

Статически неопределимые системы**Работа 14**

Для балки, изображенной на рисунке (рис.14) требуется:

- 1) найти изгибающий момент на левой опоре (в долях pl^2);
- 2) построить эпюры Q_y и M_z ;
- 3) построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две на консоли.

Данные взять из таблицы 14.

Таблица 14

Схема рис. по последней цифре матрикула	Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	α	β
I	1	0,1	0,1
II	2	0,2	0,2
III	3	0,3	0,3
IV	4	0,4	0,4
V	5	0,5	0,5
VI	6	0,6	0,6
VII	7	0,7	0,7
VIII	8	0,8	0,8
IX	9	0,9	0,9
X	0	1,0	1,0

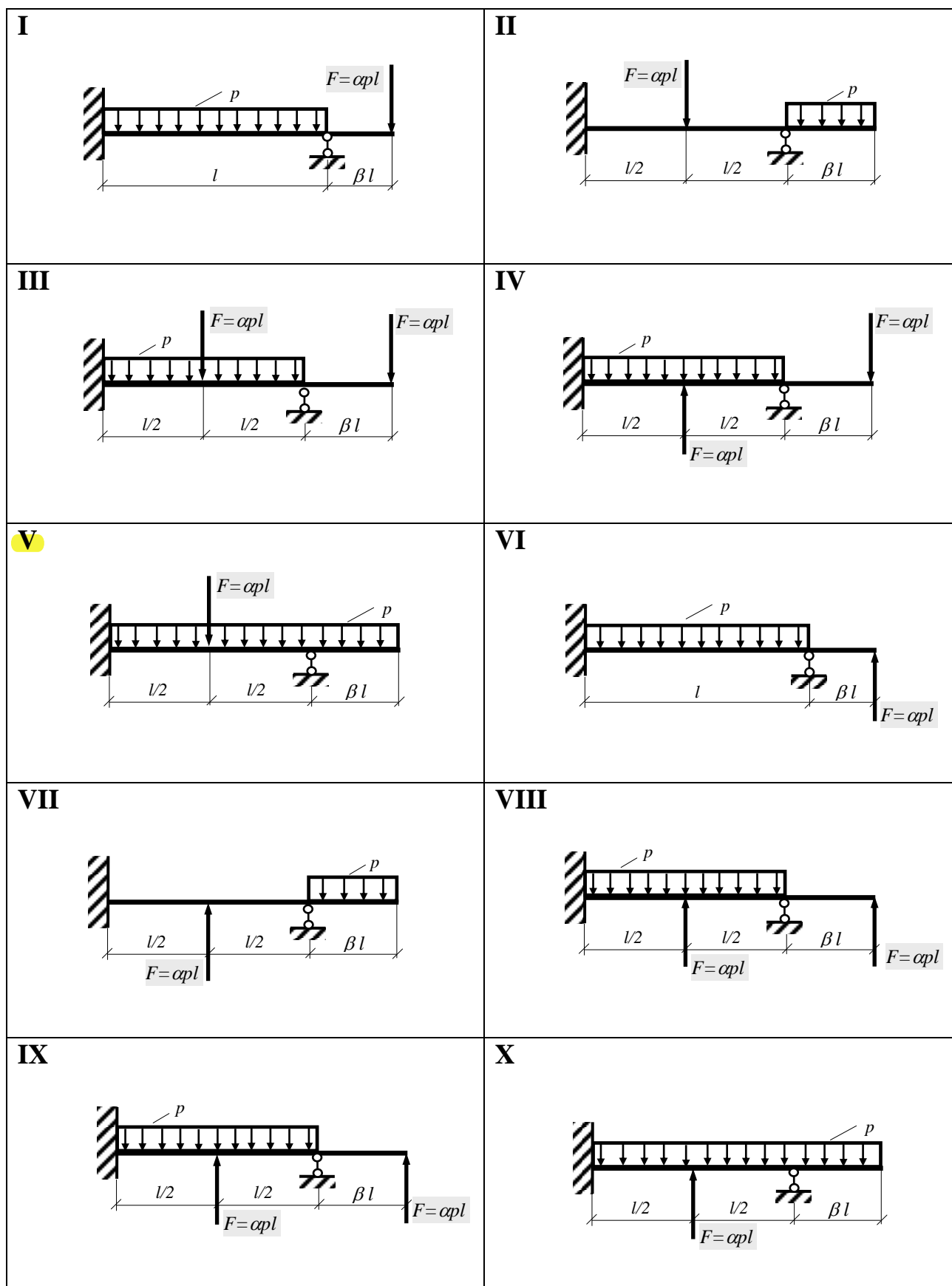
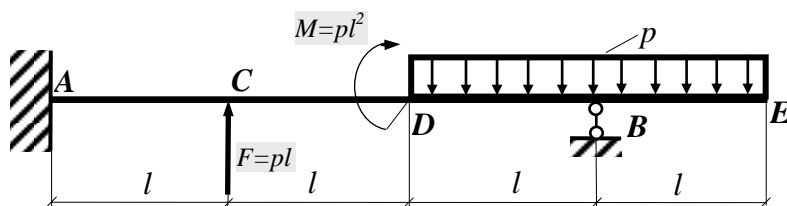
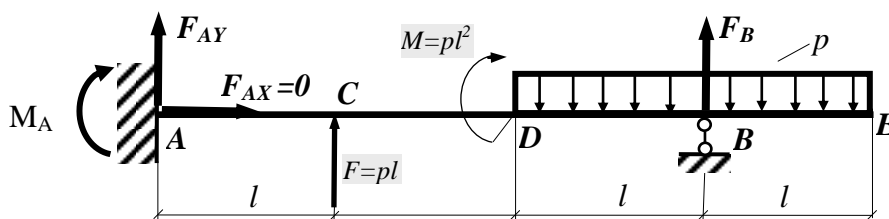


Рис.14

Пример решения:Определение степени статической неопределимости системы

Имеем четыре неизвестные реакции опор (три в жесткой заделке А и одну в шарнирно-подвижной опоре). В данном случае силы расположены в одной плоскости, для которой можно составить только три уравнения равновесия (уравнения статики). Поэтому система является один раз статически неопределимой.

1. Составление “основной системы” метода сил**1.1 Первый вариант “основной системы”**

Выбираем основную систему путем замены жесткой заделки на опоре А шарнирно-неподвижной опорой и неизвестным моментом X_I . Уравнение совместимости деформаций (уравнение метода сил) имеет вид

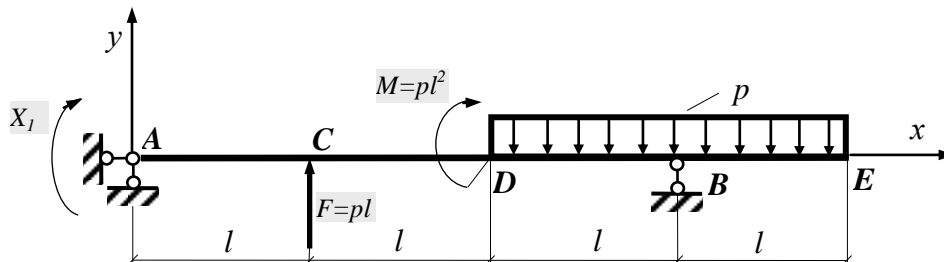
$$\delta_{11}X_I + \Delta_{1p} = 0,$$

которое физически выражает условие, что суммарный угол поворота на левой опоре от заданной нагрузки и от опорного момента X_I равен нулю.

