

Внецентренное сжатие

Работа 11

Чугунный короткий, поперечное сечение которого изображено ниже (рис.11) сжимается продольной силой F , приложенной в точке A .

Требуется:

- 1) определить главные моменты инерции;
- 2) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через F и размеры сечения;
- 3) найти допускаемую нагрузку F при заданных размерах сечения и допускаемых для чугуна на сжатие $[\sigma_{\text{Surve}}]$ и на растяжение $[\sigma_{\text{Tõmme}}]$;
- 4) Построить ядро сечения. Данные взять из таблицы 11.

Таблица 11

Схема по последней цифре матрикула	Исходные данные по предпоследней цифре матрикула	a	b	$[\sigma_{\text{Surve}}]$	$[\sigma_{\text{Tõmme}}]$
		cm		MPa	
I	1	6	6	110	21
II	2	2	2	120	22
III	3	3	3	130	23
IV	4	4	4	140	24
V	5	5	5	150	25
VI	6	6	6	60	26
VII	7	2	2	70	27
VIII	8	3	3	80	28
IX	9	4	4	90	29
X	0	5	5	100	30

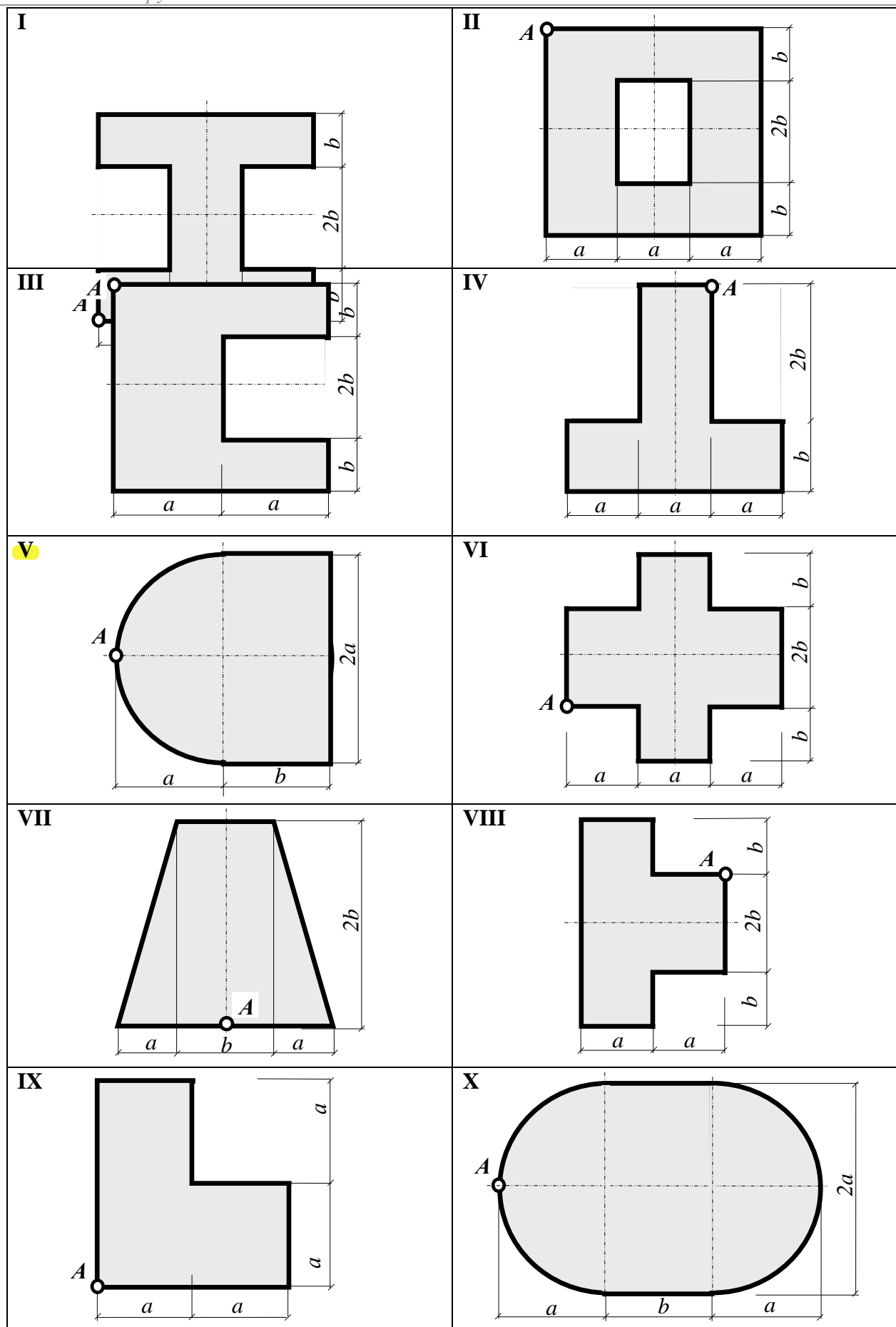


Рис.11

Пример решения:

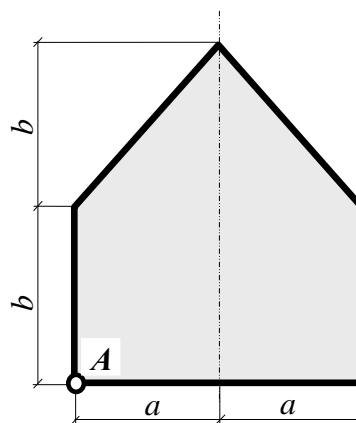
Дано:

$$a = 5 \text{ см}$$

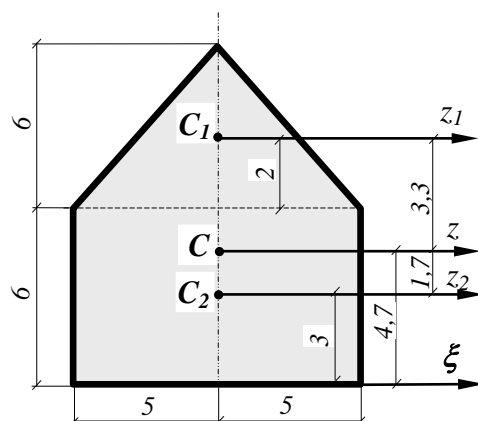
$$b = 6 \text{ см}$$

$$[\sigma_{\text{Surve}}] = 140 \text{ МПа}$$

