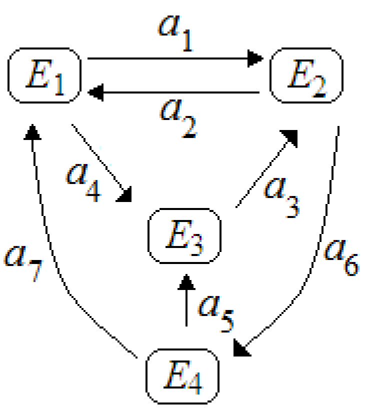
граф № 4

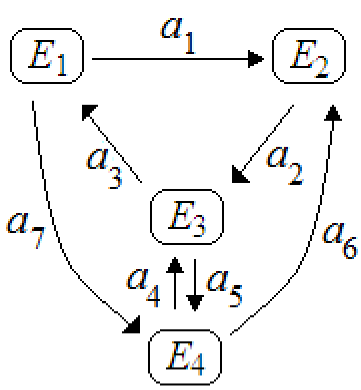




граф № 5

граф № 6





Задача 4.30.2. Происходит процесс случайного блуждания по целочисленной решетке $E = \{0,1,2,3,4\}$. Обозначим через E_k пребывание частицы в точке с координатой k. Начальное состояние частицы E_k, $k = 0,1,2,3,4$. Каждую единицу времени частица с вероятностью p сдвигается вправо, с вероятностью q — влево, или остается на месте с вероятностью $1 - p - q$.

Найдите вероятности состояний частицы на третьем шаге. Найдите стационарные (финальные) вероятности состояний частицы. (См. пример 4.30 и исходные данные; k — остаток от деления номера варианта на 5. Например, для 17 варианта $k = 2$, так как $17 = 3 \cdot 5 + 2$.)

Исходные данные к задаче 4.30.2.

№	p	q	№	p	q	№	p	q	№	p	q	№	p	q
1	0,2	0,4	**7**	0,1	0,7	**13**	0,3	0,1	**19**	0,5	0,2	**25**	0,2	0,1
2	0,3	0,5	**8**	0,2	0,3	**14**	0,1	0,5	**20**	0,6	0,3	**26**	0,1	0,3
3	0,4	0,3	**9**	0,1	0,4	**15**	1/3	1/4	**21**	0,3	0,4	**27**	0,5	0,1
4	0,2	0,5	**10**	0,4	0,5	**16**	0,1	0,3	**22**	0,7	0,1	**28**	1/4	1/3
5	0,6	0,2	**11**	0,2	0,7	**17**	0,4	0,2	**23**	0,5	0,4	**29**	1/3	1/5
6	0,3	0,6	**12**	0,1	0,2	**18**	0,2	0,6	**24**	0,7	0,2	**30**	0,5	0,3

Пример 4.31. В городе N каждый житель имел одну из профессий A, B или C. Дети в следующем поколении сохраняли профессию отцов с вероятностями соответственно 0,6, 0,2 и 0,4 и с равными вероятностями выбирали любую из двух других профессий. Если в данный момент профессию A имеет 20% жителей города, профессию B — 30%, а профессию C — 50% жителей, то

1) каково распределение по профессиям будет в следующем поколении;

2) каким будет распределение по профессиям через много поколений (финальное распределение)?

Решение. Смену поколений будем считать шагом Марковской цепи. Имеем начальное распределение (на нулевом шаге): $P_A(0) = 0,2$, $P_B(0) = 0,3$, $P_C(0) = 0,5$. Переходная матрица имеет вид:

	A	*B*	*C*
A	0,6	0,2	0,2
B	0,4	0,2	0,4
C	0,3	0,3	0,4

В соответствии с формулами (4.5.1) получаем распределение вероятностей на первом шаге (в первом поколении):

$$P_A(1) = 0,2 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,39;$$
$$P_B(1) = 0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,25;$$
$$P_C(1) = 0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,4 = 0,36.$$

Для вычисления финальных вероятностей составляем систему уравнений (4.5.2)

$$P_A = P_A \cdot 0,6 + P_B \cdot 0,4 + P_C \cdot 0,3;$$
$$P_B = P_A \cdot 0,2 + P_B \cdot 0,2 + P_C \cdot 0,3;$$
$$P_C = P_A \cdot 0,2 + P_B \cdot 0,4 + P_C \cdot 0,4.$$

Эта система уравнений при условии нормировки $P_A + P_B + P_C = 1$ имеет решение

$$P_A = 18/39, \ P_B = 9/39, \ P_C = 12/39.$$

Ответ. $P_A = 18/39$, $P_B = 9/39$, $P_C = 12/39$.

Задача 4.31.1. Каждый житель некоторого города принадлежит к одной из социальных групп (богатые, средний класс, живущие за чертой бедности). По истечении года представитель i-й группы сохраняет свой социальный статус с вероятностью P_i, или с равными вероятностями переходит в одну из двух других групп. Пусть в данный момент a% жителей богаты, b% относятся к среднему классу, c% живут в нищете.

В предположении, что описанная социальная динамика остается неизменной на протяжении многих лет, определите финальный социальный состав жителей города. (См. пример 4.31 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 4.31.1.

№	*a*	*b*	*c*	P_1	P_2	P_3	№	*a*	*b*	*c*	P_1	P_2	P_3
1	5	65	35	0,9	0,5	0,9	**16**	5	65	35	0,9	0,6	0,9
2	10	65	30	0,8	0,6	0,9	**17**	10	65	30	0,95	0,7	0,8
3	10	60	30	0,7	0,8	0,9	**18**	10	60	30	0,9	0,5	0,9
4	15	55	30	0,9	0,6	0,9	**19**	15	55	30	0,8	0,6	0,9
5	10	70	20	0,95	0,7	0,8	**20**	10	70	20	0,7	0,8	0,9
6	5	70	25	0,9	0,5	0,9	**21**	5	70	25	0,9	0,6	0,9
7	15	65	20	0,8	0,6	0,9	**22**	15	65	20	0,95	0,7	0,8

8	8	70	22	0,7	0,8	0,9	**23**	8	70	22	0,9	0,5	0,9
9	5	65	35	0,9	0,6	0,9	**24**	5	65	35	0,8	0,6	0,9
10	10	65	30	0,95	0,7	0,8	**25**	10	65	30	0,7	0,8	0,9
11	10	60	30	0,9	0,5	0,9	**26**	10	60	30	0,9	0,6	0,9
12	15	55	30	0,8	0,6	0,9	**27**	15	55	30	0,95	0,7	0,8
13	10	70	20	0,7	0,8	0,9	**28**	10	70	20	0,9	0,5	0,9
14	5	70	25	0,9	0,6	0,9	**29**	5	70	25	0,8	0,6	0,9
15	15	65	20	0,95	0,7	0,8	**30**	15	65	20	0,7	0,8	0,9

Задача 4.31.2. Перед началом теледебатов зрители разделялись на три равные по численности группы: E_1 — сторонники кандидата A; E_2 — неопределившиеся; E_3 — сторонники кандидата B.

Оказалось, что после обсуждения каждого вопроса зрители меняли свое предпочтение в соответствии с матрицей перехода

	E_1	E_2	E_3
E_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}
E_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}
E_3	P_{31}	P_{32}	P_{33}

Найдите распределение предпочтений зрителей после обсуждения трех вопросов. Найдите распределение предпочтений зрителей после обсуждения достаточно большой серии вопросов. (См. примеры 4.30, 4.31 и исходные данные. Недостающие элементы переходной матрицы найдите из условия, что переходная матрица является стохастической.)

Исходные данные к задаче 4.31.2.

№	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{31}	P_{32}	№	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{31}	P_{32}
1	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,2	**16**	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,2
2	0,8	0,2	0,1	0,8	0,1	0,1	**17**	0,8	0,2	0,05	0,8	0	0,015
3	0,9	0,1	0,05	0,8	0	0,05	**18**	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,1
4	0,8	0,15	0,1	0,8	0	0,1	**19**	0,8	0,2	0,1	0,8	0	0,2
5	0,9	0,05	0,1	0,8	0	0,2	**20**	0,9	0,1	0,05	0,9	0	0,05
6	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,05	**21**	0,8	0,15	0,1	0,8	0	0,1
7	0,8	0,2	0,05	0,9	0	0,1	**22**	0,9	0,05	0,1	0,8	0	0,2
8	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,2	**23**	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,2
9	0,8	0,15	0,1	0,8	0	0,2	**24**	0,8	0,2	0,1	0,8	0,1	0,1
10	0,9	0,05	0,1	0,8	0,1	0,1	**25**	0,9	0,1	0,05	0,9	0	0,1
11	0,8	0,15	0,05	0,9	0	0,1	**26**	0,8	0,15	0,1	0,8	0	0,2
12	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,05	**27**	0,9	0,05	0,1	0,8	0	0,2
13	0,8	0,2	0,1	0,8	0	0,1	**28**	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,05
14	0,9	0,1	0,1	0,8	0	0,2	**29**	0,8	0,2	0,1	0,9	0	0,1
15	0,8	0,15	0,1	0,9	0	0,05	**30**	0,9	0,1	0,05	0,8	0	0,2

Пример 4.32. Устройство состоит из двух блоков (например, двигатель и ходовая часть). Пусть A означает безотказную работу первого блока, B — безотказную работу второго блока. По истечении каждой единицы времени проверяется состояние этих блоков, и в случае неисправности производится их ремонт. Вероятность безотказной работы блоков в течение единицы времени равны соответственно 0,9 и 0,8. Если неисправность блока обнаружена, то вероятность отремонтировать блок в течение единицы времени равна соответственно 0,3 и 0,4. Найти предельные вероятности для состояний устройства: $E_1 = AB$; $E_2 = A\overline{B}$; $E_3 = \overline{A}B$; $E_4 = \overline{A}\overline{B}$.

Замечание. В сформулированном примере по умолчанию предполагается, что распределение времени безотказной работы и распределение времени ремонта каждого блока не имеют «памяти» о прошлом. Единственным распределением такого сорта является показательное распределение. Если, например, время ремонта распределено по показательному закону и ремонт уже продолжается некоторое время, то оставшаяся часть времени ремонта имеет то же самое распределение, что и в начале ремонта.

Решение. Поскольку состояния блоков наблюдаются в конце каждой единицы времени, то моменты наблюдения можно считать шагами однородной марковской цепи. Учитывая независимость времени безотказной работы и времени ремонта узлов, определим переходные вероятности:

	AB	$A\overline{B}$	$\overline{A}B$	$\overline{A}\overline{B}$
AB	0,9·0,8	0,9·0,2	0,1·0,8	0,2·0,1
$A\overline{B}$	0,9·0,4	0,9·0,6	0,1·0,4	0,1·0,6
$\overline{A}B$	0,3·0,8	0,3·0,2	0,7·0,8	0,7·0,2
$\overline{A}\overline{B}$	0,3·0,4	0,3·0,6	0,7·0,4	0,7·0,6

В итоге переходная матрица имеет вид

$$\| P_{ij} \| = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,18 & 0,8 & 0,02 \\ 0,36 & 0,54 & 0,04 & 0,06 \\ 0,24 & 0,06 & 0,56 & 0,14 \\ 0,12 & 0,18 & 0,28 & 0,42 \end{pmatrix}.$$

Составим систему уравнений для определения финальных вероятностей:

$$P_1 = 0,72P_1 + 0,36P_2 + 0,24P_3 + 0,12P_4,$$
$$P_2 = 0,18P_1 + 0,54P_2 + 0,06P_3 + 0,18P_4,$$
$$P_3 = 0,08P_1 + 0,04P_2 + 0,56P_3 + 0,28P_4,$$
$$P_4 = 0,02P_1 + 0,06P_2 + 0,14P_3 + 0,42P_4.$$

Это система линейных однородных уравнений, она имеет бесконечно много решений. Для получения единственного нужного нам решения вместо любого из уравнений запишем условие нормировки $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$. Решая систему, например, по формулам Крамера получим $P_1 = P(AB) = 48/102$, $P_2 = P(A\overline{B}) = 19/102$, $P_3 = P(\overline{A}B) = 20/102$, $P_4 = P(\overline{A}\overline{B}) = 15/102$.