Где δ_{11} - единичное перемещение в точке приложения неизвестного момента X_I ; Δ_{1p} - перемещение в той же точке А от заданной нагрузки.

Определение перемещений можно выполнить или по формуле Мора или с помощью универсального уравнения изогнутой оси балки (уравнение метода начальных параметров).

Статически эквивалентная “Основная система” заданной системе



1.1.1 Определение неизвестного опорного момента X_1

Из уравнения совместности деформаций

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}$$

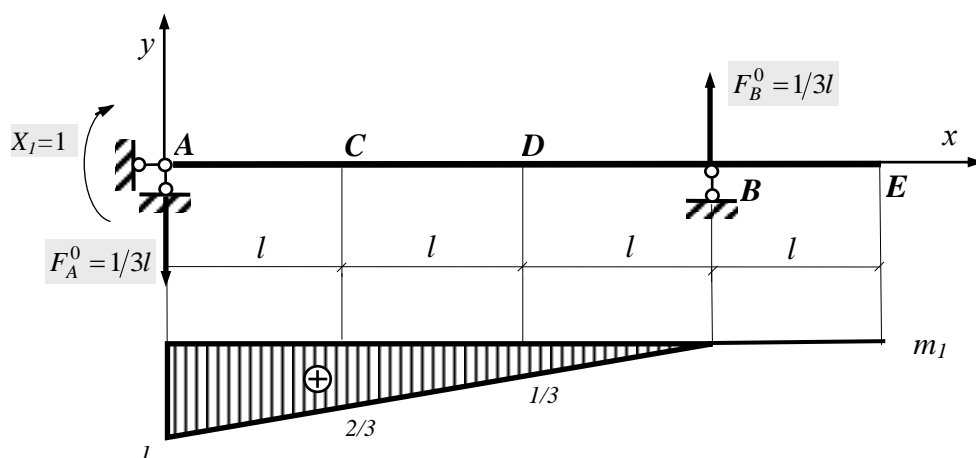
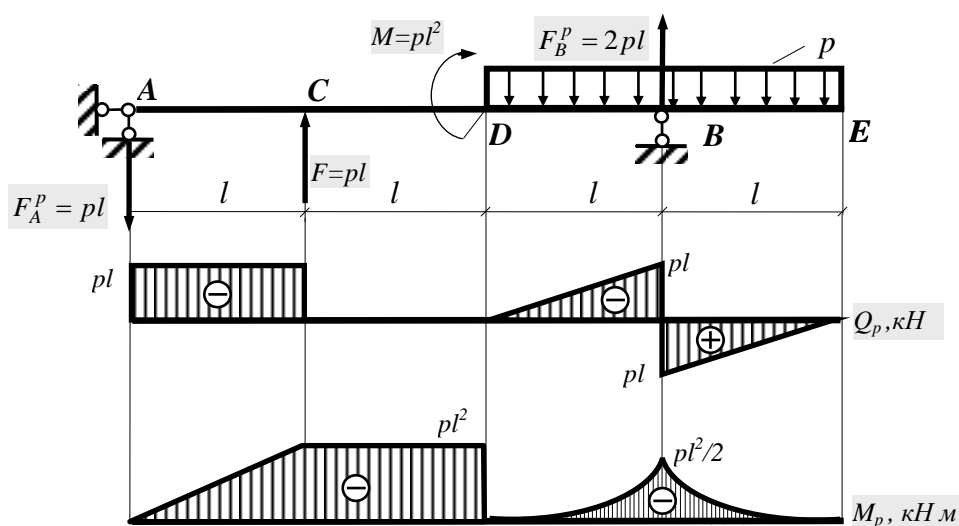
1.1. Определение перемещений по формуле Мора

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{m_1 m_1}{EI_z} dx, \quad \Delta_{1p} = \sum \int_0^l \frac{m_1 M_p}{EI_z} dx,$$

где m_1 – единичная эпюра от единого момента, приложенного в точке А;
 M_p – грузовая эпюра от заданной нагрузки.

Единичная эпюра m_1

Реакции опор F_A^0 и F_B^0 образуют пару сил, момент которой равен единичному моменту $X_1=1$. Откуда $F_A^0 = F_B^0 = \frac{X_1}{3l} = \frac{1}{3l}$.

Грузовая эпюра M_p 

Реакции опор F_A^p и F_B^p находим из уравнений равновесия

$$\sum M_A = 0 \quad pl \cdot l - pl^2 + F_B^p \cdot 3l - p \cdot 2l \cdot 3l = 0 \Rightarrow F_B^p = \frac{6pl^2}{3l} = 2pl,$$

$$\sum M_B = 0 \quad -F_A^p \cdot 3l - pl \cdot 2l - pl^2 = 0 \Rightarrow F_A^p = \frac{-2pl^2 - pl^2}{3l} = -pl.$$

Значения изгибающих моментов M_p

точка A $M_p = 0$

точка C $M_p = -pl \cdot l = -pl^2$

точка D_- $M_p = -pl \cdot 2l + pl \cdot l = -pl^2$

D_+ $M_p = -pl^2 + pl^2 = 0$

точка B $M_p = -pl \cdot 3l + pl \cdot 2l + pl^2 - \frac{pl^2}{2} = -\frac{pl^2}{2}.$

Проверка в точке E , где $M_p = 0$ (свободный конец балки)

$$M_p = -pl \cdot 4l + pl \cdot 3l + pl^2 - \frac{p(2l)^2}{2} + 2pl \cdot l = -4pl^2 + 3pl^2 + pl^2 - 2pl^2 + 2pl^2 = 0.$$

Решение интегралов Мора можно выполнить способом Симпсона, для этого надо знать значения моментов на каждом участке интегрирования: в начале, в середине и в конце.