$$[\sigma_{\text{Tömmе}}] = 25 \text{ МПа}$$

**1) Определяем главные моменты инерции**

а) Находим центр тяжести сечения (размеры в см)



$$\xi_C = 0$$

$$\eta_C = \frac{A_1 \eta_{1C} + A_2 \eta_{2C}}{A_1 + A_2} \quad \eta_C = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot (6 + 2) + 10 \cdot 6 \cdot 3}{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 + 10 \cdot 6} = 4,7 \text{ см}$$

где A_1 - площадь треугольника, A_2 - площадь прямоугольника
 η_{1C} , η_{2C} - их координаты центра тяжести.

б) Главные моменты инерции

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)}$$

$$I_z^{(1)} = I_{z1} + 2,8^2 \cdot A_1 = \frac{10 \cdot 6^3}{36} + 3,3^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 387 \text{ см}^4$$

$$I_z^{(2)} = I_{z2} + 1,7^2 \cdot A_2 = \frac{10 \cdot 6^3}{12} + 1,7^2 \cdot 10 \cdot 6 = 353 \text{ см}^4$$

$$I_z = 387 + 353 = 740 \text{ см}^4$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)}$$

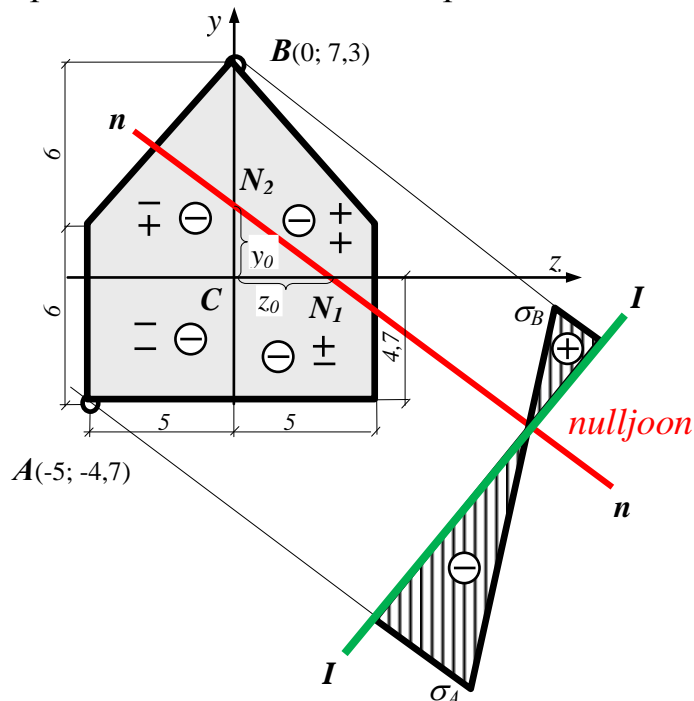
$$I_y^{(1)} = I_{y1} + 0 = \frac{6 \cdot 10^3}{48} + 0 = 125 \text{ cm}^4$$