Ответ. $P(E_1) = 48/102$, $P(E_2) = 19/102$, $P(E_3) = 20/102$,
$P(E_4) = 15/102$.

Задача 4.32. Автоматическая станция для мониторинга окружающей среды состоит из двух блоков, каждый из которых контролирует свою группу параметров. Каждую единицу времени (например, раз в месяц) на станцию приезжает мастер для проверки исправности блоков станции. Если блок неисправен, то мастер либо ремонтирует блок на месте (практически мгновенно), либо забирает блок для ремонта в мастерской, и возвращает на место при следующем посещении станции.

Пусть A_i означает безотказную работу i-го блока. Вероятность безотказной работы i-го блока между проверками рана P_i. Вероятность того, что неисправность блока незначительная и устранима на месте равна p_i.

Найдите предельные значения вероятностей событий: $E_1 = A_1 A_2$; $E_2 = A_1\overline{A}_2$; $E_3 = \overline{A}_1 A_2$; $E_4 = \overline{A}_1\overline{A}_2$. Найдите вероятности этих состояний на третьем шаге, если в начале оба блока были исправны. (См. пример 4.32 и исходные данные.)

Указание. При вычислении переходных вероятностей внимательно учитывайте все возможности. Например, переход $E_1 \to E_1$ состоится, если:

1) оба блока сохранят свою работоспособность (вероятность чего равна P_1P_2);

2) первый блок выйдет из строя и будет отремонтирован на месте (вероятность чего равна $(1-P_1)p_1$), а второй блок сохранит свою работоспособность (с вероятностью P_2),

3) первый блок сохранит свою работоспособность (с вероятностью P_1), а второй блок выйдет из строя и будет отремонтирован на месте (вероятность чего равна $(1- P_2)p_2$),

4) оба блока выйдут из строя и будут отремонтированы на месте (вероятность чего равна $(1-P_1)(1-P_2)p_1p_2$).

Поэтому вероятность перехода $E_1 \to E_1$ равна

$$p_{11}=P_1P_2 + (1-P_1)p_1P_2+P_1(1- P_2)p_2 + (1-P_1)(1-P_2)p_1p_2.$$

Исходные данные к задаче 4.32.

№	P_1	P_2	p_1	p_2	№	P_1	P_2	p_1	p_2	№	P_1	P_2	p_1	p_2
1	0,8	0,9	0,4	0,5	**11**	0,8	0,9	0,3	0,6	**21**	0,9	0,8	0,3	0,4
2	0,9	0,85	0,5	0,6	**12**	0,85	0,9	0,6	0,4	**22**	0,8	0,9	0,6	0,3
3	0,8	0,95	0,6	0,3	**13**	0,9	0,8	0,6	0,3	**23**	0,85	0,9	0,3	0,5
4	0,8	0,9	0,5	0,4	**14**	0,8	0,9	0,3	0,5	**24**	0,9	0,8	0,6	0,5
5	0,85	0,9	0,6	0,5	**15**	0,8	0,9	0,6	0,5	**25**	0,8	0,9	0,4	0,6
6	0,9	0,8	0,3	0,6	**16**	0,9	0,85	0,4	0,6	**26**	0,8	0,9	0,3	0,7
7	0,8	0,9	0,4	0,6	**17**	0,8	0,95	0,3	0,7	**27**	0,9	0,85	0,4	0,6
8	0,8	0,95	0,5	0,7	**18**	0,8	0,9	0,4	0,6	**28**	0,8	0,95	0,5	0,7
9	0,9	0,85	0,5	0,6	**19**	0,9	0,85	0,5	0,7	**29**	0,8	0,9	0,6	0,7
10	0,8	0,95	0,4	0,7	**20**	0,8	0,95	0,6	0,7	**30**	0,85	0,9	0,3	0,6

Пример 4.33. В зоне обслуживания бригады ремонтников находится три прибора, работающих в автоматическом режиме. В конце каждого месяца ремонтники проводят профилактический осмотр приборов и, в случае обнаружения неисправных, забирают их для ремонта или замены на новые. Отремонтированный (или новый) прибор возвращают на место при очередном профилактическом осмотре, т.е. через месяц. Вероятность выхода из строя в течение месяца работающего прибора равна 1/3. Требуется найти стационарное распределение вероятностей числа исправных приборов в начале каждого месяца.

Решение. Рассмотрим марковскую цепь, состояния которой будем различать по числу работоспособных приборов. Пусть E_i — означает, что работоспособны i приборы. Всего имеется четыре возможных состояния: E_0, E_1, E_2, E_3.

Составим переходную матрицу этой цепи. Если на данном шаге цепь находится в состоянии E_0, то на очередном шаге будут доставлены три работоспособных прибора и цепь с вероятностью 1 перейдет в состояние E_3. Поэтому $p_{00} = p_{01} = p_{02} = 0$, а $p_{03} = 1$.

Если на данном шаге цепи имеется только один работоспособный прибор, то следующем шаге будет поставлено два новых прибора и вероятность перехода $E_1 \to E_3$ равна вероятности того, что имеющийся в наличии прибор сохранит свою работоспособность, т.е. $p_{13} = 2/3$. Вероятность же перехода $E_1 \to E_2$ равна вероятности выхода из строя имеющегося прибора, т.е. $p_{12} = 1/3$, а $p_{10} = p_{11} = 0$.

При наличии на данном шаге двух годных приборов в соответствии с формулой Бернулли, имеем переходные вероятности:

$$p_{23} = P(E_2 \to E_3) = P_2(0) = C_2^0 (1/3)^0 (2/3)^2 = 4/9;$$

$$p_{22} = P(E_2 \to E_2) \quad P_2(1) \quad C_2^1(1/3)^1(2/3)^1 \quad 4/9; \qquad =$$
$$p_{21} = P(E_2 \to E_1) \quad P_2(2) \quad (1/3)^2 \quad 1/9;$$
$$p_{20} = P(E_2 \to E_0) = 0.$$

Наконец, при трех годных приборах на данном шаге

$$p_{33} = P(E_3 \to E_3) \quad P_3(0) \quad C_3^0(1/3)^0(2/3)^3 \quad 8/27; \qquad =$$
$$p_{32} = P(E_3 \to E_2) \quad P_3(1) \quad C_3^1(1/3)^1(2/3)^2 \quad 12/27; \qquad =$$
$$p_{31} = P(E_3 \to E_1) \quad P_3(2) \quad C_3^2(1/3)^2(2/3)^1 \quad 6/27; \qquad =$$
$$p_{30} = P(E_3 \to E_0) = (1/3)^3.$$

Запишем переходную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/9 & 4/9 & 4/9 \\ 1/27 & 6/27 & 12/27 & 8/27 \end{pmatrix}.$$

Этой переходной матрице соответствует система уравнений (4.5.2) для вычисления стационарных вероятностей:

$$u_0 = u_3 \cdot 1/27;$$
$$u_1 = u_2 \cdot 1/9 + u_3 \cdot 6/27;$$
$$u_2 = u_1 \cdot 1/3 + u_2 \cdot 4/9 + u_3 \cdot 12/27;$$
$$u_3 = u_0 \cdot 1 + u_1 \cdot 2/3 + u_2 \cdot 4/9 + u_3 \cdot 8/27.$$

Решая эту систему уравнений, с учетом условия нормировки $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1$, получаем

$$u_0 = 1/64, \quad u_1 \quad 9/64, \quad u_2 \quad 27/64, \quad u_3 \quad 27/64.$$

Ответ. $P(E_1) = 1/64,\ P(E_2) = 9/64,\ P(E_3) = 27/64,\ P(E_4) = 27/64.$

Задача 4.33. В некоторой фирме имеется n однотипных устройств (например, ксероксов, принтеров и т.п.). Устройства эксплуатируются с перегрузкой и поэтому часто выходят из строя. В конце каждой недели фирма подает заявку на поставку новых устройств для замены вышедших из строя. Время исполнения заявки — одна неделя. Вероятность выхода из строя в течение недели для каждого работающего устройства равна p. Найдите стационарное распределение числа пригодных к работе устройств в начале недели. (См. пример 4.33 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 4.33.

№	n	p	№	n	p	№	n	p	№	n	p	№	n	p	№	n	p
1	3	1/4	**6**	5	1/2	**11**	4	1/5	**16**	3	1/7	**21**	5	2/5	**26**	4	1/9
2	4	1/3	**7**	3	1/5	**12**	5	1/6	**17**	4	1/8	**22**	3	2/7	**27**	5	3/7
3	5	1/5	**8**	4	1/4	**13**	3	2/5	**18**	5	1/7	**23**	4	2/5	**28**	3	3/8
4	3	1/2	**9**	5	1/4	**14**	4	1/6	**19**	3	1/8	**24**	5	2/7	**29**	4	2/7

5	4	1/2	**10**	3	1/6	**15**	5	1/5	**20**	4	1/7	**25**	3	3/7	**30**	5	0,1

4.6. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний

Пусть переходы процесса из состояния в состояние происходят под воздействием каких-то потоков событий (поток отказов, восстановлений и т.д.). Будем считать, что переход процесса из состояния E_i в состояние E_j происходит под воздействием пуассоновского потока событий интенсивности $\lambda_{ij}(t)$, т.е. как только первое событие потока произошло, тотчас произошел и переход $E_i \to E_j$. В этих условиях вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j за малый промежуток времени Δt равна $\lambda_{ij}(t)\Delta t$. Если все потоки событий, переводящих процесс из состояния в состояние, пуассоновские, то процесс переходов будет марковским.

Суммарный поток событий, выводящих процесс из состояния E_i, тоже будет пуассоновским с интенсивностью $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t), \quad i \neq j.$ Тогда вероятность покинуть состояние E_i за малый промежуток времени Δt равна

$$P_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\Delta t, \quad i \neq j,$$

а вероятность сохранить состояние E_i за малый промежуток времени Δt равна $1 - P_{ij}$.

Выведем уравнения для вероятностей состояний процесса $P_i(t)$. В момент $t + \Delta t$ процесс будет находиться в состоянии E_i (вероятность чего равна $P_i(t + \Delta t)$), если в момент t он находился в состоянии E_i (вероятность чего равна $P_i(t)$) и в течении времени Δt оставался в этом состоянии (вероятность чего равна $1 - \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\Delta t, \quad i \neq j$), или процесс в момент времени t находился в любом другом состоянии (с вероятностью $P_j(t)$) и за время Δt перешел в состояние E_i (вероятность чего равна $\lambda_{ji}(t)\Delta t$, $i \neq j$). Символическая запись этой длинной фразы имеет вид

$$P_i(t + \Delta t) = P_i(t)[1 - \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\Delta t] + \sum_{j=1}^{n}P_j(t)\lambda_{ij}(t)\Delta t.$$

Если перегруппировать слагаемые, разделить равенство на Δt, то при $\Delta t \to 0$ получим систему уравнений

$$P_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\lambda_{ji}(t) - P_i(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t), \quad i = 1,2,3,\ldots,n. \qquad (4.6.1)$$

Это система уравнений Колмогорова А.Н. Для решения системы нужно задать начальные условия, а вместо одного из уравнений можно использовать условие нормировки

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(t) = 1.$$

Пример 4.34. На рис. 4.6.1 дан граф состояний некоторого объекта. Интенсивности переходов из состояния в состояние указаны на этом же рисунке. Записать систему уравнений для вероятностей состояний объекта. При постоянных λ, μ, ν и π найти предельные (финитные) вероятности его состояний.

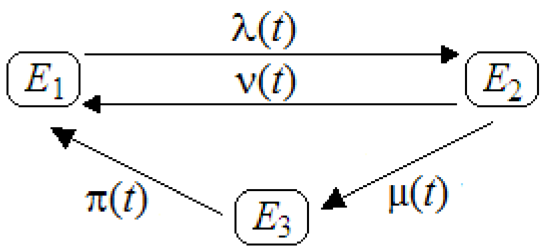


Рис. 4.6.1

Система уравнений Колмогорова (4.6.1) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned}
P_1'(t) &= P_2(t)\nu(t) + P_3(t)\pi(t) - P_1(t)\lambda(t),\\
P_2'(t) &= -P_2(t)[\nu(t) + \mu(t)] + P_1(t)\lambda(t),\\
P_3'(t) &= -P_3(t)\pi(t) + P_2(t)\mu(t).
\end{aligned}$$

Вместо одного из уравнений (например, вместо второго) можно воспользоваться условием нормировки $P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1$.

