

Задача 1. Решить систему линейных уравнений :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x - 2y + 4z = 4 \\ 3x - 3y + 6z = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение: Расширенной матрицей этой системы уравнений является

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \end{array} \right).$$

Напоминание: для нахождения решения системы линейных уравнений с данной расширенной матрицей последнюю следует подвергать элементарным преобразованиям над строками. При этом множества решений систем уравнений, соответствующих матрице до применения элементарного преобразования и после - совпадают.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

- (а) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
- (б) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \rightarrow rR_i$),
- (в) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \rightarrow R_i - rR_j$),

Цель заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапецевидной форме, причём так, чтобы в каждой строчке первым ненулевым элементом была единица, и все элементы матрицы над этой единицей были нулями. Из такой приведённой трапецевидной формы расширенной матрицы системы легко получается её решение.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Система линейных уравнений со строчкой в расширенной матрице с единственным ненулевым элементом на конце - несовместна. В этом суть теоремы Кронекера-Капелли.

Ответ: система несовместна (решений нет).

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.