Значения в серединах участков интегрирования для грузовой эпюры M_p

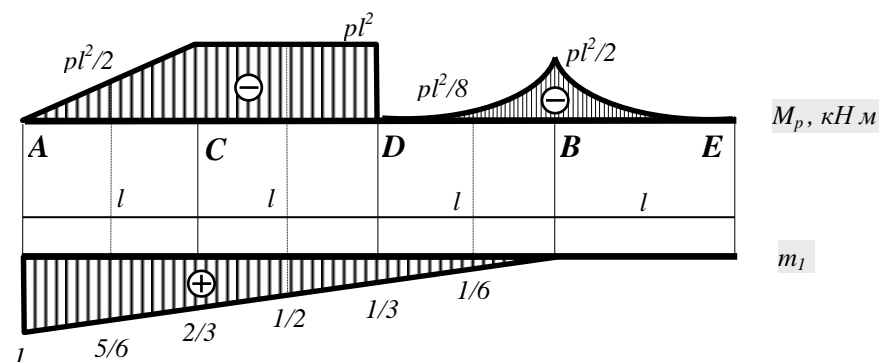
участок	AC	$-\frac{pl^2}{2}$
участок	CD	$-pl^2 = const$
участок	DB	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{pl^2}{8}.$

Значение момента M_p в середине участка DB можно вычислить через

площадь эпюры Q_p : а именно $M_p(DB/2) = M_D + \omega(Q_p) = 0 + (-\frac{1}{2} \cdot \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{2}) = -\frac{pl^2}{8},$

где M_D - начальное значение момента на участке DB , а $\omega(Q_p)$ площадь эпюры Q_p на участке от точки D до середины участка.

Для удобства "перемножения эпюр" по Симпсону приводятся совмещенные одна под другой эпюры m_1 и M_p .



"Перемножая эпюры", имеем

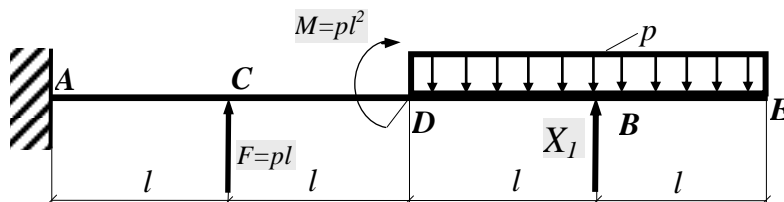
$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{l}{6EI_z} \left[1^2 + 4 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] + \frac{l}{6EI} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] + \frac{l}{6EI} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^2 + 0 \right] = \\ &= \frac{l}{6EI_z} \left[1 + 4 \cdot \frac{100}{36} + \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{36} \right] = \frac{l}{6 \cdot 36 \cdot EI_z} (36 + 100 + 16 + 16 + 36 + 4 + 4 + 4) = \\ &= \frac{216 l}{6 \cdot 36 EI_z} = \frac{l}{EI_z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1p} &= -\frac{l}{6EI_z} \left[\left(0 + 4 \cdot \frac{pl^2}{2} \cdot \frac{5}{6} + pl^2 \cdot \frac{2}{3} \right) + \left(pl^2 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot pl^2 \cdot \frac{1}{2} + pl^2 \cdot \frac{1}{3} \right) + \left(0 + 4 \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{1}{6} + 0 \right) \right] = \\ &= -\frac{pl^3}{6EI_z} \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) = -\frac{pl^3}{6 \cdot 12 \cdot EI_z} (20 + 8 + 8 + 24 + 4 + 1) = -\frac{65 pl^3}{6 \cdot 12 \cdot EI_z}\end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = +\frac{65 pl^3 EI_z}{6 \cdot 12 EI_z l} = \frac{65 pl^2}{72}$$

1.2 Второй вариант "основной системы"

Основную систему получаем, отбрасывая (заменяя) шарнирно-подвижную опору B неизвестной реакцией X_1 .

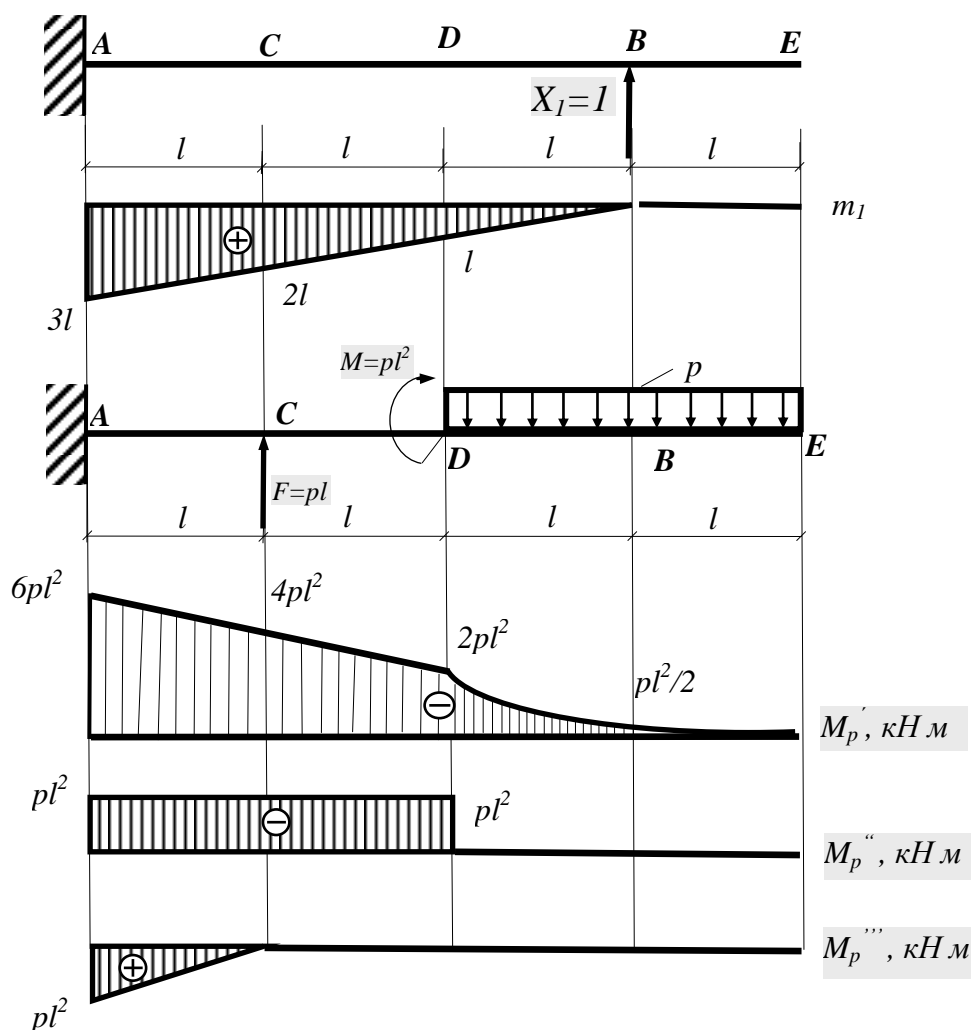


Уравнение совместности деформаций (уравнение метода сил) имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

которое физически выражает условие, что перемещение на правой опоре от заданной нагрузки и реакции X_1 равно нулю.

Для определения перемещений методом Мора строим соответственно единичную и грузовую эпюры.