Если $\lambda(\neq)\ \lambda$, $\mu(\neq)\ \mu$, $\nu(\neq)\ \nu$, то существуют стационарные вероятности, для которых все $P_i'(t) = 0$ и система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}
&-\lambda P_1 + \nu P_2 + \pi P_3 = 0,\\
&\lambda P_1 - (\nu + \mu)P_2 = 0,\\
&P_1 + P_2 + P_3 = 1.
\end{aligned}$$

Эта система имеет решение

$$\begin{aligned}
P_1 &= (\nu\pi + \mu\pi) / (\nu\pi + \mu\pi + \lambda\pi + \mu\lambda),\\
P_2 &= \lambda\pi / (\nu\pi + \mu\pi + \lambda\pi + \mu\lambda),\\
P_3 &= \mu\lambda / (\nu\pi + \mu\pi + \lambda\pi + \mu\lambda).
\end{aligned}$$

Задача 4.34. На рис. 4.6.2 изображен граф состояний и возможных переходов частицы при случайном блуждании. На графе указаны и интенсивности переходов для соответствующих пар вершин. Например, λ_5 — интенсивность переходов $E_1 \to E_5$ и $E_5 \to E_1$ (вероятность любого из этих переходов за малый промежуток времени Δt равна $\lambda_5 \Delta t + o(\Delta t)$). Запишите систему уравнений Колмогорова (4.6.1) и найдите стационарные вероятности положений частицы. (См. пример 4.34 и исходные данные.)

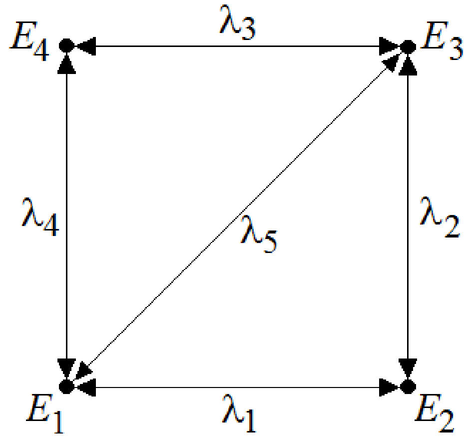


Рис. 4.6.2

Исходные данные к задаче 4.34.

№	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	№	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	№	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1	1	1	2	1	1	**11**	1	1	1	1	2	**21**	1	2	1	2	2
2	1	1	1	2	2	**12**	2	1	1	1	2	**22**	2	1	1	2	1
3	2	1	2	2	1	**13**	1	1	2	2	1	**23**	1	2	1	2	1
4	1	2	1	1	1	**14**	2	2	1	1	2	**24**	1	2	1	1	2
5	2	1	2	1	1	**15**	1	1	2	2	2	**25**	2	2	1	2	1
6	1	2	2	2	1	**16**	1	1	2	1	3	**26**	2	1	2	1	2
7	1	2	2	1	1	**17**	1	1	1	2	1	**27**	1	2	1	1	3
8	1	1	2	2	2	**18**	2	2	1	1	1	**28**	2	1	1	1	3
9	1	1	1	1	3	**19**	2	2	2	1	1	**29**	1	3	1	1	2
10	2	1	1	1	1	**20**	2	1	1	2	2	**30**	1	1	1	1	1

Пример 4.35. В некотором механизме могут происходить отказы двух типов. Пусть вероятность отказа первого типа в интервале времени $(t, t+h)$ равна $\lambda_1 h + o(h)$, а вероятность отказа второго типа в том же интервале равна $\lambda_2 h + o(h)$. В состоянии отказа производится ремонт, длительность которого имеет экспоненциальное распределение с параметром, зависящим от типа отказа. Пусть μ_1 и μ_2 — значения этих параметров. Требуется найти долю времени, в течение которой механизм будет работать безотказно.

Решение. Обозначим через E_0 — рабочее состояние механизма, через E_i — состояние i-го отказа. Тогда граф состояний механизма имеет вид, изображенный на рис. 4.6.3.

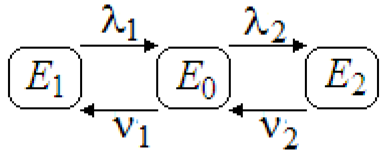


Рис. 4.6.3

Система уравнений (4.6.1) для этого случая имеет вид

$$
\begin{aligned}
&P_0'(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_0(t) + \nu_1 P_1(t) + \nu_2 P_2(t),\\
&P_1'(t) = \lambda_1 P_0(t) - \nu_1 P_1(t),\\
&P_2'(t) = \lambda_2 P_0(t) - \nu_2 P_2(t).
\end{aligned}
$$

Условия существования стационарных вероятностей марковского процесса выполнены. Поэтому при $t \to \infty$ вероятности $P_i(t) \to P_i$ — постоянные величины, а $P_i'(t) \to 0$. Для стационарных вероятностей получаем систему

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda_1 + \lambda_2)P_0 + \nu_1 P_1 + \nu_2 P_2 = 0,\\
&\lambda_1 P_0 - \nu_1 P_1 = 0,\\
&\lambda_2 P_0 - \nu_2 P_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Из второго и третьего уравнений находим соответственно $P_1 = \dfrac{\lambda_1}{\nu_1} P_0$ и $P_2 = \dfrac{\lambda_2}{\nu_2} P_0$. Вместо первого уравнения используем условие нормировки:

$$
P_0 + P_1 + P_2 = P_0 + \frac{\lambda_1}{\nu_1} P_0 + \frac{\lambda_2}{\nu_2} P_0 = P_0 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\nu_1} + \frac{\lambda_2}{\nu_2}\right) = 1.
$$

Откуда

$$
P_0 = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\nu_1} + \frac{\lambda_2}{\nu_2}\right)^{-1} = \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_1 \nu_2 + \lambda_1 \nu_2 + \lambda_2 \nu_1}.
$$

Ответ. $P(E_0) = \dfrac{\nu_1 \nu_2}{\nu_1 \nu_2 + \lambda_1 \nu_2 + \lambda_2 \nu_1}$.

Задача 4.35. В некотором механизме могут происходить отказы трех типов. Пусть вероятность отказа i-го типа в интервале времени $(t, t+h)$ равна $\lambda_i h + o(h)$, $i = 1, 2, 3$. В состоянии отказа производится ремонт, длительность которого имеет экспоненциальное распределение с параметром, зависящим от типа отказа. Пусть μ_i — значения этих параметров. Найдите долю времени, в течение которой механизм будет находиться в ремонте. (См. пример 4.35 и исходные данные.)

Исходные данные к задаче 4.35.

№	λ_1	λ_2	λ_3	μ_1	μ_2	μ_3	№	λ_1	λ_2	λ_3	μ_1	μ_2	μ_3

1	0,1	0,1	0,2	1	2	1	**16**	0,1	0,1	0,2	1	3	2
2	0,1	0,2	0,1	2	2	1	**17**	0,2	0,1	0,1	2	1	2
3	0,2	0,1	0,2	2	1	3	**18**	0,2	0,2	0,1	1	3	2
4	0,1	0,2	0,1	1	1	2	**19**	0,2	0,1	0,2	1	1	2
5	0,2	0,1	0,2	1	1	3	**20**	0,2	0,1	0,1	2	2	1
6	0,1	0,2	0,2	2	1	4	**21**	0,1	0,2	0,1	2	2	1
7	0,1	0,2	0,2	1	2	4	**22**	0,2	0,1	0,1	2	1	3
8	0,1	0,1	0,2	2	2	3	**23**	0,1	0,2	0,1	2	1	2
9	0,1	0,3	0,1	1	3	2	**24**	0,1	0,2	0,1	1	2	3
10	0,2	0,1	0,1	1	1	2	**25**	0,2	0,2	0,1	2	1	4
11	0,1	0,2	0,1	1	1	2	**26**	0,2	0,1	0,2	1	2	3
12	0,2	0,1	0,1	1	2	3	**27**	0,1	0,2	0,1	1	3	1
13	0,1	0,1	0,2	2	1	3	**28**	0,2	0,1	0,1	1	3	2
14	0,2	0,2	0,1	1	2	4	**29**	0,3	0,2	0,1	1	2	2
15	0,1	0,1	0,2	2	2	3	**30**	0,1	0,3	0,1	1	1	2

4.7. Модели управления запасами

В этом разделе мы рассмотрим простейшие математические модели функционирования систем, которые можно назвать хранилищем или складом. На рис. 4.7.1 изображена общая схема такой системы.

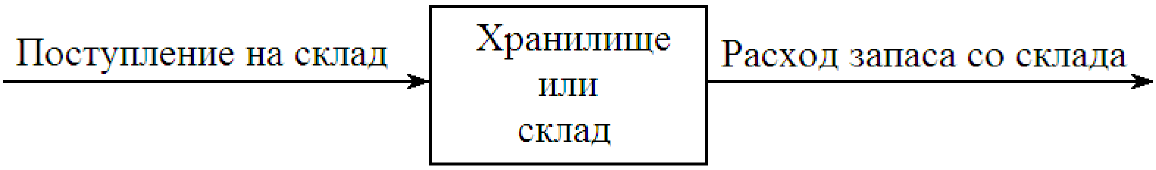


Рис. 4.7.1

И поступление продукции и ее расход могут быть случайными и во времени и по объему.

Простым примером может служить водохранилище, уровень воды в котором зависит от притока (определяемого случайно выпадающими осадками) и расхода воды на разные нужды.

Представляют, например, интерес:

1) стационарное распределение запаса и условия его существования;

2) оптимальная политика пополнения и расхода запаса;

3) распределение периода нулевого уровня и т.д.

Для определенности будем говорить о модели водохранилища. Рассмотрим простейшую модель с дискретным временем, в которой уровень рассматривается в моменты $t = 1,2,3,\ldots$ (например, каждый день утром в определенный час).

1. *Приток.* Пусть X_k — количество воды, поступившее в водохранилище за единицу времени (год, сутки, час и т.д.) от k до $(k+1)$

моментов. Величины $X_1, X_2, X_3, \dots$ полагаем независимыми и одинаково распределенными.

2. *Сток.* Пусть объем водохранилища равен *K*. Обозначим через Z_n размер запаса в момент $t = n$, т.е. количество воды перед поступлением в хранилище X_n. Если $Z_n + X_n > K$, то водохранилище переполняется и избыток $Z_n + X_n - K$ теряется. Поэтому в водохранилище запас будет равен $\min(K, Z_n + X_n)$.

3. *Правило расхода воды.* В момент времени $t = n+1$ из водохранилища выпускают количество воды, равное m ($m < K$), если $m \le Z_n + X_n$. Если же $Z_n + X_n < m$, то расходуют весь имеющийся запас $Z_n + X_n$. Так что величина расхода равна $Y_n = \min(m, Z_n + X_n)$. Из этих допущений можно сделать вывод, что размер запаса удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$Z_{n+1} = \min(K, Z_n + X_n) - \min(m, Z_n + X_n), \quad n = 1,2,3,\dots .$$

Последовательность $\{Z_n\}$ образует однородную цепь Маркова.

Упростим задачу еще, полагая приток дискретным. Пусть

$$P(X_n = i) = g_i, \quad i = 1,2,3,\dots .$$

В этом случае цепь Маркова имеет конечное число состояний $\{1,2,3,\dots,K-m\}$. Обозначим вероятности переходов из начального состояния за *n* шагов через

$$P_{ij}(n) = P(Z_n = j / Z_0 = i), \quad n \ge 1,\ i,j = 0,1,2,\dots,K-m .$$

Найдем стационарное распределение размера запаса. Для простоты будем считать, что количество воды, расходуемой в момент $t = n+1$, равно $m = 1$.