$$I_y^{(2)} = I_{y2} + 0 = \frac{6 \cdot 10^3}{12} + 0 = 500 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 125 + 500 = 625 \text{ cm}^4$$

2) Напряжения в поперечном сечении.

Находим наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения. Для этого определяем положение нейтральной линии.



От изгиба относительно оси z
 $\sigma_x > 0$ в 1 и 2 четвертях,
а в 3 и 4 $\sigma_x < 0$.

От изгиба относительно оси y
 $\sigma_x > 0$ в 1 и 4 четвертях,
а в 2 и 3 $\sigma_x < 0$,
от продольного сжатия во всех
четвертях $\sigma_x < 0$ (эти знаки в
кругочках).

Напряжения в любой точке сечения

$$\sigma_x = +\frac{F}{A} + \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

где $M_z = F \cdot y_p$ - изгибающий момент относительно оси z , а y_p координата точки приложения осевой силы относительно главной оси.

$M_y = F \cdot z_p$ - изгибающий момент относительно оси y , а z_p координата точки приложения осевой силы относительно главной оси.

Уравнение нейтральной линии получим из условия, что $\sigma_x = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y &= -\frac{F}{A} & \frac{z}{I_y} M_y + \frac{y}{I_z} M_z &= -\frac{F}{A} \\ \frac{z}{I_y} F \cdot z_p + \frac{y}{I_z} F \cdot y_p &= -\frac{F}{A} & \text{делим на } -\frac{F}{A} \\ -\frac{z \cdot F \cdot z_p \cdot A}{I_y \cdot F} - \frac{y \cdot F \cdot y_p \cdot A}{I_z \cdot F} &= 1 \end{aligned}$$

$i_y^2 = \frac{I_y}{A}$ и $i_z^2 = \frac{I_z}{A}$ - радиусы инерции поперечного сечения

обозначим $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p}$; $y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p}$ - отрезки отсекаемые нейтральной линией на

координатных осях z и y и уравнение нейтральной линии

$$\frac{z}{z_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

Учитывая исходные данные имеем

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{625}{90} = 6,94 \text{ см}^2 \quad A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 + 6 \cdot 10 = 90 \text{ см}^2$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{740}{90} = 8,22 \text{ см}^2$$

Тогда $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{6,94}{-5} = 1,39 \text{ см}$ $y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{8,22}{-4,7} = 1,75 \text{ см}$

откладывая на осях z и y соответственно отрезки

$z_0 = 1,39 \text{ см}$ и $y_0 = 1,75 \text{ см}$, получим нейтральную линию.

Проведя касательные к поперечному сечению параллельно нейтральной линии, получим точки A и B , как наиболее удаленные от нейтральной линии.

Наибольшее растягивающее напряжение в точке $B(0; 7,3)$

$$\begin{aligned} \sigma_B^{\max} &= -\frac{F}{A} + \frac{F \cdot |y_p| \cdot |y_B|}{I_z} + \frac{F \cdot |z_p| \cdot |z_B|}{I_y} = -\frac{F}{90} + \frac{F \cdot |-4,7| \cdot |7,3|}{740} + \frac{F \cdot |-5| \cdot 0}{625} = \\ &= F \left(-\frac{1}{90} + \frac{4,7 \cdot 7,3}{740} \right) = 0,035 F \frac{H}{\text{см}^2} = 350 \frac{H}{\text{м}^2} = 350 F \text{ Па} \end{aligned}$$