Где M_p' , M_p'' , M_p''' - соответственно от распределенной нагрузки p (NB! квадратичная парабола и прямая линия стыкуются на эпюре M_p' без перелома), сосредоточенного момента $M = pl^2$ и сосредоточенной силы $F = pl$.

Перемножая эпюры, имеем

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{m_1 m_1}{EI_z} dx = \frac{l}{6EI_z} \left[3l \cdot 3l + 4 \cdot \left(\frac{3l}{2} \right)^2 + 0 \right] = \frac{54l^3}{6EI_z},$$

при вычислении Δ_{1p} учитываем, что $M_p = M_p' + M_p'' + M_p'''$

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} = & \frac{l}{6EI_z} \left[3l(-6pl^2 - pl^2 + pl^2) + 4 \cdot \frac{5}{2} l \left(-5pl^2 - pl^2 + \frac{pl^2}{2} \right) + 2l(-4pl^2 - pl^2 + 0) \right] + \\ & + \frac{l}{6EI_z} \left[2l(-4pl^2 - pl^2 + 0) + 4 \cdot \frac{3}{2} l (-3pl^2 - pl^2 + 0) + l(-2pl^2 - pl^2 + 0) \right] + \\ & + \frac{l}{6EI_z} \left[l(-2pl^2 + 0 + 0) + 4 \cdot \frac{l}{2} \left(-\frac{9}{8} pl^2 + 0 + 0 \right) + 0 \right] = -\frac{497pl^4}{24EI_z}. \end{aligned}$$

Значения в серединах участков интегрирования для грузовой эпюры M_p

участок	AC	$M_p' = -5pl^2$, $M_p'' = -pl^2$, $M_p''' = pl^2/2$
участок	CD	$M_p' = -3pl^2$, $M_p'' = -pl^2$, $M_p''' = 0$
участок	DB	$M_p' = -9pl^2/8$, $M_p'' = 0$, $M_p''' = 0$.

$$\text{Откуда } X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = +\frac{497pl^4 EI_z}{24 \cdot 54l^3 EI_z} = \frac{497}{216} pl.$$

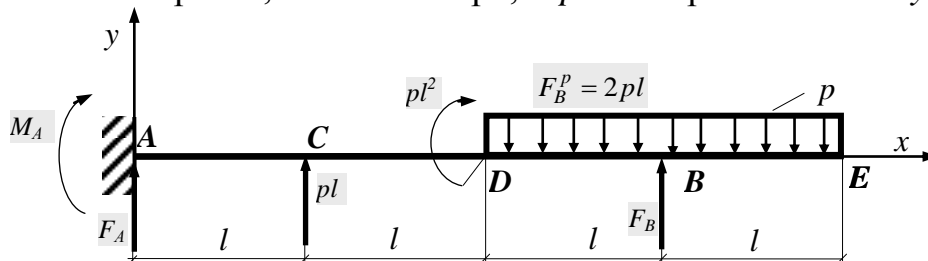
2. Второй способ раскрытия статической неопределенности

Этот способ основан на универсальном уравнении

$$EI_z y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{\sum M(x-a)^2}{2!} + \frac{\sum F(x-b)^3}{3!} + \frac{p(x-c)^4}{4!}$$

положительными приняты:

M – по часовой стрелке, F – вверх, p – вверх и ось y вверх.



Составим два уравнения, одно из которых уравнение равновесия, а другое выражает условие равенства нулю прогиба на опоре B .

$$\sum M_B = 0 \quad -F_A \cdot 3l - M_A - pl \cdot 2l - pl^2 = 0,$$

при $x = 3l$

$$EI_z y(3l) = 0 + 0 + \frac{M_A(3l-0)^2}{2} + \frac{F_A(3l-0)^3}{6} + \frac{pl(3l-l)^3}{6} + \frac{pl^2(3l-2l)^2}{2} - \frac{p(3l-2l)^4}{24} = 0$$

$$\frac{3}{2}l^2 \begin{cases} -F_A 3l - M_A - 3pl^2 = 0 \\ M_A \frac{9l^2}{2} + F_A \frac{27l^3}{26} + \frac{43pl^4}{24} = 0 \end{cases}$$

$$-M_A \left(-\frac{3}{2}l^2 + \frac{9}{2}l^2 \right) - \frac{9}{2}pl^4 - \frac{43pl^4}{24} = 0 \Rightarrow M_A = \frac{65pl^4}{243l^2} = \frac{65pl^2}{72}.$$

Из составленного ранее уравнения равновесия $\sum M_B = 0$ определяем F_A

$$-F_A \cdot 3l - M_A - 3pl^2 = 0 \Rightarrow -F_A \cdot 3l - \frac{65pl^2}{72} - 3pl^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_A = -\frac{pl^2}{3l} \left(3 + \frac{65}{72} \right) = -\frac{281pl}{72 \cdot 3} = -\frac{281pl}{216}.$$

Из уравнения равновесия $\sum F_{ky} = 0$ находим реакцию F_B

$$F_A + pl - 2pl + F_B = 0, \text{ откуда } F_B = pl - F_A = pl + \frac{281pl}{216} = \frac{497pl}{216}.$$

Получили такой же результат, что в предыдущем случае при решении методом сил и с использованием формулы Мора.

Проверка:

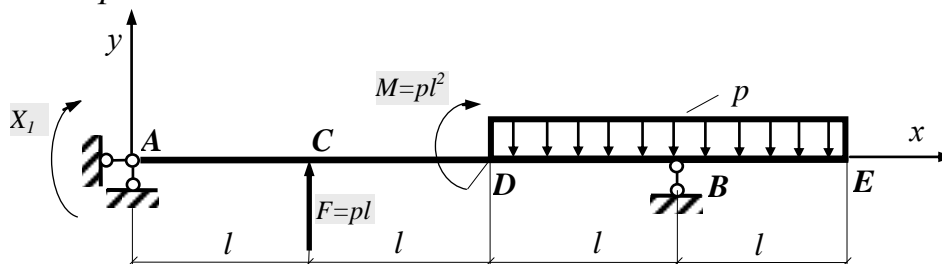
$$\sum M_A = 0 \quad -M_A + pl \cdot l - pl^2 - p \cdot 2l \cdot 3l + F_B \cdot 3l = 0,$$

$$-\frac{65pl^2}{72} + pl^2 - pl^2 - 6pl^2 + \frac{497pl^2 \cdot 3}{216} = 0.$$

Уравнение равновесия обращается в тождество.