Обозначим производящую функцию распределения вероятностей $\{g_i\}$ через

$$G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i, \quad |z| < 1.$$

Тогда средний приток в единицу времени равен

$$\rho = G'(1) = \sum_{i=1}^{\infty} i g_i .$$

Матрица переходных вероятностей для цепи Маркова $\{Z_n\}$ имеет вид:

	0	1	2	3	$\dots$	$K-2$	$K-1$
0	$g_0 + g_1$	g_2	g_3	g_4	$\dots$	g_{k-1}	$h_k = g_k + g_{k+1} + \dots$
1	g_0	g_1	g_2	g_3	$\dots$	g_{k-2}	$h_{k-1} = g_{k-1} + g_k + \dots$
2	0	g_0	g_1	g_2	$\dots$	g_{k-3}	$h_{k-2} = g_{k-2} + g_{k-1} + \dots$
3	0	0	g_0	g_1	$\dots$	g_{k-4}	$h_{k-3} = g_{k-3} + g_{k-2} + \dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

$K-1$	0	0	0	0	$\cdots$	g_0	$h_1 = g_1 + g_2 + g_3 + \ldots$

Если все $g_i > 0$, то цепь неприводимая и непериодическая. Поэтому существует стационарное распределение вероятностей

$$U_i = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = i), \quad i = 1,2,3,\ldots,$$

которые являются единственным решением уравнений

$$U_j = \sum_{i=1}^{k-1} U_i P_{ij} \tag{4.7.1}$$

при условии, что $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{k-1} = 1$. Для этих вероятностей имеет место следующая теорема.

Теорема Морана (Moran P.). 1. Если $U_i(K), \quad i = 1,2,\ldots,K-1$ — стационарное распределение запаса воды в хранилище емкости K, то отношения

$$V_i = U_i(K)/U_0(K), \ i = 1,2,\ldots,K-1 \tag{4.7.2}$$

не зависят от K.

2. Значения V_i можно найти как коэффициенты при z^i в разложении по степеням функции

$$V(z) = \frac{g_0(1-z)}{G(z)-z}. \tag{4.7.3}$$

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы достаточно записать уравнения для финальных вероятностей

$$\begin{cases} U_0 = (g_0 + g_1)U_0 + g_0 U_1, \\ U_1 = g_2 U_0 + g_1 U_1 + g_0 U_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{k-2} = g_{k-1}U_0 + g_{k-2}U_1 + \ldots + g_0 U_{k-1}, \\ U_{k-1} = h_k U_0 + h_{k-1}U_1 + \ldots + h_1 U_{k-1}. \end{cases}$$

Решая последовательно эти уравнения, получим из первого уравнения:

$$U_1 = \frac{1-g_0-g_1}{g_0} U_0 \Rightarrow V_1 = \frac{1-g_0-g_1}{g_0}. \tag{4.7.4}$$

Из второго уравнения получим:

$$U_2 = \frac{1-g_1}{g_0} U_1 - \frac{g_2}{g_0} U_0 \Rightarrow V_2 = \frac{U_2}{U_0} = \frac{1-g_1}{g_0}\frac{U_1}{U_0} - \frac{g_2}{g_0}.$$

Продолжение этого процесса завершает доказательство первой части. Для доказательства второй части рассмотрим функцию $V(z)$ и покажем, что при $|z|<1$ она разлагается в ряд по степеням z, коэффициенты которого совпадают с (4.7.4). Для этого преобразуем функцию $V(z)$:

$$V(z)=\frac{g_0(1-z)}{G(z)-z}=\frac{g_0(1-z)}{1-z+G(z)-1}=\frac{g_0(1-z)}{(1-z)[1-(1-G(z))/(1-z)]}=$$

$$=\frac{g_0}{1-(1-G(z))/(1-z)}.$$

Можно показать, что

$$1-(1-G(z))/(1-z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{i=n+1}^{\infty}g_i.$$

В самом деле,

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{i=n+1}^{\infty}g_i=g_1+g_2+g_3+g_4+g_5+\ldots+$$

$$+zg_2+zg_3+zg_4+zg_5+\ldots+$$

$$+z^2g_3+z^2g_4+z^2g_5+\ldots=$$

$$=(1-g_0)+z(1-g_0-g_1)+z^2(1-g_0-g_1-g_2)+\ldots=$$

$$=(1+z+z^2+z^3+\ldots)-g_0(1+z+z^2+z^3+\ldots)-zg_1(1+z+z^2+z^3+\ldots)-$$

$$-z^2g_2(1+z+z^2+z^3+\ldots)-\ldots=1/(1-z)-g_0/(1-z)-zg_1/(1-z)-\ldots=$$

$$=(1-G(z))/(1-z).$$

Отсюда при $|z|<1$

$$\left|\frac{1-G(z)}{1-z}\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=n+1}^{\infty}g_i=g_1+2g_2+3g_3+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}ig_i=\rho\le 1.$$

Здесь величина ρ равна среднему притоку.

Итак, $V(z)$ представляет из себя сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $(1-G(z))/(1-z)$, который тоже разложим по степеням z. Разложим $V(z)$ в степенной ряд:

$$V(z)=g_0(1-z)/(G(z)-z)=v_0+v_1z+v_2z^2+\ldots\ .$$

Коэффициенты v_i определяются из равенства

$$g_0(1-z)=(G(z)-z)\sum_{i=0}^{\infty}v_iz^i, \qquad (4.7.5)$$

если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях z в его правой и левой частях. Величины этих коэффициентов совпадают с их значениями по формулам (4.7.4). Этим и завершается доказательство теоремы.

Пример 4.36. Пусть в хранилище объема K поступление запаса имеет распределение

$$g_j=P(X_n=j)=pq^j,\ j=0,1,2,\ldots,\ 0<p<1,\ q=1-p.$$

При переполнении хранилища излишки теряются. Каждую единицу времени из хранилища потребляют единицу запаса. Требуется найти вероятность того, что к моменту очередного расхода запаса хранилище окажется пустым.

Решение. Воспользуемся теоремой Морана. Для этого сначала найдем производящую функцию для распределения случайной величины X.

Имеем $G(z)=\sum_{i=0}^{\infty} pq^i z^i = \dfrac{p}{1-qz}$ при $|qz|<1$ и $V(z)=\dfrac{p(1-z)}{\dfrac{p}{1-qz}-z}=$

$$=\frac{p(1-z)(1-qz)}{qz^2-z+p}=\frac{p(1-z)(1-qz)}{(z-1)(qz-p)}=\frac{1-qz}{1-\rho z} \text{ при } \rho=\frac{q}{p}.$$

Если $|\rho z|<1$, то $1/(1-\rho z)$ можно считать суммой бесконечной убывающей прогрессии. Поэтому

$$V(z)=(1-qz)(1+\rho z+\rho^2 z^2+\rho^3 z^3+\ldots+\rho^n z^n+\ldots)$$
$$=1+(\rho-q)z+(\rho^2-q\rho)z^2+(\rho^3-q\rho^2)z^3+\ldots+(\rho^n-q\rho^{n-1})z^n+\ldots .$$

Из этой записи следует, что

$$v_0=1,\ v_1=\rho-q,\ v_2=\rho(\rho-q),\ v_3=\rho^2(\rho-q),\ldots,v_n=\rho^{n-1}(\rho-q),\ldots .$$

Эти коэффициенты можно преобразовать к виду:

$$v_n=\rho^{n-1}(\rho-q)=\rho^{n-1}\left(\frac{q}{p}-q\right)=\rho^{n-1}q\left(\frac{1-p}{p}\right)=\rho^n q.$$

Тогда в соответствии с формулами (4.7.2) имеем

$$u_1=\rho q u_0,\ u_2=\rho^2 q u_0,\ u_3=\rho^3 q u_0,\ldots,u_n=\rho^n q u_0,\ldots . \quad (4.7.6)$$

Если объем хранилища неограничен, то из условия нормировки:

$$u_0(1+\rho q+\rho^2 q+\rho^3 q+\ldots+\rho^n q+\ldots)=u_0\left(1+\rho q\frac{1}{1-\rho}\right)=u_0\left(\frac{1-\rho p}{1-\rho}\right)=1.$$

Тогда $u_0=(1-\rho)/(1-\rho q)$ и $u_n=\rho^n q(1-\rho)/(1-\rho q)$, $n=1,2,3,\ldots$.

Если же объем хранилища равен K, то согласно теореме Морана соотношения (4.7.6) остаются в силе, но условие нормировки имеет вид

$$\sum_{i=0}^{k-1} u_i=1=u_0\left(1+q\sum_{i=1}^{k-1}\rho^i\right).$$

Поэтому $u_0=\left(1+q\sum_{i=1}^{k-1}\rho^i\right)^{-1}$ — вероятность того, что к моменту очередного расхода запаса хранилище окажется пустым, а $u_n=\rho^n q\left(1+q\sum_{i=1}^{k-1}\rho^i\right)^{-1}$, $n=1,2,\ldots,k-1$.

Ответ. $u_0=\left(1+q\sum_{i=1}^{k-1}\rho^i\right)^{-1}$.

Задача 4.36. На склад объемом K единиц продукции (например, контейнеров, автофургонов и т.д.) ежедневно поступает продукция в случайном количестве X. Величины X независимы для разных дней и имеют распределение ($q = 1 - p$):

X	0	1	2
P	q^2	$2pq$	p^2

(Например, продукция доставляется двумя автофургонами, а p — для каждого автофургона вероятность благополучно доставить продукцию на склад.) Продукция, не принятая на склад, теряется. Со склада каждое утро необходимо поставлять в розничную сеть один автофургон продукции.

Какова вероятность того, что к моменту очередной отгрузки продукции склад окажется пустым? (См. пример 4.36, $p = 0{,}4 + 0{,}b$, где b — номер варианта.)

Пример 4.37. Хранилище имеет емкость шести единиц хранения (например, шесть контейнеров, шесть вагонов и т.д.). В течение каждого дня в хранилище поступает случайное количество продукции X. Величины X независимы и одинаково распределены:

X	0	1	2	3
P	0,1	0,1	0,5	0,3

При заполнении хранилища избыток поступившей продукции теряется. В конце каждого дня из хранилища отпускается потребителю две единицы продукции (или весь запас, если он меньше двух).

Для стационарного режима требуется найти: вероятность того, что поставляемая продукция будет полностью (без потерь) принята на хранение; вероятность того, что отпуск продукции будет производиться в полном объеме.

Решение. Будем рассматривать состояния хранилища мгновение спустя после очередной отгрузки. Тогда возможных состояний будет пять: E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, где номер состояния соответствует числу находящихся на хранении единиц продукции.