Наибольшее сжимающее напряжение $A(-5; -4,7)$

$$\begin{aligned} \sigma_A^{\max} &= \left| -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot |y_p| \cdot |y_A|}{I_z} - \frac{F \cdot |z_p| \cdot |z_A|}{I_y} \right| = \left| -\frac{F}{90} - \frac{F \cdot |-4,7| \cdot |-4,7|}{740} - \frac{F \cdot |-5| \cdot |-5|}{625} \right| = \\ &= 0,081 \cdot F \frac{H}{\text{см}^2} = 810 F \frac{H}{\text{м}^2} = 810 F \text{ Па} \end{aligned}$$

3) Находим допускаемую силу из условия прочности

$$[\sigma_{\text{Surve}}] = 140 \text{ МПа}, \quad [\sigma_{\text{Tõmme}}] = 25 \text{ МПа}$$

$$\sigma_A^{\max} = 810[F] \leq [\sigma_c] \quad [F] \leq \frac{[\sigma_{\text{Surve}}]}{810} \leq \frac{140 \cdot 10^6}{810} \leq 172840 \text{ Н} \leq 172,8 \text{ кН}$$

$$\sigma_B^{\max} = 350[F] \leq [\sigma_p] \quad [F] \leq \frac{[\sigma_{\text{Tõmme}}]}{350} \leq \frac{25 \cdot 10^6}{350} \leq 71429 \text{ Н} \leq 71,4 \text{ кН}$$

Принимаем допускаемую силу $[F] \leq 71,4 \text{ кН}$.

4) Построение ядра сечения

Ядром сечения называется область поперечного сечения, очерченная вокруг центра тяжести и характерная тем, что продольная сила, приложенная в этой области, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака. Чтобы построить ядро сечения, необходимо рассмотреть всевозможные положения касательных к контуру сечения и, предполагая, что эти касательные представляют собой нейтральные линии, найти по отношению к главным осям сечения соответствующие координаты граничных точек ядра сечения, а затем по этим точкам очертить само ядро.

Другими словами решаем обратную задачу, находим координаты точки приложения силы F при заданных отрезках, отсекаемых нейтральной линией на осях координат.

Исходя из уравнения нейтральной линии

$$\frac{z}{z_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

где $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p}; \quad y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p}$

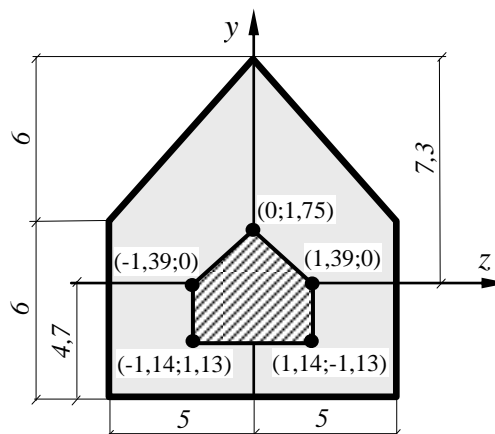
откуда координаты точки приложения силы F , определяются

$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} \quad \text{и} \quad y_p = -\frac{i_z^2}{y_0}.$$

Для данного примера имеем (размеры в см)

$$i_y^2 = 6,94 \text{ см}^2$$

$$i_z^2 = 8,22 \text{ см}^2$$



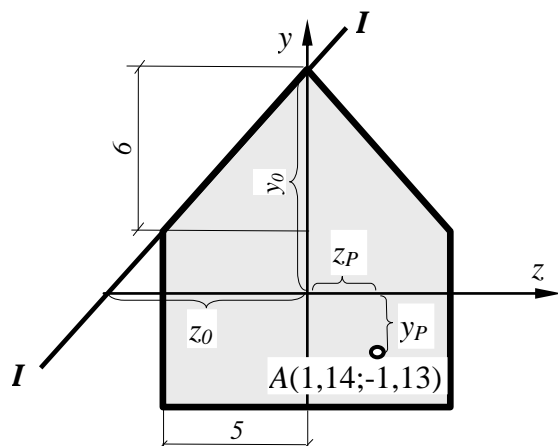
Надо рассмотреть пять положений касательных к контуру сечения

- $y_0 = 7,3 \text{ cm}$ $z_0 = -6,083 \text{ cm}$ где

значение $|z_0|$ найдем из пропорции

$$\frac{|z_0|}{5} = \frac{y_0}{6} \Rightarrow |z_0| = \frac{5 \cdot y_0}{6} = \frac{5 \cdot 7,3}{6} = 6,083 \text{ cm}$$