3. Построение эпюр Q_y и M_z

3.1 Первый вариант основной системы



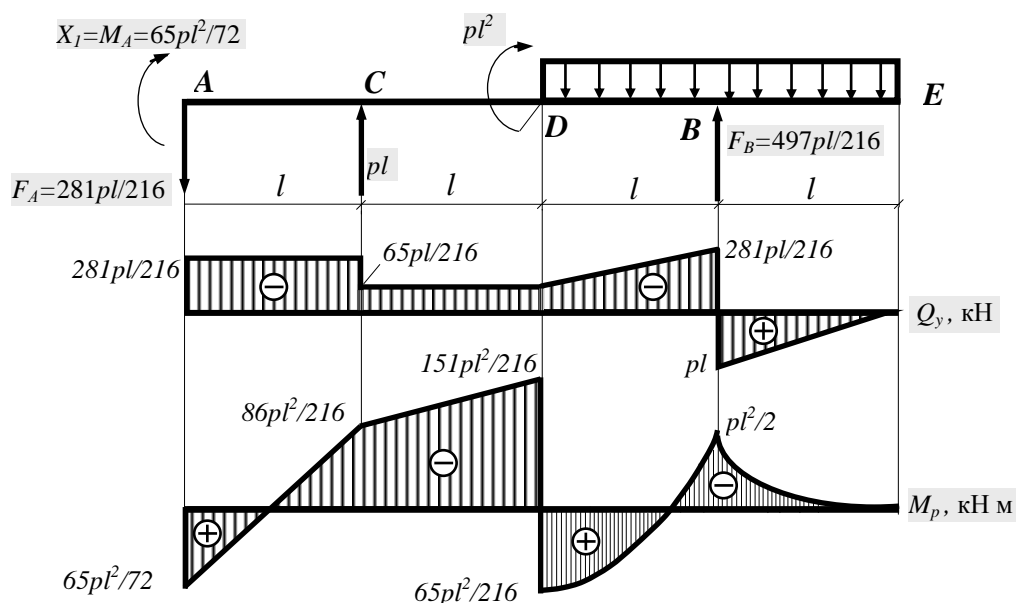
Построение можно сделать двумя способами.

3.1.1 Первый способ

Это классический способ построения эпюр методом сечений.

Реакции $X_1 = M_A = \frac{65pl^2}{72}$, $F_A = -\frac{281pl}{216}$ и $F_B = \frac{497pl}{216}$ найдены.

Теперь строим обычным путем эпюры Q_y и M_z .



ВВ! Вычисление значений изгибающих моментов производится с помощью интегральных зависимостей между M_z и Q_y , т.е. значение момента в конце рассматриваемого участка равно алгебраической сумме значений моментов в начале участка и площади эпюры Q_y на этом участке.

При вычислении слева:

$$M_A = \frac{65pl^2}{72}$$

$$M_C = M_A + \omega(Q_y^{AC}) = \frac{65pl^2}{72} - \frac{281pl \cdot l}{216} = -\frac{86pl^2}{216}$$

$$M_D = M_C + \omega(Q_y^{CD}) = -\frac{86pl^2}{216} - \frac{65pl \cdot l}{216} = -\frac{151pl^2}{216}$$

$$M_{D+} = -\frac{151pl^2}{216} + pl^2 = \frac{65pl^2}{216}$$

$$M_B = M_D + \omega(Q_y^{DB}) = \frac{65pl^2}{216} - \frac{1}{2} \left(\frac{65 + 281}{216} \right) pl^2 = -\frac{108pl^2}{216} = -\frac{1}{2} pl^2.$$

Для проверки вычисляем значение M_B , идя справа

$$M_B = -\frac{1}{2} pl \cdot l = -\frac{1}{2} pl^2.$$

Как видно результаты вычисления M_B справа и слева совпадают.

3.1.2 Второй способ

Этот способ основан на сложении грузовой и уточненной (исправленной) эпюр.

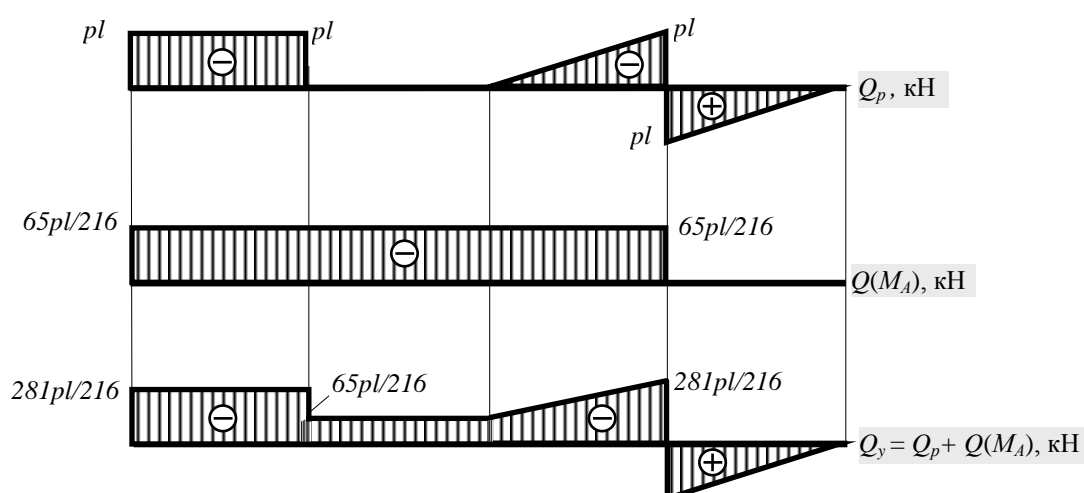
Общие реакции опор

$$F_A = F_A^0 \cdot M_A + F_A^p = -\frac{1}{3l} \cdot \frac{65pl^2}{72} + (-pl) = -\frac{281pl}{216}$$

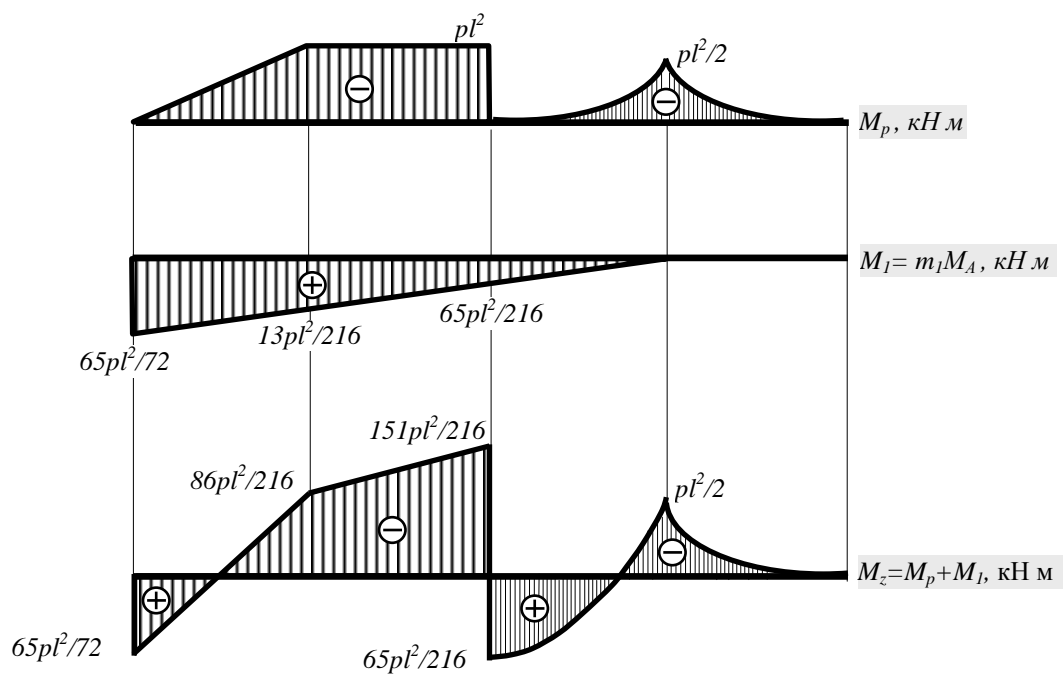
$$F_B = F_B^0 \cdot M_A + F_B^p = \frac{1}{3l} \cdot \frac{65pl^2}{72} + 2pl = \frac{497pl}{216},$$