В нашем примере $g_0 = P(X = 0) = 0{,}1$; $g_1 = P(X = 1) = 0{,}1$; $g_2 = P(X = 2) = 0{,}5$; $g_3 = P(X = 3) = 0{,}3$. Составим переходную матрицу:

	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0	0,7	0,3	0	0	0
E_1	0,2	0,5	0,3	0	0
E_2	0,1	0,1	0,5	0,3	0
E_3	0	0,1	0,1	0,5	0,3
E_4	0	0	0,1	0,1	0,8

В соответствии с переходной матрицей запишем систему уравнений (4.7.1) для вычисления стационарных вероятностей:

$$
\begin{aligned}
&u_0 = 0,7u_0 + 0,2u_1 + 0,1u_2,\\
&u_1 = 0,3u_0 + 0,5u_1 + 0,1u_2 + 0,1u_3,\\
&u_2 = 0,3u_1 + 0,5u_2 + 0,1u_3 + 0,1u_4,\\
&u_3 = 0,3u_2 + 0,5u_3 + 0,1u_4,\\
&u_4 = 0,3u_3 + 0,8u_4.
\end{aligned}
$$

Вместо любого из уравнений можно взять условие нормировки $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$. Итак, имеем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&-3u_0 + 2u_1 + u_2 = 0,\\
&3u_0 - 5u_1 + u_2 + u_3 = 0,\\
&3u_1 - 5u_2 + u_3 + u_4 = 0,\\
&3u_2 - 5u_3 + u_4 = 0,\\
&3u_3 - 2u_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Структура уравнений системы такова, что позволяет легко выразить все неизвестные величины через одну из них. Например, из последнего уравнения имеем

$$u_3 = \frac{2}{3}u_4. \tag{4.7.7}$$

Подставляя найденное выражение для u_3 в предыдущее уравнение, получаем

$$u_2 = \frac{7}{9}u_4. \tag{4.7.8}$$

С учетом (4.7.7) и (4.7.8) из третьего уравнения находим, что

$$u_1 = \frac{8}{27}u_4. \tag{4.7.9}$$

Из первого уравнения и соотношений (4.7.7) — (4.7.9) следует, что

$$u_0 = \frac{37}{81}u_4. \tag{4.7.10}$$

Воспользуемся теперь условием нормировки

$$
\begin{aligned}
u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 &= \frac{37}{81}u_4 + \frac{8}{27}u_4 + \frac{7}{9}u_4 + \frac{2}{3}u_4 + u_4 =\\
&= u_4\left(\frac{37}{81} + \frac{8}{27} + \frac{7}{9} + \frac{2}{3} + 1\right) = u_4\frac{259}{81} \quad 1,
\end{aligned}
$$

откуда $u_4 = \frac{81}{259}$. Подставляя найденное значение u_4 в равенства (4.7.7) — (4.7.10), получаем

$$u_0 = \frac{37}{259},\ u_1 = \frac{24}{259},\ u_2 = \frac{63}{259},\ u_3 = \frac{54}{259}.$$

Поставляемая продукция будет полностью (без потерь) принята на хранение, если в хранилище, после очередной отгрузки, останется не более трех единиц продукции (вероятность чего равна $u_0 + u_1 + u_2 + u_3$), или в хранилище останется четыре единицы продукции, но до очередной отгрузки поступит не более двух единиц продукции (вероятность чего равна $g_0 + g_1 + g_2$). Поэтому вероятность полного приема продукции равна

$$P = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4(g_0 + g_1 + g_2) \approx 0{,}906.$$

Математическое ожидание количества теряемой продукции при каждом ее поступлении равно

$$1 \cdot u_4 \cdot g_3 = \frac{81}{259} \cdot 0{,}3 \approx 0{,}09 \text{ ед. прод.}$$

Вероятность того, что отпуск продукции будет производиться в полном объеме (в количестве двух единиц), равна

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_1(g_1 + g_2 + g_3) + u_0(g_2 + g_3) \approx 0{,}962.$$

Заметим, что $M(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 = 2$. В среднем поступает столько, сколько должно тратиться за день. Но за счет неравномерности поступления продукции в хранилище возникают и неполные поставки и потери продукции из-за переполнения склада.

Ответ. 0, 906; 0,962.

Задача 4.37. Хранилище имеет емкость K единиц хранения (для нечетных вариантов $K = 5$, в четных вариантах $K = 6$). В течение каждого дня в хранилище поступает случайное количество продукции X. Величины X независимы и одинаково распределены. При заполнении хранилища избыток поступившей продукции теряется. В конце каждого дня из хранилища отпускается потребителю m единиц продукции (или весь запас, если он не превосходит m).

Для стационарного режима найдите: вероятность того, что поставляемая продукция будет полностью (без потерь) принята на хранение; вероятность того, что отпуск продукции будет производиться в полном объеме. (См. пример 4.37 и исходные данные; в нечетных вариантах $m = 1$, в четных вариантах $m = 2$.)

Исходные данные к задаче 4.37. В таблице указаны $g_i = P(X = i)$.

№	g_0	g_1	g_2	g_3	№	g_0	g_1	g_2	g_3	№	g_0	g_1	g_2	g_3
1	0,4	0,3	0,2	0,1	**11**	4/9	2/9	2/9	1/9	**21**	0,5	0,1	0,3	0,1
2	1/8	1/8	1/2	1/4	**12**	1/7	1/7	3/7	2/7	**22**	1/8	2/8	2/8	3/8
3	1/2	1/6	1/6	1/6	**13**	0,5	0,2	0,1	0,2	**23**	5/12	1/4	1/4	1/12
4	0,1	0,1	0,6	0,2	**14**	0,1	0,1	0,5	0,3	**24**	1/8	1/3	3/8	3/8
5	3/8	3/8	1/8	1/8	**15**	3/7	2/7	1/7	1/7	**25**	5/12	1/3	1/12	1/6
6	0,1	0,2	0,5	0,2	**16**	0,1	0,2	0,6	0,1	**26**	1/9	1/9	4/9	3/9
7	0,3	0,5	0,1	0,1	**17**	1/2	1/8	1/4	1/8	**27**	0,2	0,6	0,1	0,1
8	1/9	1/9	5/9	2/9	**18**	0,1	0,2	0,4	0,3	**28**	1/6	1/6	1/6	1/2

9	0,4	0,4	0,1	0,1	**19**	1/3	5/12	1/6	1/12	**29**	0,2	0,6	0,1	0,1
10	1/6	1/6	1/3	1/3	**20**	0,1	0,3	0,2	0,4	**30**	1/7	1/7	2/7	3/7

Пример 4.38. Хранилище имеет емкость пять единиц хранения. В течение каждого дня в хранилище поступает случайное количество X единиц продукции. Величины X независимы и имеют одинаковое распределение

X	1	2	3
P	$g_1 = 0,5$	$g_2 = 0,3$	$g_3 = 0,2$

При заполнении хранилища избыток поступившей продукции теряется. В конце каждого дня из хранилища отпускается потребителю случайное число m единиц продукции (или весь запас, если он не превосходит m). Известно, что $P(m=1)=\pi_1=0,3,$ а $P(m=2)=\pi_2=0,7.$

Для стационарного режима найдите: вероятность того, что поставляемая продукция будет полностью (без потерь) принята на хранение; вероятность того, что отпуск продукции будет производиться в полном объеме.

Решение. Если рассматривать состояние хранилища в моменты сразу после очередной отгрузки продукции, то имеется пять возможных состояний: $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4,$ где номер состояния соответствует числу находящихся на хранении единиц продукции. Состояния хранилища в моменты после очередной отгрузки образуют цепь Маркова. Найдем ее переходные вероятности.

Переход $E_0 \to E_0$ произойдет, если в пустое хранилище поступит одна единица продукции и она достоверно будет отгружена, или поступят две единицы продукции и обе будут отгружены. Поэтому

$$p_{00} = P(E_0 \to E_0) = g_1 \cdot 1 + g_2\pi_2 = 0,5 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,71.$$

Переходы $E_0 \to E_1,\ E_1 \to E_2,\ E_2 \to E_3$ происходят, если в хранилище поступает на единицу продукции больше, чем затем отгружается. Поэтому

$$p_{01} = p_{12} = p_{23} = g_2\pi_1 + g_3\pi_2 = 0,3 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,23.$$

Переходы $E_1 \to E_0,\ E_2 \to E_1,\ E_3 \to E_2$ происходят, если поступает одна единица хранения, а отгружаются две. Вероятность этого

$$p_{10} = p_{21} = p_{32} = g_1\pi_2 = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35.$$

Хранилище сохранит свое состояние E_2 или E_3, если поступит столько единиц хранения, сколько и будет отгружено. Поэтому

$$p_{11} = p_{22} = g_1\pi_1 + g_2\pi_2 = 0,5 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,38.$$

Переходы $E_0 \to E_2,\ E_1 \to E_3,\ E_2 \to E_4$ происходят, если поступит три единицы хранения, а будет отгружена только одна. Поэтому

$$p_{02} = p_{13} = p_{24} = g_3\pi_1 = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06.$$

Для перехода $E_3 \to E_3$ необходимо, чтобы поступила одна единица хранения и она была отгружена или поступили две или три единицы хранения и были отгружены две. Вероятность этого

$$p_{33} = g_1\pi_1 + (g_2 + g_3)\pi_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + (0{,}3 + 0{,}2)0{,}7 = 0{,}5.$$

Переход $E_3 \to E_4$ произойдет, если в хранилище поступит две или три единицы продукции, а будет отгружена только одна, вероятность чего равна

$$p_{34} = (g_2 + g_3)\pi_1 = (0{,}3 + 0{,}2)0{,}3 = 0{,}15.$$

Если в хранилище четыре единицы продукции, то при любом поступлении новой продукции хранилище будет заполнено целиком. Тогда для перехода $E_4 \to E_3$ необходима отгрузка двух единиц продукции. Вероятность этого

$$p_{43} = (g_1 + g_2 + g_3)\pi_2 = 1 \cdot 0{,}7 = 0{,}7.$$

Хранилище сохранит свое состояние E_4, если при поступлении любого количества единиц хранения (хранилище тогда будет заполнено) будет отгружена одна единица хранения. Вероятность этого

$$p_{44} = (g_1 + g_2 + g_3)\pi_1 = 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3.$$

Итак, переходная матрица имеет вид:

	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0	0,71	0,23	0,06	0	0
E_1	0,35	0,36	0,23	0,06	0
E_2	0	0,35	0,36	0,23	0,06
E_3	0	0	0,35	0,5	0,15
E_4	0	0	0	0,7	0,3

В соответствии с переходной матрицей запишем систему уравнений (4.7.1) для вычисления стационарных вероятностей:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 0{,}71u_0 + 0{,}35u_1,\\
u_1 &= 0{,}23u_0 + 0{,}36u_1 + 0{,}35u_2,\\
u_2 &= 0{,}06u_0 + 0{,}23u_1 + 0{,}36u_2 + 0{,}35u_3,\\
u_3 &= 0{,}06u_1 + 0{,}23u_2 + 0{,}5u_3 + 0{,}7u_4,\\
u_4 &= 0{,}06u_2 + 0{,}15u_3 + 0{,}3u_4.
\end{aligned}$$

Это система линейных однородных уравнений. Вместо любого из уравнений можно взять условие нормировки $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$. Тогда получится система линейных неоднородных уравнений. Решая эту систему любым способом (по формулам Крамера, по методу Гаусса и т.д.) получим, что

$$u_0 = 0{,}242; \quad u_1 = 0{,}200; \quad u_2 = 0{,}207; \quad u_3 = 0{,}206; \quad u_4 = 0{,}145.$$

Вероятность потери поступающей продукции из-за переполнения склада равна $u_4(g_2+g_3)=0{,}0725$, т.е. потери составят около 7%. Вероятность полного приема на хранение равна $1-0{,}0725=0{,}9275$.

Вероятность отгрузки в требуемом объеме равна

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_0(g_1\pi_1+g_2+g_3)=0{,}9153.$$

Ответ. 0,9275; 0,9153.

Задача 4.38. Хранилище имеет емкость K единиц хранения (в нечетных вариантах $K=4$, в четных вариантах $K=5$). В течение каждого дня в хранилище поступает случайное количество X единиц продукции. Величины X независимы и имеют одинаковое распределение

X	0	1	2	3
P	g_0	g_1	g_2	g_3

При заполнении хранилища избыток поступившей продукции теряется. В конце каждого дня из хранилища отпускается потребителю случайное число m единиц продукции (или весь запас, если он не превосходит m). Известно, что $P(m=1)=\pi_1$, а $P(m=2)=\pi_2$.

Для стационарного режима найдите: вероятность того, что поставляемая продукция будет полностью (без потерь) принята на хранение; вероятность того, что отпуск продукции будет производиться в полном объеме.

Величины g_i, $i=0,1,2,3$, возьмите из исходных данных задачи 4.46. В нечетных вариантах $P(m=1)=\pi_1=0{,}9$, а $P(m=2)=\pi_2=0{,}1$. В четных вариантах $P(m=1)=\pi_1=0{,}1$, а $P(m=2)=\pi_2=0{,}9$. (См. пример 4.38.)

4.8. Полумарковские процессы

Случайный процесс конечным числом состояний называется *полумарковским процессом* (ПМП), если время пребывания процесса в каждом из состояний случайно и зависит только от этого состояния и от того, в какое состояние затем перейдет процесс.

Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — возможные состояния процесса. Чтобы задать ПМП необходимо указать:

1) матрицу вероятностей переходов $\| P_{ij} \|$, $i, j = 1,2,3,\ldots,n$;

2) матрицу функций распределения $\| F_{ij}(x) \|$, где $F_{ij}(x)$ — функция распределения времени пребывания процесса в состоянии E_i при условии, что следующим состоянием будет E_j;

3) начальное распределение $\{P_i(0)\}$ (например, $P_1(0)=1$, $P_i(0)=0$ при $i \neq 1$ — это означает, что процесс начинается из состояния E_1).

Заметим, что марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний можно считать ПМП, у которого время пребывания в каждом состоянии распределено показательно. Марковскую цепь можно рассматривать в непрерывном времени как ПМП, у которого время пребывания в каждом состоянии равно 1.

Практический интерес представляют многие характеристики ПМП:

1) среднее время достижения состояния E_i из начального состояния;

2) среднее число попаданий в состояние E_i за время t;

3) стационарные вероятности того, что процесс находится в состоянии E_i.

Рассмотрим способы вычисления некоторых характеристик процесса. Если обозначить функцию распределения времени пребывания в состоянии E_i через $F_i(t) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} F_{ij}(t)$, то

$$m_i = \int_0^\infty t\, dF_i(t) \quad \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \int_0^\infty t\, dF_{ij}(t) \quad \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\, m_{ij}, \tag{4.8.1}$$

где m_i — среднее время пребывания в состоянии E_i, а m_{ij} — математическое ожидание, соответствующее распределению $F_{ij}(t)$.

Обозначим через L_{ij} — среднее время до первого попадания из состояния E_i в состояние E_j. Легко видеть, что

$$L_{ij} = P_{ij} m_{ij} + \sum_{k \neq j} P_{ik} (m_{ik} + L_{kj})$$

или

$$L_{ij} = \sum_{k \neq j} P_{ik} L_{kj} + \sum_{k \neq j} P_{ik} m_{ik} + P_{ij} m_{ij}.$$

Откуда в силу (4.8.1) получаем систему уравнений для определения L_{ij}

$$L_{ij} = \sum_{k \neq j} P_{ik} L_{kj} + m_i. \tag{4.8.2}$$

Аналогично можно провести рассуждения о среднем времени пребывания процесса в множестве состояний M. Обозначим через $m_j(M)$ среднее время пребывания процесса в множестве состояний M, если это пребывание началось из состояния $E_j \in M$. Можно показать, что

$$m_j(M) = \sum_{j \in M} P_{ik} m_j(M) + m_i. \tag{4.8.3}$$

В заключение приведем частичную формулировку одной из важных теорем о ПМП.

Теорема Пайка (Pyke). Стационарные вероятности пребывания процесса в состояниях E_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ равны

$$P_j = \frac{m_j u_j}{\sum_{i=1}^{k} m_i u_i}, \qquad (4.8.4)$$

где u_j — финитные вероятности *вложенной* марковской цепи, m_i — среднее время пребывания в состоянии E_i, а P_j — стационарные вероятности состояний.

Пример 4.39. Пусть устройство состоит из трех однотипных приборов. В момент времени $t = 0$ начинает работу прибор № 1, который спустя случайное время T_1 выходит из строя. В этот момент начинает работу прибор № 2, длительность безотказной работы которого равна T_2, и начинается ремонт прибора № 1, причем время ремонта равно η_1. Если $T_2 \geq \eta_1$, то в момент времени $T_1 + T_2$ начинает работу прибор № 1, а прибор № 2 поступает на ремонт. Если же $T_2 < \eta_1$, то начинает работать элемент № 3, а вышедшие из стоя приборы продолжают ремонтироваться в порядке очереди с той же интенсивностью, и т.д. Устройство отказывает, если все три прибора выходят из строя. Предположим, что величины T_i и η_j независимы и имеют соответственно функции распределения $F(x)$ и $G(x)$. Вычислим среднюю длительность безотказной работы системы (или «наработку на отказ»).

Пусть $g(t)$ — количество работоспособных приборов в момент времени t. Система начинает работу при трех работоспособных приборах, поэтому при $t = 0$ имеем $g(t) = 3$, а в момент, когда $g(t) = 0$, устройство выходит из строя. Одна из возможных реализаций процесса $g(t)$ изображена на рис. 4.8.1.

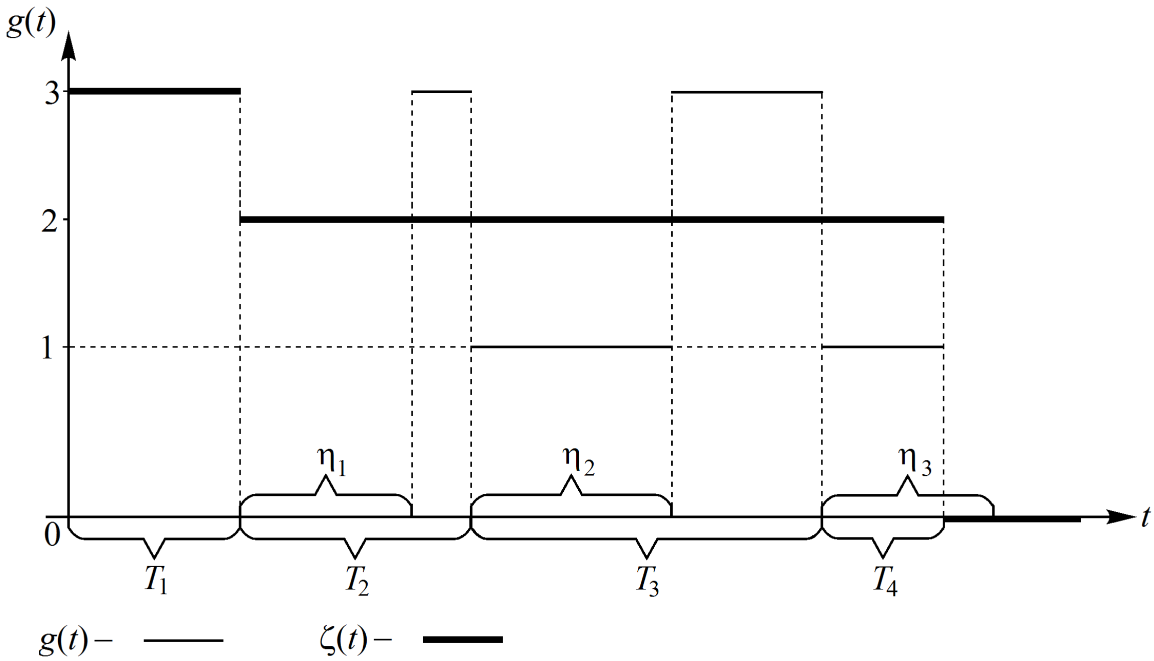


Рис. 4.8.1

Процесс $g(t)$ не марковский. Вложим в этот процесс марковскую цепь, а вместе с нею и полумарковский процесс $\varsigma(t)$, следующим образом: $\varsigma(t)=3$ при $0\le t<T_1$, а далее $\varsigma(t)$ равно состоянию процесса $g(t)$ после последнего перед t выхода из строя прибора.

Для процесса $\varsigma(t)$ в моменты переходов из состояния в состояние имеем вероятности переходов

$$P_{00}=1,\quad P_{01}=P_{02}=P_{03}=0,$$

$$P_{10}=P(T<\eta)=\int_0^\infty[1-G(t)]dF(t)=\alpha,\ P_{11}=1-P_{10}=1-a,\quad P_{12}=0,\quad P_{13}=0,$$

$$P_{20}=0,\quad P_{21}=P_{10}=a,\quad P_{22}=1-P_{21}=1-a,\quad P_{23}=0,$$

$$P_{30}=0,\quad P_{31}=0,\quad P_{32}=1,\quad P_{33}=0.$$

Остается вычислить среднюю длительность пребывания системы в множестве состояний $M=\{3,2;1\}$ при условии, что функционирование системы начинается из состояния $\mathrm{g}(0)=3$, т.е. наработка на отказ равна $m_3(M)$. Последнюю величину можно найти из системы уравнений, которая согласно (4.8.2) имеет вид:

$$m_3(M)=P_{33}m_3(M)+P_{32}m_2(M)+P_{31}m_1(M)+m_3,$$
$$m_2(M)=P_{23}m_3(M)+P_{22}m_2(M)+P_{21}m_1(M)+m_2,$$
$$m_1(M)=P_{13}m_3(M)+P_{12}m_2(M)+P_{11}m_1(M)+m_1.$$

С учетом значений вероятностей переходов P_{ij} и того, что математические ожидания $m_1=m_2=m_3=m$, получаем

$$m_1(M)=\frac{m}{P_{10}},\ m_2(M)=\frac{2m}{P_{10}},\ m_3(M)=m+\frac{2m}{P_{10}}=m+\frac{2m}{\int_0^\infty[1-G(t)]dF(t)}.$$

Ответ. $m_3(M)=m+\dfrac{2m}{\int_0^\infty[1-G(t)]dF(t)}$.

Задача 4.39. Пусть устройство состоит из двух однотипных приборов. В момент времени $t=0$ начинает работу прибор № 1, который спустя случайное время T_1 выходит из строя. В этот момент начинает работу прибор № 2, длительность безотказной работы которого равна T_2, и начинается ремонт прибора № 1, причем время ремонта равно η_1. Если $T_2\ge\eta_1$, то в момент времени T_1+T_2 начинает работу прибор № 1, а прибор № 2 поступает на ремонт. Если же $T_2<\eta_1$, т.е. оба прибора вышли из строя, то устройство отказывает, а вышедшие из стоя приборы продолжают ремонтироваться в порядке очереди с той же интенсивностью, и т.д.

Предположим, что величины T_i и η_j независимы и имеют соответственно функции распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-\dfrac{a^2}{(x+a)^2} & \text{при } x\ge 0\end{cases}$$

и

$$G(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<1,\\ 4(x-1)^2/a^2 & \text{при } 1\le x<(a+2)/2,\\ 1 & \text{при } (a+2)/2\le x.\end{cases}$$

Вычислите среднюю длительность безотказной работы системы (или «наработку на отказ»). (См. пример 4.39, a — номер варианта.)

Пример 4.40. В одноканальную систему с потерями поступает простейший поток требований интенсивности λ. Времена обслуживания независимы и каждое имеет некоторое распределение $B(x)$. В любой момент времени обслуживающий прибор может отказать. Если прибор свободен, то время его безотказной работы в этом состоянии имеет показательное распределение с параметром λ_0. Время безотказной работы прибора, занятого обслуживанием, тоже имеет показательное распределение, но с параметром λ_1. Отказавший прибор тотчас начинают ремонтировать и время восстановления имеет распределение $R(x)$. При отказе прибора обсуживаемое требование теряется, а новые требования не принимаются до окончания ремонта. Все названные величины стохастически независимы. Необходимо найти среднее время пребывания системы в отказном состоянии.

Решение. Будем различать состояние E_0, в котором обслуживающий прибор исправен и свободен, состояние E_1, в котором прибор обслуживает требование, состояние E_2, в котором прибор неисправен и ремонтируется. Пусть $q(t)$ — состояние системы в момент времени t. Процесс $q(t)$ является полумарковским. Назовем его характеристики.

