

Задача 1. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

путём проведения элементарных преобразований.

Решение:

Напоминание: для вычисления ранга матрицы можно использовать элементарные преобразования как над строчками, так и над столбцами матрицы в силу того, что ранг матрицы совпадает с рангом транспонированной матрицы (строчный ранг матрицы равен столбцовому).

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

- (a) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
- (b) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \rightarrow rR_i$),
- (c) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \rightarrow R_i - rR_j$),

От элементарных преобразований над строками ранг не меняется. Ввиду того, что ранг матрицы совпадает с рангом транспонированной матрицы (строчный ранг матрицы равен столбцовому), те же самые операции с тем же эффектом можно производить и над столбцами (тогда в обозначении производимой операции буква R заменяется на букву C).

Цель заключается в приведении матрицы к трапециевидной форме. В трапециевидной форме ранг матрицы равен числу ненулевых строчек. Поскольку при элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется, то мы легко получаем ранг первоначальной матрицы.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -11 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_2} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ответ: ранг матрицы равен 4.

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.