где F_A^0 и F_B^0 — единичные реакции от единичного момента $M_A=1$, а $F_A^0 M_A$ и $F_B^0 M_A$ — уточненные (исправленные) реакции опор.

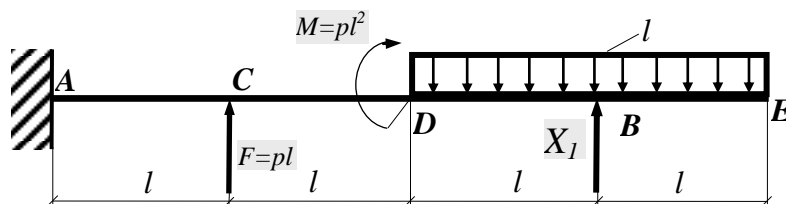
Тогда окончательно эпюра поперечных сил Q_y будет



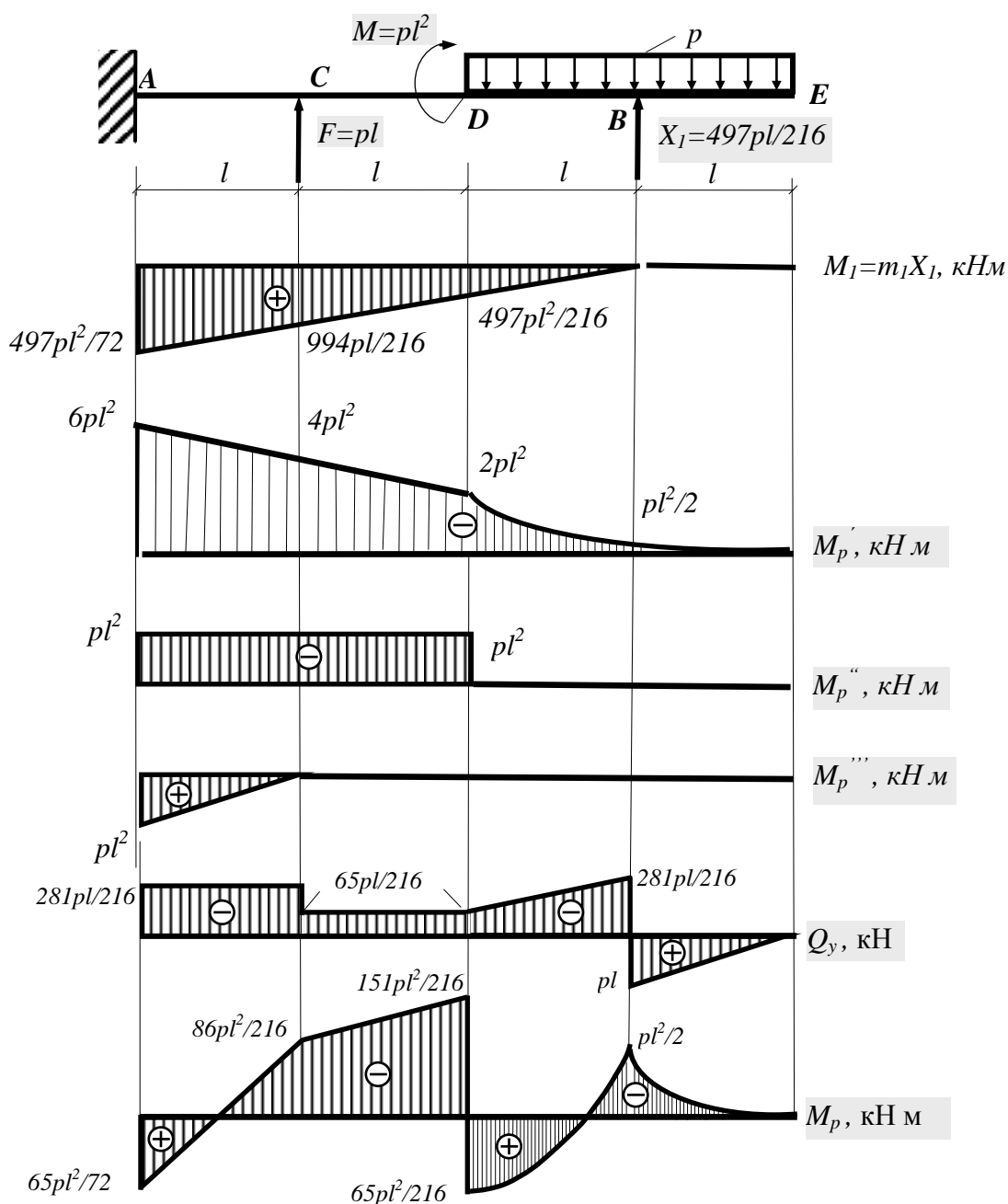
Аналогично получается эпюра изгибающих моментов



3.2 Второй вариант основной системы

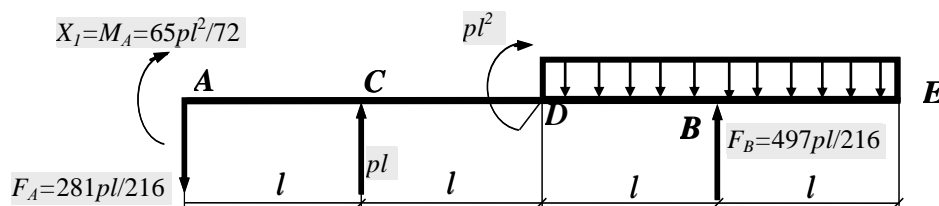


Складывая грузовые эпюры M'_p , M''_p , M'''_p и уточненную эпюру $M_1 = m_1 \cdot X_1$, получим окончательную эпюру M_z . Эпюра поперечных сил Q_y строится как для консоли со свободного правого конца.



4. Контроль результатов решения

4.1 Статическая проверка



Подставив найденные значения реакций в уравнения равновесия, получим тождества.