1. Переходные вероятности:

$p_{00}=0;$

$p_{01}=P$(того, что требование поступит в свободную систему ранее,

$$\text{чем прибор выйдет из строя})=\int_0^\infty(1-e^{-\lambda t})\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}dt=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_0};$$

$$p_{02}=1-p_{01}=\frac{\lambda_0}{\lambda+\lambda_0};$$

$p_{01}=P$(того, что время обслуживания меньше времени безотказной работы занятого прибора) $= \int\limits_0^\infty B(x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}dt = \beta;$

$p_{11} = 0;\ \ p_{12} = 1 - p_{10} = 1-\beta;\ \ p_{20} = 1;\ \ p_{21} = p_{22} = 0.$

Итак, переходная матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda/(\lambda+\lambda_0) & \lambda_0/(\lambda+\lambda_0) \\ \beta & 0 & 1-\beta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнения для финитных вероятностей вложенной цепи:

$$u_0 = \beta u_1 + u_2;\ \ u_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_0}u_0;\ \ \ u_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda+\lambda_0}u_0 + (1-\beta)u_1.$$

Из первого и второго уравнений следует, что $u_2 = u_0\left(1-\beta\dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda_0}\right)$. Поэтому из условия нормировки $u_0 + \dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda_0}u_0 + u_0\left(1-\beta\dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda_0}\right) = 1$ получаем, что

$$u_0 = \frac{1}{1+\lambda/(\lambda+\lambda_0)+1-\beta\lambda/(\lambda+\lambda_0)} = \frac{\lambda+\lambda_0}{3\lambda+2\lambda_0-\beta\lambda},$$

$$u_1 = \frac{\lambda/(\lambda+\lambda_0)}{1+\lambda/(\lambda+\lambda_0)+[1-\beta\lambda/(\lambda+\lambda_0)]} = \frac{\lambda}{3\lambda+2\lambda_0-\beta\lambda},$$

$$u_2 = \frac{1-\beta\lambda/(\lambda+\lambda_0)}{1+\lambda/(\lambda+\lambda_0)+[1-\beta\lambda/(\lambda+\lambda_0)]} = \frac{\lambda+\lambda_0-\beta\lambda}{3\lambda+2\lambda_0-\beta\lambda}.$$

2. Вычислим теперь среднее время пребывания в каждом из состояний. Время пребывания в состоянии E_0 равно минимальному из времени паузы и времени безотказной работы свободного прибора. Пусть X — время пребывания в состоянии E_0, X_0 — время безотказной работы в ненагруженном состоянии, а X_1 — время до прихода ближайшего требования. Тогда X имеет функцию распределения

$$F(x) = P(X<x) = P[\min(X_0,X_1)<x] = 1-P[\min(X_0,X_1)>x] =$$
$$= 1-P[X_0>x, X_1>x] = 1-e^{-\lambda_0 x}e^{-\lambda_1 x} = 1-e^{-(\lambda_0+\lambda_1)x}.$$

Это показательный закон распределения с параметром $\lambda_0+\lambda_1$. Поэтому среднее время пребывания в состоянии E_0 равно $m_0 = (\lambda_0+\lambda_1)^{-1}$. Время пребывания в состоянии E_1 равно минимуму времени обслуживания и времени выхода из строя занятого прибора. Поэтому

$$m_1 = \int\limits_0^\infty [1-B(t)]\, e^{-\lambda_1 t}dt.$$

Это равенство получается из следующих соображений. Если X — неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x) = P(X < x)$, то

$$M(X) = \int_0^\infty P(X > x)\,dx = \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx, \qquad (4.8.5)$$

в этом можно убедиться, взяв по частям интеграл в правой части равенства.

Пусть T — время пребывания системы в состоянии E_1, V — время обслуживания, W — время безотказной работы прибора в занятом состоянии. Тогда $T = \min\{V, W\}$. Так как $P(V > x) = 1 - B(x)$, а $P(W > x) = = \exp(-\lambda_1 x)$, то

$$m_1 = M(T) = \int_0^\infty P(T > x)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty P(\min(V, W) > x)\,dx = \int_0^\infty P(V > x \text{ и } W > x)\,dx = \int_0^\infty [1 - B(t)]\,e^{-\lambda_1 t}\,dt.$$

Время пребывания в состоянии E_3 равно времени ремонта. Поэтому $m_2 = m_R = \int_0^\infty t\,dR(t).$

Доля времени пребывания в отказном состоянии равна стационарной вероятности состояния E_2. По формуле (4.8.4) эта стационарная вероятность равна

$$P_2 = \frac{m_2 u_2}{\sum_{i=0}^{2} m_i u_i} = \frac{m_2(\lambda + \lambda_0 - \beta\lambda)}{(\lambda + \lambda_0)/(\lambda + \lambda_1) + m_1\lambda + m_2(\lambda + \lambda_0 - \beta\lambda)}.$$

Ответ. $\dfrac{m_2(\lambda + \lambda_0 - \beta\lambda)}{(\lambda + \lambda_0)/(\lambda + \lambda_1) + m_1\lambda + m_2(\lambda + \lambda_0 - \beta\lambda)}.$

Задача 4.40. В одноканальную систему с потерями поступает простейший поток требований интенсивности λ. Времена обслуживания независимы и каждое имеет показательное распределение с параметром ν. В любой момент времени обслуживающий прибор может отказать. Если прибор свободен, то время его безотказной работы в этом состоянии имеет показательное распределение с параметром λ_0. Время безотказной работы прибора, занятого обслуживанием, тоже имеет показательное распределение, но с параметром λ_1. Отказавший прибор тотчас начинают ремонтировать, и время восстановления имеет распределение

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ \ln x & \text{при } 1 \le x < e, \\ 1 & \text{при } 1 \le x. \end{cases}$$

При отказе прибора обсуживаемое требование теряется, а новые требования не принимаются до окончания ремонта. Все названные величины стохастически независимы.

Необходимо найти среднее время пребывания системы в отказном состоянии. (См. пример 4.40, если N — номер варианта, то $\lambda = N/15$, $\nu = N/10$, $\lambda_0 = N/100$, $\lambda_1 = N/50$.)

5. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕРЕСНЫЕ ЗАДАЧИ

Поток требований называется простейшим, если интервалы времени между последовательными моментами прихода требований независимы и имеют показательный закон распределения.

Заметим, что в показательном законе распределения наиболее вероятны малые значения случайной величины. Это означает, что часто будут реализовываться малые интервалы между требованиями и редко — большие. Для наблюдателя это будет выглядеть как локальные сгущения требований и локальные разряжения. Тем самым подтверждается бытующее представление о «полосе везения» и «полосе невезения». Действительно, случайные события, даже будучи независимыми, имеют свойство группироваться во времени.

Задача 5.1 (*о времени ожидания*). Отметим одну особенность простейшего потока, связанную с «парадоксом времени ожидания». Предположим сначала, что к остановке с равными интервалами подходят автобусы (поток автобусов детерминированный). Пассажир в случайный момент времени приходит на остановку и ожидает ближайшего по времени автобуса. Каково среднее время ожидания пассажира?

Решение. Пусть интервал между автобусами равен τ. Так как равновозможно любое значение времени ожидания X в пределах от 0 до τ, то среднее время ожидания равно

$$M(X) = \int_0^\tau x \frac{1}{\tau} dx = \left. \frac{1}{\tau} \frac{x^2}{2} \right|_0^\tau = \frac{\tau}{2}. \tag{5.1}$$

Пусть теперь моменты прибытия автобусов на остановку образуют простейший поток интенсивности λ. Так как интервалы между последовательно приходящими автобусами имеют показательный закон распределения, то средний интервал между прибытиями автобусов будет равен

$$M(X) = \int_0^\infty x\lambda \exp(-\lambda x) dx.$$

Интеграл можно взять по частям. Поэтому

$$M(X) = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}. \tag{5.2}$$

Плотность вероятности того, что момент прихода пассажира придется на интервал между автобусами длины x, имеет вид

$$\frac{x\lambda e^{-\lambda x}}{\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx} = \frac{x\lambda e^{-\lambda x}}{\frac{1}{\lambda}} = x\lambda^2 e^{-\lambda x}.$$

Согласно (5.1) при интервале между автобусами длиной x среднее время ожидания равно $x/2$. Поэтому среднее время ожидания в случае простейшего потока равно

$$M(X) = \int_0^{\infty} \frac{x}{2} x\lambda^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

(последний интеграл дважды берется по частям). Итак, при регулярном потоке среднее время ожидания равно половине интервала между прибытиями автобусов. При чисто случайном потоке автобусов среднее время ожидания совпадает со средним интервалом между автобусами.

Заметим, что среднее время ожидания пассажира может быть значительно больше среднего интервала между автобусами. Например, пусть автобусы приходят по расписанию, но такому, что сначала подряд с интервалами в две минуты проходят пять автобусов, а шестой приходит через 50 минут. Тогда средний интервал будет равен $(2\cdot 5+50)/6=10$ мин.

Пассажир может с вероятностью 1/5 попасть на череду коротких интервалов между автобусами и среднее время ожидания для него будет равно 1 мин. На большой интервал можно попасть с вероятностью 5/6 и тогда среднее время ожидания будет 25 мин. Поэтому среднее время ожидания равно $1\cdot 1/6+25\cdot 5/6 = 126/6 = 21$ мин. Минимальным среднее время ожидания будет при регулярном потоке автобусов при равных интервалах между ними.

Проведем рассмотрение в общем случае. Момент, начиная с которого мы начинаем наблюдать поток событий, можно считать случайной точкой τ на оси времени t. Пусть в потоке событий интервалы между соседними событиями независимы и имеют одинаковые функции плотности вероятности $f(t)$ (такие потоки называют потоками Пальма).

Найдем плотность вероятности $f^*(t)$ длины того интервала T^*, на который попала случайная точка τ. Понятно, что шансы точкой попасть в длинный интервал больше, чем в короткий. Поэтому сам факт попадания случайной точки τ на интервал меняет его распределение. Рассмотрим

$$P\{T^* \in [t, t+dt)\} \approx f^*(t)dt. \qquad (5.3)$$

Чтобы вычислить эту вероятность, предположим, что имеем дело с большой серией из n интервалов. Среднее число интервалов, имеющих длину в пределах от t до $t+dt$, равно $nf(t)dt$, а средняя длина суммы таких интервалов равна $tn\,f(t)dt$. Средняя же длина всех n интервалов равна $nm_t = n\int_0^{\infty} t\,f(t)dt$. Поэтому

$$f^*(t)dt \approx \frac{nt\,f(t)\,dt}{n\,m_t} = \frac{t\,f(t)}{m_t}dt\,.$$

При $n \to \infty$ получается точное равенство, из которого следует:

$$f^*(t) = \frac{t\,f(t)}{m_t}. \tag{5.4}$$

Средняя длина интервала, в который попала точка, равна

$$M(T^*) = \frac{1}{m_t}\int_0^{\infty} tt\,f(t)\,dt = \frac{M(T^2)}{m_t}.$$

Так как $D(T) = M(T^2) - (m_t)^2$, то

$$M(T^*) = \frac{D(T) + (m_t)^2}{m_t} = m_t + \frac{D(T)}{m_t}.$$

Например, для показательного закона распределения интервалов (для простейшего потока событий интенсивности λ) $m_t = M(T) = 1/\lambda$, $D(T) = 1/\lambda^2$, поэтому $f^*(t) = \dfrac{t\lambda\, e^{-\lambda t}}{1/\lambda} = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$ и $M(T^*) = 2/\lambda$.

График этой функции плотности вероятности $f^*(t)$ изображен на рис. 5.1. Если для показательного закона распределения наиболее вероятны малые значения, то для $f^*(t)$ вероятности смещены в сторону больших значений.

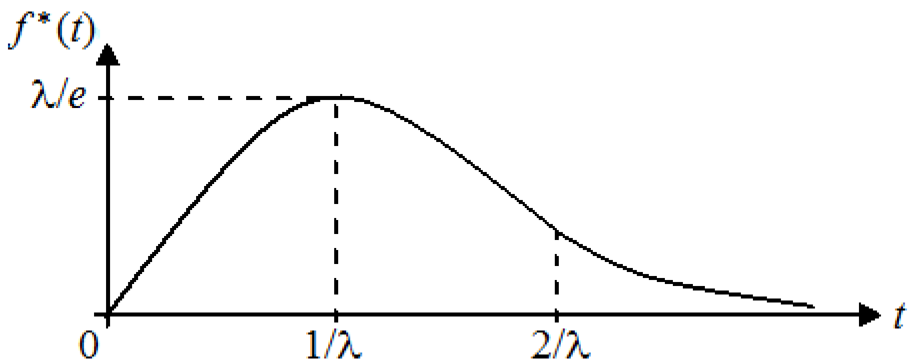


Рис. 5.1

Пусть $F(x)$ и $f(x)$ соответственно функция распределения и функция плотности вероятности интервала X между моментами появления соседних событий. Предположим, что с момента появления последнего события уже прошло время τ. Найдем распределения оставшейся части интервала, которую обозначим через R:

$$P(R<r) = F(r/t) = F(r/X \geq t) = \frac{P(X<\tau+r, X\geq\tau)}{P(X\geq\tau)} = \frac{P(\tau\leq X<\tau+r)}{P(X\geq\tau)} =$$

$$=\frac{F(r+\tau)-F(\tau)}{1-F(\tau)},$$

откуда $f(r/t)=\dfrac{dF(r,\tau)}{dr}=\dfrac{f(r+\tau)}{1-F(\tau)}$.