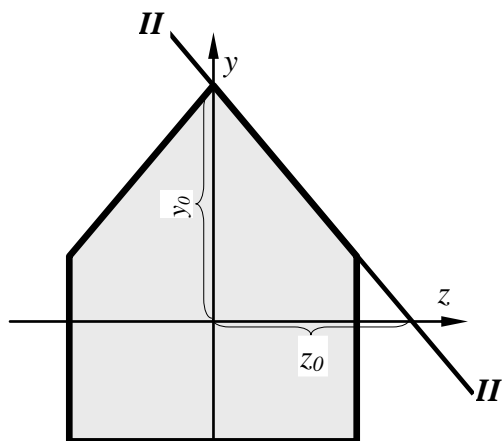
и координата $z_0 = -6,083 \text{ cm}$



$$z_P = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{6,94}{-6,083} = 1,14 \text{ cm}$$

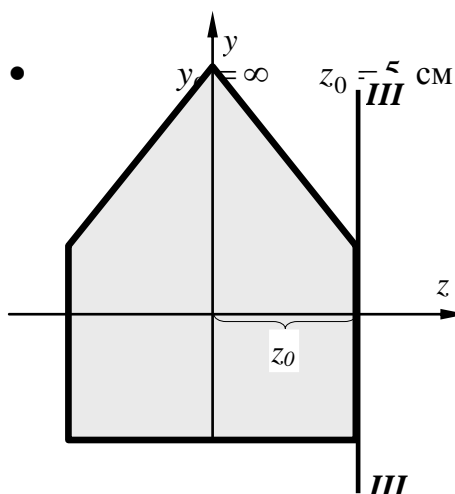
$$y_P = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{8,22}{7,3} = -1,13 \text{ cm}$$

- $y_0 = 7,3 \text{ cm}$ $z_0 = 6,083 \text{ cm}$



$$z_P = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{6,94}{6,083} = -1,14 \text{ cm}$$

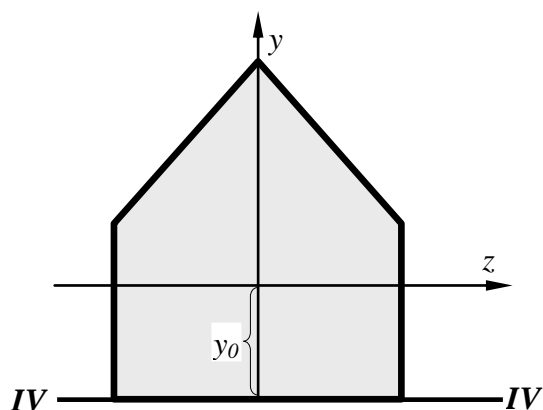
$$y_P = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{8,22}{7,3} = -1,13 \text{ cm}$$



$$z_P = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{6,94}{5} = -1,39 \text{ cm}$$

$$y_P = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{8,22}{\infty} = 0$$

- $y_0 = -4,7 \text{ cm}$ $z_0 = \infty$

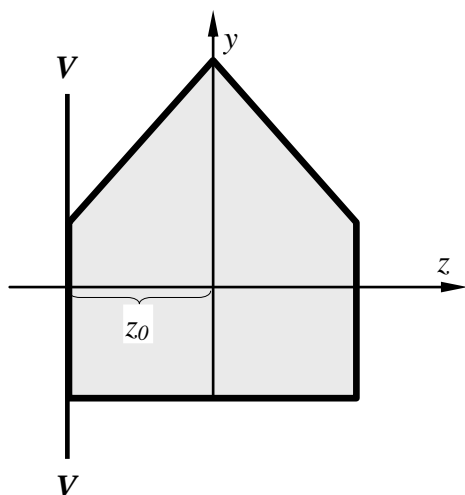


$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{6,94}{\infty} = 0$$

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{8,22}{-4,7} = 1,75 \text{ cm}$$

Ядро сечения имеет очертания пятиугольника, также как и очертание контура поперечного сечения.