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 \quad F_A \cdot 3l - M_A - pl \cdot 2l - pl^2 = 0 &\Rightarrow \frac{281pl}{216} \cdot 3l - \frac{65pl^2}{72} - pl \cdot 2l - pl^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow pl^2 \frac{281 - 65 - 2 \cdot 72 - 72}{72} = pl^2 \frac{281 - 281}{72} &\Rightarrow 0 \quad ! \end{aligned}$$

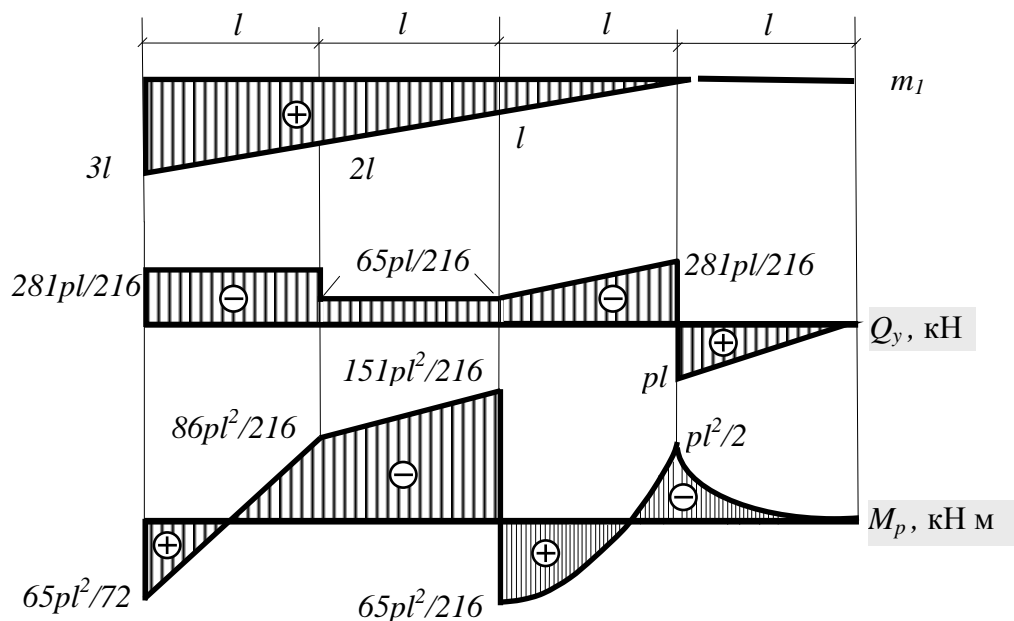
$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \quad -M_A + pl \cdot l - pl^2 - p \cdot 2l \cdot 3l + F_B \cdot 3l = 0 &\Rightarrow -\frac{65pl^2}{72} + pl \cdot l - pl^2 - \\ - p \cdot 2l \cdot 3l + \frac{497pl}{216} \cdot 3l = pl^2 \frac{-65 + 72 - 72 - 72 \cdot 6 + 497}{72} &= pl^2 \frac{432 - 432}{72} \Rightarrow 0! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_{ky} = 0 \quad -F_A + pl - 2pl + F_B = 0 &\Rightarrow -\frac{281pl}{216} + pl - 2pl + \frac{497pl}{216} = \\ = pl \frac{-281 + 216 - 216 \cdot 2 + 497}{216} = pl \frac{-497 + 497}{216} &\Rightarrow 0! \end{aligned}$$

4.2 Кинематическая проверка

Кинематическая проверка заключается в нахождении перемещения на одной из опор, которое должно равняться нулю (угол поворота в жесткой заделке A или вертикальное перемещение в точке B). Например, вертикальное перемещение на опоре B по методу Мора находится путем перемножения единичной эпюры m_1 от единичной силы, приложенной в точке B и окончательной эпюры изгибающих моментов M_z .

$$\begin{aligned} \Delta_B = \sum \int_0^l \frac{m_1 M_z}{EI_z} dx &= \frac{l}{6EI_z} \left(3l \frac{65pl^2}{72} + 4 \frac{5l}{2} \frac{109pl^2}{432} - 2l \frac{86pl^2}{216} \right) - \\ - \frac{l}{6EI_z} \left(2l \frac{86pl^2}{216} + 4 \frac{3l}{2} \frac{237pl^2}{432} + l \frac{151pl^2}{216} \right) &+ \frac{l}{6EI_z} \left(l \frac{65pl^2}{216} + 4 \frac{l}{2} \frac{11pl^2}{432} + 0 \right) = \\ = \frac{l}{6EI_z} \frac{3832pl^2}{2 \cdot 432} - \frac{l}{6EI_z} \frac{4136pl^2}{2 \cdot 432} + \frac{l}{6EI_z} \frac{304pl^2}{2 \cdot 432} &\Rightarrow 0! \end{aligned}$$



Значения в серединах участков интегрирования для эпюры M_z

участок AC $M_z = \frac{1}{2} \left(\frac{65pl^2}{72} - \frac{86pl^2}{216} \right) = \frac{109}{432} pl^2$

участок CD $M_z = \frac{1}{2} \left(\frac{86pl^2}{216} + \frac{151pl^2}{216} \right) = \frac{237}{432} pl^2$

участок DB

$$M_z = M_D + \omega(Q_y^{DB/2}) = \frac{65pl^2}{216} - \frac{1}{2} \left(\frac{65pl + 173pl}{216} \right) \frac{l}{2} = \frac{11pl^2}{432},$$

где $\omega(Q_y^{DB/2})$ - площадь эпюры Q_y на участке $DB/2$, учитывая, что значение

поперечной силы в середине этого участка $Q_y = \frac{1}{2} \left(\frac{65pl + 281pl}{216} \right) = \frac{173pl}{216}$.

5. Определение перемещений

Здесь целесообразнее использовать уравнение метода начальных параметров, учитывая, что $y(0)=0$ и $\varphi(0)=0$.

$$EI_z y(l) = \frac{M_A(l-0)^2}{2} - \frac{F_A(l-0)^3}{6} = \frac{65 pl^2 \cdot l^2}{72 \cdot 2} - \frac{281 pl \cdot l^3}{216 \cdot 6} = \frac{pl^4 \cdot 304}{1296} = 0,234 pl^4$$

$$EI_z y(2l) = \frac{M_A(2l-0)^2}{2} - \frac{F_A(2l-0)^3}{6} + \frac{pl(2l-l)^3}{6} = \frac{65 pl^2 \cdot 4l^2}{72 \cdot 2} - \frac{281 pl \cdot 8l^3}{216 \cdot 6} + \frac{pl^4}{6} =$$

$$\frac{308 pl^4}{1296} = 0,238 pl^4$$

Найдем на участке AC эюры M_z координату x , при которой $M_z=0$

$$\frac{65 pl^2}{72} \cdot \frac{216}{86 pl^2} = \frac{x}{l-x} \Rightarrow \frac{195}{86} = \frac{x}{l-x} \Rightarrow 195l - 195x = 86x \Rightarrow x = \frac{195l}{195+86} = 0,694l.$$