Задача 5.2 (*о наилучшем выборе*). Имеется n однородных предметов различного качества, причем заранее о предметах ничего не известно. Предметы можно выбирать наугад по одному и обследовать. Если качество предмета нас не устраивает, то выбираем очередной предмет, но к отвергнутому предмету вернуться нельзя. Какой стратегии следовать, чтобы вероятность выбрать наилучший предмет была наибольшей? (Эту задачу называют еще задачей о разборчивой невесте. К невесте последовательно сватаются n женихов. Жених, получивший отказ, повторно не сватается.)

Решение. Поскольку качество этих предметов нам неизвестно, то для начала необходимо получить представление о том, чего следует ожидать. Рассмотрим следующий порядок действий: Просмотрим m ($m<n$) предметов и отвергнем их, не взирая на качество. Затем остановим свой выбор на первом предмете, который окажется лучше всех ранее просмотренных.

Вычислим вероятность выбрать наилучший предмет при таком образе действий, а затем определим оптимальное значение m.

Обозначим через A_k — событие, состоящее в том, что наилучшим является $(k+1)$-й предмет и при этом наилучший из первых k предметов находится среди первых m предметов (последнее условие гарантирует нам, что дело дойдет до выбора $(k+1)$-го предмета.). Тогда

$$P(\text{выбрать наилучший предмет})=\sum_{k=m}^{n-1}P(A_k)=$$

$$=\sum_{k=m}^{n-1}P\begin{pmatrix}\text{того, что наилучшим окажется}\\ (k-1)\text{-й по счету предмет}\end{pmatrix}\cdot P\begin{pmatrix}\text{того, что наилучший среди}\\ \text{первых } k \text{ предметов находится}\\ \text{среди первых } m \text{ предметов}\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{m}{k}=\frac{m}{n}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Выберем число s между 0 и 1 и пусть $m=[ns]$ — наибольшее целое число, меньшее, чем ns. Определим при $n\to\infty$ наилучшее значение s (наилучшее в смысле максимизации исследуемой вероятности). Заметим:

$$P(s) = \frac{m}{n}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k} \quad \frac{[ns]}{n}\sum_{k=[ns]}^{n-1}\frac{1}{k} \approx s\int_{ns}^{n}\frac{1}{x}\,dx \quad -s\ln s.$$

Найдем максимальное значение функции $P(s) = -s\ln s$. По необходимому условию экстремума $P'(s) = -\ln s - 1 \quad 0 \Rightarrow \ln s = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow s = 1/e$ — критическая точка. В этой точке функция имеет максимум так как в этой точке $P''(s)\big|_{s=1/e} = -1/s\big|_{s=1/e} \quad -e < 0.$

Итак, оптимальная стратегия рекомендует просмотреть примерно треть предметов (точнее, $[n/e]$) и затем остановить свой выбор на первом предмете лучшем, чем все ранее просмотренные. Не исключено, что лучший предмет уже был просмотрен в первой трети предметов, и отвергнут. Тогда придется остановиться на последнем из предметов. Еще раз подчеркнем, что предлагаемая стратегия не гарантирует выбор наилучшего предмета, но делает его выбор наиболее вероятным.

Задача 5.3. Вы принимаете участие в телеигре, и Вам предлагают выбрать одну из трех шкатулок, в одной из которых лежат деньги. Вы выбрали некоторую шкатулку (например, шкатулку № 1). Ведущий после этого открывает одну из двух других шкатулок (например, шкатулку № 3), показывает, что она пуста, и спрашивает: не желаете ли Вы изменить свое решение и выбрать шкатулку № 2? Следует ли Вам менять свое решение или нет?

Решение. Будем полагать, что ведущий знает, где деньги лежат, и поэтому открывает именно пустую шкатулку. Насчет шкатулки с деньгами есть три одинаково вероятных предположения: B_i — деньги находятся в i-й шкатулке, $P(B_i) = 1/3$, $(i = 1, 2, 3)$.

Событие A состоит в том, что Вы выбрали шкатулку № 1, а ведущий открыл шкатулку № 3. При пустой третьей шкатулке в силу симметрии Ваши шансы на выигрыш равны 1/2.

Если деньги действительно находятся в первой шкатулке, то ведущий с вероятностью 1/2 откроет именно шкатулку № 3. Поэтому $P(A/B_1) = 1/2$.

Если деньги находятся во второй шкатулке, то ведущий с вероятностью 1 откроет именно шкатулку № 3 ($P(A/B_2) = 1$).

Если деньги в третьей шкатулке, то вероятность выбора ведущим третьей шкатулки нулевая ($P(A/B_3) = 0$).

По формулам Байеса

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\,P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3)} =$$

$$= \frac{1/3 \cdot 1/2}{1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 0} = 1/3,$$

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2)\,P(A / B_2)}{P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2) + P(B_3)P(A / B_3)} =$$

$$= \frac{1/3 \cdot 1}{1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 0} = 2/3,$$

$P(B_3 / A) = 0.$

Если ведущий не знает где деньги лежат, то $P(B_2 / A) = 1/2$ и тогда $P(B_1 / A) = P(B_2 / A) = 1/2$.

Итак, игроку предварительно следует осведомиться у ведущего, знает ли он где деньги лежат. При положительном ответе следует изменить свой выбор. Если ведущий не знает, в какой шкатулке деньги, то менять выбор смысла нет.

Задача 5.4. Производитель некоторой продукции затеял рекламную акцию. Объявлено, что в каждый пакет продукта заложен один из *n* различных типов жетонов. Покупатель, собравший все *n* типов жетонов, получает дисконтную карту для длительных скидок на этот продукт. Сколько в среднем пакетов продукта придется купить, чтобы собрать полный комплект из *n* различных жетонов?

Решение. Понятно, что по мере накопления жетонов, шансы найти новый жетон в очередном пакете убывают. Обозначим через X_j — число пакетов, которые придется купить после обретения $(j-1)$-го жетона, чтобы найти *j*-й жетон. Тогда общее число купленных пакетов

$$N = 1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n,$$

А математическое ожидание этого числа равно

$$M(N) = 1 + M(X_2) + M(X_3) + \ldots + M(X_n).$$

Вероятность того, что для поиска второго жетона придется вскрыть *k* пакетов, равна

$$P(X_2 = k) = \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(имеется в виду, что $(k-1)$ раз попадутся пакеты с уже обретенным жетоном и *k*-й по счету жетон с вероятностью $(n-1)/n$ будет содержать жетон нового типа). Соответственно

$$P(X_3 = k) = \frac{n-2}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

……………………

$$P(X_r = k) = \frac{n-r+1}{n}\cdot\left(\frac{r-1}{n}\right)^{k-1}, \quad k = 1,2,3,\ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}, \quad k = 1,2,3,\ldots.$$

Известно, что это геометрический закон распределения. Но для геометрического закона распределения: $P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1,2,3,\ldots,$ $q = 1 - p,$ среднее значение равно

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} =$$

$$= p + 2pq + 3pq^2 + 4pq^3 + 5pq^4 + \ldots = p(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \ldots)$$

$$\begin{aligned} = p(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots \\ +q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots \\ +q^2 + q^3 + q^4 + \ldots \\ +q^3 + q^4 + \ldots \\ +q^4 + \ldots) = \end{aligned}$$

$$= p\left(\frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1-q} + \frac{q^3}{1-q} + \ldots\right) = \frac{p}{1-q}(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

В нашем случае для X_r вероятность $p = \frac{n-r+1}{n}$. Поэтому $M(X_r) = \frac{n}{n-r+1}$.

В итоге

$$M(N) = 1 + M(X_2) + M(X_3) + \ldots + M(X_n) = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-3} + \ldots + n$$

или

$$M(N) = n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{n-j}.$$

Например, при $n = 5$ имеем $M(N) = 137/12 \approx 11,4.$

В заключение можно заметить, что при больших n можно воспользоваться асимптотической формулой

$$M(N) = n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{n-j} \approx n\ln n.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Чудесенко В.Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты). — М., «Высшая школа», 1983.

2. *Крупин В.Г., Павлов А.Л., Попов Л.Г.* Высшая Математика. Уравнения математической физики. Сборник задач с решениями. — М., Издательский дом МЭИ, 2011.

3. *Крупин В.Г., Павлов А.Л., Попов Л. Г.* Высшая Математика. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. Сборник задач с решениями. — М., Издательский дом МЭИ, 2012.

4. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. — М., «Наука». Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.

5. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика. / Под редакцией А.В. Ефимова. — М., «Наука». Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

6. *Вентцель Е.С., Овчаров А.А.* Теория случайных процессов и ее приложения. — М., «Наука». Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.

7. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. / Под ред. А.А. Свешникова. — СПб., Издательство «Лань», 2007.

8. *Кальберг М.Я., Сухов Ю.М.* Вероятность и статистика в примерах и задачах Т. 1. — М., Издательство МЦНМО, 2007.

9. *Кальберг М.Я., Сухов Ю.М.* Вероятность и статистика в примерах и задачах Т. 2. — М., Издательство МЦНМО, 2010.

10. Engineering Applications of Stochastic Processes. Theory, Problems and Solutions. Editor: Peter Smith. Research studies press LTD. Taunton, Somerset, England. John Wiley & Sons Inc. New York· Chichester· Toronto· Brisbane· Singapore, 1989.

11. Курс высшей математики. Теория вероятностей. Лекции и практикум. / Под ред. И.М. Петрушко. 2-е изд., испр. — СПб., Издательство «Лань», 2007.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\varphi(-x) \quad \varphi(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3797
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	2555	2538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2526	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1768
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1454	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1108	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0671	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0659	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	2041	0235	2029
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	1047	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица П2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0320	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0971	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	1054	1088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	1939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4219
1,5	4332	4345	4257	4276	4282	4294	3306	3318	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
2,0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2,9	4981	4982	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4985	4986
3,0	0,49865		3,1	0,4990	3,2	0,4993	3,3	0,4995	3,4	0,4996
3,5	0,49977									
3,6	0,49984									
3,7	0,49989									
3,8	0,49993									
3,9	0,49995									
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,49999997									

Таблица П3

Значения t_γ, удовлетворяющие равенству $\int_{-t_\gamma}^{t_\gamma} f_{n-1}(x)dx = \gamma$, где $f_{n-1}(x)$ — плотность вероятности распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы

$n-1$ \ P	0,9	0,95	0,98	0,99
1	6,314	12,706	31,821	53,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
12	1,782	2,179	2,681	3,055
14	1,761	2,145	2,624	2,977
16	1,746	2,120	2,583	2,921
18	1,734	2,101	2,552	2,878
20	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,717	2,074	2,508	2,819
30	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Таблица П4

Значения χ^2_β, удовлетворяющие равенству $\int\limits_{\chi^2_\beta}^{\infty} \psi_r(u)du = \beta$, где $\psi_r(u)$ — плотность распределения «хи-квадрат» с r степенями свободы

r \ β	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	5,99	7,48	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,05
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	18,15	31,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,21	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,0	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,3
28	13,56	14,83	16,93	18,94	21,6	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,2
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

Таблица П5

Значения функции $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ (распределение Пуассона)

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166
3	0,00013	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070
6					0,00001	0,00004	0,00008
7							0,00001

k \ λ	0,8	0,9	1	2	3	4	5
0	0,44933	0,40657	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,35946	0,36591	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,14379	0,16466	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,03834	0,04940	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,00767	0,01112	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00123	0,00200	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00016	0,00030	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00002	0,00004	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8			0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9				0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10				0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11				0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12					0,00006	0,00064	0,00343
13					0,00001	0,00020	0,00132
14						0,00006	0,00047
15						0,00002	0,00016
16							0,00005
17							0,00001

ОГЛАВЛЕНИЕ