- $y_0 = \infty$ $z_0 = -5 \text{ cm}$

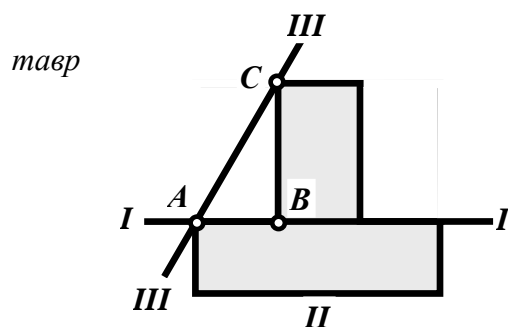


$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{6,94}{-5} = 1,39 \text{ cm}$$

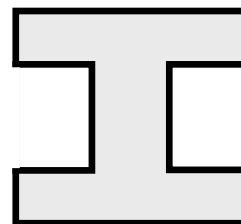
$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{8,22}{\infty} = 0$$

NB! Если поперечное сечение имеет оси симметрии, то и ядро сечения симметрично и можно определять меньшее число его вершин.

В случае, если контур поперечного сечения имеет внутренние углы.



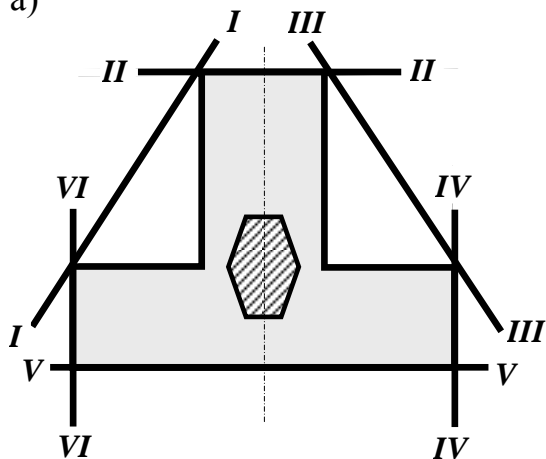
двутавр



то число сторон у ядра сечения не совпадает с числом сторон у самого сечения. Это объясняется тем, что нейтральную линию нельзя совместить с ребром AB и BC , так как в этом случае она не будет касательной к контуру сечения, а будет его пересекать. Поэтому надо проводить нейтральную линию через A и B (**III-III**).

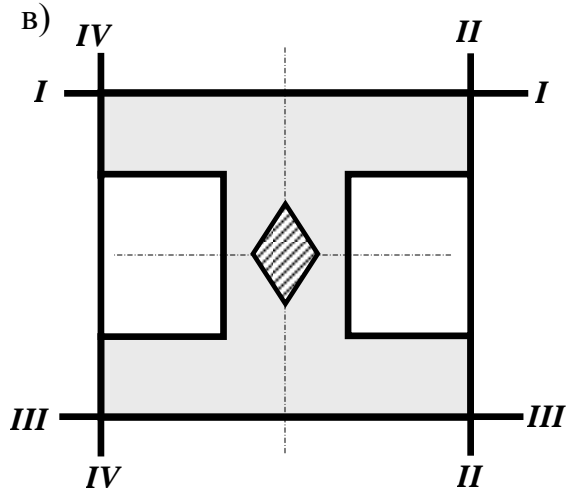
Рекомендации при построении ядра сечения в таких случаях:

а)



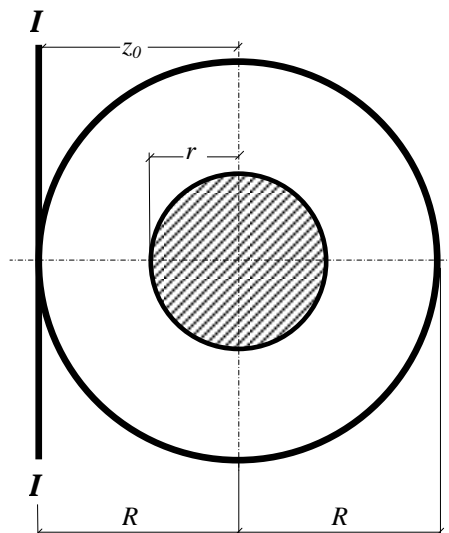
ядро сечения имеет вид шести угольника

б)



ядро сечения имеет вид ромба

с) круг симметричен относительно центра, поэтому достаточно рассмотреть любое положение касательной и ядро сечения будет иметь вид круга с радиусом r .



$$z_0 = -R = -\frac{d}{2}$$

$$r = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{I_y}{A \cdot z_0} = -\frac{\pi \cdot d^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot z_0} = -\frac{d^2}{16 \cdot \left(-\frac{d}{2}\right)} = \frac{d}{8}$$