Тогда перемещение в этой точке (в точке перегиба)

$$EI_y(0,694l) = \frac{M_A(0,694l-0)^2}{2} - \frac{F_A(0,694l-0)^3}{6} = \frac{65 pl^2 \cdot 0,694^2 \cdot l^2}{72 \cdot 2} -$$

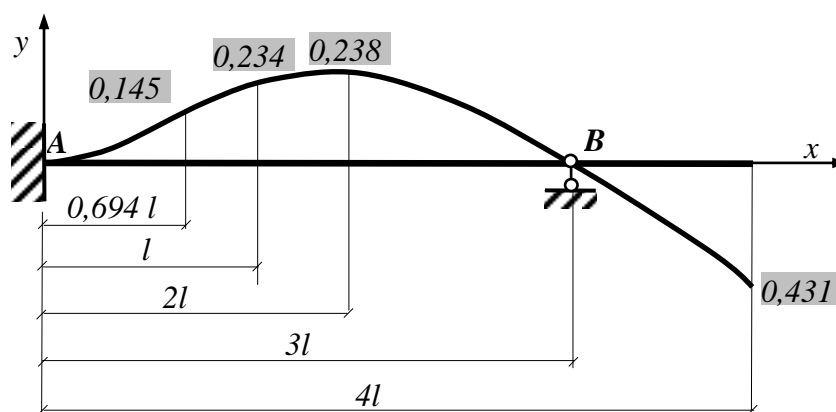
$$- \frac{281 pl \cdot 0,694^3 \cdot l^3}{216 \cdot 6} = 0,145 pl^4$$

$$EI_y(4l) = \frac{M_A(4l-0)^2}{2} - \frac{F_A(4l-0)^3}{6} + \frac{pl(4l-l)^3}{6} + \frac{pl^2(4l-2l)^2}{2} - \frac{p(4l-2l)^4}{24} +$$

$$+ \frac{F_B(4l-3l)^3}{6} = \frac{65 pl^2 \cdot 16l^2}{72 \cdot 2} - \frac{281 pl \cdot 64l^3}{216 \cdot 6} + \frac{pl \cdot 27l^3}{6} + \frac{pl^2 \cdot 4l^2}{2} - \frac{p \cdot 16l^4}{24} +$$

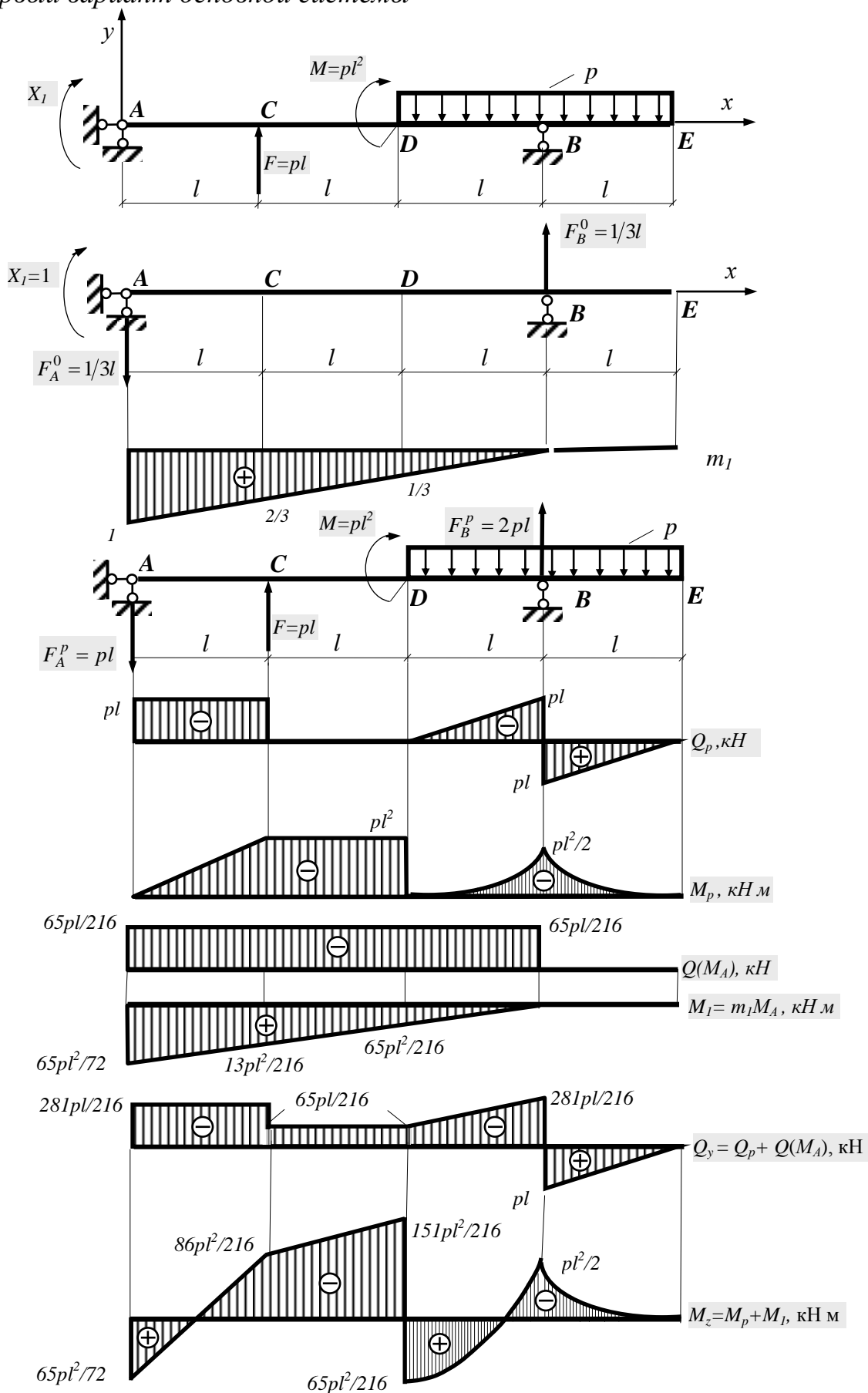
$$+ \frac{497 pl \cdot l^3}{216 \cdot 6} = -0,43 pl^4$$

При построении эюры прогибов надо учесть, что упругая линия обращена выпуклостью вниз там, где изгибающий момент положительный, а выпуклостью вверх там, где он отрицательный. Нулевым точкам эюра M соответствует точки перегиба упругой линии в точке $x = 0,694l$ перегиб упругой линии прогибов оси балки. Значения на эюре прогибов надо умножить на $\frac{pl^4}{EI_z}$.



6. Общая картина всех эпюр, используемых при решении

6.1 Первый вариант основной системы



6.2 Второй вариант основной системы

