

Министерство образования и науки Республики Казахстан
 Казахский Национальный технический университет имени К.И. Сатпаева
 Кафедра общей и теоретической физики
 Дисциплина «Вычислительные методы в физике»
 для специальности 6М060400 – «Физика»

Экзаменационный билет № 10

1. 44. В чашку Петри радиуса $R = 5$ см налита вода слоем $h = 1$ мм. В центр чашки пипеткой вводят каплю растворимого в воде вещества в количестве $m = 1$ мг. Первоначальная форма капли – цилиндр радиусом $a = 0.5$ см и высотой, равной толщине слоя воды. Радиально-симметричная (изотропная) диффузия вещества подчиняется уравнению

$$\frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right)$$

с начальным условием

$$u(r, 0) = \begin{cases} \frac{m}{\pi a^2 h}, & |r| \leq a; \\ 0, & |r| > a. \end{cases}$$

Граничные условия – непроницаемость на стенках. Подумайте, как можно избежать сингулярности в центре расчётной области (при $r = 0$). Приняв коэффициент диффузии $k = 5 \times 10^{-2}$ см²/ч, рассчитайте радиальный профиль концентрации вещества спустя сутки (24 ч). Каким будет установившийся профиль концентрации при $t \rightarrow \infty$?

2. 50. Рассмотрите колебания прямоугольной мембраны размером 2×2 см, которые описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(-1, y, t) = 0, & \quad u(1, y, t) = 0, \\ u(x, -1, t) = 0, & \quad u(x, 1, t) = 0 \end{aligned}$$

и начальными условиями

$$u(x, y, 0) = \arctg(\cos(\pi x / 2)), \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 3 \sin(\pi x) \exp(\sin(\pi y / 2)).$$

Постройте профиль мембраны в сечении $y = 0.5$ при $t = 5$.



Заведующий кафедрой:

[Handwritten signature]

Х.Р. Майлина

Составил:

[Handwritten signature]

А.Т. Мустафин

Протокол № 2 от 29 сентября 2014 г.