Задача 1. *Решить систему линейных уравнений :*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Решение:

Если систему уравнений записать в виде

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

и определитель квадратной матрицы A, Δ, не равен нулю, то значение переменной x_i можно найти как $\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i – определитель матрицы, полученной из A путём замены i-го столбца на столбец из правой части (из чисел b_1, …, b_n). Это называется формулами Крамера.

Обозначим матрицу системы через

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из чисел справа от знака равенства получаются

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Напоминание: для вычисления определителя квадратной матрицы можно использовать элементарные преобразования как над строчками, так и над столбцами матрицы в силу того, что определитель матрицы совпадает с определителем транспонированной матрицы.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

(a) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$) (при данном преобразовании определитель матрицы умножается на -1),
(b) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \to rR_i$) (при данном преобразовании определитель матрицы умножается на r),
(c) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$) (при данном преобразовании определитель матрицы не меняется).

Ввиду того, что определитель матрицы совпадает с определителем транспонированной матрицы, те же самые операции с тем же эффектом можно производить и над столбцами (тогда в обозначении производимой операции буква R заменяется на букву C).

Цель заключается в приведении матрицы к верхнетреугольному или нижнетреугольному виду, определитель которой есть произведение диагональных элементов, а каков определитель первоначальной матрицы можно определить, следя за ходом проведённых операций.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3 \to R_3 - 3R_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -8 & -10 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times\frac{-1}{2}]{R_3\to -R_3/2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4\to R_4-4R_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times\frac{-1}{5}]{R_4\to -R_4/5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3\to R_3-2R_4}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times(-1)]{R_2\leftrightarrow R_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4\to R_4+3R_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times(-1)]{R_3\leftrightarrow R_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Определитель треугольной матрицы (т.е. такой, у которой либо под, либо над главной диагональю все элементы равны 0) равен произведению диагональных элементов.

Поскольку получившейся матрицы определитель равен -2 , и при проведении операций определитель первоначальной матрицы умножился на $1/10$, то определитель первоначальной матрицы равен -20. Матрица

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times(-1)]{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_2\to R_2-R_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3\to R_3-5R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & -2 & -6 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times\frac{-1}{2}]{R_3\to -R_3/2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4\to R_4+5R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 13 & 7 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3\to R_3+4R_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 13 & 7 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4\to R_4+13R_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 20 & 37 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4\to R_4-4R_3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

Поскольку получившейся матрицы определитель равен 35 , и при проведении операций определитель первоначальной матрицы умножился на $1/2$, то определитель первоначальной матрицы равен 70. Таким образом

$$x_1 = \frac{70}{-20} = -7/2.$$

Матрица

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3 \to R_3 - 3R_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -4 & -4 \\ 0 & -14 & -8 & -10 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times\frac{-1}{2}]{R_3 \to -R_3/2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -4 & -4 \\ 0 & 7 & 4 & 5 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4 \to R_4 - 4R_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -4 & -4 \\ 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & -25 & -10 & -15 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times\frac{-1}{5}]{R_4 \to -R_4/5} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -4 & -4 \\ 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_2 \to R_2 + R_4}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4 \to R_4 + R_2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times(-1)]{R_2 \leftrightarrow R_4}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3 \to R_3 - 7R_2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4 \to R_4 + 4R_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times(-1)]{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4 \to R_4 + 2R_3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Поскольку получившейся матрицы определитель равен -10 , и при проведении операций определитель первоначальной матрицы умножился на $1/10$, то определитель первоначальной матрицы равен -100. Таким образом

$$x_2 = \frac{-100}{-20} = 5.$$

Матрица

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\begin{vmatrix}1&2&5&4\\2&1&1&4\\3&2&1&2\\4&3&-5&1\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{vmatrix}1&2&5&4\\0&-3&-9&-4\\3&2&1&2\\4&3&-5&1\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3\to R_3-3R_1}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&5&4\\0&-3&-9&-4\\0&-4&-14&-10\\4&3&-5&1\end{vmatrix}\xrightarrow[\det\times\frac{-1}{2}]{R_3\to -R_3/2}\begin{vmatrix}1&2&5&4\\0&-3&-9&-4\\0&2&7&5\\4&3&-5&1\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4\to R_4-4R_1}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&5&4\\0&-3&-9&-4\\0&2&7&5\\0&-5&-25&-15\end{vmatrix}\xrightarrow[\det\times\frac{-1}{5}]{R_4\to -R_4/5}\begin{vmatrix}1&2&5&4\\0&-3&-9&-4\\0&2&7&5\\0&1&5&3\end{vmatrix}\xrightarrow[\det\times(-1)]{R_2\leftrightarrow R_4}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&5&4\\0&1&5&3\\0&2&7&5\\0&-3&-9&-4\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3\to R_3-2R_2}\begin{vmatrix}1&2&5&4\\0&1&5&3\\0&0&-3&-1\\0&-3&-9&-4\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4\to R_4+3R_2}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&5&4\\0&1&5&3\\0&0&-3&-1\\0&0&6&5\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4\to R_4+2R_3}\begin{vmatrix}1&2&5&4\\0&1&5&3\\0&0&-3&-1\\0&0&0&3\end{vmatrix}$$

Поскольку получившейся матрицы определитель равен -9 , и при проведении операций определитель первоначальной матрицы умножился на $-1/10$, то определитель первоначальной матрицы равен 90. Таким образом

$$x_3=\frac{90}{-20}=-9/2.$$

Матрица

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&2&3&5\\2&1&2&1\\3&2&1&1\\4&3&2&-5\end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\begin{vmatrix}1&2&3&5\\2&1&2&1\\3&2&1&1\\4&3&2&-5\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{vmatrix}1&2&3&5\\0&-3&-4&-9\\3&2&1&1\\4&3&2&-5\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3\to R_3-3R_1}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3&5\\0&-3&-4&-9\\0&-4&-8&-14\\4&3&2&-5\end{vmatrix}\xrightarrow[\det\times\frac{-1}{2}]{R_3\to -R_3/2}\begin{vmatrix}1&2&3&5\\0&-3&-4&-9\\0&2&4&7\\4&3&2&-5\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4\to R_4-4R_1}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3&5\\0&-3&-4&-9\\0&2&4&7\\0&-5&-10&-25\end{vmatrix}\xrightarrow[\det\times\frac{-1}{5}]{R_4\to -R_4/5}\begin{vmatrix}1&2&3&5\\0&-3&-4&-9\\0&2&4&7\\0&1&2&5\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3\to R_3-2R_4}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3&5\\0&-3&-4&-9\\0&0&0&-3\\0&1&2&5\end{vmatrix}\xrightarrow[\det\times(-1)]{R_2\leftrightarrow R_4}\begin{vmatrix}1&2&3&5\\0&1&2&5\\0&0&0&-3\\0&-3&-4&-9\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4\to R_4+3R_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times(-1)]{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Поскольку получившейся матрицы определитель равен -6 , и при проведении операций определитель первоначальной матрицы умножился на $1/10$, то определитель первоначальной матрицы равен -60. Таким образом

$$x_4 = \frac{-60}{-20} = 3.$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{2} \\ 5 \\ -9/2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.